有理函数积分

December 13, 2017

有理函数的积分

步骤：

1. 如果是假分式要先化为真分式
2. 因式分解到最简（实数意义下）
3. 用待定系数法拆开，例如：
   - $$\frac{3x^2+2x+7}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$
   - $$\frac{2x^3+x^2+x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}$$
4. 对拆开后的各因式求积分

- $\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + C;$
- $\int \frac{1}{(x-a)^k}dx = \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k} + C, k \neq 1;$
-

$$\begin{aligned}
& \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx \\
= \quad & \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + (-\frac{pA}{2}+B)\int \frac{1}{x^2+px+q}dx \\
= \quad & \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + (-\frac{pA}{2}+B)\int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}dx \\
= \quad & \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) \\
& +(-\frac{pA}{2}+B)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}) + C
\end{aligned}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx\text{，其中，}x^2+px+q\text{已经最简，}k>1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx+(B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}dx \\
&= \frac{A}{2(1-k)}(x^2+px+q)^{1-k}+(B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}dx
\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}dx=\int \frac{1}{((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4})^k}dx$$

再利用$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$的思路推导递推公式。