预备知识

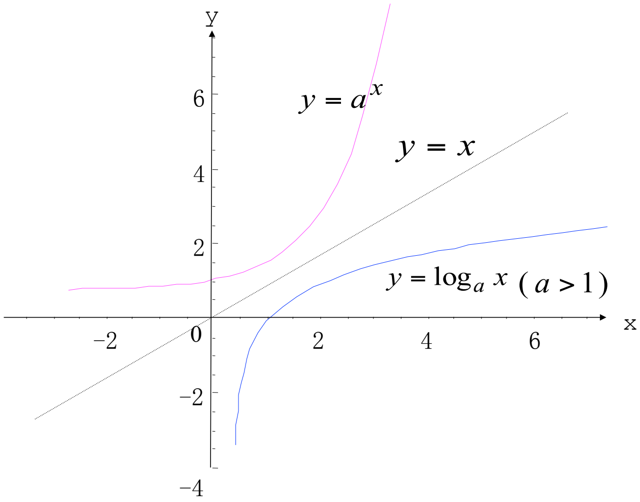
钟思佳

September 27, 2017

基本初等函数

3. 对数函数 $y = \log_a x$ (a 是常数且$a > 0$, $a \neq 1$)

1. 定义域：$x \in (0, +\infty)$, 值域：$y \in (-\infty, +\infty)$
2. $a > 1$时，单调增加，$0 < a < 1$时，单调减少
3. 过点$(1, 0)$
4. 常用对数：$y = \log_e x = \ln x$ ——自然对数
5. $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$, $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$,
   $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, $\log_a x^b = b \log_a x$,
   $a^x = b^{\log_b a^x} = b^{x \log_b a}$

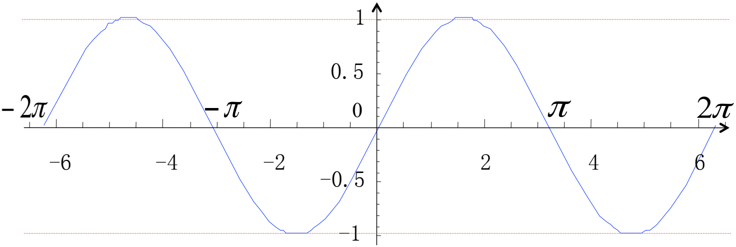


y
x
$y = a^x$
$y = x$
$y = \log_a x \ (a > 1)$
6
4
2
0
−2
−4
−2
2
4
6

基本初等函数

4. 三角函数

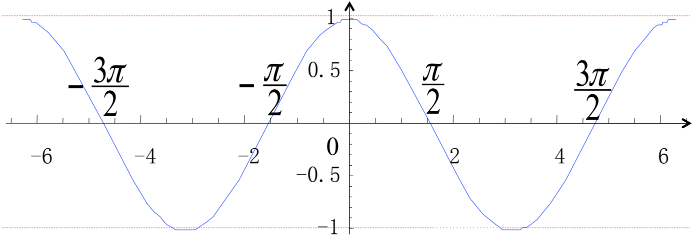
(1) 正弦函数 sin x



性质：

1. $\sin x$， $x \in (-\infty, +\infty)$, $|\sin x| \leq 1$
2. 以2π 为周期, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbb{Z}$
3. 奇函数：$\sin(-x) = -\sin x$
4. $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$

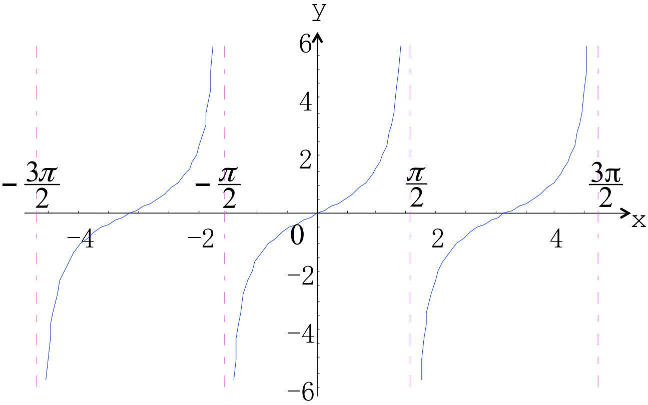
(2) 余弦函数 $\cos x$



性质：

1. $\cos x$， $x \in (-\infty, +\infty)$, $|\cos x| \leq 1$
2. 以2π 为周期, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $k \in \mathbb{Z}$
3. 偶函数： $\cos(-x) = \cos x$
4. $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$

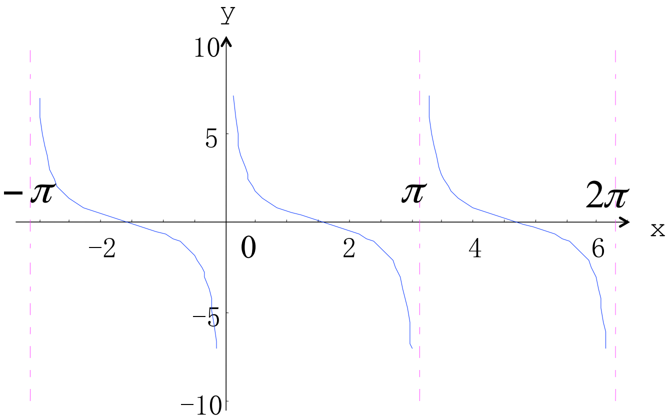
(3) 正切函数 $\tan x$



性质：

1. $\tan x$， $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \tan x \in (-\infty, +\infty)$
2. 以π 为周期, $\tan(x + k\pi) = \tan x, k \in \mathbb{Z}$
3. 奇函数：$\tan(-x) = -\tan x$

(4) 余切函数 cot x



性质：

1. $\cot x$， $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, \cot x \in (-\infty, +\infty)$
2. 以π 为周期, $\cot(x + k\pi) = \cot x$, $k \in \mathbb{Z}$
3. 奇函数：$\cot(-x) = -\cot x$

(5) 正割函数 $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(6) 余割函数 $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

相互之间的关系:

- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

积化和差与和差化积公式:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$$

二倍角公式:

- $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

万能公式:

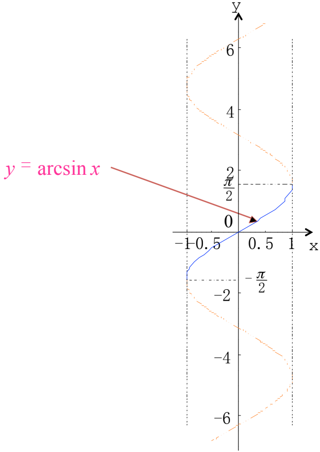
$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}, \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$$

$$\tan(x) = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

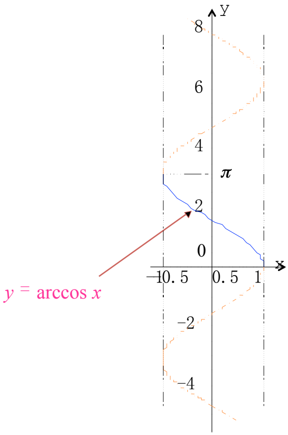
基本初等函数

5. 反三角函数

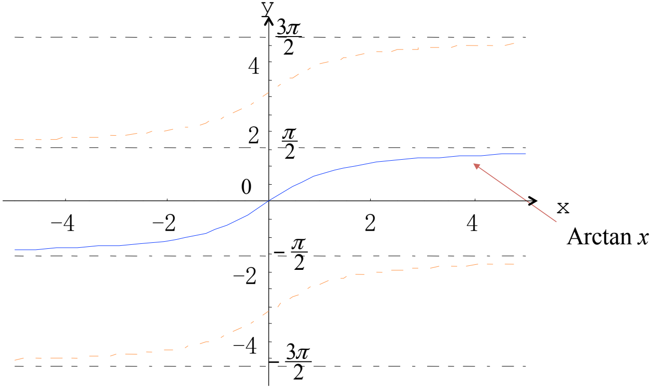
(1) 反正弦函数 $y = \arcsin x,\ x = \sin y,\ x \in [-1, 1],\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



(2) 反余弦函数 $y = \arccos x$, $x = \cos y$, $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$



(3) 反正切函数 $y = \arctan x$, $x = \tan y$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



映射，函数

- 映射的概念 多对一or 一对一
- 可逆映射
- n元m维函数
- 基本初等函数(定义域，值域)
- 有界性，单调性，奇偶性，周期性
- 复合映射

复合函数

设函数$y = f(u)$ 的定义域为D_1, 函数$u = \varphi(x)$ 的定义域为D_2, 且$W_2 = \{u | u = \varphi(x), x \in D_2\} \subset D_1$. $f(u)$ 与$\varphi(x)$ 通过“复合”产生一个新的函数

$$y = f[\varphi(x)]$$

$$\begin{tikzcd}
\text{自变量}\ x \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi"'] & & f[\varphi(x)]\ \text{因变量} \\
& \varphi(x)\ \text{中间变量} \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

注：并非任意两个函数都可以复合。例如：$\arcsin(x^2 + 4)$

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2 - x^2}} + \arcsin(\dfrac{1}{2}x - 1)$

(2) $y = \dfrac{\sqrt{\ln(2 + x)}}{x(x - 4)}$

2. 设$y=f(x)$的定义域为$(0,4]$, 求下列各函数的定义域

(1) $f(x^2)$

(2) $f(\ln x)$

(3) $f(x+a)$

3. 设$f(x)=\begin{cases} 3x+1, & x<1 \\ x, & x\geq 1 \end{cases}$，求$f[f(x)]$

初等函数

初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的函数

双曲函数与反双曲函数

$$\text{双曲正弦：}\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ 奇函数}$$

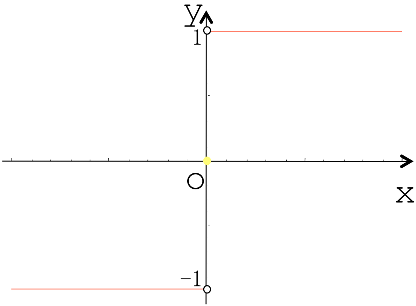
$$\text{双曲余弦：}\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ 偶函数}$$

$$\text{双曲正切：}\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \text{ 奇函数}$$

特殊函数

1. 符号函数

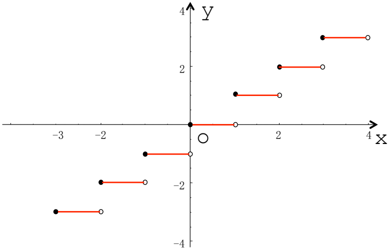
$$y = sgnx = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



2. 取整函数

$y = [x]$, 不超过x 的最大整数。

$$x - 1 < [x] \le x$$



复数的一些知识