习题课六 极值最值渐近线

一. 选择题

1. 设$f(x)$在$x=x_0$的某邻域内有三阶连续导数，
且$f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，则$x=x_0$是(　　)
A. 是极值点，$(x_0,f(x_0))$一定不是拐点
B. 是极值点，$(x_0,f(x_0))$不一定是拐点
C. 不是极值点，$(x_0,f(x_0))$一定是拐点
D. 不是极值点，$(x_0,f(x_0))$一定不是拐点

2. 曲线$y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ (　　)
A. 无渐近线　　B. 仅有水平渐近线
C. 仅有垂直渐近线　　D. 既有水平渐近线，又有垂直渐近线

3. 设偶函数$f(x)$有二阶连续导数，且$f''(0)\neq 0$，则$x=0$
A. 不是$f(x)$的驻点　　B. 不是$f(x)$的极值点
C. 是$f(x)$的极值点　　D. 不能确定是否为$f(x)$的极值点

4. $f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$
A. 只有极大值，无极小值
B. 只有极小值，无极大值
C. 在$x=-1$时取极大值，在$x=0$时取极小值
D. 在$x=-1$时取极小值，在$x=0$时取极大值

5. 设函数$f(x)$在$x=0$的邻域内二阶连续可导，
且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\dfrac{1}{2}$，则
A. $f'(0)$是$f'(x)$的极小值　　B. $f'(0)$是$f'(x)$的极大值
C. $f(0)$是$f(x)$的极小值　　D. $f(0)$是$f(x)$的极大值

6. 设函数$f_i(x)$（$i=1,2$）具有二阶连续导数，且$f_i''(x_0)<0$ ($i=1,2$)，若两条曲线$y=f_i(x)$ ($i=1,2$) 在点(x_0,y_0)处具有共切线$y=g(x)$，且在该点处曲线$y=f_1(x)$的曲率大于$y=f_2(x)$的曲率，则在x_0的某个邻域内，有
(A) $f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$　　(B) $f_2(x)\le f_1(x)\le g(x)$
(C) $f_1(x)\le g(x)\le f_2(x)$　　(D) $f_2(x)\le g(x)\le f_1(x)$

二. (1) $e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$ $(0<x<1)$

(2) $(a+x)^a<a^{a+x}$ $(a>e,\ x>0)$

(3) $xe^{1-x}\le 1$ $(x\in(-\infty,\infty))$

(4) $(1+\dfrac{1}{x})^{x+1}>e$ $(x>0)$

三. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在$x=a(a\neq 0)$有极值，证明：曲线$y=f(x)$在$(a,f(a))$处的切线过原点。

四. 设在$[1,+\infty)$上$f''(x)\leq 0$，且$f(1)=2$, $f'(1)=-3$, 证明：方程$f(x)=0$在$(1,+\infty)$内有且仅有一个实根。

五. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上二阶可导，且$f(0)=1$,
$f'(0)>1$，$f''(x)>f(x)$ $(x>0)$，求证：$f(x)>e^x$ $(x>0)$. (14'竞赛题)

六. 设$f_n=\dfrac{1}{n+1}x-\arctan x$ (其中n为正整数)。

(1) 证明：f_n 在区间$(0,+\infty)$内有唯一的零点x_n;

(2) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

七. 已知函数$f(x)$ 二阶可导，且满足 $f(x)>0$,
$f''(x)f(x)-(f'(x))^2\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$,

(1) 证明：$f(x_1)f(x_2)\geq f^2(\dfrac{x_1+x_2}{2})$, $\forall\ x_1$，$x_2\in\mathbb{R}$,

(2) 若$f(0)=1$, $f'(0)=2$, 证明 $f(x)\geq e^{2x}$, $x\in\mathbb{R}$ （16竞赛）

历年试题

1. 试证：（1）设$u>e$, 方程$x\ln x=u$在$x>e$时存在唯一的实根$x(u)$;
（2）当$u\to+\infty$时，$\dfrac{1}{x(u)}$ 是无穷小量，且是与$\dfrac{\ln u}{u}$等价的无穷小量 (05期末)

2. 曲线$y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})$的斜渐近线方程是（06期末）

3. 曲线$y=2x+\dfrac{\ln x}{x-1}+4$渐近线的条数为
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0 (03 期末)

4. (06期中) 举出符合各题要求的一例，
（1）在$x=0$处不连续，但当$x\to 0$时，极限存在的函数
（2）在$x=0$处连续，但在$x=0$时不可导的函数
（3）在$x=0$处导数为0，但$x=0$不为极值点的连续函数
（4）属于"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"未定型，且存在有限极限，但极限不能用洛必达法则求得

5.（04期末）设$0<a<b$, 求证$\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{a+b}$

6. 求曲线$y=x^2$ $(0\leq x\leq 8)$的切线，使切线与直线$y=0$及直线$x=8$所围成的图形的面积最大 (04期中)

7. (14期末) 设$f(x)=\min\{\sin x, x-\dfrac{x^3}{6}\}$，求$f(x)$在区间$[-5,3]$上的最大值和最小值

8. 设f在区间$[0,1]$上二阶可导，且$f''(x)>0$，则有
(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$ (B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$
(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$ (D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$
(09期中)

9. (05期中) 当a取下列哪个数值时，函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$恰有两个不同的零点
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

10. 已知函数f在$x=0$的某个邻域内连续，$f(0)=0$,
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$，则$f$在$x=0$处
(A) 不可导 (B) 可导且$f'(0)\neq 0$
(C) 取得极大值 (D) 取得极小值 （03期中）