

一阶常微分方程

钟思佳

东南大学数学系

December 22, 2017

一阶可分离变量的常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\text{If } g(y) = 0 \implies y = C$$

$$\text{If } g(y) \neq 0, \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \implies G(y) = F(x) + C.$$

例 1.1. 求 $y(1+x^2)dy = x(1+y^2)dx$ 的通解。

$$y^2 = C(1+x^2) - 1$$

例 1.2. 镭的衰变：设镭的衰变速度与镭的剩余量成正比。已知镭的原质量为 m_0 ，经过1600年后，只剩下原质量的一半，求镭的衰变规律。

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{1600} t}$$

一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$q(x) = 0 \implies y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

$$\text{常数变异法 } y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx} \implies$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

so

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right)$$

例 1.3. 求 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -1$ 的通解。

$$y = -x \ln |x| - cx$$

例 1.4. 求 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y^2}$ 的通解。

$$x = y^2(-\ln|y| + C)$$

一些特殊情况

1. 齐次方程

$$y' = f(x, y)$$

$$f(tx, ty) = f(x, y) = f(1, \frac{y}{x})$$

$$\text{令 } u = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = (f(1, u) - u) \frac{1}{x}$$

可分离变量的类型

例 1.5. 求 $2xy^2 \frac{dy}{dx} - 2y^3 = x^3 \frac{dy}{dx}$ 的通解。

$$y = Ce^{\frac{y^2}{x^2}}$$

2. Bernoulli 方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \quad n \neq 0, 1$$

$$\text{令 } z = y^{1-n} \Rightarrow \frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

例 1.6. 求 $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}y + x^4y^{\frac{1}{3}}$ 的通解。

$$y^{\frac{2}{3}} = x^2(\frac{2}{9}x^3 + C)$$

例 1.7. 求微分方程 $x \frac{dy}{dx} - y = 2\sqrt{xy}$ 的通解。

$$e^{\sqrt{\frac{y}{x}}} = Cx$$

例 1.8. 求 $\frac{dy}{dx} = 2(\frac{y+2}{x+y-1})^2$ 的通解。

$$Ce^{-2 \arctan \frac{y+2}{x-3}} = y + 2$$