函数项级数、幂级数

May 14, 2018

Outline

函数项级数的概念

- (复)函数项级数：$\{u_n(z)\}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$，$z \in \mathbb{C}$
- $z \in \mathbb{R}$——实函数项级数
- 收敛点：$\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$, s.t. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0)$ 收敛
- 收敛域：收敛点的全体
- 发散点，发散域

例1. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} z^n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3-4n} (\cos x)^n$

幂级数及其收敛性

幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ z\in\mathbb{C},\quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n,\ x\in\mathbb{R}$

目标：$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

Theorem (1 Abel 定理)

(1) if $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在点z_0 $(z_0 \neq 0)$ 收敛 $\Rightarrow \forall |z| < |z_0|$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛

(2) if $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在点z_0发散 $\Rightarrow \forall |z| > |z_0|$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 发散

Theorem (2)

设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 不是仅在$z = 0$处收敛，也不是在整个复平面上收敛，则 $\exists R > 0$, *s.t. if* $|z| < R$ 时，级数绝对收敛；$|z| > R$ 时，发散；当 $|z| = R$ 时，不一定。

这个R 称为收敛半径

- $|z| < R$ 称为收敛圆，$|x| < R$, 称为收敛区间
- if $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 仅在$z = 0$ 处收敛，规定$R = 0$, if $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在整个复平面上收敛，规定$R = +\infty$

Theorem (3)

设 $\lim_{n\to\infty}|\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \rho$ *(or* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \rho$*)*,

则$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径为:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & 0 < \rho < +\infty \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$$