习题课一 数列极限

April 5, 2017

一. 问答题

1. 下列说法能不能作为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的定义?

一. 问答题

1. 下列说法能不能作为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的定义?

（1）对于无穷多个$\epsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$, s.t. $n > N$时，有$|x_n - a| < \epsilon$

一. 问答题

1. 下列说法能不能作为$\lim_{n\to\infty} x_n = a$的定义?

（1）对于无穷多个$\epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, s.t. $n > N$时，有$|x_n - a| < \epsilon$

（2）对$\forall \epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, s.t. $n > N$时，有无穷多个x_n，使$|x_n - a| < \epsilon$

一. 问答题

1. 下列说法能不能作为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$的定义?

（1）对于无穷多个$\epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, s.t. $n > N$时，有$|x_n - a| < \epsilon$

（2）对$\forall \epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, s.t. $n > N$时，有无穷多个x_n，使$|x_n - a| < \epsilon$

（3）对$\forall \epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, s.t. $n > N$时，有$|x_n - a| < k\epsilon$ (其中$k > 0$)

一. 问答题

1. 下列说法能不能作为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的定义?

（1）对于无穷多个$\epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, s.t. $n > N$时，有$|x_n - a| < \epsilon$

（2）对$\forall \epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, s.t. $n > N$时，有无穷多个x_n，使$|x_n - a| < \epsilon$

（3）对$\forall \epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, s.t. $n > N$时，有$|x_n - a| < k\epsilon$ (其中$k > 0$)

（4）对$\forall \epsilon > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$, s.t. 对所有的正整数$p$，不等式$|x_{n+p} - a| < \epsilon$ 成立

2. 有界数列是否一定收敛？无界数列是否发散？

2. 有界数列是否一定收敛？无界数列是否发散？

3. 单调数列是否一定收敛？收敛数列是否一定单调？

2. 有界数列是否一定收敛？ 无界数列是否发散？

3. 单调数列是否一定收敛？ 收敛数列是否一定单调？

4. 若数列$\{x_n\}$ 与$\{y_n\}$ 发散，问数列$\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{\frac{x_n}{y_n}\}$是否一定发散？

二. 证明下列极限

二. 证明下列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3^n} = 0$

二. 证明下列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3^n} = 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 3n - 8}{n^2 - 9} = 2$

三. 求下列极限

三. 求下列极限

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$

三. 求下列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})\ (|x|<1)$

四. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2}$$

四. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2}$

五. 设$x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ $(n \geq 3)$, 证明$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在

四. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2}$

五. 设$x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ $(n \geq 3)$, 证明$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在

六. $x_1 = 1$, $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$ $(n \geq 2)$, 求$\lim_{n\to\infty} x_n$

四. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{(n+1)^2} + \dfrac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{n}{(n+n)^2}$

五. 设$x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_n = \dfrac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ $(n \geq 3)$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

六. $x_1 = 1$, $x_n = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$ $(n \geq 2)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

七. 设$-1 < a_0 < 1$, $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + a_n}{2}}$

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n(1 - a_n)$

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_1 a_2 \cdots a_n$

历年试题

历年试题

1. 下面四个论述中正确的是：(06期中)

(A) 若$x_n \geq 0\ (n = 1, 2, \dots)$, 且数列$\{x_n\}$单调递减，则数列$\{x_n\}$收敛，且其极限$a > 0$

(B) 若$x_n \geq 0\ (n = 1, 2, \dots)$, 且数列$\{x_n\}$收敛，则其极限$a > 0$

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geq 0$, 则$x_n \geq 0\ (n = 1, 2, \dots)$

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 则存在正整数$N$, 当$n > N$时，都有$x_n > \dfrac{a}{2}$

2. 设

$$x_n=\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$$

$(a_i>0, i=1,\ldots,n)$, 证明数列$\{x_n\}$收敛 （13期中）

3. 计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+n\sin 1}+\frac{n+2}{n^2+n\sin 2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n\sin n}\right)$ (13期中)

4. (14期中) 设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ （a为有限数），则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=$

5. (16期中) 若$x>0$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}=$