习题课6-三重积分

March 15, 2018

一. 选择题

1. 设$\Omega_1: \ x^2+y^2+z^2 \le R^2$, $\Omega_2: \ x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0$, $\Omega_3: \ x^2+y^2+z^2 \le R^2, x \ge 0, \ y \ge 0, \ z \ge 0$, 则下列等式成立的是

(A) $\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dxdydz = 2\iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)dxdydz$

(B) $\iiint_{\Omega_1} f(x^2,y,z)dxdydz = 2\iiint_{\Omega_2} f(x^2,y,z)dxdydz$

(C) $\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z^2)dxdydz = 2\iiint_{\Omega_2} f(x,y,z^2)dxdydz$

(D) $\iiint_{\Omega_1} f(x,y^2,z)dxdydz = 8\iiint_{\Omega_3} f(x,y^2,z)dxdydz$

2. 设Ω为由$z=x^2+y^2$, $y=x$, $y=0$, $z=1$在第一卦限所围成的闭区域，$f(x,y,z)$在Ω上连续，则$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=$

(A) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx\int_y^{\sqrt{1-y^2}} dy\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$

(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_0^1 f(x,y,z)dz$

3. 设Ω：$x^2+y^2+z^2 \leq 1$, 则$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz =$

(A) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} 1dz = \Omega$的体积

(B) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^4 dr$

(C) $\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^4 dr$

(D) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^4 dr$

二. 计算三重积分

1. $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, Ω由$y=\sqrt{2x-x^2}$, $z=0$, $y=0$, $z=a(a>0)$ 围成

二. 计算三重积分

1. $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, Ω由$y=\sqrt{2x-x^2}$, $z=0$, $y=0$, $z=a(a>0)$ 围成

2. $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$，$\Omega$是由$x^2+y^2+z^2=2z$围成的区域

二. 计算三重积分

1. $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, Ω由$y=\sqrt{2x-x^2}$, $z=0$, $y=0$, $z=a(a>0)$ 围成

2. $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$，$\Omega$是由$x^2+y^2+z^2=2z$围成的区域

3. $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$, Ω是由$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕z轴旋转一周而成的曲面与平面$z=2$, $z=8$所围成的区域

竞赛题

1. 求由抛物线$y = (4 - x)x$与直线$y = x$所围成的平面区域绕直线$y = x$旋转一周所得旋转体的体积。（10‘竞赛题）

历年试题

1. (08期中)

设$f(t) \in C[0,+\infty)$， $I(R) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(x^2+y^2+z^2)dv$，

则当$R \to 0^+$时， $I(R)$

(A) 是R的一阶无穷小 (B) 是R的二阶无穷小

(C) 是R的三阶无穷小 (D) 至少是R的三阶无穷小

2. (13期中) 设$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则三重积分$\iiint_{\Omega} e^{|x|}dv=$

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{3}{2}\pi$ (D) 2π

3. (13期中) 设函数$f(u)$满足：$f(0)=0, f'(0)=1$, $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 2tz\}$, 计算

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dv}{t^5}$$

4. (16期中) 将直角坐标系下的三次积分$\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y,z)dz$化为球面坐标系下的三次积分为