函数的连续性

钟思佳

东南大学数学系

October 15, 2017

定义

Definition

设函数f在点x_0的某邻域内有定义，如果$x \to x_0$时，$f(x)$的极限存在且等于$f(x_0)$

$$i.e.\ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数f在x_0处连续，并称x_0为f的连续点。

1. $f(x)$在x_0处有定义
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$存在
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\epsilon - \delta$ 语言

Definition

$\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, if $|x - x_0| < \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

定义的等价表述:

$$\text{if } \triangle x = x - x_0 \to 0, \quad \text{then } \triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \to 0.$$

If $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 称为右连续

If $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 称为左连续

$$f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续 } \Leftrightarrow \text{ 左连续且右连续}$$

Definition

如果对$\forall\ x \in (a, b)$，函数$f(x)$在x处都连续，则称f在开区间(a, b)内连续。如果f在开区间(a, b)内连续，且在端点a处右连续，端点b处左连续，则称f在闭区间$[a, b]$连续。

注：(a, b)也可以是无限区间

例1. 证明：正弦函数$y = \sin x \in C_{(-\infty,+\infty)}$

前面结论$y = a^x \in C_{(-\infty,+\infty)}$

Theorem (复合函数)

设函数$y=f(u)$在点$u=u_0$处连续，函数$u=g(x)$在$x=x_0$处连续，$u_0=g(x_0)$，则复合函数$y=f(g(x))$在点x_0处连续。

$\cos x \in C_{(-\infty,+\infty)}$

Theorem (四则运算)

设函数f和g在x_0处连续，则函数$f \pm g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0)$在点x_0处连续。

$\tan x$，$\sec x$，$\csc x$ 在定义区间内连续

Theorem (反函数)

设函数$y = f(x)$在区间I_x上单调增加（或减少）且连续，则它的反函数$x = f^{-1}(y)$存在，且对应区间$I_y = \{y = f(x),\ x \in \ I_x\}$上单调增加（或减少）且连续

$\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ 都在定义区间连续

x^α 在定义区间连续

所有初等函数在其定义区间内都是连续的

当$x \to 0$时

$$\sin x \sim x \qquad \arcsin x \sim x$$

$$\tan x \sim x \qquad \arctan x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{1}{\ln a}x \qquad \ln(1+x) \sim x$$

$$a^x - 1 \sim \ln a x \qquad e^x - 1 \sim x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$