

高阶方程

钟思佳

东南大学数学系

December 29, 2017

$y^{(n)} = f(x)$ 型

一阶一阶往回积。

通解有 n 个参数 $C_i, i = 1, 2, \dots, n$.

例 2.1. 求方程 $y''' = \sin x - e^{-x}$ 的通解。

$$y = \cos x + e^{-x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$y'' = f(x, y')$ 型

$$\text{令 } z = y' \Rightarrow z' = f(x, z)$$

例 2.2. 求 $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$ 的通解。

$$y = (\arcsin x)^2 + C_1 \arcsin x + C_2$$

$y'' = f(y, y')$ 型

$$\text{令 } z = y'$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}$$

$$\Rightarrow z \frac{dz}{dy} = f(y, z)$$

例 2.3. 求 $\begin{cases} 2yy'' = 1 + y'^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ 的解。

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

例 2.4. 求 $(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = ay''$ 的通解。

既没有 x ，又没有 y

$$(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = a^2$$