多维空间基础知识复习

钟思佳

东南大学数学系

February 19, 2017

n 维空间

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | \ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

n 维空间中任意两点$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$与$Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$之间的距离

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

n 维空间

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) |\; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

n 维空间中任意两点$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$与$Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$之间的

距离

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

$$\rho(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

性质:

1. $\rho(P,Q)\geq 0$
2. $\rho(P,Q)=\rho(Q,P)$
3. $\rho(P,Q)\leq\rho(P,M)+\rho(M,Q)$

1. 邻域，去心邻域

- P_0的δ邻域：$N(P_0,\delta)=\{P\in\mathbb{R}^n|\ \rho(P,P_0)<\delta\}$
- P_0的δ去心邻域：$\mathring{N}(P_0,\delta)=\{P\in\mathbb{R}^n|\ 0<\rho(P,P_0)<\delta\}$

- P_0的δ邻域：$N(P_0, \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n | \rho(P, P_0) < \delta\}$
- P_0的δ去心邻域：$\mathring{N}(P_0, \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n | 0 < \rho(P, P_0) < \delta\}$

1. 邻域，去心邻域
2. 开集，区域

1. 邻域，去心邻域
2. 开集，区域

$E \subset \mathbb{R}^n$为n空间的一个点集，$P \in \mathbb{R}^n$:

- P是E的内点：$\exists\ P$ 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P) \subset E$
- P是E的外点：$\exists\ P$ 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P) \bigcap E = \emptyset$
- P是E的边界点：$\forall\ P$ 的邻域$N(P)$ 既有E的内点，又有E的外点. ∂E——E 的边界
- P是E的聚点：$\forall\ P$的邻域，$\exists$ 异于P的E 中的点，i.e. $\forall\ \delta > 0, \mathring{N}(P, \delta) \bigcap E \neq \emptyset$ ($\forall\ P$的邻域中有E的无穷多个点)

$E \subset \mathbb{R}^n$为n空间的一个点集，$P \in \mathbb{R}^n$:

- P是E的内点：$\exists\ P$ 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P) \subset E$
- P是E的外点：$\exists\ P$ 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P) \bigcap E = \emptyset$
- P是E的边界点：$\forall\ P$ 的邻域$N(P)$ 既有E的内点，又有E的外点．∂E——E 的边界
- P是E的聚点：$\forall\ P$的邻域，$\exists$ 异于P的E 中的点，i.e. $\forall\ \delta > 0, \mathring{N}(P, \delta) \bigcap E \neq \emptyset$ ($\forall\ P$的邻域中有E的无穷多个点)

$E \subset \mathbb{R}^n$为n空间的一个点集，$P \in \mathbb{R}^n$:

- P是E的内点：$\exists$ P 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P) \subset E$
- P是E的外点：$\exists$ P 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P) \bigcap E = \emptyset$
- P是E的边界点：$\forall$ P 的邻域$N(P)$ 既有E的内点，又有E的外点． ∂E——E 的边界
- P是E的聚点：$\forall$ P的邻域，$\exists$ 异于P的E 中的点，i.e. $\forall\, \delta > 0, \mathring{N}(P, \delta) \bigcap E \neq \emptyset$ ($\forall$ P的邻域中有E的无穷多个点)

$E \subset \mathbb{R}^n$为n空间的一个点集，$P \in \mathbb{R}^n$:

- P是E的内点：$\exists$ P 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P) \subset E$
- P是E的外点：$\exists$ P 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P) \bigcap E = \emptyset$
- P是E的边界点：$\forall$ P 的邻域$N(P)$ 既有E的内点，又有E的外点. ∂E——E 的边界
- P是E的聚点：$\forall$ P的邻域，$\exists$ 异于P的E 中的点，i.e. $\forall\ \delta > 0, \mathring{N}(P, \delta) \bigcap E \neq \emptyset$ ($\forall$ P的邻域中有E的无穷多个点)

$E \subset \mathbb{R}^n$为n空间的一个点集，$P \in \mathbb{R}^n$:

- P是E的内点：$\exists\ P$ 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P) \subset E$
- P是E的外点：$\exists\ P$ 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P) \bigcap E = \emptyset$
- P是E的边界点：$\forall\ P$ 的邻域$N(P)$ 既有E的内点，又有E的外点. ∂E——E 的边界
- P是E的聚点：$\forall\ P$的邻域，$\exists$ 异于P的E 中的点，i.e. $\forall\ \delta > 0, \mathring{N}(P, \delta) \bigcap E \neq \emptyset$ ($\forall\ P$的邻域中有E的无穷多个点)

$E \subset \mathbb{R}^n$为n空间的一个点集，$P \in \mathbb{R}^n$:

- P是E的内点：$\exists\ P$ 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P) \subset E$
- P是E的外点：$\exists\ P$ 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P) \bigcap E = \emptyset$
- P是E的边界点：$\forall\ P$ 的邻域$N(P)$ 既有E的内点，又有E的外点. ∂E——E 的边界
- P是E的聚点：$\forall\ P$的邻域，$\exists$ 异于P的E 中的点，i.e. $\forall\ \delta > 0,\ \mathring{N}(P, \delta) \bigcap E \neq \emptyset$ ($\forall\ P$的邻域中有E的无穷多个点)

$E\subset\mathbb{R}^n$为n空间的一个点集，$P\in\mathbb{R}^n$:

- P是E的内点：$\exists$ P 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P)\subset E$
- P是E的外点：$\exists$ P 的邻域$N(P)$ s.t. $N(P)\bigcap E=\emptyset$
- P是E的边界点：$\forall$ P 的邻域$N(P)$ 既有E的内点，又有E的外点. ∂E——E 的边界
- P是E的聚点：$\forall$ P的邻域，$\exists$ 异于P的E 中的点，i.e. $\forall\ \delta>0$, $\mathring{N}(P,\delta)\bigcap E\neq\emptyset$ ($\forall$ P的邻域中有E的无穷多个点)

- 开集：$\forall P \in E$ 都是内点
- 连通集：$\forall P_1, P_2 \in E, \exists L \subset E$, 有限折，把$P_1, P_2$连起来
- 区域：E 为连通开集
- 闭区域：区域连同它的边界
- 有界集：$\exists N(0, r)$, s.t. $E \subset N(0, r)$

区域E的直径：$d = \sup\{\rho(P_1, P_2) | \forall P_1, P_2 \in E\}$

- 开集：$\forall\ P \in E$ 都是内点
- 连通集：$\forall\ P_1$，$P_2 \in E, \exists\ L \subset E$, 有限折，把$P_1$, P_2连起来
- 区域：E 为连通开集
- 闭区域：区域连同它的边界
- 有界集：$\exists\ N(0, r)$, s.t. $E \subset N(0, r)$

区域E的直径：$d = \sup\{\rho(P_1, P_2) |\ \forall P_1,\ P_2 \in E\}$

- 开集：$\forall\, P \in E$ 都是内点
- 连通集：$\forall\, P_1$，$P_2 \in E, \exists\, L \subset E$, 有限折，把$P_1, P_2$连起来
- 区域：E 为连通开集
- 闭区域：区域连同它的边界
- 有界集：$\exists\, N(0, r)$, s.t. $E \subset N(0, r)$

区域E的直径：$d = \sup\{\rho(P_1, P_2) | \,\forall P_1$，$P_2 \in E\}$

- 开集：$\forall\ P \in E$ 都是内点
- 连通集：$\forall\ P_1$，$P_2 \in E, \exists\ L \subset E$, 有限折，把$P_1, P_2$连起来
- 区域：E 为连通开集
- 闭区域：区域连同它的边界
- 有界集：$\exists\ N(0, r)$, s.t. $E \subset N(0, r)$

区域E的直径：$d = \sup\{\rho(P_1, P_2) | \ \forall P_1,\ P_2 \in E\}$

- 开集：$\forall\, P \in E$ 都是内点
- 连通集：$\forall\, P_1$，$P_2 \in E, \exists\, L \subset E$, 有限折，把$P_1, P_2$连起来
- 区域：E 为连通开集
- 闭区域：区域连同它的边界
- 有界集：$\exists\, N(0,r)$, s.t. $E \subset N(0,r)$

区域E的直径：$d = \sup\{\rho(P_1, P_2) \mid \forall P_1,\ P_2 \in E\}$

- 开集：$\forall\ P \in E$ 都是内点
- 连通集：$\forall\ P_1$，$P_2 \in E, \exists\ L \subset E$, 有限折，把$P_1, P_2$连起来
- 区域：E 为连通开集
- 闭区域：区域连同它的边界
- 有界集：$\exists\ N(0, r)$, s.t. $E \subset N(0, r)$

区域E的直径：$d = \sup\{\rho(P_1, P_2) |\ \forall P_1,\ P_2 \in E\}$

n元m维函数:

Definition

$A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, f 对应关系， $\forall\ X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$, 通过$f$ $\exists!\ Y(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in B$ s.t. $Y = f(X)$.

A: 定义域， $f(A)$: 值域

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots & \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

n元m维向量函数

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

If $m = 1$, $f:\ A \to \mathbb{R}$, $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n 元函数

几何意义

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

n元m维向量函数

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

If $m = 1$, $f: A \to \mathbb{R}$, $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n 元函数

几何意义

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\ldots \\
y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

n元m维向量函数

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

If $m = 1$, $f: A \to \mathbb{R}$, $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n 元函数

几何意义