各类积分的关系

April 27, 2018

Outline

旋度

Definition

向量场$\vec{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$, L: 有向闭曲线,

$$\oint_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz \quad -----\text{环量}.$$

设M为场中一点，在M处取一定向$\vec{n}$，过M作一小块曲面$\triangle\Sigma$，$\triangle\Sigma$以$\vec{n}$为法向量，$\triangle A$为$\triangle\Sigma$的面积，$\triangle L$为$\triangle\Sigma$的边界，方向与$\vec{n}$构成右手系。称$\lim\limits_{\triangle\Sigma\to M}\dfrac{1}{\triangle A}\oint_{\triangle L}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}$为$\vec{F}$在$M$沿方向$\vec{n}$的环量面密度。记为$rot_{\vec{n}}\vec{F}(M)$.

If $\exists$方向s.t. $\vec{F}$在M处的环量面密度取得最大，称为$\vec{F}$在M处的旋度，记为$rot\vec{F}(M)$.

$$\begin{aligned} rot\vec{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \end{aligned}$$

例23. $\vec{F}=xyz(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$, $M(1,3,2)$, 求$div\vec{F}(M)$, $rot\vec{F}(M)$.

几种特殊的向量场

微分算子

- $D = \dfrac{d}{dx}$
- $\nabla u = grad u, \quad \nabla^2 u = \triangle u$
- $\nabla \cdot \vec{F} = div \vec{F}$
- $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = rot \vec{F}$
- Gauss $\displaystyle\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \vec{F} dV = \iiint_\Omega div \vec{F} dV$
- Stokes $\oint_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \iint_\Sigma (\nabla \times \vec{F}) \cdot \overrightarrow{dA} = \iint_\Sigma rot \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA}$

- 保守场：$\int_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}$与路径无关
- 无旋场：$rot\vec{F} = 0$
- 有势场：$\exists$ u, s.t. $\vec{F} = \nabla u = gradu$, u 称为势函数，$du = Pdx + Qdy + Rdz$
- 一维单连通域，二维单连通域

Theorem (6)

Ω: 一维单连通域，P, Q, R有一阶连续偏导数，以下四命题等价：

(1) $rot\vec{F} = 0$ 恒成立，即无旋场；

(2) $\forall$ Ω内的光滑or逐段光滑闭曲线L，

有 $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$

(3) $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$与路径无关，i.e. $\vec{F}$是保守场

(4) $Pdx + Qdy + Rdz$是某个$u(x, y, z)$的全微分，i.e.

$du = Pdx + Qdy + Rdz$，

且$u(x, y, z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz$, i.e. $\vec{F}$是有势场

- 保守场：$\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}$与路径无关
- 无旋场：$rot\vec{F}=0$
- 有势场：$\exists\ u$, s.t. $\vec{F}=\nabla u=gradu$, u 称为势函数，$du=Pdx+Qdy+Rdz$
- 一维单连通域，二维单连通域
- 无源场：$\nabla\cdot\vec{F}=div\vec{F}=0$
- 调和场：$\nabla\cdot\vec{F}=div\vec{F}=0$ 且 $\nabla\times\vec{F}=rot\vec{F}=0$,
  i.e. 调和场＝无旋场＋无源场
  $\exists$ 势函数u, s.t. $\vec{F}=\nabla u=gradu$, $\nabla\cdot\vec{F}=\nabla\cdot\nabla u=\triangle u=0$,
  i.e. u为调和函数。