

## 习题课二 函数极限

November 9, 2016

1. 证明极限:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 1}{6(x + 1)} = \frac{1}{3}$

## 2. 填空题

## 2. 填空题

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x} =$$

## 2. 填空题

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x} =$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - ax)^{\frac{1}{x}} = 2, \text{ 则 } a =$$

## 2. 填空题

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x} =$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - ax)^{\frac{1}{x}} = 2, \text{ 则 } a =$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5 \cos x}{3x^2 + 6 \sin x} =$$

## 2. 填空题

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x} =$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - ax)^{\frac{1}{x}} = 2, \text{ 则 } a =$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5 \cos x}{3x^2 + 6 \sin x} =$$

$$(4) \text{ 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } 2x^2 + 3x^3 \text{ 与 } \sin \frac{ax^2}{3} \text{ 为等价无穷小, 则 } a =$$

## 2. 填空题

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x} =$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - ax)^{\frac{1}{x}} = 2, \text{ 则 } a =$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5 \cos x}{3x^2 + 6 \sin x} =$$

$$(4) \text{ 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } 2x^2 + 3x^3 \text{ 与 } \sin \frac{ax^2}{3} \text{ 为等价无穷小, 则 } a =$$

$$(5) \text{ 当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } f(x) \text{ 与 } \frac{1}{x^3} \text{ 为等价无穷小, } g(x) \text{ 与 } \frac{2}{x^2} \text{ 为等价无穷小, 则 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{3g(x)} =$$



### 3. 选择题

### 3. 选择题

(1) 下列运算正确的是

(A)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 1$

(B)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

(C)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = 1$

(D)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

### 3. 选择题

(1) 下列运算正确的是

(A)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 1$

(B)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

(C)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = 1$

(D)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(2) 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c(\sqrt{1 - 4x} - 1) + d \arcsin x^2} = 2, a^2 + c^2 \neq 0$

(A)  $a = -4c$  (B)  $a = 4c$  (C)  $b = -4d$  (D)  $b = 4d$

(3). 设 $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$ 均为非负数列, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \infty$ , 则必有

- (A)  $a_n < b_n$  对任意  $n$  成立      (B)  $b_n < c_n$  对任意  $n$  成立  
(C) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$  不存在      (D) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$  不存在

#### 4. 求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}$$

#### 4. 求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - 1)^{30} (2x + 3)^{70}}{(5x - 9)^{100}}$$

#### 4. 求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^{30}(2x+3)^{70}}{(5x-9)^{100}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}})$$

#### 4. 求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^{30}(2x+3)^{70}}{(5x-9)^{100}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}})$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$



#### 4. 求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - 1)^{30} (2x + 3)^{70}}{(5x - 9)^{100}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}})$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x + 1} - \sin \sqrt{x})$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$$

(6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+1}$

(6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+1}$

(7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{a_n}{n^2}$ , 其中  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+1}$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{a_n}{n^2}, \text{ 其中 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 存在}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{x^5 - 2x^4 + 1} - x)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+1}$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{a_n}{n^2}, \text{ 其中 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 存在}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{x^5 - 2x^4 + 1} - x)$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+1}$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{a_n}{n^2}, \text{ 其中 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 存在}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{x^5 - 2x^4 + 1} - x)$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) \ln(1-x)}{1 - \cos x + \sin^2 x}$$

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 5}{x^3 + 1} \right)^{2-x^3}$$

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 5}{x^3 + 1} \right)^{2-x^3}$$

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{4}{x} + \cos \frac{2}{x} \right)^x$$



$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 5}{x^3 + 1} \right)^{2-x^3}$$

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{4}{x} + \cos \frac{2}{x} \right)^x$$

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\sec \frac{\pi}{2} x}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 5}{x^3 + 1} \right)^{2-x^3}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{4}{x} + \cos \frac{2}{x} \right)^x$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\sec \frac{\pi}{2} x}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}, \text{ 其中 } a > 0, b > 0, c > 0$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 5}{x^3 + 1} \right)^{2-x^3}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{4}{x} + \cos \frac{2}{x} \right)^x$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi}{2} x}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}, \text{ 其中 } a > 0, b > 0, c > 0$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$$

5. (1) 设  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

5. (1) 设  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

(2) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$

6. (1) 设  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{a}{1-x^2} - \frac{x}{1-x} \right) = \frac{3}{2}$ , 求  $a$

6. (1) 设  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{a}{1-x^2} - \frac{x}{1-x} \right) = \frac{3}{2}$ , 求  $a$

(2) 已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 - x + 1})$  存在且不等于零, 求  $a$

6. (1) 设  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{a}{1-x^2} - \frac{x}{1-x} \right) = \frac{3}{2}$ , 求  $a$

(2) 已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 - x + 1})$  存在且不等于零, 求  $a$

(3) 设  $P(x)$  为多项式,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x) - x^3}{x^2} = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x} = 1$ , 求  $P(x)$



6. (1) 设  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{a}{1-x^2} - \frac{x}{1-x} \right) = \frac{3}{2}$ , 求  $a$

(2) 已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 - x + 1})$  存在且不等于零, 求  $a$

(3) 设  $P(x)$  为多项式,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x) - x^3}{x^2} = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x} = 1$ , 求  $P(x)$

(4) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan ax}{x} & x < 0 \\ x + 2 & x \geq 0, \end{cases}$  已知  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在, 求  $a$

7. 设  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  存在,  $f(x) = x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , 求  $f(x)$

8. (1) 有界函数与无穷小量之积是否是无穷小量，有界函数与无穷大量的乘积是否是无穷大量？

8. (1) 有界函数与无穷小量之积是否是无穷小量，有界函数与无穷大量的乘积是否是无穷大量？

(2) 无界函数是否一定是无穷大量？

9. 已知有正整数 $n(n > 4)$  使得极

限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^n + 7x^4 + 2)^\alpha - x] = c \ (c \neq 0)$ , 则 $\alpha =$  (16竞赛)

# 历年试题

# 历年试题

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x + x^3 \cos \frac{1}{x}}{(1 + x \sin x)(1 - \cos x)}$  (13期中)

2. 设对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - h(x)] = 0$ ,  
则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(A) 存在且等于零 (B) 存在且不等于零 (C) 一定不存在 (D)  
不一定存在 (07期中)

3. (04期末) 设当  $x \rightarrow x_0$  时,  $\alpha(x), \beta(x)$  都是无穷小  
( $\beta(x) \neq 0$ ), 则当  $x \rightarrow x_0$  时, 下列表达式中不一定为无穷小的是

(A)  $\frac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$  (B)  $\alpha^2(x) + \beta^2(x) \sin \frac{1}{x}$   
(C)  $\ln(1 + \alpha(x) \cdot \beta(x))$  (D)  $|\alpha(x)| + |\beta(x)|$

4. (04期中) 设 $x \rightarrow 0$ 时,  $e^{\sin^3 x} - 1$  与 $x^n$  是等价无穷小, 则 $n =$

5. (08期中)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 - 2x)}{\sqrt{1 + x \sin x} - e^{x^2}}$