# 无穷大量与无穷小量

钟思佳

东南大学数学系

October 11, 2017

## Definition

设函数$f(x)$在$x_0$的去心邻域内有定义，若$\forall G > 0, \exists \delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$|f(x)| > G$，则称$f(x)$是$x \to x_0$时的无穷大量。记为$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ or $f(x) \to \infty$ $(x \to x_0)$.

- if 上述概念改为 $f(x) > G$, 正无穷大量，$f(x) < -G$，负无穷大量.
- 也有$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ 的定义.
- 事实上极限不存在，只是形式上这么写而已
- 无穷大量$\neq$无界函数

例4.1 证明 $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

性质：

- 有限个无穷大量之积为无穷大量
- 无穷大量＋有界变量 为无穷大量

**Definition**

若$\lim X = 0$, 则称$X$是该极限过程中的无穷小量。

Rem: 所谓无穷小量是指与0可以无限接近的量

性质：

- 有限个无穷小量的和（或积）是无穷小量
- 无穷小量与有界变量之积是无穷小量
- 若$X$是无穷大量，则$\dfrac{1}{X}$是无穷小量，反之，若$X$是无穷小量，且$X \neq 0$，则$\dfrac{1}{X}$是无穷大量。
- 0 是不是无穷小量?

**Theorem**

$\lim X = a \Leftrightarrow X = a + \alpha$, $\alpha$是无穷小量。

## 无穷小量的比较

**Definition**

设 $\lim \alpha = \lim \beta = 0, \alpha \neq 0,$

- 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则称$\beta$是$\alpha$的高阶无穷小，记作$\beta = o(\alpha)$
- 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0,$ 则称$\beta$是$\alpha$的同阶无穷小，记作$\beta = O(\alpha)$
- 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作$\beta \sim \alpha$
- 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0,$ 则称$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小

## Theorem

- 若$\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$
- 若$\alpha' \sim \alpha, \beta' \sim \beta$, 且$\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$

乘除法等价无穷小的相互代换（加减法不可以）

当$x \to 0$时

$$\sin x \sim x \qquad \arcsin x \sim x$$

$$\tan x \sim x \qquad \arctan x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{1}{\ln a}x \qquad \ln(1+x) \sim x$$

$$a^x - 1 \sim \ln a x \qquad e^x - 1 \sim x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

例4.2 (1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tan(2x)}{\sin(5x)}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\arcsin x)^m}$

例4.3 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$$

right?

NO!