Fourier 级数

钟思佳

东南大学数学系

June 4, 2018

Outline

三角函数系的正交性

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx), \ldots\}$$

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos nx dx = 0, \quad n \neq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0, \quad n \neq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \sin mx dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx = 0, \quad k \neq n$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin kx dx = 0, \quad n \neq k$$

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot 1 dx = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos nx dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin nx dx = \pi$$

Fourier 级数

设以2π为周期的函数 $f(x)$可展成三角级数:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ n = 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,\ n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$称为$f(x)$的Fourier级数，记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

a_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$, b_n $(n = 1, 2, \dots)$ 称为$f(x)$的Fourier系数。

例1. $f(x)$以2π为周期，且$x \in (-\pi, \pi]$时，$f(x) = x$，求$f(x)$的Fourier级数

收敛性

Theorem (1 Dirichlet充分条件)

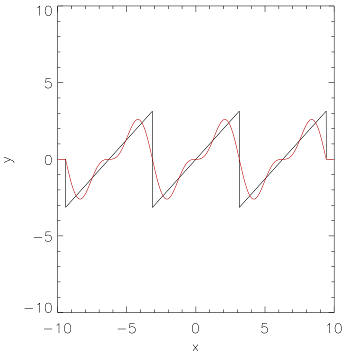
设$f(x)$以2π为周期，在$[-\pi,\pi]$上满足：
(1) 连续*or*只有有限个第一类间断点
(2) 只有有限个极值点
$\Rightarrow f(x)$的*Fourier*级数
$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$在$[-\pi,\pi]$上收敛，且其和函数为

$$S(x)=\begin{cases} f(x) & x\text{为}f(x)\text{的连续点} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & x\text{为}f(x)\text{的间断点} \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} & x=\pm\pi \end{cases}$$

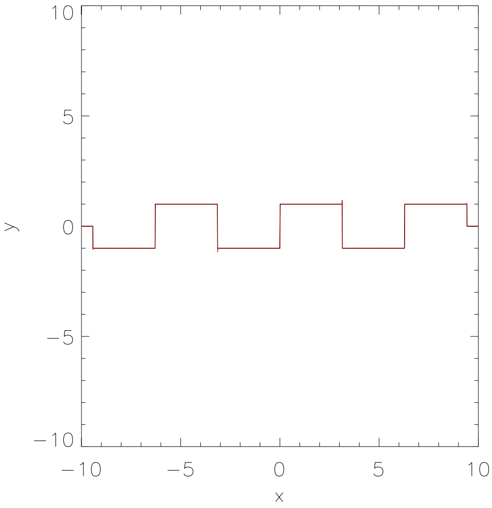
把$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上展为Fourier级数的步骤为：

- 用Dirichlet条件判断$f(x)$能否展
- 求Fourier系数
- 写出Fourier级数，并指出何处收敛于$f(x)$
- 画出$f(x)$, $S(x)$的图形（至少三个周期），并写出$S(x)$的表达式

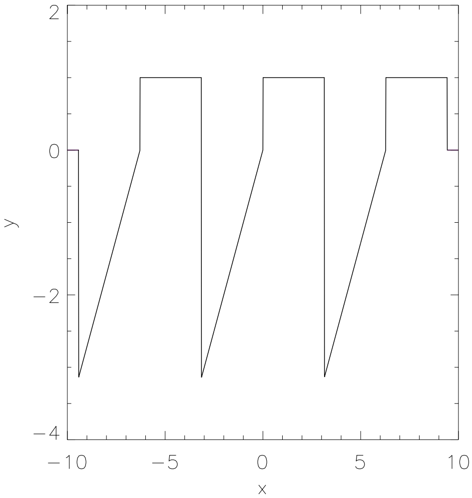
例1.



例2. $f(x)$以2π为周期，$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi, \end{cases}$ 将$f(x)$展成Fourier级数，并求和函数$S(x)$.


10
5
0
−5
−10
y
−10
−5
0
5
10
x

例3. $f(x)$以2π为周期，$f(x) = \begin{cases} x & -\pi \le x \le 0 \\ 1 & 0 < x < \pi, \end{cases}$


2
0
−2
−4
y
−10
−5
0
5
10
x

$f(x)$的周期延拓。

例4. 将$f(x) = x^2$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ 展成Fourier级数