

# 微分学基本定理及其应用

钟思佳

November 3, 2017

例3.4 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{a}{n} \cos \frac{a}{n} - \frac{a}{n+1} \cos \frac{a}{n+1} \right)$

## Corollary

If  $f$  在  $(a, b)$  可导,  $f'(x) \equiv 0 \Leftrightarrow f \equiv C$ .

## Corollary

If  $f, g$  在  $(a, b)$  可导, 且  $f'(x) = g'(x)$  for  $\forall x \in (a, b)$ , 则

$$f(x) = g(x) + C.$$

例3.5 求证 $|x| \leq 1$ 时,  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ .

## Theorem (Cauchy 中值定理)

If

$$\textcircled{1} \quad f, g \in C_{[a,b]};$$

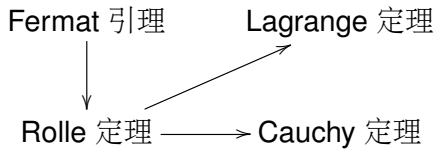
$$\textcircled{2} \quad f, g \in D_{(a,b)};$$

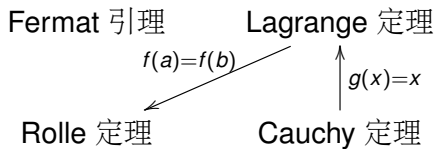
$$\textcircled{3} \quad g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$$

$$\text{then: } \exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Remark: Cauchy 中值定理的特殊情形是Lagrange中值定理,  
 $g(x) = x$ 。

例3.6 已知函数 $f$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $(a, b)$ 内可导, 且 $0 < a < b$ , 证明在 $(a, b)$ 内存在 $\xi$ 与 $\eta$ , 使得 $f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)$ .







# L'Hospital 法则

## Theorem (L'Hospital 法则 $\frac{0}{0}$ 型)

设  $f$  在  $(x_0, x_0 + \delta)$ ,  $(\delta > 0)$  内满足:

- 1  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0$ ;
- 2  $f, g$  在  $(x_0, x_0 + \delta)$  内可导,  $g'(x) \neq 0$ ;
- 3  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$  ( $|A| \leq +\infty$ )

则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

结论同样对  $x \rightarrow x_0, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow \pm\infty$

Theorem (L'Hospital 法则  $\frac{\infty}{\infty}$  型)

设  $f$  在  $(x_0, x_0 + \delta)$ ,  $(\delta > 0)$  内满足:

- ①  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \infty$ ;
- ②  $f, g$  在  $(x_0, x_0 + \delta)$  内可导,  $g'(x) \neq 0$ ;
- ③  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$  ( $|A| \leq +\infty$ )

则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

结论同样对  $x \rightarrow x_0, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow \pm\infty$

例3.7 (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}?$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}?$

L'Hospital 不是万能的!

## Remark:

- 用的时候要时刻检查是否仍满足L'Hospital 法则的条件
- 注意区分除法法则
- 有些乘除法的因子若  $\rightarrow C \neq 0$ , 可以先取极限, 活用等价无穷小的代换

例3.8 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - e^x - 3x - 1}{(e^{2x} - 1)^2 e^x}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$