数列极限和函数极限之间的关系

钟思佳

October 11, 2017

Outline

1. 定义
   - 数列极限的定义
   - 函数极限的定义
2. 性质
   - 数列
   - 函数
3. 四则运算法则
4. 判定准则

Outline

数列极限的定义

Definition

对$\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $\forall n > N$, 有

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

则称数列$\{a_n\}$收敛到a，记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Outline

1. 定义
   - 数列极限的定义
   - 函数极限的定义
2. 性质
   - 数列
   - 函数
3. 四则运算法则
4. 判定准则

函数极限的定义

$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$

Definition

$\forall \epsilon > 0$, $\exists X > 0$, s.t. $\forall |x| > X$, 有

$$|f(x) - a| < \epsilon.$$

则称函数$f(x)$在$x \to \infty$时收敛到a，记作$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$.

函数极限的定义 $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$

Definition

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$, 有

$$|f(x) - a| < \epsilon.$$

则称函数$f(x)$在$x \to x_0$时收敛到a，记作$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

左极限，右极限

Outline

1. 定义
   - 数列极限的定义
   - 函数极限的定义
2. 性质
   - 数列
   - 函数
3. 四则运算法则
4. 判定准则

数列极限的性质

- (唯一性) If $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，则极限值唯一。
- (有界性) If $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，则$\{x_n\}$有界。
  i.e. $\exists L>0$, s.t. $\forall n\in\mathbb{Z}^+$, $|x_n|\le L$。
- (保序性) If $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, 且$a<b$, 则$\exists N\in\mathbb{Z}^+$, s.t. $\forall n>N$, 有$x_n<y_n$。

保序性的推论

- If $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，且$x_n \leq y_n$, $\Rightarrow a \leq b$。
- If $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a < 0$, 则$\exists N \in \mathbb{Z}^+$, s.t. $\forall n > N$, 有$x_n < 0$。

Outline

函数极限的性质

- (唯一性) If $\lim f(x)$ 存在，则极限值唯一。
- (局部有界性)(以$x \to x_0$为列) If $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则存在x_0的去心邻域$\mathring{N}(x_0)$, s.t. 在$\mathring{N}(x_0)$内$f(x)$有界。
  i.e. $\exists L > 0$, $\mathring{N}(x_0)$, s.t. $|f(x)| \leq L, \forall x \in \mathring{N}(x_0)$。
- (局部保序性)(以$x \to x_0$为列) If $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, 且$a < b$, 则$\exists \mathring{N}(x_0)$, s.t. $\forall x \in \mathring{N}(x_0)$, 有$f(x) < g(x)$。

保序性的推论

- If $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, 且$\exists \mathring{N}(x_0)$ s.t. $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in \mathring{N}(x_0)$, $\Rightarrow a\le b$。
- If $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $a<0$, 则$\exists \mathring{N}(x_0)$, s.t. $\forall x\in \mathring{N}(x_0)$, 有$f(x)<0$。

四则运算法则

加减乘除
注意：前提，极限都存在，除法法则分母极限不为0。

复合运算法则（函数）

判定准则

- 夹逼定理
- 单调有界必有极限
- Cauchy收敛准则
- 海涅定理