习题课10-级数

May 19, 2017

一. 选择题

1. 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和$S_n = \dfrac{2n}{n+1}$，则$u_n =$

(A) $\dfrac{2}{n(n+1)}$ (B) $\dfrac{1}{n(n+1)}$

(C) $\dfrac{2}{(n+1)}$ (D) 0

一. 选择题

1. 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和$S_n = \dfrac{2n}{n+1}$，则$u_n =$

(A) $\dfrac{2}{n(n+1)}$ (B) $\dfrac{1}{n(n+1)}$

(C) $\dfrac{2}{(n+1)}$ (D) 0

2. 已知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = 2, \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = 5$, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n =$

(A) 3 (B) 7 (C) 8 (D) 9

3. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则下列结论正确的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$收敛　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + 0.00001)$发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n+100000}$发散　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$发散

4. 下列结论正确的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$必收敛

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，且$u_n \geq v_n$时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$必收敛

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$必收敛

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$必收敛

5. 设$k > 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$

(A) 发散　　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　(D) 敛散性与k有关

5. 设$k>0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$

(A) 发散　　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　(D) 敛散性与k有关

6. 设a为常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin na}{n^2})-\frac{1}{\sqrt{n}}$

(A) 发散　(B) 绝对收敛　(C) 条件收敛　(D) 敛散性与a有关

5. 设$k>0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$

(A) 发散 (B) 绝对收敛

(C) 条件收敛 (D) 敛散性与k有关

6. 设a为常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin na}{n^2})-\frac{1}{\sqrt{n}}$

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性与a有关

7. 设$a>0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{a}{n})$

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性与a有关

8. 设$\lambda > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性与λ有关

8. 设$\lambda > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性与λ有关

9. 设$u_n = (-1)^n \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，则

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$都收敛 (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$都发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$发散 (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛

10. 设$u_n \neq 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_{n+1}})$为

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性不能判定

10. 设$u_n \neq 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}})$为

(A) 发散　(B) 绝对收敛　(C) 条件收敛　(D) 敛散性不能判定

11. 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数，且$f''(x)>0$，令$u_n=f(n), n=1,2,,\cdots$，则下列结论正确的是

(A) 若$u_1>u_2$, 则$\{u_n\}$必收敛　　(B) 若$u_1>u_2$, 则$\{u_n\}$必发散

(C) 若$u_1<u_2$, 则$\{u_n\}$必收敛　　(D) 若$u_1<u_2$, 则$\{u_n\}$必发散

10. 设$u_n \neq 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_{n+1}})$为

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性不能判定

11. 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数，且$f''(x) > 0$，令$u_n = f(n), n = 1, 2, , \cdots$，则下列结论正确的是

(A) 若$u_1 > u_2$, 则$\{u_n\}$必收敛 (B) 若$u_1 > u_2$, 则$\{u_n\}$必发散

(C) 若$u_1 < u_2$, 则$\{u_n\}$必收敛 (D) 若$u_1 < u_2$, 则$\{u_n\}$必发散

12. 设m, n为正整数，则反常积分$\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$的敛散性

(A) 仅与m取值有关 (B) 仅与n取值有关

(C) 与m，n取值有关 (D) 与m，n取值都无关

13. 设有两个数列$\{a_n\}, \{b_n\}$，若$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，则

(A) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛

(B) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$发散

(C) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$收敛

(D) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$发散

14. 反常积分 (a) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$, (b) $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$的敛散性为

(A) (a) 收敛，(b) 收敛　　(B) (a) 收敛，(b) 发散

(C) (a) 发散，(b) 收敛　　(D) (a) 发散，(b) 发散

二. 判断敛散性

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((-1)^n+3)^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n-6^n}{6^n-5^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!},\ a>0,\ a\neq e$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\cos^2\frac{n\pi}{3}}{3^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2 n}{n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + a^2})$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+x)\cdots(1+x^n)}$, $x \geq 0$

三. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$绝对收敛，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$绝对收敛

三. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$绝对收敛，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$绝对收敛

四. 设$\{a_n\}$为正数列，数列$\{b_n\}$满足：$b_1 = 1$，$b_{n+1} = b_n + \dfrac{a_n}{b_n}$，$(n = 1, 2, \ldots,)$，试证：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则数列$\{b_n\}$也收敛

三. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$绝对收敛，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$绝对收敛

四. 设$\{a_n\}$为正数列，数列$\{b_n\}$满足：$b_1 = 1$，$b_{n+1} = b_n + \dfrac{a_n}{b_n}$, $(n = 1, 2, \ldots,)$，试证：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则数列$\{b_n\}$也收敛

五. 设$f(x)$在$|x| \leq 1$上有定义，在$x = 0$的某邻域内有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$绝对收敛

六. 设$a_1 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{1}{a_n})$ $(n = 1, 2, \cdots)$，证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在

（2）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$收敛

六. 设$a_1=0$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在

（2）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1)$收敛

七. 设$a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$,

(1) 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$

(2) 试证：对任意的常数$\lambda>0$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^{\lambda}}$收敛

八. 设数列$\{a_n\}, \{b_n\}$满足$0 < a_n < \dfrac{\pi}{2}$,

$0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}$，$\cos a_n - a_n = \cos b_n$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

(2) 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$收敛

八. 设数列$\{a_n\}, \{b_n\}$满足$0 < a_n < \dfrac{\pi}{2}$,

$0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}$，$\cos a_n - a_n = \cos b_n$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛

(1) 证明：$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

(2) 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$收敛

九. 已知函数$f(x)$可导，且$f(0) = 1$，$0 < f'(x) < \frac{1}{2}$，设数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1} = f(x_n)$ （$n = 1, 2, \cdots$）证明：

(1) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$绝对收敛

(2) $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ 存在，且 $0 < \lim\limits_{n \to +\infty} x_n < 2$

历年试题

1. (03期末) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$条件收敛，则必有

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$收敛

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$都收敛

2. (04期末) 在下列级数中，收敛的级数是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{n}{n+1})^n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n+1}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3e^{-n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}})$

3. (04期末) 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}})$的敛散性。若收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

4. (05期末) 试就x在区间$[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$上的不同取值，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^n \sin^{2n} x}{n}$的敛散性；当级数收敛时，判别其是绝对收敛，还是条件收敛?

5. (07期末) 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\beta^{n}$的敛散性，其中$\alpha$为任意实数，$\beta$为正实数

6. (07期末) 判定级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi + \dfrac{1}{\ln n})$是否绝对收敛，条件收敛或发散? 并说明理由

7. (07期末) 设$a_1 = 1, a_2 = 2$, 当$n \geq 3$时，有$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$，

(1) 证明不等式$0 < \frac{3}{2}a_{n-1} < a_n < 2a_{n-1}$，$n \geq 4$

(2) 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$收敛，且满足不等式$2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \leq \frac{5}{2}$

8. (08期末) 取$a_n =$ ＿＿＿＿，可使得级数$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$收敛，且级数$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \ln n$发散

9. (08期末) 设$a_n > 0$, $b_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$，若存在常数$\alpha > 0$，使得

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} a_n - a_{n+1} \geq \alpha \ n = 1, 2, \cdots,$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

10. (10期末) 设$0 \leq a_n < \frac{1}{n}$，则下列级数 (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$ 中肯定收敛的是哪些级数？未必收敛的是哪些级数？对于肯定收敛的情形，给出证明；对于未必收敛的情形，请举发散级数的例子，并予以说明

11. (10期末) 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，其余项$R_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}}}$ 收敛

12. (12期末) 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{e^{x^2} - 1}{1 + x} dx$的敛散性，并说明理由

13. (14期末) 若级数$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$收敛，则$a$的取值范围是