复变函数的积分

April 27, 2018

Outline

概念, 性质与计算

概念，性质与计算

- 定义，四步走

$$\int_L f(z)dz,\ f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x + iy$$

概念，性质与计算

- 定义，四步走
- 性质

性质：

1. $\displaystyle\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz$
2. $\displaystyle\int_{L^-} f(z)dz = -\int_L f(z)dz$
3. $\displaystyle\int_L (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z))dz = c_1 \int_L f_1(z)dz + c_2 \int_L f_2(z)dz$
4. $\displaystyle|\int_L f(z)dz| \le \int_L |f(z)||dz| \le Ms$, s: L 的长度，$|f(z)| \le M$.

- 定义，四步走
- 性质
- 计算：第二型曲线积分

计算

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\begin{aligned}\int_L f(z)dz &= \int_L (u(x,y) + iv(x,y))d(x+iy) \\ &= \int_L (udx - vdy) + i\int_L (udy + vdx)\end{aligned}$$

$z(t) = x(t) + iy(t)$, $t : \alpha \to \beta$,

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \int_L f(z)dz &= \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt \\
&= \int_\alpha^\beta (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))(x'(t) + y'(t))dt
\end{aligned}
$$

例1. $\int_L zdz$, 其中L 为:

(1) 从点1沿直线$x+y=1$ 到点 i

(2) 从点1沿圆周$x^2+y^2=1$ 到点 i

例2. 计算$\int_L \bar{z}dz$, L:

(1) 从点0到点$1+i$ 的直线段

(2) 从$0 \to i \to 1+i$ 的折线段

例3. 计算 $\int_L \frac{1}{(z-z_0)^n}dz$, $n \in \mathbb{Z}$, L 为以z_0 为中心ρ 为半径的圆，取逆时针方向

$$\int_L \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

例4. L: $0 \to 3+4i$ 的直线段，求证：$\left|\int_L \frac{1}{z+i} dz\right| \le \frac{25}{3}$.