习题课五 微分中值定理等

April 5, 2017

1. (1) $\lim_{x \to 0} (\frac{\arcsin x}{x})^{\frac{2}{x^2}}$

1. (1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{2}{x^2}}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^4}$

1. (1) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{2}{x^2}}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \sqrt{1 + x^2}}{x^2 \sin x^4}$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - \sin(\sin(\sin x))}{\sin x \cdot \sin(\sin x) \cdot \sin(\sin(\sin x))}$

(4). 设$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cos x - e^x + 1}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

(i) 问a取何值时，$f(x)$在$x=0$连续?

(4). 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-e^x+1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$

(i) 问a取何值时，$f(x)$在$x=0$连续?

(ii) 在(i)之下，$f(x)$在$x=0$是否可导? 若可导，求$f'(x)$.

2. 设$f(0)=0$, $f'(0)=-1$, $f''(0)=2$, $f'''(0)=-3$, $f^{(4)}(0)=6$,

求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x[1-\ln(1+x)]}{x^4}$.

2. 设$f(0)=0$, $f'(0)=-1$, $f''(0)=2$, $f'''(0)=-3$, $f^{(4)}(0)=6$,
求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x[1-\ln(1+x)]}{x^4}$.

3. 求$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}(1+\dfrac{1}{x})^{x^2}$ (11‘竞赛题)

4. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足$a_1 - \dfrac{a_2}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{a_n}{2n-1} = 0$, 证明方程$a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \cdots + a_n \cos(2n-1)x = 0$在$(0, \frac{\pi}{2})$内至少有一个根。

4. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足$a_1 - \frac{a_2}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1} = 0$, 证明方程$a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \cdots + a_n \cos(2n-1)x = 0$在$(0, \frac{\pi}{2})$内至少有一个根。

5. 设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，证明在(a, b)内至少存在一点ξ, 使

$$2\xi(f(b) - f(a)) = (b^2 - a^2)f'(\xi)$$

6. 设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且$f(1)=f(0)=0$, 证明：存在$\xi\in(0,1)$, 使$f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

6. 设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且$f(1)=f(0)=0$, 证明：存在$\xi\in(0,1)$, 使$f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

7. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)=2a$, $f(\dfrac{a+b}{2})=a+b$, 证明在(a,b)内至少存在一点ξ, 使$f'(\xi)=1$

6. 设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且$f(1)=f(0)=0$, 证明：存在$\xi\in(0,1)$, 使$f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

7. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，
且$f(a)=f(b)=2a$, $f(\dfrac{a+b}{2})=a+b$, 证明在(a,b)内至少存在一点ξ, 使$f'(\xi)=1$

8. 设$f(x)\in C_{[0,2\pi]}$，$f(0)=f(2\pi)$, 且$f''(x)\neq f(x)$, $x\in(0,2\pi)$, 证明：存在$\xi\in(0,2\pi)$，使

$$\tan\xi=\frac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$$

9. 设$f(x)$在$[a,b]$上有三阶连续导数，证明：存在$\xi \in (a,b)$，使

$$f(b) = f(a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{24} f'''(\xi)(b-a)^3$$

9. 设$f(x)$在$[a,b]$上有三阶连续导数，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3$$

10. 设$f\in C[a,b]$, f在(a,b)内二阶可导，证明：对每个$c\in(a,b)$，存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

(10’竞赛题)

11. 设f 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且$f(a)=f(b)=f(c)=0$, 其中$c\in(a,b)$。证明：

（1）至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得$f'(\xi_i)+f(\xi_i)=0, i=1,2$;

（2）存在$\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)=f(\xi)$

11. 设f 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且$f(a)=f(b)=f(c)=0$, 其中$c\in(a,b)$。证明：

（1）至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得$f'(\xi_i)+f(\xi_i)=0, i=1$，2;

（2）存在$\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)=f(\xi)$

12. 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，且$f(a)=b$，$f(b)=a$。证明：

(1) 至少存在一点$c\in(a,b)$, 使得$f(c)=c$

(2) 至少存在互异的两点$\xi,\ \eta\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)f'(\eta)=1$.

13. 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上具有一阶连续导数，在开区间(a,b)内二阶可导，且$f(a)=f(b)$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，试证：至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=0$.

13. 设$f(x)$在闭区间$[a, b]$上具有一阶连续导数，在开区间(a, b)内二阶可导，且$f(a) = f(b)$，$f'_+(a)f'_-(b) > 0$，试证：至少存在一点$\xi \in (a, b)$，使得$f''(\xi) = 0$.

14. 已知函数$f(x)$在闭区间$[0, 1]$上存在二阶导数，且$f(1) = 0$，又$f(x)$在x_0 $(\frac{1}{2} \le x_0 < 1)$ 处取得最小值-3，证明：存在一点$\xi \in (0, 1)$，使$f''(\xi) \ge 24$.

13. 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上具有一阶连续导数，在开区间(a,b)内二阶可导，且$f(a)=f(b)$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，试证：至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=0$.

14. 已知函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上存在二阶导数，且$f(1)=0$，又$f(x)$在x_0 $(\frac{1}{2}\le x_0<1)$ 处取得最小值-3，证明：存在一点$\xi\in(0,1)$，使$f''(\xi)\ge 24$.

15. 设函数$f(x)$ 在区间$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=0$, $f(1)=1$, 求证：$\exists\xi\in(0,1)$ 使$\xi f''(\xi)+f'(\xi)=1$

历年试题

1. （13期中）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且$f(a)f(b)<0$, $f'(c)=0$, $a<c<b$, 证明：当$f(c)<0$时，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)>0$

2. （11期中） 设函数f在区间$[a,b]$上存在三阶导数，且满足

$$f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=f''(a)=f''(b)=0,$$

证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=f'''(\xi)$。

3. （12期中）设函数$f(x)$在闭区间$[0,3a]$ $(a>0)$上连续，在开区间$(0,3a)$内可导，且$f(3a)=f(a)<f(0)<f(2a)$。证明：至少存在一点$\xi\in(0,2a)$，使得$f'(\xi)=f'(\xi+a)$

4. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$ab>0$，证明：$\exists\,\xi,\ \eta\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{a^2+ab+b^2}{3\eta^2}f'(\eta)$$

(04期中)

5. （10期中） 设$f\in C[a,b]$，且f在(a,b)内有二阶导数，试证存在$c\in(a,b)$，使

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c)$$

6. (09期中) 设$f \in C[0,1]$，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0$，$\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=M>0$，证明：对于大于1的任意正整数$n$，存在互异的两点$\xi_1\ \xi_2 \in (0,1)$，使得

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}-\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{n}{M}$$

7. （15期中）设函数$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，且$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：存在$\xi \in (a,b)$，使得$f''(\xi)=g''(\xi)$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$ （11期中）

9. (14期中) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{7}{4}}(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x})$

10. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{x^2}}$ (03期末)

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^2(1-\cos x)}$ （09期末）

12. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\cdot(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})$ (04期中)

13. 当$x\to 0$, $f(x)=\sin x-2\sin 3x+\sin 5x$是$x$ 的　　阶无穷小量　(09期中)

14. 下列命题中正确的命题是　　(09期中)

（A）若f在点x_0处可导，则$|f|$在点x_0处也可导

（B）设f在点x_0处可导，则f在点x_0的某个邻域内连续

（C）设$f \in C[a,b]$，f在(a,b)内可导，且$\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = k$($k$为有限数)，则$f$在点$a$处存在右导数$f'_+(a)$，且$f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = k$

（D）设函数$y = f \circ g$是由$y = f(u), u = g(x)$复合而成，如果g在点x_0处间断，f在点$u_0 = g(x_0)$处间断，则复合函数$y = f \circ g$在点x_0处也间断

15. (16期中) 设函数$f(x) = arctanx$, 且$f(x) = xf'(\xi)$, 求极限$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\xi^2}{x^2}$