反常积分

December 20, 2017

定积分

定积分

$f(x)$ 是$[a, b]$上的有界函数，“四步”，如果极限存在，且与分割和"ξ_i"的取法无关，则称$f(x)$为Riemann可积。

$$\int_a^b f(x)dx$$

定积分

$f(x)$ 是$[a, b]$上的有界函数，“四步”，如果极限存在，且与分割和"ξ_i"的取法无关，则称$f(x)$为Riemann可积。

$$\int_a^b f(x)dx$$

- 区域$[a, b]$无界?

定积分

$f(x)$ 是$[a, b]$上的有界函数，“四步”，如果极限存在，且与分割和"ξ_i"的取法无关，则称$f(x)$为Riemann可积。

$$\int_a^b f(x)dx$$

- 区域$[a, b]$无界?
- $f(x)$无界?

定积分

$f(x)$ 是$[a,b]$上的有界函数，“四步”，如果极限存在，且与分割和"ξ_i"的取法无关，则称$f(x)$为Riemann可积。

$$\int_a^b f(x)dx$$

- 区域$[a,b]$无界?
- $f(x)$无界?

$$\Rightarrow$$ “反常”积分

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$的类型

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$的类型

- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ limited

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$的类型

- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ limited $\Longleftrightarrow \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ exists

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$的类型

- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ limited $\Longleftrightarrow \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ exists
- $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ 类似

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$的类型

- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ limited $\Longleftrightarrow \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ exists
- $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 类似
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$的类型

- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ limited $\Longleftrightarrow \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ exists
- $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ 类似
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛$\Longleftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ 和 $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ 都存在

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$的类型

- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ limited $\Longleftrightarrow \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ exists
- $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 类似
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛$\Longleftrightarrow \forall c\in\mathbb{R}, \int_{-\infty}^c f(x)dx$ 和 $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 都存在（任意可以变为存在）

1. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \ (a > 0)$ 何时收敛？何时发散？

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ 收斂? 发散?

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ 收敛？发散？

$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 为奇函数 $\Rightarrow$ "=0"?

3. 已知 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 求 $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$.

$f(x)$在(a,b)无界

$f(x)$在(a, b)无界

- if $x \to a^+$时, $f(x) \to \infty$,

$f(x)$在(a,b)无界

- if $x \to a^+$时, $f(x) \to \infty$, $$\int_a^b f(x)dx$$ 收敛

$f(x)$在(a,b)无界

- if $x \to a^{+}$时, $f(x) \to \infty$,
  $\int_a^b f(x)dx$ 收敛$\Longleftrightarrow \lim\limits_{c \to a^{+}} \int_c^b f(x)dx$ 存在

$f(x)$在(a,b)无界

- if $x \to a^+$时, $f(x) \to \infty$,
  $\int_a^b f(x)dx$ 收敛$\iff \lim\limits_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$ 存在
- if $x \to b^-$时， $f(x) \to \infty$ 类似

- if both $x \to a^+$ and $x \to b^-$时, $f(x) \to \infty$,

- if both $x \to a^+$ and $x \to b^-$时, $f(x) \to \infty$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 收斂

- if both $x \to a^+$ and $x \to b^-$时, $f(x) \to \infty$,
  $\int_a^b f(x)dx$ 收敛$\Longleftrightarrow$
  $\forall c \in (a, b)$, $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都存在

- if both $x \to a^+$ and $x \to b^-$时, $f(x) \to \infty$, $\int_a^b f(x)dx$ 收敛$\Longleftrightarrow$ $\forall c \in (a, b)$, $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都存在 (任意可以变为存在)

- if both $x \to a^+$ and $x \to b^-$时, $f(x) \to \infty$,
  $\int_a^b f(x)dx$ 收敛$\Longleftrightarrow$
  $\forall c \in (a, b)$, $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都存在 (任意可以变为存在)
- if $x \to c$时, $f(x) \to \infty$, 其中$c \in (a, b)$,

- if both $x \to a^+$ and $x \to b^-$时, $f(x) \to \infty$, $\int_a^b f(x)dx$ 收敛$\Longleftrightarrow$ $\forall c \in (a,b)$, $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都存在 (任意可以变为存在)
- if $x \to c$时, $f(x) \to \infty$, 其中$c \in (a,b)$, $\int_a^b f(x)dx$ 收敛

- if both $x \to a^+$ and $x \to b^-$时, $f(x) \to \infty$, $\int_a^b f(x)dx$ 收敛$\Longleftrightarrow$ $\forall c \in (a,b)$, $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都存在 (任意可以变为存在)
- if $x \to c$时, $f(x) \to \infty$, 其中$c \in (a,b)$, $\int_a^b f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都存在

- if $x \to a^+$时, $f(x) \to \infty$,

- if $x \to a^+$时, $f(x) \to \infty$,
$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

- if $x \to a^+$时, $f(x) \to \infty$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall c \in (a, +\infty)$, $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 都存在

- if $x \to a^+$时, $f(x) \to \infty$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall c \in (a, +\infty)$, $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ 和 $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 都存在 (任意可以变存在),

- if $x \to a^+$时, $f(x) \to \infty$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall c \in (a, +\infty)$, $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 都存在（任意可以变存在),
- 同理 $x \to b^-$时, $f(x) \to \infty$, $\int_{-\infty}^b f(x)dx$

1. $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$, 何时收敛，何时发散?

1. $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$, 何时收敛，何时发散?

回忆 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$, 对比。

2. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3} dx$

2. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{1-3} x^{-2}|_{-1}^{1} = 0$

2. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{1-3} x^{-2} |_{-1}^{1} = 0$

right?????

3. 求 $\int_1^2 (\frac{1}{x \ln^2 x} - \frac{1}{(x-1)^2}) dx$

应用

4. 火箭质量 m, 发射到高度 H, 求克服地球引力所做的功。并计算第二宇宙速度（离开地球引力范围）。