习题课四 导数

November 14, 2016

一. 选择题

一. 选择题

1. $f(x)$在x_0连续是$f(x)$在x_0可导的

(A) 必要条件　　(B) 充分条件
(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

一. 选择题

1. $f(x)$在x_0连续是$f(x)$在x_0可导的

(A) 必要条件　　(B) 充分条件
(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

2. 若$f(x)$在x_0可导，则$|f(x)|$在x_0处

(A) 必可导　　(B) 连续但不一定可导
(C) 一定不可导　　(D) 不连续

3. 若$f(x)$在x_0可导，则下列结论正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在

(B) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在

(C) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在

(D) $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在

3. 若$f(x)$在x_0可导，则下列结论正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在 (B) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在

(C) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在 (D) $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在

4. 设$f(x)$在x_0可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0)}=\dfrac{1}{4}$，则$f'(x_0)=$

(A) 4 (B) -4 (C) 2 (D) -2

5. 设$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$

(A) $f'(x)$ (B) $f'(0)$ (C) $f(0)$ (D) $\frac{1}{2}f'(0)$

5. 设$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$

(A) $f'(x)$ (B) $f'(0)$ (C) $f(0)$ (D) $\frac{1}{2}f'(0)$

6. 设$f(x)=x|x|$，则$f'(0)=$

(A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) 不存在

7. 若$f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}\sin 3x$, 则下列结论正确的是

(A) $f'(0)=3$ (B) $f'(0)=\frac{1}{3}$ (C) $f'(0)=1$ (D) $f'(0)$不存在

7. 若$f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}\sin 3x$, 则下列结论正确的是

(A) $f'(0)=3$ (B) $f'(0)=\frac{1}{3}$ (C) $f'(0)=1$ (D) $f'(0)$不存在

8. 设$f(x)=x|x^3-x|$，则$f(x)$

(A) 处处可导 (B) 有且仅有一个不可导点
(C) 有且仅有两个不可导点 (D) 有三个不可导点

9. 设$f(x)$可导且$f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则$\triangle x\to 0$时，$f(x)$在x_0处的微分dy是

(A) 与$\triangle x$等价无穷小　　(B) 与$\triangle x$同阶无穷小

(C) 与$\triangle x$低阶无穷小　　(D) 与$\triangle x$高阶无穷小

9. 设$f(x)$可导且$f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则$\triangle x\to 0$时，$f(x)$在x_0处的微分dy是

(A) 与$\triangle x$等价无穷小　(B) 与$\triangle x$同阶无穷小

(C) 与$\triangle x$低阶无穷小　(D) 与$\triangle x$高阶无穷小

10. 设$f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使$f^{(n)}(0)$存在的最高阶数n为

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

二. 填空题

二. 填空题

1. 当$\triangle x \to 0$时，$f(x+\triangle x)-f(x)-3\triangle x$为比$\triangle x$高阶的无穷小，则$f'(x)=$

二. 填空题

1. 当$\triangle x \to 0$时，$f(x+\triangle x)-f(x)-3\triangle x$为比$\triangle x$高阶的无穷小，则$f'(x)=$

2. 设$f(x)=\begin{cases} ax+1 & x \geq 1 \\ b+2\cos\dfrac{\pi x}{2} & x<1, \end{cases}$ 在$x=1$处可导，则$a=$

二. 填空题

1. 当$\triangle x \to 0$时，$f(x+\triangle x)-f(x)-3\triangle x$为比$\triangle x$高阶的无穷小，则$f'(x)=$

2. 设$f(x)=\begin{cases} ax+1 & x \geq 1 \\ b+2\cos\dfrac{\pi x}{2} & x<1, \end{cases}$ 在$x=1$处可导，则$a=$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ \dfrac{2}{3}x^3 & x<1, \end{cases}$ $f'(x)=$

二. 填空题

1. 当$\triangle x \to 0$时，$f(x+\triangle x)-f(x)-3\triangle x$为比$\triangle x$高阶的无穷小，则$f'(x)=$

2. 设$f(x)=\begin{cases} ax+1 & x \geq 1 \\ b+2\cos\frac{\pi x}{2} & x<1, \end{cases}$ 在$x=1$处可导，则$a=$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ \frac{2}{3}x^3 & x<1, \end{cases}$ $f'(x)=$

4. $y=f(\frac{3x-2}{3x+2})$, $f'(x)=\arcsin x^4$, $\frac{dy}{dx}|_{x=0}=$

二. 填空题

1. 当$\triangle x \to 0$时，$f(x+\triangle x)-f(x)-3\triangle x$为比$\triangle x$高阶的无穷小，则$f'(x)=$

2. 设$f(x)=\begin{cases} ax+1 & x\geq 1 \\ b+2\cos\dfrac{\pi x}{2} & x<1, \end{cases}$ 在$x=1$处可导，则$a=$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1 \\ \dfrac{2}{3}x^3 & x<1, \end{cases}$ $f'(x)=$

4. $y=f(\dfrac{3x-2}{3x+2}), f'(x)=\arcsin x^4, \dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=$

5. 设$f(x)$是$g(x)$的反函数，且$g(1)=2, g'(1)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则$f'(2)=$

二. 填空题

1. 当$\triangle x \to 0$时，$f(x+\triangle x)-f(x)-3\triangle x$为比$\triangle x$高阶的无穷小，则$f'(x)=$

2. 设$f(x)=\begin{cases} ax+1 & x\geq 1 \\ b+2\cos\dfrac{\pi x}{2} & x<1, \end{cases}$ 在$x=1$处可导，则$a=$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1 \\ \dfrac{2}{3}x^3 & x<1, \end{cases}$ $f'(x)=$

4. $y=f(\dfrac{3x-2}{3x+2})$, $f'(x)=\arcsin x^4$, $\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=$

5. 设$f(x)$是$g(x)$的反函数，且$g(1)=2$, $g'(1)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则$f'(2)=$

6. 设函数$f(x)=(x-1)^{10}e^{2x}$, 则$f^{(20)}(1)=$

三. 计算题

三. 计算题

1. $f(1)=0$, $f'(1)=2$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x\tan x}$

三. 计算题

1. $f(1)=0$, $f'(1)=2$, 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x\tan x}$

2. 设$f(x)$有一阶连续导数，$f'(1)=2$, 求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x})$

三. 计算题

1. $f(1)=0$, $f'(1)=2$, 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x\tan x}$

2. 设$f(x)$有一阶连续导数，$f'(1)=2$, 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x})$

3. 设对$\forall x$，$y\in\mathbb{R}$，有$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$, $f'(0)=2$, 求$f'(x)$

三. 计算题

1. $f(1) = 0$, $f'(1) = 2$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x \tan x}$

2. 设$f(x)$有一阶连续导数，$f'(1) = 2$, 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{d}{dx} f(\cos\sqrt{x})$

3. 设对$\forall x$，$y \in \mathbb{R}$，有$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, $f'(0) = 2$, 求$f'(x)$

4. $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$, 求$f''(2)$

四. 求导数

四. 求导数

1. $y=(\frac{x\arctan x}{1+x^2})^2$

四. 求导数

1. $y = (\frac{x \arctan x}{1+x^2})^2$

2. $y = e^{e^{e^x}} + x^{e^x}$

四. 求导数

1. $y=(\frac{x\arctan x}{1+x^2})^2$

2. $y=e^{e^{e^x}}+x^{e^x}$

3. $y=x^{\arccos x}$

四. 求导数

1. $y = (\frac{x \arctan x}{1+x^2})^2$

2. $y = e^{e^{e^x}} + x^{e^x}$

3. $y = x^{\arccos x}$

4. $xy^2 = e^{x+y}$

四. 求导数

1. $y=(\frac{x\arctan x}{1+x^2})^2$

2. $y=e^{e^{e^x}}+x^{e^x}$

3. $y=x^{\arccos x}$

4. $xy^2=e^{x+y}$

5. $\begin{cases} xe^t+t\cos x=\pi \\ y=\sin t+\cos^2 t, \end{cases} \quad \frac{dy}{dx}$

6. $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t - \dfrac{1}{t}, \end{cases}$ $\dfrac{dx}{dy}, \dfrac{d^2x}{dy^2}$

6. $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t - \dfrac{1}{t}, \end{cases}$ $\dfrac{dx}{dy}, \dfrac{d^2x}{dy^2}$

7. $d(\dfrac{\arctan 2x}{1+x^2})$

6. $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t - \dfrac{1}{t}, \end{cases}$ $\dfrac{dx}{dy}, \dfrac{d^2x}{dy^2}$

7. $d(\dfrac{\arctan 2x}{1+x^2})$

8. $y = \sqrt[3]{\dfrac{(2x+1)^2(3x-1)}{(4x^2+1)(5x-4)^5}}$

五. 已知$x \neq 1$, $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, 利用导数求$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2}$的和

五. 已知$x \neq 1$, $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, 利用导数求$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2}$的和

六. 设函数$f(x)$在$x = 0$的某邻域具有一阶连续导数，且$f(0)f'(0) \neq 0$，当$h \to 0$时，若$af(h) + bf(2h) - f(0) = o(h)$，试求$a, b$的值

五. 已知$x \neq 1$, $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, 利用导数求$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2}$的和

六. 设函数$f(x)$在$x = 0$的某邻域具有一阶连续导数，且$f(0)f'(0) \neq 0$，当$h \to 0$时，若$af(h) + bf(2h) - f(0) = o(h)$，试求$a, b$的值

七. 若曲线$y = f(x)$ 与$y = \sin x$ 在原点相切，则$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{nf(\dfrac{2}{n})} =$ (16竞赛)

历年试题

历年试题

1. （12期中）设$f(x) = (x + |\sin x|)\cos x$，则
(A) $f'(0) = 2$ (B) $f'(0) = 0$
(C) $f'(0) = 1$ (D) $f(x)$在$x = 0$处不可导

2. 设函数$y = y(x)$由方程$\sin(xy) - ye^x = 1$所确定，则$dy =$
(03期中)

3. 设$f(x) = x^2\cos x$，则$f^{(10)}(0) =$ (04期中)

4. 设$f(x) = |x - 2|g(x)$, 且$g(x)$在$x = 2$处连续，$g(x) \neq 0$,
则$f'(2) =$ (04期中)

(A) g(2) (B) -g(2) (C) 0 (D) 不存在

5. 设$y=(1+\sin x)^x$, 则$dy|_{x=\pi}=$ (05期中)

6. 以下四个命题中，正确的是 (05期中)

(A) 若$f'(x)$在$(0,1)$内连续，则$f(x)$在$(0,1)$内有界
(B) 若$f(x)$在$(0,1)$内连续，则$f(x)$在$(0,1)$内有界
(C) 若$f'(x)$在$(0,1)$内有界，则$f(x)$在$(0,1)$内有界
(D) 若$f(x)$在$(0,1)$内有界，则$f'(x)$在$(0,1)$内有界

7. $f(x)=\dfrac{1}{x(1-2x)}$, 求$f^{(n)}(x)$ (05期中)

8. （10期中）设a和b都是实常数，$b<0$，定义$f(x)=\begin{cases} x^a\sin(x^b) & x>0 \\ 0 & x\le 0, \end{cases}$ 回答下列问题，并说明理由

(1) 当a, b满足什么条件时，$f(x)$不是连续函数?

(2) 当a, b满足什么条件时，$f(x)$连续，但不可导?

(3) 当a, b满足什么条件时，$f(x)$可导，但$f'(x)$在区间$[-1,1]$上无界?

(4) 当a, b满足什么条件时，$f'(x)$在区间$[-1,1]$上有界，但$f'(x)$不连续?

(5) 当a, b满足什么条件时，$f'(x)$连续?

9. 曲线$x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=16$在$(4,4)$处的切线方程为 (10期中)

10. 设$f(x)$在$x=a$的邻域内有定义，则$f(x)$在$x=a$可导的一个充分条件是 (10期中)

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h(f(a+\frac{1}{h})-f(a))$存在 (B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在 (D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

11. (14期中) 设$y=\dfrac{x^2}{1-x}$，则$y^{(5)}(x)=$

12. (14期中) 设$f(x)=|x^2-4|\ln(3+x)$.
(1) 讨论$f(x)$在其定义域内的可导性
(2) 在导数存在的点x处，求$f'(x)$

13. （15期中）设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内

(A) 处处可导　　(B) 恰有一个不可导点

(C) 恰有两个不可导点　　(D) 至少有三个不可导点

14. (15期中) 设函数$f(x)$在 $x=0$连续，则下列命题错误的是

(A) 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则$f(0)=0$

(B) 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}$ 存在，则$f'(0)$ 存在

(C) 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则$f'(0)$ 存在

(D) 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则$f(0)=0$