常数项级数

May 14, 2018

Outline

2. 无穷型间断点

Theorem (4)

$f, g \in C_{[a,b)}$, $x = b$ 为无穷型间断点，$x \in [a, b)$时，$0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\Rightarrow$

(1) 当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛

(2) 当 $\int_a^b f(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ 发散

Theorem (5 极限判别法)

$f(x) \in C_{[a,b)}$, $f(x) \geq 0$, $x = b$ 无穷型间断点，$\lim\limits_{x \to b^-} (b-x)^q f(x) = l$, 则

(1) 当$q < 1$, $0 \leq l < +\infty$时，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 收敛

(2) 当$q \geq 1$, $0 < l \leq +\infty$ 时，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 发散

同理对$(a,b]$, $x=a$ 为无穷间断点。

同样对$f \in C_{[a,b)}$, if $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$

例4. (1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, (k^2<1)$

(2) $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx$

(3) $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^{\alpha}} dx$

例5. $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ ——Γ函数

Γ函数

- $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \ (x > 0)$
- 递推公式：$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), (x > 0)$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- 定义域的扩充 $\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+1)}{x}$
- 其它主要结论: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

例6. (1) $\Gamma(-\frac{3}{2})$

(2) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x^2} dx$

(3) $\int_0^{+\infty} x^{19} e^{-x^8} dx$