解析函数的孤立奇点及留数

钟思佳

东南大学数学系

June 1, 2018

Outline

(2) $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$

(3) $f(z) = \dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$

留数定理

Theorem (1)

设$f(z)$在区域D内除有限个孤立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$外，处处解析，L为D内包含诸奇点的一条逆时针方向的简单闭曲线，则

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k].$$

Theorem (2)

设$f(z)$在扩充的复平面内除有限个孤立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$外，处处解析，那么$f(z)$在所有各奇点（包含∞点）的留数总和必等于零，即

$$Res[f(z), \infty] + \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k] = 0.$$

例4. 计算下列积分

(1) $I = \oint_L \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} dz$, L: $x^2 + y^2 = 2(x+y)$, 逆时针

(2) $I = \int_L \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} dz$, L: $|z| = \frac{5}{2}$，逆时针

利用留数定理计算某些实积分

- $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$ 型，其中$R(\cos x, \sin x)$为$\cos x$, $\sin x$的有理函数，在$[0, 2\pi]$上连续，

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \oint_{|z|=1} R(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i})\frac{1}{iz}dz$$

例5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ 型，其中

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}, \ (a_m, b_n \neq 0),$$

满足:
(1) $n - m \geq 2$
(2) $Q(z)$在实轴上$\neq 0$，i.e. $R(z)$在实轴上无奇点，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Rez[R(z), z_k]$$

其中z_k $(k = 1, \ldots, n)$ 为$R(z)$在上半平面内的所有奇点。

例6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}dx\ (a>0,\ b>0,\ a\neq b)$

例7. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^3}dx$