第二型曲线积分

April 11, 2018

Outline

定义

性质

计算

两类曲线积分之间的关系

定义

例：空间力场$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$, $\vec{F}$ 连续，质点在$\vec{F}$作用下沿空间光滑曲线L 从A 到B 移动，求$\vec{F}$ 所做的功。

分割、近似、求和、取极限

Definition (1)

L: 向量场中$A \to B$ 的光滑曲线弧，分割$A = A_0$，A_1，$\cdots$，$A_n = B$, $A_{i-1}A_i$ 长度为$\triangle s_i$, 令$d = \max_{1\le i\le n}\{\triangle s_i\}$, $\forall M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in A_{i-1}A_i$,
$\sum_{i=1}^{n} \vec{A}(M_i) \cdot \vec{T}(M_i)\triangle s_i$, $\vec{T}(M_i)$：M_i 处单位切向量（对应于所给方向），if $d \to 0$ 时，$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{A}(M_i) \cdot \vec{T}(M_i)\triangle s_i$ 存在，则称此极限为$\vec{A}(x, y, z)$ 沿有向曲线L的第二型曲线积分，记为

$$\int_L \vec{A}(x, y, z) \cdot \vec{T}(x, y, z)ds$$

可以证明，当$\vec{A}(x,y,z)$ 在有向光滑曲线L上连续时，$\int_L \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{T}(x,y,z)ds$ 必存在。

设

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},$$

又$\vec{T}=\dfrac{1}{ds}\{dx,dy,dz\}$,

$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{T}ds=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$, i.e.

$$\int_L \vec{A}\cdot\vec{T}ds=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

—— 第二型曲线积分的坐标形式

（$\int_L \vec{A}\cdot\vec{T}ds=\int_L \vec{A}\cdot d\vec{s}$ —— 第二型曲线积分的向量形式, 其中$\vec{T}ds=d\vec{s}$, i.e. $d\vec{s}=\{dx,dy,dz\}$。）

性质

1. 线性性质：$\int_L (k_1\vec{A}+k_2\vec{B})\cdot\vec{ds}=k_1\int_L\vec{A}\cdot\vec{ds}+k_2\int_L\vec{B}\cdot\vec{ds}$
2. 可加性：若L 分成L_1 与L_2 收尾相连，

$$\int_L\vec{A}\cdot\vec{ds}=\int_{L_1}\vec{A}\cdot\vec{ds}+\int_{L_2}\vec{A}\cdot\vec{ds}$$

3. 方向性：if L^- 是L 的反向，$\int_{L^-}\vec{A}\cdot\vec{ds}=-\int_L\vec{A}\cdot\vec{ds}$

计算

If $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $A \to B$ 对应于t 单调地 $\alpha \to \beta$,

$$\begin{aligned} & \int_L \vec{A}(x,y,z)\cdot \vec{ds} \\ = & \int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) \\ & +R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt \end{aligned}$$

Rem: α, β 对应起点、终点，前者未必小于后者

例1. $\int_C xydx$, C: $y^2 = x$ 上从$A(1,-1)$ 到$B(1,1)$ 的一段弧。

例2. $\int_C (x+y)dx + (x-y)dy$, C:

1. 圆弧AB， A(1,0), B(0,1)

2. 折线 AOB

例3. $\int_L xdy - ydx$, C:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

2. $y = \dfrac{b}{a}x - b$.

积分值何时与路径有关?

例4. $\int_\Gamma xdx + y^2dy + (3z - y - 1)dz$, $A(2,3,4) \to B(1,1,1)$ 的直线段

例5. $\int_L y^2dx + z^2dy + x^2dz$， $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 = Rx \end{cases}$
$(z \geq 0,\ R > 0)$, 方向：z轴往下看逆时针方向。

例6. 质点$M(x,y)$ 在力 $\vec{F}$ 作用下沿椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$逆时针 $A(a,0)\to B(0,b)$， $\vec{F}$ 大小与M 到 O 的距离成正比，方向指向原点，求$\vec{F}$所做的功。

例7. $\vec{F}$ 大小与作用点到z轴的距离成反比，方向：垂直指向z轴。质点沿着$y=1$ 平面内的一个单位圆，从$M(1,1,0)$ 经第一卦限移动到点 $N(0,1,1)$时，求W

两类曲线积分之间的关系

If $\vec{T} = \{\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$,

$$dx = \cos\alpha ds,\ dy = \cos\beta ds,\ dz = \cos\gamma ds,$$

$$\int_L \vec{A}\cdot\vec{ds} = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

例8. 把第二型$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 化为第一型，其中L为$y = x^2$ 从$(0,0)$ 到$(1,1)$