函数的连续性

钟思佳

东南大学数学系

October 20, 2017

间断点及其分类

If f在x_0处不连续，则称x_0为f的间断点。

例2. 判断$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x > 0,\ x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \\ \frac{\sin x}{2x} & x < 0 \end{cases}$ 的间断点

三种情况

- $f(x)$在x_0处极限存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, or f在x_0处根本没有定义 ——可去间断点
- $f(x)$在x_0处左右极限都存在，但$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ——跳跃间断点
- $f(x)$在x_0处左右极限至少有一个不存在 ——第二类间断点

可去间断点和跳跃间断点都称为第一类间断点

例3. 讨论$f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-1)}$的连续性，并指出间断点类型

例4. 试求函数$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^3e^{tx}-x}{e^{tx}-\sin x}$的间断点，并指出间断点的类型

闭区间上连续函数的性质

Theorem

若函数$f \in C_{[a,b]}$，则存在$\xi, \eta \in [a,b]$，使得$\forall x \in [a,b]$，有

$$f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta).$$

$f(\xi), f(\eta)$分别称为f在区间$[a,b]$的最大最小值。

条件： 1. 闭区间；2. 连续；3. 有限区间

Theorem (零点存在定理)

若函数$f \in C_{[a,b]}$，且$f(a) \cdot f(b) < 0$，则存在$\xi \in (a,b)$，*s.t.* $f(\xi) = 0$.

ξ 称为f的零点或者$f(x) = 0$的根

Theorem (介值定理)

设$f \in C_{[a,b]}$, $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$，则对$\forall \mu \in [m, M]$，$\exists \xi \in [a,b]$，*s.t.* $f(\xi) = \mu$

例5. 任何奇数次实系数多项式必有零点。

例6. 证明方程$x - 2\sin x = a\ (a > 0)$至少有一个正实根