第二型曲面积分

April 16, 2018

Outline

定义

曲面侧的概念，双侧曲面，单侧曲面，上下，内外

例：稳定不可压流体的流量

分割、近似、求和、取极限

Definition (1)

Σ: 有向光滑曲面，$\vec{A}(x,y,z)$：向量场。任意将Σ分成n 小块，$\triangle S_i$ $(i=1,\ldots,n)$ 面积记为$\triangle S_i$, $d=\max_{1\leq i\leq n}\{\triangle S_i\}$，$\forall M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\triangle S_i$, Σ 在M_i 处的单位法向量：$\vec{n}_i$, $\sum_{i=1}^{n}\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{n}\triangle S_i$, if $d\to 0$时，极限存在（不依赖于分割和取点），则称此极限值为$\vec{A}(x,y,z)$ 在有向曲面上的第二型曲面积分。记为$\iint_\Sigma \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}dS$, i.e.

$$\iint_\Sigma \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}dS=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{A}(M_i)\cdot\vec{n}_i\triangle s_i.$$

Rem:

- If $\vec{A}(x, y, z)$ 在有向曲面Σ上连续，则第二型曲面积分存在
- 流量$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{\nu}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS$

性质

1. 线性性质
2. $\Sigma = \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$, $\Sigma_1 \bigcap \Sigma_2$最多一条交线
3. $\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = -\iint_{-\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$ (同一曲面的两侧)

计算

设

$$\vec{A}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\},$$

$$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},$$

$$\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}dS=(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS,$$

$$\begin{aligned}\text{记}d\vec{S}=\vec{n}dS &= \{\cos\alpha dS,\cos\beta dS,\cos\gamma dS\}\\ &\triangleq \{dy\wedge dz,dz\wedge dx,dx\wedge dy\}\end{aligned}$$

$$\iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}dS=\iint_\Sigma Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$$

$dy \wedge dz$: dS 在yoz面上的投影

$dz \wedge dx$: dS 在zox面上的投影

$dx \wedge dy$: dS 在xoy面上的投影

可正，可负，可为零，根据$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$来定

上下、左右、前后

总结：

- 一代：将Σ代入被积函数
- 二投：投影到坐标平面（$dx \wedge dy$, xoy, $\ldots$）
- 三定号：由曲面的侧来定正负
- 四换域：$\Sigma \to D_{xy}$ or D_{yz}, D_{xz}

例1. $\iint_{\Sigma} z dx \wedge dy$

(1) Σ: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$ 部分下侧

(2) Σ: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$与$z = 1$ 所围内侧

例2. $I = \iint_\Sigma y(x-z)dy \wedge dz + x^2 dz \wedge dx + (y^2+xz)dx \wedge dy$,
Σ: 正六面体外侧