二重积分

March 23, 2018

Outline

一. 直角坐标系

一. 直角坐标系

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \quad -----\text{X型}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \quad -----\text{Y型}$$

合理选择X型与Y型，必要时要改变积分次序

二. 极坐标

二. 极坐标

$$dxdy = r\,drd\theta$$

二. 极坐标

$$dxdy = rdrd\theta$$

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

三. 二重积分换元法

Theorem (1)

设

1. $f(x,y) \in C_D$
2. 变换$T: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 把uv平面上的区域$D' \to D$
3. $x(u,v), y(u,v)$在D'上具有一阶连续偏导数,
   且$J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0, (u,v) \in D'$

则

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv$$

例如：$(x, y) \to (r, \theta)$,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le r < +\infty \\ y = r\sin\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

例如：$(x, y) \to (r, \theta)$,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le r < +\infty \\ y = r\sin\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r,$$

例如：$(x,y)\to(r,\theta)$,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0\le r<+\infty \\ y = r\sin\theta & 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r,$$

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy=\iint_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

例10. 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$ 的体积.

例10. 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$ 的体积.

例11. 计算 $\iint_D xydxdy$, D： $y^2=x$, $y^2=2x$, $xy=2$, $xy=3$围成

例10. 求椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积.

例11. 计算$\iint_D xydxdy$, D： $y^2=x$, $y^2=2x$, $xy=2$, $xy=3$围成

例12. 求由曲线$\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{b}}=1$, $(a>0,\ b>0)$ 所围成区域D的面积S

四. 奇偶性与对称性

- $f(x, y)$ 关于x奇（偶）函数，D关于y轴对称
- $f(x, y)$ 关于y奇（偶）函数，D关于x轴对称

四. 奇偶性与对称性

- $f(x,y)$ 关于x奇（偶）函数，D关于y轴对称
- $f(x,y)$ 关于y奇（偶）函数，D关于x轴对称

If 奇： $\iint_D f(x,y)dxdy = 0$

四. 奇偶性与对称性

- $f(x,y)$ 关于x奇（偶）函数，D关于y轴对称
- $f(x,y)$ 关于y奇（偶）函数，D关于x轴对称

If 奇： $\iint_D f(x,y)dxdy = 0$

If 偶： $\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$, D_1: 一半区域

- D 关于$y = x$对称

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_D f(y, x)dxdy$$

例13. 计算 $\iint_D (x^2 - 5x + 6y + 2)dxdy$, $D: \ x^2 + y^2 \leq R^2$

例13. 计算$\iint_D (x^2-5x+6y+2)dxdy$, D： $x^2+y^2\le R^2$

例14. 计算$\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})dxdy$, D： $y=4-x^2$, $y=-3x$, $x=1$左侧围成