函数项级数、幂级数

May 16, 2018

Outline

Theorem (1 Abel 定理)

(1) if $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在点z_0 $(z_0 \neq 0)$ 收敛 $\Rightarrow \forall |z| < |z_0|$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛

(2) if $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在点z_0发散 $\Rightarrow \forall |z| > |z_0|$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 发散

Theorem (2)

设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 不是仅在$z=0$处收敛，也不是在整个复平面上收敛，则 $\exists R>0$, s.t. if $|z|<R$ 时，级数绝对收敛；$|z|>R$ 时，发散；当 $|z|=R$ 时，不一定。

这个R 称为收敛半径

- $|z| < R$ 称为收敛圆，$|x| < R$, 称为收敛区间
- if $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 仅在$z = 0$ 处收敛，规定$R = 0$, if $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在整个复平面上收敛，规定$R = +\infty$

Theorem (3)

设 $\lim_{n\to\infty}|\frac{c_{n+1}}{c_n}|=\rho$ (or $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\rho$),

则$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$的收敛半径为:

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho} & 0<\rho<+\infty \\ +\infty & \rho=0 \\ 0 & \rho=+\infty\end{cases}$$

例2. 求收敛半径与收敛圆

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^n}z^n$ (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}(z-i)^n$

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$ (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^2 9^n}$

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n(x-1)^n$

例3. (1) 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-1)^n$, 在$z=-1$ 处收敛，问：
在$z=1+\frac{3}{2}i$处的敛散性如何?

(2) 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=3$处条件收敛，能否确定 R? 在$x=-3$ 处
敛散性如何?

幂级数的性质

（1）代数运算

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\ (|z|<R_1),\ g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\ (|z|<R_2),$$

令 $R=\min\{R_1,R_2\}$

$\Rightarrow$

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,\quad |z|<R$$

$$\begin{aligned} & f(z)\cdot g(z) \\ = \ & a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z+\cdots+(a_0b_n+\cdots+a_nb_0)z^n+\dots, \\ & |z|<R \end{aligned}$$

（2）分析性质

Theorem (4)

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$收敛半径为$R > 0$, 和函数为$S(z)$, 则

(1) $S(z)$ 在收敛圆$|z| < R$内解析

(2) $S'(z) = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n n z^{n-1}$

(3) $\int_L S(z)dz = \int_L \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n dz = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \int_L z^n dz$ （L 为$|z| < R$ 内的简单闭曲线），$|z| < R$, 且收敛圆不变，但在圆周上的敛散性可能会变。

Theorem (4*)

设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$收敛半径 $R > 0$, 和函数为$S(x)$, 则

(1) $S(x) \in C_{(-R,R)}$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 在$(-R, R)$内可逐项积分和逐项求导， *i.e.*

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \ \forall x \in (-R, R)$$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \ \forall x \in (-R, R)$$

$x = \pm R$ 时，敛散性可能改变。

注：如果$S(x)$在$x = R$ or $x = -R$ 也收敛，则$S(x)$ 可以连续到R or $-R$.

思考：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为2，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1}$ 的收敛半径为多少?

例4. (1) 求$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 的和函数

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n}(2n+1)x^{2n}$　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}x^{n-1}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n3^{n}}$　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{n}}z^{2n-2}$

例5. 设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}(x-1)^n$, 求$\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(1)$

将函数展开为幂级数

Theorem (5)

设$f(z)$ 在区域D内解析，$z_0 \in D$, 则
当$|z - z_0| < R$时，(R为z_0到D边界上点的最短距离)，$f(z)$可以展开成$z - z_0$的幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

且展开式唯一。