习题课8-第二型曲线、曲面积分

April 26, 2017

一. 选择题

一. 选择题

1. 设$f(x)$有一阶连续导数，则$\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,2)} f(x+y)dx + f(x+y)dy =$

(A) $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx$ (B) $\int_0^1 f(x)dx$

(C) $f(3) - f(1)$ (D) 0

一. 选择题

1. 设$f(x)$有一阶连续导数，则$\int_{(0,0)}^{(1,2)} f(x+y)dx + f(x+y)dy =$

(A) $\int_0^3 f(x)dx$　　(B) $\int_0^1 f(x)dx$

(C) $f(3) - f(1)$　　(D) 0

2. 设L 为$x^2 + y^2 = 2x\ (y \geq 0)$上从$(1,1)$到$(0,0)$一段，则$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$

(A) $\int_L (P(x,y) + Q(x,y)\frac{1-x}{y})ds$

(B) $\int_L (-P(x,y) - Q(x,y)\frac{1-x}{y})ds$

(C) $\int_L (P(x,y)\sqrt{2x-x^2} + Q(x,y)(1-x))ds$

(D) $\int_L (-P(x,y)\sqrt{2x-x^2} - Q(x,y)(1-x))ds$

3. 设L：$4x^2+y^2=1$，正向，则$\oint_L \frac{-ydx+xdy}{4x^2+y^2}=$

(A) -2π (B) 2π (C) π (D) 0

3. 设L：$4x^2+y^2=1$，正向，则$\oint_L \frac{-ydx+xdy}{4x^2+y^2}=$

(A) -2π (B) 2π (C) π (D) 0

4. 设在上半平面上，积分$\int_L \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^n}$与路径无关，则$n=$

(A) -1 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

二. 计算积分

1. $\oint_L (x + y\cos x)dx + (xy + \sin x)dy$, $L:\ (x-1)^2 + y^2 = 1$,
正向

二. 计算积分

1. $\oint_L (x + y\cos x)dx + (xy + \sin x)dy$, $L:\ (x-1)^2 + y^2 = 1$，正向

2. 设L是xy平面上顺时针方向的光滑闭曲线，且$\oint_L (x^2 - 4y)dx + (2x + y^2)dy = -18$, 求$L$围成的区域$D$ 的面积

二. 计算积分

1. $\oint_L (x + y\cos x)dx + (xy + \sin x)dy$, L： $(x-1)^2 + y^2 = 1$，正向

2. 设L是xy平面上顺时针方向的光滑闭曲线，且$\oint_L (x^2 - 4y)dx + (2x + y^2)dy = -18$，求$L$围成的区域$D$ 的面积

3. $I = \int_L (e^y - 12xy)dx + (xe^y - \cos y)dy$, L： $y = x^2$上从$A(-1,1)$到$B(1,1)$一段

二. 计算积分

1. $\oint_L (x + y\cos x)dx + (xy + \sin x)dy$, $L: \ (x-1)^2 + y^2 = 1$, 正向

2. 设L是xy平面上顺时针方向的光滑闭曲线, 且$\oint_L (x^2 - 4y)dx + (2x + y^2)dy = -18$, 求$L$围成的区域$D$ 的面积

3. $I = \int_L (e^y - 12xy)dx + (xe^y - \cos y)dy$, $L: \ y = x^2$上从$A(-1,1)$到$B(1,1)$一段

4. $\oint_L \dfrac{(x^3y + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy}{9x^2 + 4y^2}$, $L: \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, 顺时针

5. 设$f(y), g(y)$有二阶连续导数，$f(0)=1, g(0)=-2$对任意闭曲线L，恒有

$$\oint_L 2(xg(y)+f(y))dx+(x^2f(y)+2xy^2-2xg(y))dy=0,$$

求$f(y), g(y)$

5. 设$f(y), g(y)$有二阶连续导数，$f(0)=1, g(0)=-2$对任意闭曲线L，恒有

$$\oint_L 2(xg(y)+f(y))dx+(x^2f(y)+2xy^2-2xg(y))dy=0,$$

求$f(y), g(y)$

6. $\iint_\Sigma -ydz\wedge dx+(z+1)dx\wedge dy, \Sigma: \ x^2+y^2=4$
被$x+z=2$和$z=0$所截部分外侧

5. 设$f(y), g(y)$有二阶连续导数，$f(0)=1, g(0)=-2$对任意闭曲线L，恒有

$$\oint_L 2(xg(y)+f(y))dx+(x^2f(y)+2xy^2-2xg(y))dy=0,$$

求$f(y), g(y)$

6. $\iint_\Sigma -ydz\wedge dx+(z+1)dx\wedge dy, \Sigma:\ x^2+y^2=4$
被$x+z=2$和$z=0$所截部分外侧

7. $\iint_\Sigma 2(1-x^2)dy\wedge dz+8xydz\wedge dx-4zxdx\wedge dy,$
$\Sigma:\begin{cases} x=e^y \\ z=0 \end{cases}\quad (0\le y\le a)$绕$x$轴旋转而得的曲面，曲面法向量与$x$轴正向夹角大于$\dfrac{\pi}{2}$

8.
$I=\iint_{\Sigma}(x^3+az^2)dy\wedge dz+(ax^2+y^3)dz\wedge dx+(z^3+ay^2)dx\wedge dy$,
$\Sigma:\ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$上侧

8.

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 + az^2) dy \wedge dz + (ax^2 + y^3) dz \wedge dx + (z^3 + ay^2) dx \wedge dy,$$

$\Sigma: \ z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$上侧

9. $I = \iint_{\Sigma} x(e^{z^2} + 1) dz \wedge dx + (x + y + z) dx \wedge dy,$

$\Sigma: \ z = x^2 + y^2 \ (0 \leq z \leq H)$, 上侧。

8.
$$I=\iint_{\Sigma}(x^3+az^2)dy\wedge dz+(ax^2+y^3)dz\wedge dx+(z^3+ay^2)dx\wedge dy,$$
$\Sigma:\ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$上侧

9. $I=\iint_{\Sigma}x(e^{z^2}+1)dz\wedge dx+(x+y+z)dx\wedge dy,$
$\Sigma:\ z=x^2+y^2\ (0\leq z\leq H)$, 上侧。

10. $I=\iint_{\Sigma}\dfrac{xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$
$\Sigma:\ 1-\dfrac{z}{7}=\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}$, $(z\geq 0)$, 上侧

11. $I = \iint_{\Sigma} \frac{2dy \wedge dz}{x \cos^2 x} + \frac{dz \wedge dx}{\cos^2 y} - \frac{dx \wedge dy}{z \cos^2 z}$,

$\Sigma:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 外侧

11. $I = \iint_{\Sigma} \frac{2dy \wedge dz}{x\cos^2 x} + \frac{dz \wedge dx}{\cos^2 y} - \frac{dx \wedge dy}{z\cos^2 z}$,
$\Sigma:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 外侧

12. $I = \oint_C x^2yzdx + (x^2 + y^2)dy + (x + y + 1)dz$,
$C:\ \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ z = x^2 + y^2 + 1, \end{cases}$ 方向为从原点O向z轴正向看去逆时针。

11. $I=\iint_{\Sigma}\frac{2dy\wedge dz}{x\cos^2 x}+\frac{dz\wedge dx}{\cos^2 y}-\frac{dx\wedge dy}{z\cos^2 z}$,
$\Sigma:\ x^2+y^2+z^2=1$, 外侧

12. $I=\oint_C x^2yzdx+(x^2+y^2)dy+(x+y+1)dz$,
$C:\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=x^2+y^2+1, \end{cases}$ 方向为从原点O向z轴正向看去逆时针。

13. 过点$O(0,0)$和$A(\pi,0)$的曲线族$y=a\sin x\ (a>0)$中，求一条曲线L使沿该曲线从O到A的积分$\int_L(1+y^2)dx+(2x+y)dy$的值最小

竞赛

1. 计算第二型曲线积分

$$I=\oint_C \frac{e^y}{x^2+y^2}((x\sin x+y\cos x)dx+(y\sin x-x\cos x)dy),$$

其中C：$x^2+y^2=1$，取逆时针方向。（15‘竞赛题）

历年试题

1. (05期中) 设L是摆线$\begin{cases} x = t - \sin t - \pi \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 上从$t = 0$到$t = 2\pi$的弧段，则曲线积分$\displaystyle\int_L \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2} =$
(A) π　(B) $-\pi$　(C) 0　(D) 2π

2. (05期末) 已知微分式$dz = (2xy + 3x^2)dx + (x^2 + 3y^2)dy$，则其原函数$z =$

3. (07期末) 设C是圆周$x^2 + y^2 = x + y$，取逆时针方向，连续函数$f(x) > 0$，证明：$\displaystyle\int_C xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx \geq \pi$

4. （09期末）计算$\displaystyle\int_C \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$，其中$C$：$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=(\frac{1}{\pi})^{\frac{2}{3}}$，方向为逆时针

5. （14期末）当$\alpha=$ ____ , $\beta=$ ____ 时，向量场$A=(2x+\alpha y)i+(x+3y)j+(\beta y-z)k$为有势场

6. (14期末) 计算第二型曲线积分$\displaystyle\int_C \frac{ydx-xdy}{x^2+9y^2}$，$C$是以$A(-1,0)$为起点，$B(1,0)$为终点的下半单位圆周$y=-\sqrt{1-x^2}$

7. (15期末) 计算$\displaystyle\int_L \frac{(3y-x)dx+(y-3x)dy}{(x+y)^3}$，其中$L$为由点$A(\pi,0)$沿曲线$y=\pi\cos\dfrac{x}{2}$到点$B(0,\pi)$的弧段

8. (15期末) 计算第二型曲面积分 $\iint_\Sigma y^2 dz \wedge dx + z dx \wedge dy$，其中$\Sigma$是曲面$z = x^2 + y^2$上满足$z \leq 2x$的部分，取下侧