微分学基本定理及其应用

钟思佳

November 7, 2017

L'Hospital 法则

Theorem (L'Hospital 法则 $\dfrac{0}{0}$ 型)

设f在$(x_0, x_0+\delta)$, $(\delta > 0)$内满足:

1. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = 0$;
2. f, g 在$(x_0, x_0+\delta)$ 内可导, $g'(x) \neq 0$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $(|A| \leq +\infty)$

则有

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

结论同样对$x \to x_0$, $x \to x_0^-$, $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$

Theorem (L'Hospital 法则 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)

设f在$(x_0, x_0+\delta)$, $(\delta > 0)$内满足:

1. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = \infty$;
2. f, g在$(x_0, x_0+\delta)$ 内可导， $g'(x) \neq 0$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $(|A| \leq +\infty)$

则有

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

结论同样对$x \to x_0$, $x \to x_0^-$, $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$

例3.7 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$?

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$?

L'Hospital 不是万能的！

Remark:

- 用的时候要时刻检查是否仍满足L'Hospital 法则的条件
- 注意区分除法法则
- 有些乘除法的因子若$\to C \neq 0$，可以先取极限，活用等价无穷小的代换

例3.8 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}-e^{x}-3x-1}{(e^{2x}-1)^{2}e^{x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sin\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n+1})$

(5) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln\tan(\frac{\pi}{2}x)}{\ln(1-x)}$

(6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{kx}}, (\alpha,\ k>0)$

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

Remark:

- 用的时候要时刻检查是否仍满足L'Hospital 法则的条件
- 注意区分除法法则
- 有些乘除法的因子若$\to C \neq 0$，可以先取极限，活用等价无穷小的代换

Taylor 公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \ \Rightarrow e^x-1=x+o(x)$$

$$o(x)?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$e^x-1-x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\cdots$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

Theorem (Taylor公式)

设$f(x)$在x_0处有n阶导数，则有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$

其中

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

称为f在x_0处的n阶$Taylor$多项式，$r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ 称为$Peano$余项。

特别地，称$x_0 = 0$的Taylor公式为Maclaurin公式，即

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$