各类积分的关系

April 23, 2018

Outline

例13.

$$I=\iint_{\Sigma} x(8y+1)dy\wedge dz+2(1-y^2)dz\wedge dx-4yzdx\wedge dy,$$

Σ: 曲线$\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$绕y轴旋转所得曲面（法向与y轴正向夹角大于$\dfrac{\pi}{2}$。

例14. Σ: $z=2-x^2-y^2, 1\le z\le 2$取上侧，求

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3z+x)dy\wedge dz-x^2yzdz\wedge dx-x^2z^2dx\wedge dy.$$

例15. $I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$, Σ: 锥面$x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le h)$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$为锥面外法线的方向余弦。（三种方法）

例16. $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$在有界闭区域Ω上具有一阶及二阶连续偏导数，Σ为Ω的边界，$\vec{n}$为Σ的单位外法向。$\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, 证明：

$$\iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}dA = \iiint_\Omega u\triangle v dxdydz + \iiint_\Omega gradu \cdot gradv dxdydz.$$

——Green 第一公式

例17.
$$I = \iint_{\Sigma} \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

(1) $\Sigma: \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 取外侧.

(2) $\Sigma: \ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ 取外侧.

散度

散度：$\triangle\Sigma$为包围$M(x,y,z)$的闭曲面，$\triangle V$为$\triangle\Sigma$所围的立体的体积。d 为$\triangle V$的直径，$\vec{n}$ 为$\triangle\Sigma$外侧的单位法向量，称 $\lim\limits_{d\to 0}\frac{1}{\triangle V}\iint_{\triangle\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}dA=\lim\limits_{d\to 0}\frac{1}{\triangle V}\iint_{\triangle\Sigma}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dA}$ 为向量场$\vec{F}$ 在点$M(x,y,z)$处的散度，记作$div\vec{F}(M)$.

$$div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

Gauss 公式： $\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dA}=\iiint_{\Omega}div\vec{F}dV.$

例18. 求(1) $div(grad u)$

(2) $div(u \cdot grad v)$

Stokes 公式与旋度

Theorem (5 Stokes 定理)

Σ: 分片光滑曲面，边界曲线Γ分段光滑。P, Q, R具有一阶连续偏导数，则有：

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz \\ = & \iint_{\Sigma} (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) dz \wedge dx \\ & + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Γ 的方向与曲面Σ所取侧的法向量构成右手系。

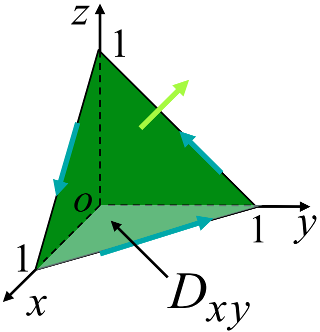
Remark:

- 当Σ为xoy平面上一区域时，Stokes公式即Green公式。
- Stokes公式也可以写成：

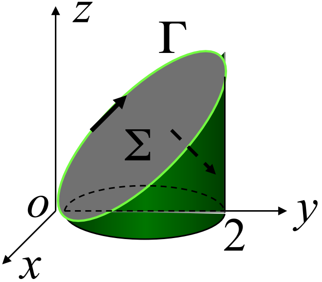
$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

例20. 利用Stokes公式计算$\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$, 其中$\Gamma$为$x + y + z = 1$，方向如图。



例21. Γ: $x^2+y^2=2y$与$y=z$的交线，从z轴正向看为顺时针，求$I=\oint_{\Gamma} y^2dx+xydy+xzdz$.



例22. 求$\oint_\Gamma (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, Γ: $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$, $(a>0,\ h>0)$, 方向：x轴正向看去，Γ为逆时针。