解析函数的孤立奇点及留数

钟思佳

东南大学数学系

May 28, 2018

Outline

孤立奇点与非孤立奇点

孤立奇点的分类

留数
- 定义
- 计算
- 留数定理

孤立奇点与非孤立奇点

孤立奇点与非孤立奇点

奇点：非解析点

孤立奇点与非孤立奇点

奇点：非解析点

奇点：孤立奇点与非孤立奇点

孤立奇点与非孤立奇点

奇点：非解析点

奇点：孤立奇点与非孤立奇点

孤立奇点：$f(z)$在z_0不解析，但在z_0的某去心邻域$0 < |z - z_0| < \delta$内解析。

a方式分：Laurent级数的形式

a方式分：Laurent级数的形式

在$0 < |z - z_0| < \delta$ 内展成 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$

- z_0为$f(z)$的可去奇点:

- z_0为$f(z)$的可去奇点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中无负幂项

- z_0为$f(z)$的可去奇点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中无负幂项$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$

- z_0为$f(z)$的可去奇点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中无负幂项$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$
- z_0为$f(z)$的（m级）极点：

- z_0为$f(z)$的可去奇点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中无负幂项$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$
- z_0为$f(z)$的（m级）极点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中负幂项只有有限项，$C_{-m}\neq 0$，$C_n=0$，$(n=-m-1,-m-2,\cdots)$

- z_0为$f(z)$的可去奇点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中无负幂项$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$
- z_0为$f(z)$的（m级）极点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中负幂项只有有限项，$C_{-m} \neq 0$，$C_n = 0$，$(n = -m-1, -m-2, \cdots)\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$

- z_0为$f(z)$的可去奇点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中无负幂项$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$
- z_0为$f(z)$的（m级）极点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中负幂项只有有限项，$C_{-m}\neq 0$，$C_n = 0$，$(n=-m-1,-m-2,\cdots)\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$
- z_0 为$f(z)$的本性奇点：

- z_0为$f(z)$的可去奇点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中无负幂项$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$
- z_0为$f(z)$的（m级）极点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中负幂项只有有限项，$C_{-m}\neq 0$，$C_n=0$，$(n=-m-1,-m-2,\cdots)\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$
- z_0 为$f(z)$的本性奇点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中负幂项有无穷多项

- z_0为$f(z)$的可去奇点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中无负幂项$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$
- z_0为$f(z)$的（m级）极点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中负幂项只有有限项，$C_{-m}\neq 0$，$C_n=0$，$(n=-m-1,-m-2,\cdots)\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$
- z_0 为$f(z)$的本性奇点：$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$中负幂项有无穷多项$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在也不为“∞”

b方式分：$z \to z_0$时 $f(z)$的极限

- 可去奇点：$\lim_{z \to z_0} f(z)$ 存在
- 极点：$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$
- 本性奇点：$\lim_{z \to z_0} f(z)$不存在也不为"∞"

零点：if $f(z_0) = 0$

零点：if $f(z_0) = 0$

m级零点：if $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $\varphi(z)$在z_0处解析且$\varphi(z_0) \neq 0$

性质:

性质:

- if $f(z)$ 在z_0处解析，z_0 为$f(z)$的m级零点 $\Leftrightarrow f^{(n)}(z_0)=0$, $(n=0,1,2,\cdots,m-1)$, $f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

性质：

- if $f(z)$ 在z_0处解析，z_0 为$f(z)$的m级零点 $\Leftrightarrow f^{(n)}(z_0)=0$, $(n=0,1,2,\cdots,m-1)$, $f^{(m)}(z_0)\neq 0$.
- z_0为$f(z)$的m级零点$\Leftrightarrow$ z_0 为$\dfrac{1}{f(z)}$的m级极点。

Remark: If z_0 是$f(z)$的m级零点，同时是$g(z)$的n 级零点，则:

Remark: If z_0 是$f(z)$的m级零点，同时是$g(z)$的n 级零点，则:

- z_0是$f(z)g(z)$的$m+n$ 级零点

Remark: If z_0 是$f(z)$的m级零点，同时是$g(z)$的n 级零点，则:

- z_0是$f(z)g(z)$的$m+n$ 级零点
- If $m \geq n$, z_0是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的可去奇点

Remark: If z_0 是$f(z)$的m级零点，同时是$g(z)$的n 级零点，则:

- z_0是$f(z)g(z)$的$m+n$ 级零点
- If $m \geq n$, z_0是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的可去奇点
- if $m < n$, z_0是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的$n-m$ 级极点

例1. 求下列函数的奇点，并指出其类型

例1. 求下列函数的奇点，并指出其类型

(1) $f(z) = z^2(\sin \frac{1}{z})^{-1}$

例1. 求下列函数的奇点，并指出其类型

(1) $f(z) = z^2(\sin \frac{1}{z})^{-1}$

(2) $f(z) = \dfrac{(z+1)^2 \sin z}{z^2(z^2-1)^2}$

例1. 求下列函数的奇点，并指出其类型

(1) $f(z) = z^2(\sin\frac{1}{z})^{-1}$

(2) $f(z) = \dfrac{(z+1)^2 \sin z}{z^2(z^2-1)^2}$

(3) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$

例1. 求下列函数的奇点，并指出其类型

(1) $f(z) = z^2(\sin\frac{1}{z})^{-1}$

(2) $f(z) = \dfrac{(z+1)^2\sin z}{z^2(z^2-1)^2}$

(3) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$

(4) $f(z) = z\cos\frac{1}{z}$

在∞处

If $f(z)$在$z=\infty$的去心邻域$R<|z|<+\infty$内解析，Laurent展式为 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

在∞处

If $f(z)$在$z=\infty$的去心邻域$R<|z|<+\infty$内解析，Laurent展式为 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

令$t=\frac{1}{z}$,

在∞处

If $f(z)$在$z=\infty$的去心邻域$R<|z|<+\infty$内解析，Laurent展式为 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

令$t=\frac{1}{z}$, $\varphi(t)=f(\frac{1}{t})$ 在$t=0$的去心邻域 $0<|t|<\frac{1}{R}$ 内解析，

在∞处

If $f(z)$在$z=\infty$的去心邻域$R<|z|<+\infty$内解析，Laurent展式为 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

令$t=\dfrac{1}{z}$, $\varphi(t)=f(\dfrac{1}{t})$ 在$t=0$的去心邻域 $0<|t|<\frac{1}{R}$ 内解析，

Laurent展式为 $\varphi(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n t^{-n}$

规定:

$t = 0$, $\varphi(t)$ 可去奇点 m级极点 本性奇点

规定：

$t=0,$	$\varphi(t)$	可去奇点	m级极点	本性奇点
$z=\infty,$	$f(z)$	可去奇点	m级极点	本性奇点

- $z = \infty$ 为可去奇点: $\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \ (R < |z| < \infty)$ 不含正幂项 $\Leftrightarrow \lim_{z \to \infty} f(z)$ 存在

- $z=\infty$ 为可去奇点: $\Leftrightarrow f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n\ (R<|z|<\infty)$ 不含正幂项 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 存在
- $z=\infty$ 为（m级）极点：$\Leftrightarrow f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ $(R<|z|<\infty)$ 只含有有限个正幂项，$C_m\neq 0,\ C_n=0,$ $(n=m+1,m+2,\cdots)\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$

- $z=\infty$ 为可去奇点: $\Leftrightarrow f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \ (R<|z|<\infty)$ 不含正幂项 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 存在
- $z=\infty$ 为（m级）极点：$\Leftrightarrow f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ $(R<|z|<\infty)$ 只含有有限个正幂项，$C_m\neq 0, C_n=0,$ $(n=m+1, m+2,\cdots) \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$
- $z=\infty$ 为本性奇点：$\Leftrightarrow f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \ (R<|z|<\infty)$ 有无穷多个正幂项 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在且不为∞

例2. $\dfrac{\sin z}{z^3}$, ∞ 为什么类型奇点?

例2. $\dfrac{\sin z}{z^3}, \infty$ 为什么类型奇点？ 0?

留数

留数

设$z = z_0$ 是 $f(z)$的孤立奇点，

留数

设$z = z_0$ 是 $f(z)$的孤立奇点， 在$0 < |z - z_0| < \delta$ 展成Laurent展式： $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$。

留数

设$z = z_0$ 是 $f(z)$的孤立奇点， 在$0 < |z - z_0| < \delta$ 展成Laurent展式： $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$。 L: $0 < |z - z_0| < \delta$ 包含z_0 的任一条逆时针方向的简单闭曲线，

留数

设$z = z_0$ 是 $f(z)$的孤立奇点， 在$0 < |z - z_0| < \delta$ 展成Laurent展式： $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$。 L: $0 < |z - z_0| < \delta$ 包含z_0 的任一条逆时针方向的简单闭曲线， 称

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)dz$$

为$f(z)$ 在z_0 的留数，记为 $Res[f(z), z_0]$,

留数

设$z=z_0$ 是 $f(z)$的孤立奇点， 在$0<|z-z_0|<\delta$ 展成Laurent展式： $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$。 L: $0<|z-z_0|<\delta$ 包含z_0 的任一条逆时针方向的简单闭曲线， 称

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz$$

为$f(z)$ 在z_0 的留数， 记为 $Res[f(z),z_0]$， i.e.

$$Res[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz=c_{-1}.$$

无穷远点∞ 处的留数：

无穷远点∞ 处的留数：

设$f(z)$在无穷远点 $z=\infty$的去心邻域 $R<|z|<+\infty$内解析，L: $R<|z|<\infty$ 包含z_0 的任一条逆时针方向的简单闭曲线，$f(z)$在∞ 处的留数定义为：

$$Res[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^-}f(z)dz=-c_{-1}.$$

留数计算方法

留数计算方法

1. if z_0为 $f(z)$的可去奇点，则 $Res[f(z), z_0] = 0$

留数计算方法

1. if z_0为 $f(z)$的可去奇点，则 $Res[f(z), z_0] = 0$
2. if z_0为 $f(z)$的1级极点，则 $Res[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

留数计算方法

1. if z_0为 $f(z)$的可去奇点，则 $Res[f(z), z_0] = 0$
2. if z_0为 $f(z)$的1级极点，则 $Res[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$
3. if z_0为 $f(z)$ 的m级极点，则
$$Res[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z - z_0)^m f(z))$$

留数计算方法

1. if z_0为 $f(z)$的可去奇点，则 $Res[f(z), z_0] = 0$
2. if z_0为 $f(z)$的1级极点，则 $Res[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$
3. if z_0为 $f(z)$ 的m级极点，则
$$Res[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z - z_0)^m f(z))$$
4. 设$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z), Q(z)$在z_0解析，且$P(z_0) \neq 0$,
$$Q(z_0) = 0,\ Q'(z_0) \neq 0, \text{则} Res[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

留数计算方法

1. if z_0为 $f(z)$的可去奇点，则 $Res[f(z), z_0] = 0$
2. if z_0为 $f(z)$的1级极点，则 $Res[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$
3. if z_0为 $f(z)$ 的m级极点，则
   $$Res[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$
4. 设$f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z), Q(z)$在$z_0$解析，且$P(z_0) \neq 0$,
   $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0) \neq 0$, 则$Res[f(z), z_0] = \dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$
5. $Res[f(z), \infty] = -Res[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2}, 0]$

Remarks:

Remarks:

- 在(3) 中取$m = 1 \Rightarrow$ (2)

Remarks:

- 在(3) 中取$m = 1 \Rightarrow$ (2)
- 由 (3) 的证明，if 级数小于m, 也可以当m来计算

例3. 求奇点并计算留数

例3. 求奇点并计算留数

(1) $f(z) = \dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$

例3. 求奇点并计算留数

(1) $f(z) = \dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$

三种方法:

例3. 求奇点并计算留数

(1) $f(z) = \dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$

三种方法:

1. Laurent展开

例3. 求奇点并计算留数

(1) $f(z) = \dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$

三种方法:

1. Laurent展开
2. 由定义: $Res[f(z), z_0] = c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz,$

   $Res[f(z), \infty] = -c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{L^-} f(z)dz$

例3. 求奇点并计算留数

(1) $f(z) = \dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$

三种方法:

1. Laurent展开
2. 由定义: $Res[f(z), z_0] = c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz$,
   $Res[f(z), \infty] = -c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{L^-} f(z)dz$
3. 由计算方法

(2) $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$

(2) $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$

(3) $f(z) = \dfrac{1 - e^{2z}}{z^4}$

留数定理

Theorem (1)

设$f(z)$在区域D内除有限个孤立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$外，处处解析，L为D内包含诸奇点的一条逆时针方向的简单闭曲线，则

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k].$$

Theorem (2)

设$f(z)$在扩充的复平面内除有限个孤立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$外，处处解析，那么$f(z)$在所有各奇点（包含∞点）的留数总和必等于零，即

$$Res[f(z), \infty] + \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k] = 0.$$

例4. 计算下列积分

例4. 计算下列积分

(1) $I = \oint_L \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} dz$, L: $x^2 + y^2 = 2(x+y)$, 逆时针

例4. 计算下列积分

(1) $I = \oint_L \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} dz$, L: $x^2+y^2 = 2(x+y)$, 逆时针

(2) $I = \int_L \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} dz$, L: $|z| = \frac{5}{2}$, 逆时针

利用留数定理计算某些实积分

利用留数定理计算某些实积分

- $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$ 型，其中$R(\cos x, \sin x)$为$\cos x$, $\sin x$的有理函数，在$[0, 2\pi]$上连续，

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$$

利用留数定理计算某些实积分

- $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$ 型，其中$R(\cos x, \sin x)$为$\cos x$, $\sin x$的有理函数，在$[0, 2\pi]$上连续，

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \oint_{|z|=1} R(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i})\frac{1}{iz}dz$$

例5. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ 型，其中

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}, \ (a_m, b_n \neq 0),$$

满足:
(1) $n - m \geq 2$
(2) $Q(z)$在实轴上$\neq 0$，i.e. $R(z)$在实轴上无奇点，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Rez[R(z), z_k]$$

其中z_k $(k = 1, \ldots, n)$ 为$R(z)$在上半平面内的所有奇点。

例6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}dx \ (a>0,\ b>0,\ a\neq b)$

例6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)} dx \ (a > 0, b > 0, a \neq b)$

例7. $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx\ (a>0)$ 型，其中

$$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n},\ (a_m,b_n\neq 0),$$

满足：
(1) $n-m\geq 1$
(2) $Q_n(z)$在实轴上$\neq 0$，i.e. $R(z)$在实轴上无奇点，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n} Rez[R(z)e^{iaz},z_k]$$

其中$z_k\ (k=1,\ldots,n)$ 为$R(z)$在上半平面内的所有奇点。

- $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx\ (a>0)$ 型，其中

$$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n},\ (a_m,b_n\neq 0),$$

满足：
(1) $n-m\geq 1$
(2) $Q_n(z)$在实轴上$\neq 0$，i.e. $R(z)$在实轴上无奇点，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n} Rez[R(z)e^{iaz},z_k]$$

其中$z_k\ (k=1,\ldots,n)$ 为$R(z)$在上半平面内的所有奇点。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(ax)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(ax)dx$$

例8. $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{(x^2+b^2)^2} dx \ (a>0, b>0)$