

解析函数的孤立奇点及留数

钟思佳

东南大学数学系

June 4, 2018

Outline

► $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx$ ($a > 0$) 型, 其中

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n}, \quad (a_m, b_n \neq 0),$$

满足:

(1) $n - m \geq 1$

(2) $Q_n(z)$ 在实轴上 $\neq 0$, i.e. $R(z)$ 在实轴上无奇点, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[R(z)e^{iaz}, z_k]$$

其中 z_k ($k = 1, \dots, n$) 为 $R(z)$ 在上半平面内的所有奇点。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos(ax) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin(ax) dx$$

例8. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2 + b^2)^2} dx \quad (a > 0, b > 0)$