常数项级数

May 4, 2018

Outline

常数项级数的概念与性质

一. 概念

Definition (1)

$\{c_n\}$, $c_n \in \mathbb{C}$, 称$c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots$为复数项级数，记为$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, c_n称为通项。

无穷悖论：柯西

Definition (2)

- $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$——部分和
- If $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, 称$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛， $S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$
- If $\lim_{n\to\infty} S_n$不存在， 称$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$发散
- If $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛， 称$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k$为级数的余项, $\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$.

例1. $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \ (a \neq 0)$ 收敛 or not? （等比级数）

例2. 讨论$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 的敛散性

例3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$

例4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (调和级数)? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$?

例1. $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \ (a \neq 0)$ 收敛 or not? （等比级数）

例2. 讨论$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 的敛散性

例3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$

例4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ （调和级数） 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛

Theorem (1)

$$c_n = a_n + ib_n, (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\text{收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n\text{都收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a + bi \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$$

例5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})$敛散性

Theorem (2 必要条件)

$$If \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

$$\text{If } \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0, \text{则} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散}$$

$$\text{但} \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \text{ 不一定 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛}$$

例6. $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{n}{n+1}$的敛散性

Theorem (3 Cauchy准则)

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{Z}^+, s.t.\ \forall n > N, p \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| = |c_{n+1} + \cdots + c_{n+p}| < \epsilon.$$

二. 性质

- If $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，且$S=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Rightarrow \forall k$ const. $\sum_{n=1}^{\infty} kc_n$ 收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty} kc_n = kS$
- If $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 且$T=\sum_{n=1}^{\infty} u_n, S=\sum_{n=1}^{\infty} v_n \Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = T \pm S$
- 在级数中加上或者去掉有限多项，不改变级数的敛散性
- If $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 不改变次序加括号仍收敛，且值不变

先有括号，去掉后不一定收敛

If 加括号发散 $\Rightarrow$ 去掉后原来的也发散

例7. 试问下列说法是否正确，并说明理由或者举例

(1) If $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(c_n + d_n)$ 发散

(2) If $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(c_n + d_n)$ 发散

例8. 判断敛散性

(1) $1 - \ln\pi + \ln^2\pi - \ln^3\pi + \dots$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n(n+1)} - (-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{3^n}\right)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}\right)$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

例9. If $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 收敛（依模收敛或绝对收敛）$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛

$$\begin{tikzcd}
\text{等比级数, |q|<1收敛} & \sum_{n=1}^{\infty} c_n \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \text{if} \lim_{n\to\infty} c_n \neq 0\text{发散} \\
 & \lim_{n\to\infty} c_n = 0 \arrow[d] & \\
\text{性质} & \text{进一步判断} \arrow[l] \arrow[r] & \text{定义}
\end{tikzcd}$$

数项级数判敛法

一. 正项级数

$c_n \geq 0$

Theorem (1)

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有界

例1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{2^n}$

Theorem (2 比较判敛法)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$都为正项级数，且$u_n \leq v_n, (n = 1, 2, \cdots)$,

(1) If $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) If $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

Corollary

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$都为正项级数，*if* $\exists$ *const.* $C > 0$, $N \in \mathbb{Z}^+$, *s.t.* $n \geq N$时，恒有 $u_n \leq Cv_n \Rightarrow$

(1) *If* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) *If* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

例2. 判断级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

例3. 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的敛散性，其中$p>0$