极限与连续

钟思佳

东南大学数学系

February 26, 2018

极限

Definition

$z = f(x,y) = f(M)$ 在点集E 上有定义。 A 是定常数， $M_0(x_0, y_0)$ 为 E 的一个聚点。 If $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, 对 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ $(M \in \mathring{N}(M_0, \delta))$ 满足的$M(x,y)$有： $|f(x,y) - A| < \epsilon$, 则称A为$f(x,y)$当 $M \to M_0$时的极限，

$$\text{记为} \lim_{M \to M_0} f(x,y) = A \text{ or } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$$

例1. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 \sin y}{x^2+y^2} = 0$

Remark:

1. 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则：四则、复合、夹逼定理等

例2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y}$

Remark:

1. 多元函数有类似于一元函数的极限运算法则：四则、复合、夹逼定理等
2. 比一元函数的极限复杂，$M(x,y) \to M_0(x_0,y_0)$ 是指以任何方式，$f(x,y)$都可以无限接近A。反之，若两种不同方式$\to M_0(x_0,y_0)$时，极限值不同，则可以判断极限不存在

例3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \text{ 与 } \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \text{ 不同}$$

例： $f(x,y) = x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y},\ (x,y)\to(0,0).$

连续性

Definition

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$，则称$f(x,y)$在$M_0(x_0,y_0)$处连续。

$f(x,y)$ 为D 内的连续函数：$f(x,y)$在D 内每一点连续.

Remark:

1. 一元函数关于连续的有关结论可以推广到多元函数中，例如：四则运算法则（和、差、商、积在一定条件下均为连续函数）、复合运算
2. 有界闭区域上的连续函数也会有：有界性、最大最小值、介值定理

例5. 考虑以下函数的连续性:

(1) $f(x,y)=\dfrac{1}{(x-y)^2}$

(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & x^2+y^4\neq 0\\ 0 & x^2+y^4=0\end{cases}$