三重积分

March 28, 2018

Outline

奇偶性与对称性

- $f(x,y,z)$关于x奇（偶）函数，Ω关于yoz平面对称
- $f(x,y,z)$关于y奇（偶）函数，Ω关于xoz平面对称
- $f(x,y,z)$关于z奇（偶）函数，Ω关于xoy平面对称

  $\Longrightarrow$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = 0 \quad (\text{奇})$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = 2\iiint_{\Omega'} f(x,y,z)dxdydz \quad (\text{偶})$$

- 轮换对称性

例11. $\iiint_{\Omega_i}(x+y+z)^2dxdydz, (i=1,\ 2)$

1. Ω_1: $x^2+y^2+z^2\le R^2$

2. Ω_2: $0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$

例12. 设Ω: $x^2+y^2+z^2\le 1$, 计算：

$$I=\iiint_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+1}dV$$

例13. Ω： $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $x^2+y^2+z^2=4$围成。$I=\iiint_{\Omega}(x+y+z)^2dV$

例14. $I=\iiint_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$,
Ω： $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=1$, $z=4$围成.