微分学基本定理及其应用

钟思佳

November 3, 2017

例3.4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{a}{n}\cos\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}\cos\frac{a}{n+1}\right)$

Corollary

If f 在(a,b)可导，$f'(x)\equiv 0 \Leftrightarrow f\equiv C$.

Corollary

If f,g 在(a,b)可导，且$f'(x)=g'(x)$ for $\forall x\in(a,b)$，则

$$f(x)=g(x)+C.$$

例3.5 求证$|x| \leq 1$时，$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Theorem (Cauchy 中值定理)

If

1. $f,\ g \in C_{[a,b]}$;
2. $f,\ g \in D_{(a,b)}$;
3. $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a,b)$

then: $\exists\, \xi \in (a,b)$, *s.t.* $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Remark: Cauchy 中值定理的特殊情形是Lagrange中值定理, $g(x) = x$。

例3.6 已知函数f在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$0<a<b$，证明在(a,b)内存在ξ与η，使得$f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Fermat 引理} \arrow[d] & \text{Lagrange 定理} \\
\text{Rolle 定理} \arrow[ur] \arrow[r] & \text{Cauchy 定理}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{Fermat 引理} & \text{Lagrange 定理} \arrow[dl, "f(a)=f(b)"'] \\
\text{Rolle 定理} & \text{Cauchy 定理} \arrow[u, "g(x)=x"']
\end{tikzcd}
$$

L'Hospital 法则

Theorem (L'Hospital 法则 $\frac{0}{0}$ 型)

设f在$(x_0, x_0+\delta)$, $(\delta > 0)$内满足:

1. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = 0$;
2. f, g 在$(x_0, x_0+\delta)$ 内可导, $g'(x) \neq 0$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $(|A| \leq +\infty)$

则有

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

结论同样对$x \to x_0$, $x \to x_0^-$, $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$

Theorem (L'Hospital 法则 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型)

设f在$(x_0, x_0+\delta)$, $(\delta>0)$内满足：

1. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = \infty$;
2. f, g在$(x_0, x_0+\delta)$ 内可导， $g'(x)\neq 0$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \ (|A| \leq +\infty)$

则有

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

结论同样对$x\to x_0$, $x\to x_0^-$, $x\to\infty$, $x\to\pm\infty$

例3.7 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$?

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$?

L'Hospital 不是万能的！

Remark:

- 用的时候要时刻检查是否仍满足L'Hospital 法则的条件
- 注意区分除法法则
- 有些乘除法的因子若$\rightarrow C\neq 0$，可以先取极限，活用等价无穷小的代换

例3.8 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}-e^{x}-3x-1}{(e^{2x}-1)^2e^{x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$