Fourier 级数

钟思佳

东南大学数学系

June 10, 2018

Outline

正弦级数和余弦级数

（1） 奇函数和偶函数的Fourier级数

Theorem (2)

$f(x)$以2π为周期，在一个周期上可积，则

(1) 当$f(x)$为奇函数时，$a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(2) 当$f(x)$为偶函数时，$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $b_n = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$

If $f(x)$ 奇， $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ 是正弦级数

If $f(x)$ 偶， $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx)$ 余弦级数

例5. 将$u(t) = E|\sin\dfrac{t}{2}|$, ($E > 0$ const.) 展成Fourier级数

（2）将函数展成正弦or余弦级数

设$f(x)$在$[0,\pi]$上满足收敛定理的条件,

1. 将$f(x)$在$[0,\pi]$上展成正弦级数：令

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(0,\pi] \\ 0 & x=0, \\ -f(-x) & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

$$a_n=0\ (n=0,1,2,\dots),$$
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\ (n=1,2,\dots)$$

2. 将$f(x)$在$[0,\pi]$上展成余弦级数： 令

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & x\in[0,\pi] \\ f(-x) & x\in[-\pi,0) \end{cases}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx\ (n=0,1,2,\dots),$$
$$b_n=0\ (n=1,2,\dots)$$

例6. 将$f(x) = x + 1,\ (0 \leq x \leq \pi)$分别展开成正弦级数和余弦级数

以$2l$为周期的函数的Fourier级数

设以$2l$为周期的函数$f(x)$在$[-l, l]$上满足Dirichlet条件

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l})$$

Theorem (3)

设$f(x)$以$2l$为周期，在$[-l, l]$上满足*Dirichlet*条件，则

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$$

$$=\begin{cases} f(x) & x\text{为}f(x)\text{的连续点} \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & x\text{为}f(x)\text{的间断点} \\ \frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x=\pm l \end{cases}$$

其中，

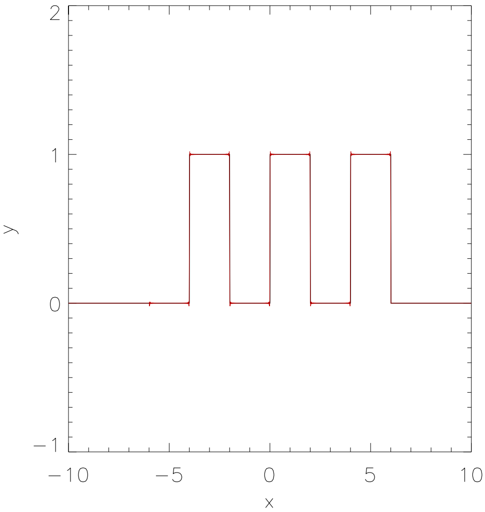
$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,\ldots$$

If $f(x)$为$[-l,l]$上的奇函数，则$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$, 其中$b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1, 2, \ldots$

If $f(x)$为$[-l,l]$上的偶函数，则$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$, 其中$a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

例7. 将以4为周期的函数$f(x)=\begin{cases} 0 & -2\leq x<0 \\ 1 & 0\leq x<2, \end{cases}$ 展开成Fourier级数


2
1
0
−1
y
−10
−5
0
5
10
x

例8. 将$f(x) = 2 + |x|$ （$-1 \leq x \leq 1$）展开成以2 为周期的Fourier级数，并求$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$的和。

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \quad --- \quad \text{Basel problem}$$

Fourier级数的复数形式

Euler公式:

$\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$,

$f(x)$: 以$2l$为周期

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}},$$

其中 $c_n = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$