微分学基本定理及其应用

钟思佳

November 1, 2017

微分中值定理

Theorem (fermat 引理)

设$y=f(x)$在某$N(x_0)$内有定义，

1. $y=f(x)$在x_0处取得极值，
2. $y=f(x)$在x_0处可导，

则必有$f'(x_0)=0$

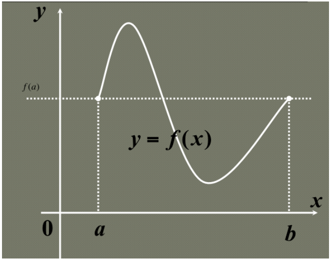
- 极值点是局部意义上的概念
- x_0称为驻点

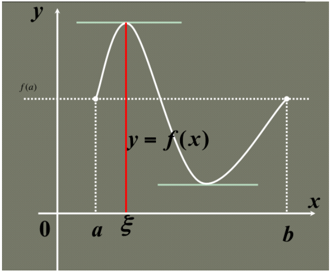
Theorem (Rolle定理)

If

1. $f \in C_{[a,b]}$;
2. $f \in D_{(a,b)}$;
3. $f(a) = f(b)$

then: $\exists\, \xi \in (a, b)$, *s.t.* $f'(\xi) = 0$


y
f(a)
y = f(x)
x
0
a
b


y
f(a)
y = f(x)
x
0
a
ξ
b

三个条件的必要性

Corollary

区间上可微函数f在任意两个零点之间至少存在导数f'的一个零点。

应用：（课后习题2）不计算导数，指出$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的导数$f'(x)$有几个零点，并指出它们所在的区间。

例3.1 求证$x^3+2x-1=0$在$(0,1)$内有且仅有一个实根。

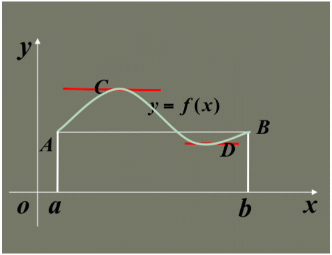
例3.2 f可导，证明f的两个零点之间必有$f'(x)+f(x)=0$的零点

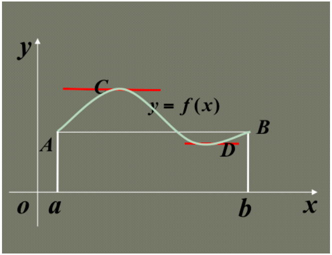
Theorem (Lagrange中值定理)

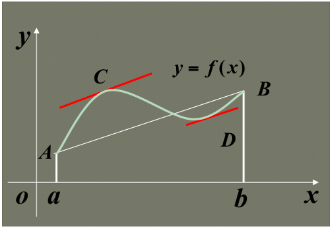
If

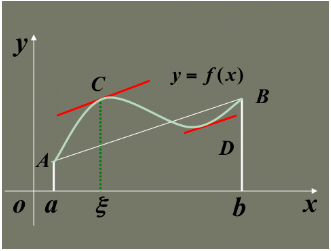
1. $f \in C_{[a,b]}$;
2. $f \in D_{(a,b)}$

then: $\exists\, \xi \in (a,b)$, $s.t.\ f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.


y
C
y = f(x)
B
A
D
o
a
b
x


y
C
y = f(x)
B
A
D
o
a
b
x


y
C
y = f(x)
B
D
A
o
a
b
x


y
C
y = f(x)
B
D
A
o
a
ξ
b
x

Remark:

1. if $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(\xi) = 0$, i.e. Rolle定理
2. 对$b < a$也成立,
   if x, $x + \triangle x \in [a, b]$, 则 $\exists \xi$ 介于x与$x + \triangle x$之间, 使得
   $$f(x + \triangle x) - f(x) = f'(\xi)\triangle x,$$
   或者存在$\theta \in (0, 1)$, 使得
   $$f(x + \triangle x) - f(x) = f'(x + \theta\triangle x)\triangle x.$$

例3.3 求证 $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$