1. 定积分的概念和性质

November 29, 2017

Outline

定积分的性质

例1. (1)求$\int_0^1 x^2 dx$

(2) 求$\int_0^1 e^x dx$

例2. 试将下列求和的极限表示为定积分

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2})$

例3. 试用定积分表示由曲线 $y = \sin x$，直线$x = \dfrac{\pi}{2}$及x轴$(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ 围成的平面图形绕x 轴旋转得到的旋转体的体积。

定积分的性质

设$f(x)$ 和 $g(x)$在$[a, b]$上可积，k: 常数

- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\forall a,\ b,\ c,\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b 1dx = b - a$

- 设 $f(x) \leq g(x)$, $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
  - if $f(x) \geq 0$, for $x \in [a,b]$, then $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
  - $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- 设$f \in R_{[a,b]}$, $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

例4. 证明 $\frac{1}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

- (积分中值定理) $f \in C_{[a,b]}, \Rightarrow \exists \xi \in [a, b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

- (广义积分中值定理) $f \in C_{[a,b]}$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且不变号 $\Rightarrow \exists \xi \in [a, b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

例5. 比较 $\int_0^2 e^{x^2}dx$ 与 $\int_2^4 e^{x^2}dx$ 的大小。