Taylor展开与极值

钟思佳

东南大学数学系

March 9, 2018

Outline

极值

Definition (1)

$f(x,y)$ 在邻域$N(M_0)$ 内有定义，If $\forall\ M \in N(M_0)$ 有$f(x,y) \geq (\leq) f(x_0,y_0)$, 则称$f(x,y)$ 在M_0 处有极小（大）值 $f(x_0,y_0)$

M_0: 极值点

Theorem (2)

(必要条件) If $z = f(x, y)$可微，在M_0 处有极值 $\Rightarrow$
$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, *i.e.* $gradf(M_0) = \vec{0}$.

- $f_x = f_y = 0$ 称为驻点
- 可微极值点 $\Rightarrow$ 驻点，反之未必
- 极值点未必 驻点

Theorem (3)

(充分条件) 设$M_0(x_0, y_0)$为$z = f(x, y)$的驻点。在M_0的邻域内有二阶连续偏导数。记$A = f_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}(x_0, y_0)$, $\triangle = AC - B^2$, 则:

1. $\triangle > 0$ M_0 是极值点,
   - $A > 0$ 极小
   - $A < 0$ 极大
2. $\triangle < 0$ 非极值点
3. $\triangle = 0$ 无法判断

例1. 求$z = f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ 的极值

最值

- - 找可能的极值点（驻点，偏导数不存在的点）
  - 边界点
- 比较

实际问题中，若能判断最大（小）值必在D的内部取到，而在D内只有一个驻点，则一定是这个点

例2. 求 $f(x,y) = x^2 + 2x^2y + y^2$ 在圆域 $D = \{(x,y)|\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大最小值

例3. 用薄铁皮做一个横断面为等腰梯形的水槽，对流量大小有一定要求，i.e. 横断面面积一定。问：应如何选择θ 及 h s.t. 材料最省？

条件极值

有附加条件的极值问题：求$u=f(x,y,z)$在条件$\varphi(x,y,z)=0$下的极值

拉格朗日（Lagrangle）乘数法

令$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z)$

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases}$$

λ 称为Lagrange 乘数。

Remark:

- 如果是实际问题，知必有条件极值，且驻点唯一，则此必是
- 推广到n 元函数$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 在m 个条件 $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $i = 1, \ldots, m$下的极值，则令Lagrange函数

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad + \cdots + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

例4. 求曲面$4z = 3x^2 - 2xy + 3y^2$与平面$x + y - 4z - 1 = 0$之间的最短距离

例5. 求半径为R的圆内接三角形中面积最大者