1. 定积分的概念和性质

November 27, 2017

Outline

定积分的概念

定积分的定义

f 是 $[a, b]$ 上的有界函数，四步：

- 分割
- 近似
- 求和
- 求极限

Definition (1.1)

设函数f 在区间$[a,b]$ 上有界。任取一组分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 将区间$[a,b]$ 分成n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ （$i=1,2,\cdots,n$），记小区间$[x_{i-1},x_i]$ 的长度为$\triangle x_i=x_i-x_{i-1}$，$d=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\triangle x_i\}$。任取一点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，若极限

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$$

存在，且极限值既与分点x_i 的选取无关，又与ξ_i 的选取无关，则称此极限值为函数f 在区间$[a,b]$ 上的定积分，记为$\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i.$$

也称函数f 在$[a,b]$ 上Riemann （黎曼）可积（or 可积）。

称 $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$ 为Riemann 和。

积分上限，积分下限，积分区间，被积函数，积分变量（积分值与积分变量无关）

一些可积的充分条件：

- $f \in C_{[a,b]}$
- f 在$[a, b]$ 上有界，且只有有限个第一类间断点
- f 在$[a, b]$ 上单调有界
- if $f(x)$在$[a, b]$上可积，则改变有限多个点的值后得到的函数在$[a, b]$上仍可积，且值不变。

约定:

If $a > b$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

If $a = b$, $\int_a^a f(x)dx = 0$

例1. (1)求$\int_0^1 x^2dx$