解析函数的孤立奇点及留数

钟思佳

东南大学数学系

May 30, 2018

Outline

例1. 求下列函数的奇点，并指出其类型

(1) $f(z) = z^2(\sin \frac{1}{z})^{-1}$

(2) $f(z) = \frac{(z+1)^2 \sin z}{z^2(z^2-1)^2}$

(3) $f(z) = \frac{1}{z^2(e^z - 1)}$

(4) $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$

在∞处

If $f(z)$在$z=\infty$的去心邻域$R<|z|<+\infty$内解析，Laurent展式为 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

令$t=\frac{1}{z}$，$\varphi(t)=f(\frac{1}{t})$ 在$t=0$的去心邻域 $0<|t|<\frac{1}{R}$ 内解析，Laurent展式为 $\varphi(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n t^{-n}$

规定:

$t=0,$	$\varphi(t)$	可去奇点	m级极点	本性奇点
$z=\infty,$	$f(z)$	可去奇点	m级极点	本性奇点

- $z=\infty$ 为可去奇点: $\Leftrightarrow f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \ (R<|z|<\infty)$ 不含正幂项 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 存在
- $z=\infty$ 为（m级）极点：$\Leftrightarrow f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ $(R<|z|<\infty)$ 只含有有限个正幂项，$C_m \neq 0, C_n=0,$ $(n=m+1, m+2, \cdots) \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$
- $z=\infty$ 为本性奇点：$\Leftrightarrow f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \ (R<|z|<\infty)$ 有无穷多个正幂项 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在且不为∞

例2. $\dfrac{\sin z}{z^3}$, ∞ 为什么类型奇点？ 0?

留数

设$z = z_0$ 是 $f(z)$的孤立奇点， 在$0 < |z - z_0| < \delta$ 展成Laurent展式：$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$。 L: $0 < |z - z_0| < \delta$ 包含z_0 的任一条逆时针方向的简单闭曲线， 称

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)dz$$

为$f(z)$ 在z_0 的留数， 记为 $Res[f(z), z_0]$，i.e.

$$Res[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)dz = c_{-1}.$$

无穷远点∞ 处的留数：

设$f(z)$在无穷远点 $z=\infty$的去心邻域 $R<|z|<+\infty$内解析，L: $R<|z|<\infty$ 包含z_0 的任一条逆时针方向的简单闭曲线，$f(z)$在∞ 处的留数定义为：

$$Res[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^-} f(z)dz=-c_{-1}.$$

留数计算方法

1. if z_0为 $f(z)$的可去奇点，则 $Res[f(z), z_0] = 0$
2. if z_0为 $f(z)$的1级极点，则 $Res[f(z), z_0] = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$
3. if z_0为 $f(z)$ 的m级极点，则
   $$Res[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$
4. 设$f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z), Q(z)$在$z_0$解析，且$P(z_0) \neq 0$,
   $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0) \neq 0$, 则$Res[f(z), z_0] = \dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$
5. $Res[f(z), \infty] = -Res[f(\frac{1}{z}) \frac{1}{z^2}, 0]$

Remarks:

- 在(3) 中取$m = 1 \Rightarrow$ (2)
- 由 (3) 的证明，if 级数小于m, 也可以当m来计算

例3. 求奇点并计算留数

(1) $f(z) = \dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$

三种方法:

1. Laurent展开
2. 由定义: $Res[f(z), z_0] = c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz$,
   $Res[f(z), \infty] = -c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{L^-} f(z)dz$
3. 由计算方法