常数项级数

May 10, 2018

Outline

数项级数判敛法
- 正项级数
- 变号级数

反常积分判敛法
- 无穷区间

Theorem (3 比较判敛法的极限形式)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = L$, 则

(1) $0 < L < +\infty$时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$有相同的敛散性;

(2) $L = 0$时， if $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

(3) $L = +\infty$时, If $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散

例4. 判断敛散性

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \ln \frac{n+2}{n}$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Theorem (4 D'Alembert判别法，比值判别法)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数，*if* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p$, 则

(1) *If* $p < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) *If* $p > 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3) *If* $p = 1$ 时，需进一步判断

例5. 判断敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \tan \frac{\pi}{3^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$

例6. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} n!(\frac{x}{n})^n \ (x > 0)$ 的敛散性

Theorem (5 根值判别法，Cauchy判别法)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数，且$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = p \Rightarrow$

(1) $p < 1$时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

(2) $p > 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

(3) $p = 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 无法判断

例7. 判断收敛性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{(\ln 2)^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{an}{n+1})^n \ (a > 0)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$

可以证明，凡是能用比值判断法判定其敛散性的级数必能用根值判别法，反之未必

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$$

Theorem (6 积分判别法)

If (1) $f \in C_{[1,+\infty)}$, $f \geq 0$ 且单调递减
(2) $u_n = f(n), (n = 1, 2, \ldots)$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 有相同的敛散性.

例8. 判断收敛性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \; (p > 0)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

二. 变号级数

（一） 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,\ u_n>0$

Theorem (6 Leibniz 判别法)

If $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0)$ 满足

(1) $u_n \geq u_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$*;*

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$*;*

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛，且$S \leq u_1$，余项$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_k$ 满足 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

例1. 判断敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{n^2}$

如何判断单调减少?

- 差值法: $u_{n+1} - u_n \leq 0$
- 比值法: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$
- 导数法: 设$u_n = f(n)$, 在$[a, +\infty)$ 内, $f'(x) \leq 0$, $\therefore$ 当n 充分大$u_{n+1} \leq u_n$

例2. 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$的敛散性

（二）绝对收敛与条件收敛

1. 绝对收敛：if $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛

Theorem (7)

If $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，但反之不一定。

若用比值判别法or根值判别法判断出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散

Theorem (8)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n) \text{ 绝对收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 都绝对收敛}$$

例1. 判断敛散性

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{3^n}$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^4},\ \alpha \text{ 是常数}$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^2}{2^n}$$

2. 条件收敛： if $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，但$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

例2. 判断敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})$ （常数$\alpha>0$）

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

思考：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^p}, p\in\mathbb{R}$

例3. If $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛，证明下列级数都收敛

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$

例4. if $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散，则（　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 发散

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 发散

例5. 正数列 $\{u_n\}$ 单调减少，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$发散，试证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n+1}\right)^n$ 收敛。

例6. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$ 的敛散性.

$$
\begin{tikzcd}
\sum_{n=1}^{\infty} u_n \arrow[d] & & \\
\lim_{n\to\infty} u_n = 0? \arrow[r, "\text{否}"] \arrow[d, "\text{是}"] & \text{发散} & \\
\text{等比(几何)级数?} \arrow[r, "\text{是}"] \arrow[d, "\text{否}"'] & |q| < 1? \arrow[r, "\text{是}"] & \text{收敛} \\
\text{正项级数?} \arrow[r, "\text{否}"] \arrow[d, "\text{是}"'] & \text{交错级数?} \arrow[r, "\text{否}"] \arrow[d, "\text{是}"'] & \text{定义，性质} \\
\text{部分和，比较，极限，比值, 根值，积分} & \text{Leibniz} &
\end{tikzcd}
$$

反常积分判敛法

1. 无穷区间

Theorem (1 比较判敛法)

$f(x), g(x) \in C_{[a,+\infty)}$, $0 \le f(x) \le g(x)$, $(x \in [a,+\infty))$, $\Rightarrow$

(1) 当 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛

(2) 当 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 也发散

例1. 判断敛散性

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x|\sin x|}dx$

Theorem (2 极限判别法)

$f(x) \in C_{[a,+\infty)}$, $f(x) \geq 0$, 且 $\lim\limits_{n \to \infty} x^p f(x) = l$, 则

(1) $p > 1$，$0 \leq l < +\infty$ 时，$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

(2) $p \leq 1$, $0 < l \leq +\infty$ 时，$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

例2. 判别敛散性

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\arctan x}{\sqrt[3]{x^4}+1}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

Theorem (3)

$f(x) \in C_{[a,+\infty)}$, *if* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛

例3. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)dx,\ a>0$