5. 定积分的应用

December 19, 2017

1.1.2 极坐标的情形

1.1.2 极坐标的情形

$$dS = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$

1.1.2 极坐标的情形

$$dS = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$

例5.4 求三叶玫瑰线 $\rho = a \sin 3\theta$ 围成的面积

1.1.2 极坐标的情形

$$dS = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$

例5.4 求三叶玫瑰线 $\rho = a \sin 3\theta$ 围成的面积

例5.5 求由圆$\rho = \sqrt{2} \cos \theta$ 与双纽线 $\rho^2 = \sqrt{3} \sin 2\theta$ 所围成公共部分的面积

1.2 求弧长

1.2 求弧长

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

1.2.1 直角坐标系

1.2.1 直角坐标系

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

1.2.1 直角坐标系

$$s=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

1.2.2 参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$

1.2.1 直角坐标系

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

1.2.2 参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $\alpha \leq t \leq \beta$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

1.2.1 直角坐标系

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

1.2.2 参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

1.2.3 极坐标 $\rho = \rho(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$

1.2.1 直角坐标系

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

1.2.2 参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

1.2.3 极坐标 $\rho = \rho(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2} d\theta$$

例5.6 求摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的一拱（$0 \le t \le 2\pi$）的弧长

例5.6 求摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的一拱（$0 \le t \le 2\pi$）的弧长

例5.7 求阿基米德螺线$\rho = a\theta$ 第一圈弧长 $(0 \le \theta \le 2\pi)$

例5.6 求摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的一拱（$0 \le t \le 2\pi$）的弧长

例5.7 求阿基米德螺线$\rho = a\theta$ 第一圈弧长 ($0 \le \theta \le 2\pi$)

例5.8 证明曲线$y = \sin x$ ($0 \le x < 2\pi$) 的弧长等于椭圆$x^2 + 2y^2 = 2$ 的周长。

1.3 体积

1.3 体积

1.3.1 $V = \int_a^b A(x)dx$

1.3 体积

1.3.1 $V = \int_a^b A(x)dx$

例5.9 以椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 为底的柱体。被一个通过短轴而与底面成α角的平面所截，求截得部分的体积

1.3.2 旋转体体积

1.3.2 旋转体体积

$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

$$V_y = \int_c^d \pi f^2(y)dy$$

1.3.2 旋转体体积

$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

$$V_y = \int_c^d \pi f^2(y)dy$$

例5.10 计算由椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围图形绕x轴旋转而得的体积

1.3.2 旋转体体积

$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

$$V_y = \int_c^d \pi f^2(y)dy$$

例5.10 计算由椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围图形绕x轴旋转而得的体积

例5.11 求圆$(x - a)^2 + y^2 \leq R^2$ $(0 \leq R \leq a)$ 绕y 轴旋转一周体积V

1.4 侧面积（旋转体）