数量函数积分的应用

April 8, 2018

Outline

Ω : 可度量的几何形体， $\mu = \mu(M) \in C_\Omega$: 密度函数

- 质量： $m = \int_\Omega \mu(M) d\Omega$
- 质心： $\bar{x} = \frac{\int_\Omega x\mu(M)d\Omega}{m}$, $\bar{y} = \frac{\int_\Omega y\mu(M)d\Omega}{m}$,
  $\bar{z} = \frac{\int_\Omega z\mu(M)d\Omega}{m}$, if $\mu(M) = cost$. 形心
- 转动惯量： $I_x = \int_\Omega (y^2 + z^2)\mu(M)d\Omega$,
  $I_y = \int_\Omega (x^2 + z^2)\mu(M)d\Omega$, $I_z = \int_\Omega (x^2 + y^2)\mu(M)d\Omega$
- 到其它转动轴的转动惯量： $\int_\Omega \rho^2(M)\mu(M)d\Omega$, $\rho(M)$表示M到转动轴的距离

例1. 曲面Σ：$z+\sqrt{x^2+y^2}=2$ 位于$z=x^2+y^2$内的部分，密度μ为该点到z轴的距离，求质量

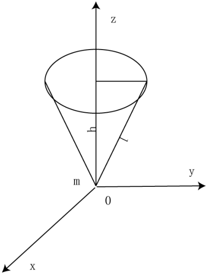
例2. 心形线：$\rho = a(1 - \cos\varphi)$ 质心 （密度$\mu = 1$）

例3. $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = b\cos\varphi$, $(0 \le a < b)$ 所围薄片的质心

例4. Ω： $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, 对z轴转动惯量

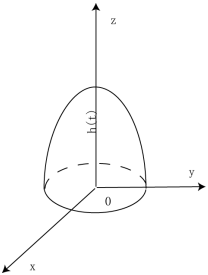
例5. 设D由抛物线$y = x^2$及直线$y = 1$围成的平面薄片，薄片上点(x, y)的密度为$\mu = x + 1$，求该薄片对直线$y = -1$的转动惯量

例6. 锥体，密度μ, M在顶点，求圆锥对该点的引力

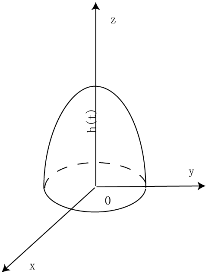


例7. 圆柱水桶：R, H，装满水，计算将桶中水完全抽出需要的功

例8. 雪堆：高$h(t)$，侧面满足$z = h(t) - \frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$, 长度：cm，时间：h。体积减少的速率与侧面积成正比（系数0.9），$h = 130cm$，全融化要多少小时?



例8. 雪堆：高$h(t)$，侧面满足$z = h(t) - \frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$, 长度：cm，时间：h。体积减少的速率与侧面积成正比（系数0.9），$h = 130cm$，全融化要多少小时?



解:

$$V=\int_0^{h(t)}dz\iint_{D_z}dxdy=\int_0^{h(t)}\pi\frac{(h(t)-z)h(t)}{2}dz=\frac{\pi}{4}h^3(t),$$

$$\begin{aligned}S &= \iint_{D_S}\sqrt{1+\frac{16x^2}{h^2(t)}+\frac{16y^2}{h^2(t)}}dxdy\\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}rdr\\ &= \frac{13}{12}\pi h^2(t)\end{aligned}$$

$$V = \frac{\pi}{4} h^3(t), \quad S = \frac{13}{12} \pi h^2(t),$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{3}{4} \pi h^2(t) h'(t) = -0.9 \cdot \frac{13}{12} \pi h^2(t) \\
h'(t) &= -\frac{13}{10} \\
h(t) &= -\frac{13}{10} t + C
\end{aligned}$$

$$h(0) = 130, \qquad h(t) = 130 - \frac{13}{10} t$$

$$0 = 130 - \frac{13}{10} t \quad \Rightarrow \quad t = 100h$$