2. 微积分学基本定理与基本公式

November 29, 2017

Theorem (2.1)

If $f \in C_{[a,b]}$，则$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是$f(x)$在$[a,b]$ 上的一个原函数.

$F(x)$ 称为 $f(x)$ 的原函数 if $F'(x) = f(x)$.

Theorem (2.1)

If $f \in C_{[a,b]}$，则$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是$f(x)$在$[a, b]$ 上的一个原函数.

（*i.e.* $\Phi'(x) = f(x)$）

例1. (1) 求 $\frac{d}{dx}(\int_0^x \sqrt{1+t^2}dt)$

(2) 求 $\frac{d}{dx}(\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt)$

若 $f(x)$ 连续，$\varphi(x), \psi(x)$ 可导，则

- $(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$
- $(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt)' = f(\varphi(x))\varphi'(x)$
- $(\int_x^b f(t)dt)' = -f(x)$
- $(\int_{\psi(x)}^b f(t)dt)' = -f(\psi(x))\psi'(x)$
- $(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt)' = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$

例2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1+x^2} e^{-t^2}dt}{x^2}$

例3. 求 $\dfrac{d}{dx}(\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}(x+t)\sin t^2 dt)$

例4. 设由 $\displaystyle\int_0^{y-x} e^{t^2}dt+\int_0^{x^2}\cos^2 t dt=0$ 确定y 为x 的函数，求$\dfrac{dy}{dx}$

例5. 设 $\displaystyle\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x$, $f(x)$是一个连续函数，求 $f(2)$.

例6. 设 $f(x) > 0$, $f \in C_{[0,+\infty)}$, 证明

$$F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

在$(0, +\infty)$ 内严格单调递增。

2. Newton-Leibniz 公式

充分条件：If $f(x)$ 在I 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 存在原函数 $F(x)$ (定理2.1)

If $F(x)$是 $f(x)$的原函数，则$F(x)+C$ 也是。

反之，$f(x)$ 在 I 上的任何两个原函数间仅差一个常数。

Theorem (2.2)

设$f \in C_{[a,b]}$, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

——*Newton-Leibniz* 公式。

Rem: 条件可以减弱为 $f \in R_{[a,b]}$.

例7. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$