习题课七 定积分的定义、性质，变上限求导

一. 选择题

1. 设在区间$[a,b]$上$f(x)>0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$，
令$S_1=\int_a^b f(x)dx$, $S_2=f(b)(b-a)$,
$S_3=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a)$，则
(A) $S_1<S_2<S_3$ (B) $S_2<S_1<S_3$
(C) $S_3<S_1<S_2$ (D) $S_2<S_3<S_1$

2. $f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\displaystyle\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(t)dt$
A. <0 B. >0 C. $=0$ D. 不确定

3. 下列结论正确的是
A. $\displaystyle\int_0^1 e^x dx<\int_0^1 e^{x^2}dx$ B. $\displaystyle\int_0^1 e^x dx>\int_0^1 e^{x^2}dx$
C. $\displaystyle\int_0^1 e^x dx=\int_0^1 e^{x^2}dx$ D. 上述三式都不成立

4. 设$f(x)\in C_{[a,b]}$，则由$y=f(x)$，$x=a$，$x=b$，$y=0$所围成的图形面积为
A. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ B. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right|$
C. $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ D. 不能确定

5. 下列结论正确的是
A. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx=f(x)$ B. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$
C. $\displaystyle\int_a^b f'(x)dx=f(x)$ D. $\displaystyle\int_a^b f'(x)dx=f(x)+C$

6. 设$f(x)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{1+x}-1}\ln(1+t)dt$，$g(x)=e^x-x-1$，则当$x\to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的
A. 等价无穷小 B. 同阶但非等价无穷小
C. 低阶无穷小 D. 高阶无穷小

7. 方程$\sqrt{x}+\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt=\cos x$在区间$(0,+\infty)$内
A. 有且仅有一个实根 B. 有且仅有两个实根
C. 有无穷多个实根 D. 无实根

8. 设$f(x)\in C$, $F(x)=\displaystyle\int_a^b|x-t|f(t)dt$，$a<x<b$，则$F''(x)=$
A. 0 B. $f(x)$ C. $-f(x)$ D. $2f(x)$

9. 设$f(x)$连续，则$\int_a^x f(t)dt$为
A. $f(t)$的一个原函数 B. $f(t)$的所有原函数
C. $f(x)$的一个原函数 D. $f(x)$的所有原函数

二. 计算题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}})$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}})$

3. $x=\int_1^t u\ln u du, y=\int_t^2 u^2\ln u du$，求$\frac{dx}{dy}$，$\frac{d^2x}{dy^2}$

4. 设$\sin x-\int_1^{y-x}e^{-t^2}dt=0$，求$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$。

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin^{\frac{3}{2}}tdt}{\int_0^x t(t-\sin t)dt}$

6. 求极限$\lim\limits_{x\to0}(1+\int_0^{\sin x}\sin t^2dt)^{\frac{1}{x^3+\ln(1+x^4)}}$

7. 设$F(x)=\begin{cases}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2} & x\neq0\\ c & x=0\end{cases}$ 其中$f(x)$有一阶连续导数，且$f(0)=0$。
(1) 求c，使$F(x)$在$x=0$连续。
(2) 求$F'(x)$

8. 已知两曲线$y=f(x)$与$y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$在点$(0,0)$处的切线相同，求此切线方程，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}nf(\frac{2}{n})$

9. 设$f\in C[a,b]$，由积分中值定理知，存在$\xi\in(a,x)\subset[a,b]$，使得$\int_a^x f(t)dt=f(\xi)(x-a)$，若$f'_+(a)$存在且非零，
求$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\xi-a}{x-a}$. (14' 竞赛题)

三. 证明题

1. $\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}<\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-x^2}dx<\sqrt{2}$.

2. 设$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=f(1)$，证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使

$$f'(\xi)=-\frac{1}{\xi}f(\xi)$$

3. 设函数$f(x)$, $p(x) \in C[a,b]$, $p(x) \geq 0$, $\int_a^b p(x)dx > 0$,
且$m \leq f(x) \leq M$, $\varphi(x)$ 在$[m,M]$上有定义，并有二阶导数，$\varphi''(x) > 0$, 试证

$$\varphi(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}) \leq \frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}$$

（11‘竞赛题）

历年试题

1. 设$f(x)$连续，在$x=0$处可导，且$f(0)=0$, $f'(0)=4$,
求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (t\int_t^0 f(u)du)dt}{x^3\sin x}$ (03期末)

2. 设$f \in C[a,b]$，M, m分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值，证明：至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = M(\xi - a) + m(b - \xi)$$

(10期末)

3. (16期末) 证明：

(1) 若$t > 0$, 则$\ln t \leq t - 1$;

(2) 若$f(x)$ 在$[0,1]$上连续，且$f(x) > 0$,
则$\int_0^1 \ln f(x)dx \leq \ln \int_0^1 f(x)dx$