Агзамов Вариант 11.

Задача: Численно решить задачу Коши:

$$y' = 50y(x-0{,}6)(x-0{,}85) = f(x,y)$$

$$y(0) = 0{,}1$$

след. методами: 1) метод Эйлера;
2) метод Коши;
3) метод Тейлора IV порядка.

1) Найдём точное решение задачи Коши:

$$\frac{dy}{dx} = 50y(x-0{,}6)(x-0{,}85) \Rightarrow \frac{dy}{y} = 50(x-0{,}6)(x-0{,}85)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \int 50(x-0{,}6)(x-0{,}85)\,dx = 50\int(x^2 - 1{,}45x + 0{,}51)\,dx =$$

$$= 50\left(\frac{x^3}{3} - 1{,}45\frac{x^2}{2} + 0{,}51x\right) + C = \frac{50}{3}x^3 - \frac{145}{4}x^2 + \frac{51}{2}x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = e^{\frac{50}{3}x^3 - \frac{145}{4}x^2 + \frac{51}{2}x}\cdot C$$

т.к. $y(0) = 0{,}1 \Rightarrow$ Точное решение: $y = 0{,}1\cdot e^{\frac{50}{3}x^3 - \frac{145}{4}x^2 + \frac{51}{2}x}$

2) Исследуем методы:

- Явный метод Эйлера: $y_{n+1} = y_n + h\cdot f(x_n, y_n)$
- Метод Коши: $y_{n+1} = y_n + h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$
- Метод Тейлора IV п.: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n) + \frac{h^2}{2} f'_x(x_n,y_n) + \frac{h^3}{3!} f''_{xx}(x_n,y_n) + \frac{h^4}{4!} f'''_{xxx}(x_n,y_n)$

I. Порядок точности

- явный метод Эйлера $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ $\quad f(x_n,y_n) = y'_n$

$i=0$: $y = (x-x_n)^0 \Rightarrow 1 = 1 + h\cdot 0$ – верно

$i=1$: $y = x - x_n$, $f(x_n,y_n) = 1 \Rightarrow h = 0 + h$ – верно

$i=2$: $y = (x-x_n)^2$, $f(x_n,y_n) = 2(x-x_n) \Rightarrow h^2 = 0 + h\cdot 2\cdot 0$ – неверно

$\Rightarrow$ порядок точности $= 1$

- Метод Коши $y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$

$i=0$: $y = 1 \Rightarrow 1 = 1 + h\cdot 0$ – верно

$i=1$: $y = x - x_n$, $h = 0 + h\cdot 1$ – верно

$i=2$: $y = (x-x_n)^2$, $h^2 = 0 + h\cdot h$ – верно

$y' = 2(x-x_n)$

$$f(\underbrace{x_n + \tfrac{h}{2}}_{\bar{x}_n}, \underbrace{y_n + \tfrac{h}{2} f(x_n, y_n)}_{\bar{y}_n}) = y'\Big|_{(\bar{x}_n, \bar{y}_n)} = 2(\bar{x}_n - x_n) =$$

$$= 2(x_n + \frac{h}{2} - x_n) = h$$

$i=3$: $y=(x-x_n)^3 \Rightarrow h^3 = 0 + h\cdot\frac{3}{2}h$ — неверно

$y' = 3(x-x_n)^2$ —

$f(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = y'\big|_{(\bar{x}_n,\bar{y}_n)} = 3(\bar{x}_n - x_n)^2 = 3\left(x_n + \frac{h}{2} - x_n\right) =$

$= \frac{3}{2}h$

$\Rightarrow$ порядок точности $= 2$

• Метод Тейлора IV порядка

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}f'(x_n,y_n) + \frac{h^3}{6}f''(x_n,y_n) + \frac{h^4}{24}f'''(x_n,y_n)$$

$i=0$: $y=1$ $\quad 1 = 1 + h\cdot 0$ — верно

$f(x,y)=0$

$i=1$: $y = x - x_n$: $\quad h = 0 + h\cdot 1$ — верно

$i=2$ $y=(x-x_n)^2$: $\quad h^2 = 0 + h\cdot 0 + \frac{h^2}{2}\cdot 2$ — верно

$f = 2(x-x_n)$

$f' = 2$

$i=3$: $y=(x-x_n)^3$: $\quad h^3 = 0 + h\cdot 0 + \frac{h^2}{2}\cdot 0 + \frac{h^3}{\cancel{6}}\cancel{6} + \frac{h^4}{24}\cdot 0$ — верно

$f = 3(x-x_n)^2$, $f' = 6(x-x_n)$

$f''=6$, $f'''=0$

$i=4$: $y=(x-x_n)^4$: $\quad h^4 = 0 + h\cdot 0 + \frac{h^2}{2}\cdot 0 + \frac{h^3}{3!}\cdot 0 + \frac{h^4}{\cancel{24}}\cdot\cancel{24}$

верно

$f = 4(x-x_n)^3$

$f' = 12(x-x_n)^2$

$f'' = 24(x-x_n)$

$f''' = 24$

$i=5$: $y=(x-x_n)^5$ $\quad h^5 = 0 + h\cdot 0 + \frac{h^2}{2}\cdot 0 + \frac{h^3}{6}\cdot 0 + \frac{h^4}{4!}\cdot 0$

неверно

$f = 5(x-x_n)^4$

$f' = 20(x-x_n)^3$

$f'' = 60(x-x_n)^2$

$f''' = 120(x-x_n)$

$\Rightarrow$ порядок точности $= 4$

II. 0-устойчивость и A-устойчивость

1) Метод Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

- Метод Эйлера сходится с первым порядком
- метод 0-устойчив

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow 0\text{-уст}$$

- метод не A-устойчив

Д-во: рассм. тест. ур-е $y' = \lambda y$

$$y_{k+1} = y_k + \lambda h y_k = y_k(1+\lambda h)$$

хар ур: $\rho^{k+1} = \rho^k (1+\lambda h)$

$$\rho = 1 + \lambda h$$

$$|1+\lambda h| \le 1$$

$$D = \{\lambda h : |1+\lambda h| \le 1\} \not\supseteq П_{левая} \Rightarrow \text{метод не A-уст.}$$

где $П_{левая} = \{x \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} x \le 0\}$

2) Метод Коши

$$y_{k+1} = y_k + h f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right)$$

- сходится со вторым порядком
- 0-устойчив (проверка как для предыдущего метода)
- не A-устойчив

Д-во: применим метод к тест. ур-ю $y' = \lambda y$

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda\left(y_k + \frac{h}{2}\lambda y_k\right) = y_k\left(\frac{(\lambda h)^2}{2} + (\lambda h) + 1\right)$$

$$\rho = \frac{(\lambda h)^2}{2} + (\lambda h) + 1, \quad \text{пусть } z = \lambda h$$

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z^2}{2} + z + 1\right| < 1 \right\}$$

$$П_{лев} \overset{?}{\subseteq} D$$

Возьмем $\underbrace{z_0 \in П_{лев} : z_0 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$ и докажем, что $z \notin D$

$$v(z) = \left|\frac{z^2}{2} + z + 1\right| = \left|\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\frac{z}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2} + 2 - 1\right| = \left|\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + 2\right)^2 - 1\right| =$$

$$= \left|\frac{z}{\sqrt{2}} + 1\right| \left|\frac{z}{\sqrt{2}} + 3\right|$$

$$\left|\frac{z_0}{\sqrt{2}} + 1\right| = \left|\frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 1\right| = |i| = 1$$

$$\left|\frac{z_0}{\sqrt{2}} + 3\right| = \left|\frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 3\right| = |2 + i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$v(z_0) = \left|\frac{z_0}{\sqrt{2}} + 1\right|\left|\frac{z_0}{\sqrt{2}} + 3\right| = \sqrt{5} \not< 1 \Rightarrow \text{метод не A-устойчив}$$

) Метод Тейлора IV порядка

- сх. с 4 порядком
- 0-устойчив
- А-устойчив ?

$y' = \lambda y = f(x,y)$ — тест. ур-е

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k + \frac{h^2}{2}\cdot\lambda^2 y_k + \frac{h^3}{6}\lambda^3 y_k + \frac{h^4}{24}\cdot\lambda^4 y_k$$

$$f' = \lambda y' = \lambda f = \lambda\cdot\lambda\cdot y = \lambda^2 y$$
$$f'' = \lambda\cdot y'' = \lambda(y')' = \lambda f' = \lambda\cdot\lambda^2\cdot y = \lambda^3 y$$
$$f''' = \lambda y''' = \lambda(y')'' = \lambda f'' = \lambda\cdot\lambda^3 y = \lambda^4 y$$

$$\rho^{k+1} = \rho^k\left(1 + (\lambda h) + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24}\right)$$

$$\rho = 1 + (\lambda h) + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{6} + \frac{(\lambda h)^4}{24}$$

пусть $z = \lambda h$

$$D = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}\right| < 1\right\}$$

$$\Pi_{лев} \overset{?}{\subseteq} D$$

Если да, то метод А-устойчив (по определению)

$$y' = f(x,y) = 50y(x-0{,}6)(x-0{,}85)$$

$$\frac{d}{dx}f(x,y) = 50\Big(f(x,y)(x-0{,}6)(x-0{,}85) + y(2x-1{,}45)\Big)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y) = 50\left(\frac{d}{dx}f(x,y)(x-0{,}6)(x-0{,}85) + 2f(x,y)(2x-1{,}45) + 2y\right)$$

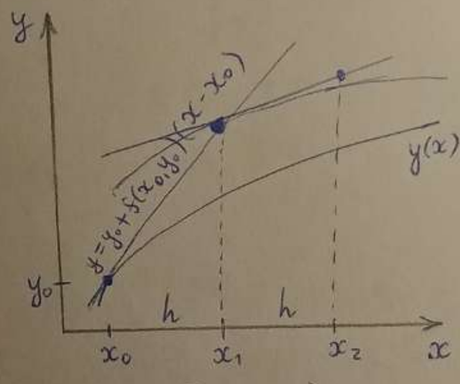
$$\frac{d^3}{dx^3}f(x,y) = 50\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x,y)(x-0{,}6)(x-0{,}85) + \frac{d}{dx}f(x,y)(2x-1{,}45) + 2\frac{d}{dx}f(x,y)(2x-1{,}45) + 2\cdot 2\cdot f(x,y) + 2f(x,y)\right) =$$

$$= 50\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x,y)(x-0{,}6)(x-0{,}85) + 3\frac{d}{dx}f(x,y)(2x-1{,}45) + 6\cdot f(x,y)\right)$$

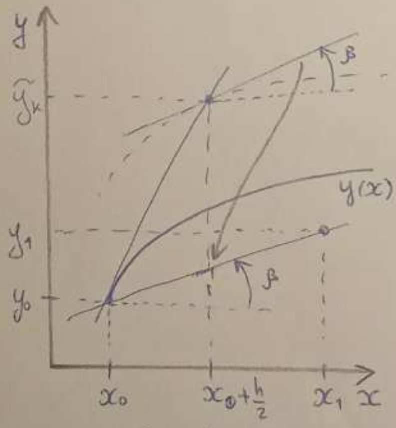
Методы по быстроте сходимости ранжируются следующим образом:

1. Метод Тейлора IV порядка;
2. Метод Коши;
3. Метод Эйлера (явный).

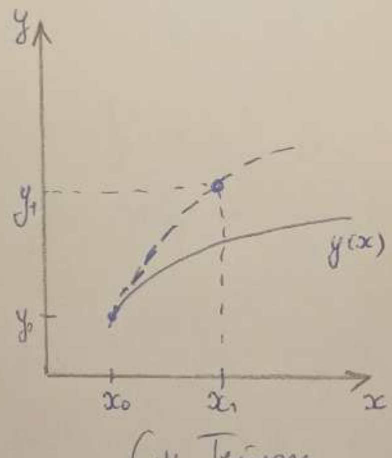
Это можно объяснить обратившись к геометрической интерпретации методов.



(м. Эйлера)



(м. Коши)



(м. Тейлора IV п.)

В методе Эйлера на каждом шаге двигаемся из т. (x_k, y_k) по касательной до пересечения с $x = x_{k+1}$ ~~и т.д.~~

В методе Коши на каждом шаге перех. уже не по кас. точек (x_k, y_k), а по касательной из т. $(x_k + \frac{h}{2}, \tilde{y}_k)$

В методе Тейлора уже не по лин. касательной движемся, а по „касательному полиному“