习题课八 求积分

August 28, 2017

一. 求不定积分

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x\sqrt{x}}}dx$

2. $\int \frac{\ln \tan x}{\sin 2x}dx$

3. $\int \frac{(2^x+3^x)^2}{6^x}dx$

4. $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

5. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx$

6. $\int \frac{1+\sin^2 x}{1+\cos 2x}dx$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$

8. $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$

9. $\int \frac{x^2}{(x-1)^{10}}dx$

10. $\int \frac{1}{x(1-x^4)}dx$

11. $\int xf''(x)dx$

12. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

13. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

14. $\int \sin(\ln x)dx$

15. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$

16. $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

17. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$

二. 求定积分

1. $\int_{-2}^{5} |x^2 - 2x - 3| dx$

2. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [\cos x (\ln \frac{1+x}{1-x} + \sin^2 x) + \sqrt{1-4x^2}] dx$

3. $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1-\sin x} dx$

4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+50\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$

5. $\int_{0}^{1} x (\int_{1}^{x^2} e^{-t^2} dt) dx$

$$6.\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & x \geq 0 \\ \dfrac{1}{e^x+1} & x < 0 \end{cases}, \quad \int_0^2 f(x-1)dx.$$

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & x \geq 0 \\ \dfrac{1}{e^x+1} & x < 0 \end{cases}$, $\int_0^2 f(x-1)dx$.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$， $f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2}]$连续。

6. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & x\geq 0 \\ \dfrac{1}{e^x+1} & x<0 \end{cases}$， $\displaystyle\int_0^2 f(x-1)dx.$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$， $f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$连续。

8. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx.$

6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & x\geq 0\\ \dfrac{1}{e^x+1} & x<0\end{cases}$，$\displaystyle\int_0^2 f(x-1)dx$.

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$，$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$连续。

8. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx$.

9. 设n为正整数，计算$\displaystyle I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos(\ln\frac{1}{x})\right|dx$ (15'竞赛题)

6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & x\geq 0\\ \dfrac{1}{e^x+1} & x<0\end{cases}$， $\int_0^2 f(x-1)dx$.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$，$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$连续。

8. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx$.

9. 设n为正整数，计算$I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1} |\dfrac{d}{dx}\cos(\ln\dfrac{1}{x})|dx$ (15'竞赛题)

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{1+\cos x}dx=$

三. 计算题

1. 已知$g(x) = \int_0^x tf'(x-t)dt$，求$g'(x)$

三. 计算题

1. 已知$g(x) = \int_0^x tf'(x-t)dt$，求$g'(x)$

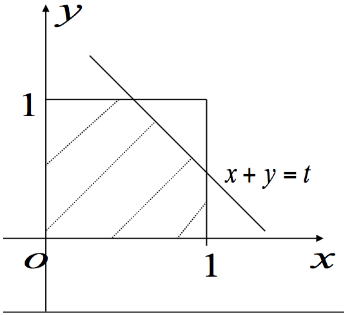
2. 已知$I(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$，其中$f(x) = x$，

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

求$I(x)$。

3. 设OABC为一正方形，各顶点坐标如图，$S(t)$表示该正方形与平面区域$x+y \le t(t>0)$公共部分的面积，

求$S'(t)$及$\varphi(x) = \int_0^x S(t)dt \ (x>0)$的表达式。



4. 已知$\int xf(x)dx = \arcsin x + c$，求$\int \frac{1}{f(x)}dx$。

4. 已知$\int xf(x)dx = \arcsin x + c$，求$\int \frac{1}{f(x)}dx$。

5. 设$f''(x)$连续，$n\int_0^1 xf''(2x)dx = \int_0^2 tf''(t)dt$，则$n$等于

A. 2 B. 4 C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

4. 已知$\int xf(x)dx = \arcsin x + c$，求$\int \frac{1}{f(x)}dx$。

5. 设$f''(x)$连续，$n\int_0^1 xf''(2x)dx = \int_0^2 tf''(t)dt$，则$n$等于

A. 2 B. 4 C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

6. $\int_0^{2\pi} \sin^{11} xdx =$

A. 22 B. 0 C. 11π D. 11

7. 设函数$f(x) \in C[-\pi, \pi]$，

且$f(x) = \dfrac{x}{1+\cos^2 x} + \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx$, 求$f(x)$ （10‘ 竞赛题）

7. 设函数$f(x) \in C[-\pi, \pi]$，

且$f(x) = \dfrac{x}{1+\cos^2 x} + \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx$, 求$f(x)$ （10‘ 竞赛题）

8. 计算定积分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx$。（$n$为正整数）（14‘ 竞赛题）

7. 设函数$f(x) \in C[-\pi,\pi]$，

且$f(x) = \dfrac{x}{1+\cos^2 x} + \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx$, 求$f(x)$ （10‘ 竞赛题）

8. 计算定积分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx$。（$n$为正整数）（14‘ 竞赛题）

9. 计算极限$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$. (14’ 竞赛题)

10. 设$f(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sin x}{x}=a$, ($a$为常数)，

又$F(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xy)dy$, 求$F'(x)$，并讨论$F'(x)$的连续性（15‘竞赛题）

10. 设$f(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sin x}{x}=a$, ($a$为常数)，又$F(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xy)dy$, 求$F'(x)$，并讨论$F'(x)$的连续性（15‘竞赛题）

11. 试比较积分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx$ 与 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx$的大小，其中$f\in C[0,\dfrac{\pi}{2}]$, 且$f$ 严格单调递减。(10‘ 竞赛题)

历年试题

历年试题

1. $\int \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 4} dx$ （05期末）

2. $\int_0^{2\pi} x|\sin x| dx$ （06期末）

3. 设$G(x) = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$, 求$\int_0^1 G(x) dx$ (06期末)

4. $\int \frac{x \sin x}{\cos^5 x} dx$ (03 期末)

5. $\int_{-1}^{1} x(1+x^{2005})(e^{x}-e^{-x})dx =$ (04期末)

6. $\int_{0}^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x}dx$ （04期末）

7. $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2 dx =$ （09期末）

8. $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{2+\cos 2x}$ （03期末）

9. $\displaystyle\int \frac{2\sin x - x}{1+\cos x}dx$ (13期末)

10. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot \arctan e^x dx$ (13期末)

11. (07期末) 设$f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & x \geq 0 \\ x & x < 0, \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x^2} & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & x < 0, \end{cases}$

(1) 问$F(x)$ 是否为$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内的一个原函数？为什么？

(2) 求$\int f(x)dx$

12. （07期末）设$f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2 dt$，求证：
当$x>0$时，$|f(x)|<\frac{1}{x}$

13. （08期末）设$f(x)$在区间$[0,2]$上连续可导，$f(0)=f(2)=0$，求证：

$$|\int_0^2 f(x)dx| \leq \max_{0\leq x\leq 2}|f'(x)|$$

14. (06期末) 设函数$f(x)$在$[2,4]$上存在二阶连续导数，且$f(3)=0$，证明：至少存在一点$\xi\in[2,4]$，使得$f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)dx$

15. （04期末）设$f(x)$在区间$[-1,1]$上连续，

且$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)\tan x dx = 0$，证明在区间$(-1,1)$内至少

存在互异的两点ξ_1, ξ_2，使$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$

16. 设$|a| \leq 1$, 求积分$I(a) = \int_{-1}^{1} |x-a|e^{2x}dx$的最大值（06期末）

17. 设$f(x) = a|\cos x| + b|\sin x|$在$x = -\frac{\pi}{3}$处取得最小值，

且$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2 dx = 2(\sqrt{3}+\pi)$, 求常数$a$和$b$　(13期末)