复变函数

钟思佳

东南大学数学系

March 14, 2018

Theorem (2 可导的充要条件)

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域D 上有定义。$f(z)$在$z_0=x_0+iy_0\in D$ 可导 $\Leftrightarrow$

1. $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处可微
2. u, v 在(x_0,y_0) 处满足C-R 条件。

Remark： If u_x, u_y, v_x, v_y连续 $\Rightarrow$ u, v可微

解析函数与调和函数

If $f(z)$ 在z_0 及其某邻域可导 $\Rightarrow$ $f(z)$ 在z_0 解析

If $f(z)$ 在$\forall z \in D$解析 $\Rightarrow$ $f(z)$ 在D 内解析 or $f(z)$ 为D 内的解析函数

$f(z)$ 在z_0 处不解析 $\Rightarrow$ 称z_0为$f(z)$的奇点

$$\text{解析点} \Longrightarrow \text{可导点}$$

$$\text{不可导点} \Longrightarrow \text{不解析}$$

$f(z)$ 在区域D 内解析 $\Longleftrightarrow$ $f(z)$ 在区域D 内可导

Theorem (3)

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D 内解析 $\Longleftrightarrow$

1. 二元函数$u(x,y)$，$v(x,y)$在D内任意处可微
2. 满足C-R条件

例4. 判断下列函数何处可导？何处解析？

(1) $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$

(2) $f(z) = x + y + ixy$

(3) $f(z) = x^2 - iy$

例5. 证明：如果$w = u(x, y) + iv(x, y)$为解析函数，那么w必与$\bar{z}$无关，i.e. 可以单独用z来表示。

If $\varphi(x,y)$ 在D 有二阶连续偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$ (i.e. $\triangle\varphi=0$), 则称$\varphi(x,y)$ 为D 内的调和函数.

Theorem (4)

If $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域D 内解析，则$u(x,y)$, $v(x,y)$ 都是D 内的调和函数

If $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域D 内解析，则称$v(x,y)$ 为$u(x,y)$ 的共轭调和函数。（但$u(x,y)$ 不是$v(x,y)$ 的共轭调和函数）

例6. 已知解析函数$f(z)$的虚部$v = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(2)=0$, 求$f(z)$

例7. 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$为解析函数，其中实部与虚部的乘积满足$u(x,y)\cdot v(x,y)=2xy(x^2-y^2)$，试求$f^2(z)$的表达式

解析函数具有任意阶连续导数（Chap 10）

初等函数

1. 指数函数 $w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

1. $|e^z| = e^x$, $Arge^z = y + 2k\pi$
2. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$
3. 周期性： $e^{z+2k\pi i} = e^z$
4. 处处解析，且有$(e^z)' = e^z$

注：

- $y = 0 \Rightarrow w = e^x$ （实指数函数）
  $x = 0 \Rightarrow w = e^{iy} = \cos y + i \sin y$
- $|e^z| = e^x, (e^z)' = e^z$，复变函数无中值定理

2. 对数函数： $z = e^w$ $(z \neq 0)$ 的反函数，记为

$$w = Lnz = ln|z| + iArgz$$

- Lnz为无穷多值函数。对于每个k，确定一个单值分支，记为$(Lnz)_k$。 当$Argz = argz$时，记为$lnz = ln|z| + iargz$ 主值, $\Rightarrow$ $Lnz = lnz + 2k\pi i$
- If $z \in \mathbb{R}^+$, 则lnz 与实函数中一致
- If $z \in \mathbb{R}^-$, 无对数？ 存在！

性质：

1. $Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$
2. $Ln(\dfrac{z_1}{z_2}) = Lnz_1 - Lnz_2$
3. Lnz 除原点与负实轴外连续
4. Lnz 除原点与负实轴外解析 $(Lnz)' = \dfrac{1}{z}$
5. Lnz的各分支在除原点与负实轴外的其它点处解析，且与lnz有相同的导数值

例8. 求$w = Lnz$ 的一个分支，使$w(i) = \frac{5}{2}\pi i$, 并计算此时$w(-2i)$的值

3. 幂函数： $w = z^{\alpha} = e^{\alpha Lnz} = e^{\alpha(ln|z|+iArgz)} = e^{\alpha(lnz+2k\pi i)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $(z \neq 0)$

性质：

1. • 当α 为整数时， $z^{\alpha} = e^{\alpha(lnz+2k\pi i)} = e^{\alpha lnz}$——单值
   • 当$\alpha = \frac{p}{q}$, (p, q互质, $q > 0$)时 $z^{\alpha} = e^{\frac{p}{q}Lnz} = e^{\frac{p}{q}lnz+\frac{2kp}{q}\pi i}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, q-1$, 有q 个值。
   If $\alpha = \frac{1}{n}$时， 即为z的n 次方根
   • 对其它α， z^{α}有无穷多值
2. Lnz 取 $\ln z$时， 相应的z^{α}称为z^{α} 的主值
3. 解析性： 除了原点及负实轴外解析， 且$(z^{\alpha})' = \alpha z^{\alpha-1}$

例9. 计算(1) $(-1)^{-i}$ (2) $i^{\sqrt{2}}$

4. 三角函数： $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

性质：

1. $\sin z, \cos z$以2π 为周期
2. $\cos z$为偶函数， $\sin z$为奇函数
3. $\sin z, \cos z$在复平面上处处解析， 且

$$(\sin z)' = \cos z \quad (\cos z)' = -\sin z$$

4. $|\sin z| \le 1, |\cos z| \le 1$? No! $|\sin z|, |\cos z|$ 无界