# 函数项级数、幂级数

May 18, 2018

# Outline

# 将函数展开为幂级数

### Theorem (5)

设$f(z)$ 在区域$D$内解析，$z_0 \in D$, 则
当$|z - z_0| < R$时，$(R$为$z_0$到$D$边界上点的最短距离$)$，$f(z)$可以展开成$z - z_0$的幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

且展开式唯一。

## Theorem (5*)

设$f(x)$ 在 $x_0$的某邻域 $N(x_0)$内有任意阶导数 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在$N(x_0)$内能展开成$x-x_0$的泰勒级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_n=0,\ x\in N(x_0)$ 且展开式唯一。

$x_0=0$ 处，为麦克劳林展式$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Remark:

- 复函数与实函数可展的条件不同
- $f(z)$ 在$z = z_0$处的Taylor级数的收敛半径$R$ 等于从$z_0$到$f(z)$的距$z_0$最近的一个奇点的距离
- 由chap 8， $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_L \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$
- $f(z)$ 在$D$ 内解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ 在$D$ 内任一点$z_0$的邻域内可以展开为$z - z_0$的幂级数

将$f(z)$展开成幂级数的方法：

1. 直接法：

$$a)f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\ldots$$

b) 求出 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$的收敛半径$R$

若函数为实函数，还要考虑

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间},$$

if $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$, 则$x\in(-R,R)$时，$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,

if $\lim_{n\to\infty}R_n(x)\neq 0$, 则$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\neq f(x)$.

例6. 将$f(x) = e^x$展成$x$的幂级数

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < +\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < +\infty. \end{aligned}$$

2. 间接法
利用幂级数的性质，一些已知展式及唯一性

例7. 将以下函数展为$x$ 的幂级数

(1) $\cos x$

(2) $\ln(1+x)$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad |z| < +\infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < +\infty$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < +\infty$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1$$

例8. 展成指定点处的泰勒级数，并指出收敛域

(1) $f(z) = \dfrac{1}{1+z}, z_0 = i$

(2) $f(z) = \sin^2 z, z_0 = 0$

例9. 展成$x$或$z$的幂级数

(1) $\arctan x$

(2) $f(z) = \dfrac{z}{2 - z - z^2}$

例10. (1)将$e^x\cos x$, $e^x\sin x$展成$x$的幂级数

$$\text{Euler 公式：}\ \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

(2)将$e^z\cos z$, $e^z\sin z$展成$z$的幂级数