习题课11-函数项级数、幂级数

August 28, 2017

一. 选择题

1. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=-2$处收敛，则在$x=1$处

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性无法确定

一. 选择题

1. 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=-2$处收敛，则在$x=1$处

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性无法确定

2. 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=-2$处收敛，则在$x=3$处

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性无法确定

一. 选择题

1. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=-2$处收敛，则在$x=1$处

(A) 发散　(B) 绝对收敛　(C) 条件收敛　(D) 敛散性无法确定

2. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=-2$处收敛，则在$x=3$处

(A) 发散　(B) 绝对收敛　(C) 条件收敛　(D) 敛散性无法确定

3. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=-2$处条件收敛，则收敛半径$R$

(A) >2　(B) <2　(C) $=2$　(D) 无法确定

一. 选择题

1. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=-2$处收敛，则在$x=1$处

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性无法确定

2. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=-2$处收敛，则在$x=3$处

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性无法确定

3. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=-2$处条件收敛，则收敛半径$R$

(A) >2 (B) <2 (C) $=2$ (D) 无法确定

4. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=-2$处条件收敛，则在$x=2$处

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性无法确定

5. 设数列$\{a_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 无界，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$的收敛域为

(A) $(-1, 1]$ (B) $[-1, 1)$ (C) $[0, 2)$ (D) $(0, 2]$

二. 求幂级数的和函数

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{n+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-3)^{2n}}{n9^n}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}(\frac{x}{3})^n$

5. $2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$

三. 求在指定点处的幂级数展开

1. $\dfrac{1}{2+x}, x_0 = 1$

2. $\ln \dfrac{1}{1+x}, x_0 = 1$

3. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}, x_0 = 0$

4. $\dfrac{1}{2x^2-x-1}, x_0 = -1$

5. $\arctan \dfrac{4+x^2}{4-x^2}, x_0 = 0$, 并求$f^{(98)}(0)$

四. 将下列函数展开成Laurent级数

1. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$, (1) $0 < |z-1| < 2$, (2) $3 < |z+2| < +\infty$

2. $f(z) = \dfrac{1}{z(z+3)^2}$, $0 < |z+3| < 3$

3. $\dfrac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1 < |z| < 2$

五. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$的和

五. 求$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$的和

六. 求$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

五. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$的和

六. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}(\frac{1-x}{1+x})^n$

七. (1) 验证函数$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ $(-\infty<x<+\infty)$满足方程$y''+y'+y=e^x$.

五. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$的和

六. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}(\frac{1-x}{1+x})^n$

七. (1) 验证函数$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ $(-\infty<x<+\infty)$满足方程$y''+y'+y=e^x$.

(2) 求幂函数$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数

八. 设a_n为曲线$y=x^n$与$y=x^{n+1}$（$n=1,2,\cdots$）所围成区域的面积，记$S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，求$S_1$与$S_2$的值

八. 设a_n为曲线$y=x^n$与$y=x^{n+1}$ （$n=1,2,\cdots$）所围成区域的面积，记$S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，求$S_1$与$S_2$的值

九. 设$x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx, (-\pi\le x\le\pi)$，则$a_2=$

八. 设a_n为曲线$y=x^n$与$y=x^{n+1}$ （$n=1,2,\cdots$）所围成区域的面积，记$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，求$S_1$与$S_2$的值

九. 设$x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx, (-\pi\le x\le\pi)$，则$a_2=$

十. $\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}=$

竞赛

1. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!!} x^{2n-1}$的和函数$S(x)$，并确定收敛域。

（15‘竞赛题）

历年试题

1. （04期末）设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k x^{k+1}$在$[0,1]$上收敛，其和函数为$f(x)$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$收敛

2. (10期末) 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} x^n$ 的收敛域

3. (12期末) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在$x=2$处条件收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}(x-1)^{2n}$的收敛半径$R=$

4. (13期末) 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sin n) x^n$的收敛域为

5. (13期末) 设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}(x-1)^n$，求$\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(1)$

6. (13期末) 求数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n)!!}$$

的和。（其中$(2n)!!=2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n), 0!!=1$）

7. (15期末) 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在$x>0$发散，在$x=0$处收敛，则$a=$

8. (15期末) 将函数$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$展开为$x$的幂级数

9. (05期末) 将函数$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ x+1 & 1\le x<\pi\end{cases}$ 在$[0,\pi]$上展开为正弦级数，其和函数$S(x)$在$x=-1$处的函数值$S(-1)=$

10. （05期末）设$f(z)$在z平面上解析，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则对任一正整数$k$，函数$\frac{f(z)}{z^k}$在点$z=0$的留数$Res[\frac{f(z)}{z^k};0]=$

11. (06期末) 函数$f(z)=z\cos\frac{1}{z}$的孤立奇点$z=0$的类型是（如为极点，应指明是几级极点），$Res[f(z),0]=$

12. (06期末) 利用留数计算反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx$

13. (07期末) 留数$Res[\dfrac{\ln(1-z)\sin z}{z(1-\cos z)},0]=$

14. (13期末) 设$f(x)\in C[0,\pi]$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-1}{\cos x}=-1$,
$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, $-\infty<x<+\infty$，其中$b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx$ $(n=1,2,\ldots)$, 则$S(\frac{3\pi}{2})=$

15. (15期末) 留数$Res[\dfrac{2}{z}+\sin\dfrac{3}{z},0]=$