第一型曲线、曲面积分

April 4, 2018

Outline

第一型曲线积分

L: 光滑or分段光滑， $f(x, y)$在L上连续

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

If 二维， $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

1. $L: \ y = y(x),\ a \le x \le b,$
$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$
2. $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$
$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$
3. $L: \ r = r(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta,\ \int_L f(x,y)ds =$
$$\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}d\theta$$

Remark:

- 无方向性，化成定积分时上限应大于下限
- $f(x, y)$定义在L上，应将曲线方程代入被积函数
- 奇偶对称性和轮换对称性依然成立
- 三维类似

例1. 求$\int_L xds$, $L:\ x^2+y^2=R^2$, $y\geq 0$

例2. $\int_L (x+y)ds$, L : 连接三点$O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$的折线

例3. $\int_L ((x+y)^2+z^2)ds$, L : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2} \\ x+z=1 \end{cases}$

例4. $\oint_L (y^2+z)ds$, $L:\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

例5. （1）设L：$x^2+y^2=4$, 则$\oint_L \frac{x^3}{x^2+y^2}ds=$

（2）设L：$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$, 周长为$a$, 则$\oint_L (xy+2x^2+y^2)ds=$

求侧面积

$$\int_L f(x,y)ds,$$

以L为准线，以$z=f(x,y)$为高的柱体的侧面积。

例6. 求圆柱面$x^2+y^2=1$位于平面$z=0$上方与$z=y$下方那部分侧面积。

第一型曲面积分

Σ: 光滑曲面$z = z(x, y)$, D_{xy}为Σ在xy平面上投影，则

$$dS = \sqrt{1 + (z_x(x, y))^2 + (z_y(x, y))^2} dxdy$$

同理：

$$dS = \sqrt{1 + (x_y(y, z))^2 + (x_z(y, z))^2} dydz$$

$$dS = \sqrt{1 + (y_x(x, z))^2 + (y_z(x, z))^2} dxdz$$

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}dxdy$$

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+(x_y)^2+(x_z)^2}dydz$$

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+(y_x)^2+(y_z)^2}dxdz$$

If 隐函数：$F(x,y,z)=0$, 且$F_z\neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

代入

$$\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}dxdy=\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}dxdy$$

另两种类似

例1. $z = xy$——双曲抛物面被柱面$x^2 + y^2 = R^2$所截出的面积

例2. 求球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在$|z| \geq b$ $(a > b > 0)$部分的截面

例3. $\iint_\Sigma z^3 dA, \Sigma : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围立体的表面

例4. $\iint_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2) dS$, Σ: $x = 0,\ y = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0,\ y \geq 0$ 所围

例5. $\iint_\Sigma (xy + yz + xz) dS, \Sigma :\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被$x^2 + y^2 = 2ax$所截

Remark:

1. $f(x, y, z)$定义在曲面上，应及时将曲面方程代入被积函数
2. 注意应用奇偶对称性和轮换对称性