各类积分的关系

April 18, 2018

Outline

格林（Green）公式

一些概念:

- 单连通区域
- 复连通区域
- 区域的边界曲线C的正向：沿C走时，D靠近它的部分总在左边

Theorem (1 Green定理)

D：平面连通闭区域，C：逐段光滑曲线边界。$P(x,y), Q(x,y)$ 在D上具有一阶连续偏导数，则：

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

C：D的取正向的边界。

Remark:

- 揭示了线积分和面积分之间的关系
- 给出计算面 or 线积分的新方法

$$\iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

- 注意：封闭，正向，偏导数连续
- P, Q的位置
- $\iint_D$积分是面积分，不能将C的方程代入
- 取$P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\oint_C -ydx + xdy.$$

例1. $\oint_C xy^2dy - x^2ydx$, C: $x^2+y^2=R^2$顺时针.

$$\oint_C -x^2ydx + xy^2dy = -\oint_{C^-} -x^2ydx + xy^2dy$$
$$= \quad -\iint_D (x^2+y^2)dxdy = -R^2\iint_D dxdy \quad \text{No!}$$

$$\begin{aligned}\oint_C -x^2ydx + xy^2dy &= -\iint_D (x^2+y^2)dxdy \\ &= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 rdr = -\frac{\pi}{2}R^4\end{aligned}$$

例2. $\int_C (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$,
C: $A(a,0) \to O(0,0)$上半圆周.

例3. $\oint_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, C: 正向曲线，

(1) 不包围O的分段光滑闭曲线

(2) 圆周 $x^2 + y^2 = a^2$

(3) 包围O的分段光滑闭曲线

例4. 求星形线C: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$所围图形面积$A$.

例5. $\iint_D e^{-y^2}dxdy$, D: $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$为顶点的三角形.