复变函数的积分

May 4, 2018

Outline

概念, 性质与计算

Cauchy积分定理

Cauchy积分公式和高阶导数公式

例3. 计算 $\int_L \frac{1}{(z-z_0)^n}dz$, $n \in \mathbb{Z}$, L 为以z_0 为中心ρ 为半径的圆，取逆时针方向

$$\int_L \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

例4. L: $0 \to 3+4i$ 的直线段，求证：$|\int_L \frac{1}{z+i}dz| \leq \frac{25}{3}$.

Cauchy积分定理

D: 单连通区域，L : 简单闭曲线，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 解析，$f'(z)$在D内连续，

$\Rightarrow u(x, y)$, $v(x, y)$ 在D内有一阶连续偏导数，且满足C−R条件

$\Rightarrow \oint_L f(z)dz = 0$。

Theorem (1 Cauchy积分定理)

$f(z)$在单连通区域D内解析，L: D内一条分段光滑的闭曲线，则

$$\oint_L f(z)dz = 0.$$

在D内$\int_L f(z)dz$与路径无关 （仅与始点及终点有关）

$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 定义了一个函数

Theorem (2)

If $f(z)$在单连通区域D内解析，则$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$在$D$内解析，

且$F'(z) = f(z)$.

If $\exists\ \Phi(z), \forall z \in D$ 有$\Phi'(z) = f(z)$, 则称$\Phi(z)$为$f(z)$在D内的一个原函数.

设$\Phi(z)$是$f(z)$的一个原函数，则$\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$.

例1. $\int_L e^{-z}dz$, L：$0 \to 1+\frac{\pi}{2}i$的任一分段光滑曲线。

答案：$1+e^{-1}i$

Theorem (3 复合闭路定理)

L, L_k: $(k = 1, \ldots, n)$ 为$n+1$条取逆时针方向的简单闭曲线。L_k在L内，L_k互不相交，互不包含，L, L_k围成复连通域D, $f(z)$在$\overline{D}$上解析，则 $\oint_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{L_k} f(z)dz.$

Remark:

- $n = 1$, Theorem 3 $\Rightarrow \displaystyle\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz$.
- 闭曲线积分的值不因形状的改变而改变，只要变形过程中不经过奇点。——闭路变形原理

L: $\forall$ 包含z_0的简单闭曲线，取逆时针方向，

$$\oint_L \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$$

例2. $\oint_L \frac{1}{z(z+1)} dz$, L: 包含$|z|=1$在内的任何简单闭曲线，取逆时针。

答案: 0

Cauchy积分公式和高阶导数公式

Theorem (1 Cauchy积分公式)

$f(z)$在区域D（单连通or复连通）及D的边界L上解析$\Rightarrow \forall z \in D$,

$f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_L \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, 这里$L$取正向。

例1. 以下积分路径取逆时针方向.

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z+3)^2(z+i)}dz$ 答案: $\dfrac{\pi}{25}(4+3i)$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{|dz|}{|z-1|^2}$ 答案: $\dfrac{8}{15}\pi$

例2. $f(z) = \displaystyle\oint_{|\zeta|=4} \frac{\zeta^2-5\zeta+1}{\zeta-z}d\zeta$, 求$f'(1+i)$.

$-4\pi - 6\pi i$

Theorem (2 高阶导数公式)

$f(z)$在区域D及D的边界L上解析，则$f(z)$在区域D内有任意阶导数，且$\forall z \in D$, 有

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$n = 0$时，$f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_L \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$——Cauchy积分公式

例3. $\oint_{|z|=r} \frac{z}{(z+3)^2(z+i)} dz \ (r \neq 0, 1, 3)$取逆时针方向。

$$\begin{cases} 0 < r < 1 & 0 \\ 1 < r < 3 & \frac{\pi}{25}(4+3i) \\ r > 3 & 0 \end{cases}$$