习题课5-二重积分

August 28, 2017

一. 选择题

1. 设$f(x,y)$为连续函数, $D:\ 1\le x^2+y^2\le 4$,
$D_1:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0$, 则有

(A) $\iint_D f(x,y)dxdy = 4\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$

(B) $\iint_D f(x^2,y^2)dxdy = 4\iint_{D_1} f(x^2,y^2)dxdy$

(C) $\iint_D f(x^3,y^3)dxdy = 4\iint_{D_1} f(x^3,y^3)dxdy$

(D) 以上结论都不成立

2. 设$f(x,y)$为连续函数，D：$x^2+y^2\le 1$，使

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$成立的充分条件是

(A) $f(-x,y)=f(x,y),\ f(x,-y)=-f(x,y)$
(B) $f(-x,y)=f(x,y),\ f(x,-y)=f(x,y)$
(C) $f(-x,y)=-f(x,y),\ f(x,-y)=-f(x,y)$
(D) $f(-x,y)=-f(x,y),\ f(x,-y)=f(x,y)$

3. 设$f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则$F'(2)$等于

(A) $2f(2)$　(B) $f(2)$　(C) $-f(2)$　(D) 0

3. 设$f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则$F'(2)$等于

(A) $2f(2)$　(B) $f(2)$　(C) $-f(2)$　(D) 0

4. 设函数$f(u)$连续，区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2y\}$，
则$\iint_D f(xy)dxdy$等于

(A) $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)dy$　(B) $2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)dx$

(C) $\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}f(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi)d\rho$

(D) $\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}f(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi)\rho d\rho$

二. 交换积分次序

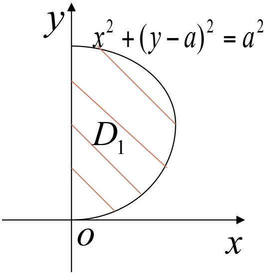
1. $\int_1^2 dx \int_1^{x^2} f(x,y)dy$

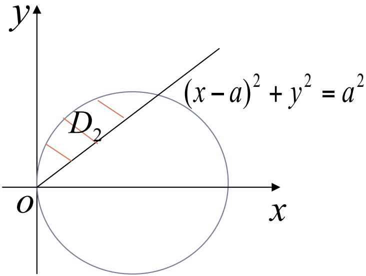
2. $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$

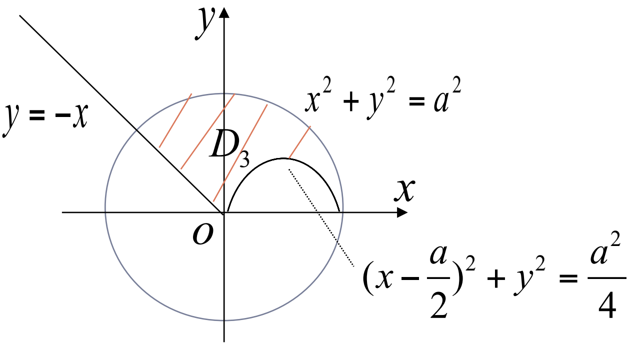
3. $\int_1^3 dx \int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,y)dy$

4. $\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$

三. 将二重积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 化成极坐标下的二次积分







y
$y = -x$
$x^2 + y^2 = a^2$
D_3
x
O
$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$

四. 计算题

四. 计算题

1. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 dx$

四. 计算题

1. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 dx$
2. $\iint_{|x|+|y|\le 1} (x^2 + y) dxdy$

四. 计算题

1. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 dx$

2. $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (x^2 + y) dxdy$

3. $\int_1^2 dy \int_2^y \frac{\sin x}{x-1} dx$

四. 计算题

1. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 dx$

2. $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (x^2+y)dxdy$

3. $\int_1^2 dy \int_2^y \frac{\sin x}{x-1} dx$

4. $\iint_D |x^2+y^2-4|dxdy,\ D:\ x^2+y^2 \leq 9$

四. 计算题

1. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 dx$

2. $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (x^2+y)dxdy$

3. $\int_1^2 dy \int_2^y \frac{\sin x}{x-1} dx$

4. $\iint_D |x^2+y^2-4|dxdy$, $D:\ x^2+y^2 \leq 9$

5. $\iint_D (x+y)dxdy$, $D:\ x^2+y^2-2ax \leq 0$

四. 计算题

1. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y^{\frac{1}{3}} \cos x^5 dx$

2. $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (x^2+y)dxdy$

3. $\int_1^2 dy \int_2^y \frac{\sin x}{x-1} dx$

4. $\iint_D |x^2+y^2-4|dxdy$, $D:\ x^2+y^2\leq 9$

5. $\iint_D (x+y)dxdy$, $D:\ x^2+y^2-2ax\leq 0$

6. $\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$, $D:\ 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$

五. 设D : $x^2 + y^2 \le y$, $f \in C_D$,

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy$$, 求$f(x,y)$

五. 设D：$x^2+y^2\le y$, $f\in C_D$,

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy,$$ 求$f(x,y)$

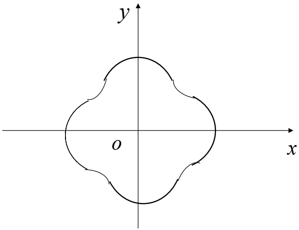
六. 求$\iint_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma$, 其中$D$是由圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域

五. 设D：$x^2+y^2\leq y, f\in C_D$,

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy$$, 求$f(x,y)$

六. 求$\iint_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma$, 其中$D$ 是由圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域

七. 求闭曲线$(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)$所围成的面积



八. 已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，

且$f(1,y)=f(x,1)=0$, $\iint_D f(x,y)dxdy=a$，其

中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，计算二重积

分$\iint_D xyf_{xy}(x,y)dxdy$

八. 已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(1,y)=f(x,1)=0$, $\iint_D f(x,y)dxdy=a$，其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，计算二重积分$\iint_D xyf_{xy}(x,y)dxdy$

九. $\iint_D |x^2+y^2-x|dxdy$,
其中$D=\{(x,y)|\ 0\le y\le x,\ 0\le x\le 1\}$

八. 已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，
且$f(1,y)=f(x,1)=0$, $\iint_D f(x,y)dxdy=a$，其
中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，计算二重积
分$\iint_D xyf_{xy}(x,y)dxdy$

九. $\iint_D |x^2+y^2-x|dxdy$,
其中$D=\{(x,y)|\ 0\le y\le x,\ 0\le x\le 1\}$

十. 求$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\int_0^t dx\int_x^t \sin y^2 dy=$

十一. 设$D_t = \{(x,y):\ t \le xy \le 2t,\ t \le \dfrac{y}{x} \le 2t,\ x > 0,\ y > 0\}$ $(t > 0)$ 则:

（1）对固定的$t > 0$，求区域D_t的表面积

十一. 设$D_t=\{(x,y):\ t\le xy\le 2t,\ t\le \dfrac{y}{x}\le 2t,\ x>0,\ y>0\}$ $(t>0)$ 则:

（1）对固定的$t>0$，求区域D_t的表面积

（2）求常数α,β使得$\beta=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t^2}\left(\iint_{D_t}e^{\frac{y}{x}}dxdy-\alpha t\right)$

十一. 设$D_t = \{(x,y):\ t \le xy \le 2t,\ t \le \dfrac{y}{x} \le 2t,\ x > 0,\ y > 0\}$
$(t > 0)$ 则:

（1）对固定的$t > 0$，求区域D_t的表面积

（2）求常数α, β使得$\beta = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t^2}\left(\iint_{D_t} e^{\frac{y}{x}} dxdy - \alpha t\right)$

十二. $\iint_{0\le x\le y\le 2\pi} |\sin(x-y)| dxdy =$

竞赛题

竞赛题

1. 设区域

$$D=\{(x,y)|\frac{1}{4}x\leq x^2+y^2\leq\frac{1}{2}x,\ \frac{1}{4}y\leq x^2+y^2\leq\frac{1}{2}y\},$$

计算二重积分 $\iint_D\frac{1}{xy}dxdy$. (11'竞赛题)

历年试题

1. (05期中) $\displaystyle\iint_{|x|+|y|\leq 1} y(x^2+\cos y)dxdy =$

2. （06期中）二次积分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$可以写成

(A) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$ (B) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(C) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ (D) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$

3. (08期中) 设$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，D_1为D在第一象限部分，则下列各式中不成立的是

(A) $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = 4\iint_{D_1} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$

(B) $\iint_D xydxdy = 4\iint_{D_1} xydxdy$

(C) $\iint_D (x+x^3y^2)dxdy = 0$

(D) $\iint_D x^2y^3dxdy = \iint_D x^3y^2dxdy$

4. (09期中) 设函数$f(x,y)$连续，则二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^{1} f(x,y)dy$等于

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x,y)dx$ (D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$

5. (11期中) 求 $I = \iint_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} |y-x^2| \max\{x,y\}dxdy$

6. (14期中) 若$I_1 = \iint_{x^2+y^2\le a^2} (a^2-x^2-y^2)dxdy$,

$I_2 = \iint_{x^2+y^2\le b^2} (a^2-x^2-y^2)dxdy$，其中常数$a, b$都大于零，则

(A) $I_1 \le I_2$ (B) $I_1 \ge I_2$

(C) 当$a<b$时，$I_1 < I_2$ (D) 当$a>b$时，$I_1 < I_2$

7. (15期中) 计算二次积分$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}dx$

8. (06期末) 使二重积分$\iint_D (4-4x^2-y^2)d\sigma$的值达到最大的平面闭区域$D$为

9. (06期末) 设函数$f \in C([0,1])$，且$0 \le f(x) < 1$，利用二重积分证明不等式：

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}dx \ge \frac{\int_0^1 f(x)dx}{1-\int_0^1 f(x)dx}$$

10. (09期末) 设$F(t) = \iint_{x+y\le t} f(x,y)dxdy$，其中$f(x,y) = \begin{cases} x & y \ge x^2 \text{ 且 } x \ge 0 \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$ 则$F(2) =$

11. (11期末) 将二重积分$\iint_D f(x,y)dxdy$表示为极坐标下的二次积分，其中$D=\{(x,y)|(x^2+y^2)^2\geq(x^2-y^2),\ 0\leq y\leq \sqrt{2x-x^2},\ 0\leq x\leq 1\}$

12. (15期末) 设$g(x)$有连续导数，且$g(0)=0$, $g'(0)=1$，$f(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域内连续，则$\lim\limits_{r\to o^+}\dfrac{\iint_{x^2+y^2\leq r^2} f(x,y)dxdy}{g(r^2)}=$

13. (11期中) 设$D=\{(x,y)|-1\leq y\leq x,\ -1\leq x\leq 1\}$，则

(A) $\iint_D x^2dxdy=0$ (B) $\iint_D(3y^3+x^4)dxdy=0$

(C) $\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})dxdy=0$

(D) $\iint_D(\sin y+\cos x)dxdy=0$