

# 换元法

December 6, 2017

# 有理函数的积分

- ▶  $\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C;$
- ▶  $\int \frac{1}{(x-a)^k} dx = \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k} + C, k \neq 1;$
- ▶  $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx;$
- ▶  $\int \frac{Ax+b}{(x^2+px+q)^k} dx =$   
 $\frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx + (-\frac{pA}{2} + B) \int \frac{1}{(x^2+px+q)^k} dx$

注：有理函数积分，如果是假分式要先化为真分式。

例2.  $\int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^4} dx, \quad \int \frac{1}{1+x^4} dx$$

思考:  $\int \frac{1}{(1-x^2)^2} dx$

## 第二类换元法

### Theorem (3.2)

设 $x = \varphi(t)$  是单调、可导的函数，并且 $\varphi'(t) \neq 0$ 。又设 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)dx = \left( \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \right) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

例3. 求  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  ( $a > 0$ )

例4. 求  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$  ( $a > 0$ )

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx?$$

例5. 求  $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$  ( $a > 0$ )

例6. 求  $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+1}}$

例7. 求  $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$

例8. 求  $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x+2})(x+2)}$

例9.  $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$

例10. 求  $I = \int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} dx$

练习:  $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$  你有哪些方法可以解?



例11. 求  $I = \int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$

万能公式:

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

令  $t = \tan \frac{x}{2}$

例12. 求  $\int \frac{1}{\cos^2 x + a \sin^2 x} dx$

# 定积分换元法

## Theorem (3.3)

设  $f \in C_{[a,b]}$ , 令  $x = \varphi(t)$ , if

- $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ , 当  $t$  从  $\alpha$  变到  $\beta$  时,  $x$  从  $a$  单调地变到  $b$ ;
- $\varphi'(t) \in C_{[\alpha,\beta]}$  或  $C_{[\beta,\alpha]} \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

例13. 求  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$