各类积分的关系

April 21, 2018

Outline

曲线积分与路径无关

D: 平面连通区域，连接A, B的两条路径：C_1, C_2，if

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy,$$

称曲线积分与路径无关。

Theorem (2)

D: 单连通, *P*, *Q*: 有一阶连续偏导数，则以下四命题等价：

(1) $\forall (x, y) \in D, \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

(2) $\forall D$内逐段光滑的闭曲线C，有$\displaystyle\oint_C Pdx + Qdy = 0$

(3) $\displaystyle\int_{C(AB)} Pdx + Qdy$与路径无关，只与起点$A$，终点$B$有关

(4) $\exists$ 二元函数$u(x, y)$，$s.t.\ du = Pdx + Qdy$

Remark:

If D复连通，则上述结论不一定成立。

例6. 计算$I=\int_C (x^2y+3xe^x)dx+(\frac{1}{3}x^3-y\sin y)dy$, C: 摆线$x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $A(2\pi,0)$ 到 $O(0,0)$.

例7. A 质点$(0,1)$，对M引力大小$\frac{k}{r^2}$, 方向：M指向A, M沿$y=\sqrt{2x-x^2}$, 自$B(2,0)\to O(0,0)$, 求A对M做的功W.

求全微分

Definition

若函数$u(x,y)$的全微分$du = Pdx + Qdy$, 则称$u(x,y)$是表达式$Pdx + Qdy$的一个原函数。

If $P(x,y)$, $Q(x,y)$（D: 单连通）具有一阶连续偏导数，则$Pdx + Qdy$在D内存在原函数$\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 且

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C.$$

Theorem (3 曲线积分基本定理)

D: 单连通区域，*P, Q*连续，*ifu*是$Pdx + Qdy$的一个原函数，$\forall$ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) \in D$,则

$$\int_{C(AB)} Pdx + Qdy = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = u(x, y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}.$$

怎么求？ 与路径无关

例8. 验证：$\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$在右半平面($x > 0$)内是某函数的全微分，并求出一个这样的函数.

例9. 求$f(x)$，s.t. $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(e^x+f(x))ydx-f(x)dy$与路径无关。假设$f(x)$连续可微，且$f(0)=\frac{1}{2}$, 求此曲线积分的值.

Definition

If $\exists$ $u(x, y)$ s.t. $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 则
称$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$为全微分方程or恰当方程。
通解： $u(x, y) = C$ or $\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = C$
If P, Q 有一阶连续偏导数，
$Pdx + Qdy = 0$为全微分方程$\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

例10. 求解$(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy=0$.

Gauss公式与散度

Theorem (4 高斯(Gauss)定理)

设*(1)* Ω*:* 分片光滑曲面Σ为边界曲面的空间有界闭域;
(2) $\vec{F} = \{P, Q, R\}$, P, Q, R在Ω上有一阶连续偏导数,

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA} = \iint_{\Sigma} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$
$$= \iiint_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dxdydz$$

Σ*:* 取外侧。

例11. 计算$I = \iint_{\Sigma} x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy$, Σ: 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$的内侧.

例12. Ω 由 $z = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$ 围成，Σ: Ω表面外侧。证明：Ω的体积为

$$V = \iint_{\Sigma} x^2 yz^2 dy \wedge dz - xy^2 z^2 dz \wedge dx + z(1 + xyz) dx \wedge dy.$$