习题课7-第一型曲线、曲面积分及应用

March 15, 2018

一. 选择题

一. 选择题

1. 设L为上半圆$y=\sqrt{1-x^2}$，则$\int_L |x|ds=$

(A) $\int_{-1}^{0}(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})dx+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(B) $\int_0^{\pi}\cos t\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}dt$

(C) $\int_0^1|x|\frac{dy}{|x|}+\int_0^1|x|(-\frac{dy}{|x|})$

(D) $\int_0^1 x\frac{1}{x}dy$

2. 设Σ为yz平面上的圆域：$y^2 + z^2 \leq 1$，

则$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dA =$

(A) 0 (B) π (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

2. 设Σ为yz平面上的圆域：$y^2+z^2\leq 1$，

则$\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dA=$

(A) 0 (B) π (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

3. 设L是XoY平面上的圆周$x^2+y^2=1$，则$I_1=\oint_L (x^3+y^2)ds$

与$I_2=\oint_L (x^4+y)ds$的大小关系是

(A) $I_1<I_2$ (B) $I_1>I_2$ (C) $I_1=I_2$ (D) 无法判别

二. 求积分

二. 求积分

1. $\oint_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$, $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=1 \end{cases}$

二. 求积分

1. $\oint_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$， $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=1 \end{cases}$

2. $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2) ds$, $L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$， L的周长为a

二. 求积分

1. $\oint_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$, $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=1 \end{cases}$

2. $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2) ds$, $L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, L的周长为a

3. $\oint_L (x^2-x-y-z) ds$, $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

二. 求积分

1. $\oint_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$, $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=1 \end{cases}$

2. $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2) ds$, $L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, L的周长为a

3. $\oint_L (x^2-x-y-z) ds$, $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

4. $\iint_\Sigma \frac{1}{z} dS$, Σ: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $0<h\le z\le a$

二. 求积分

1. $\oint_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$， $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=1 \end{cases}$

2. $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds$, $L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$， L的周长为a

3. $\oint_L (x^2-x-y-z)ds$, $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

4. $\iint_\Sigma \frac{1}{z}dS$, Σ: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $0<h\le z\le a$

5. $\iint_\Sigma \sqrt{1+4z}dS$, $\Sigma:\ z=x^2+y^2,\ z\le 1$

三. 应用

1. 设一半圆环薄板：$a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$ $(0 < a < b, y \ge 0)$的面密度$\rho = \mu y$ （μ为常数）。求此薄板对原点$(0,0)$处质量为m的质点的引力。

三. 应用

1. 设一半圆环薄板：$a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$ $(0 < a < b, y \ge 0)$的面密度$\rho = \mu y$（μ为常数）。求此薄板对原点$(0,0)$处质量为m的质点的引力。

2. 求球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$（$a > 0$）被平面$z = \frac{a}{4}, z = \frac{a}{2}$所夹部分的面积

三. 应用

1. 设一半圆环薄板：$a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$ $(0 < a < b, y \ge 0)$的面密度$\rho = \mu y$ （μ为常数）。求此薄板对原点$(0,0)$处质量为m的质点的引力。

2. 求球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ （$a > 0$）被平面$z = \frac{a}{4}, z = \frac{a}{2}$所夹部分的面积

3. 已知一球的半径为R, P_0为球面上一定点，球体上任一点的密度与该点到P_0的距离的平方成正比，求球体的质心

三. 应用

1. 设一半圆环薄板：$a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ $(0 < a < b, y \geq 0)$的面密度$\rho = \mu y$（μ为常数）。求此薄板对原点$(0, 0)$处质量为m的质点的引力。

2. 求球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$（$a > 0$）被平面$z = \frac{a}{4}, z = \frac{a}{2}$所夹部分的面积

3. 已知一球的半径为R, P_0为球面上一定点，球体上任一点的密度与该点到P_0的距离的平方成正比，求球体的质心

4. 求密度为1的均匀球体$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$对直线$L$：$x = y = z$的转动惯量

1. 设曲线L是球面$x^2+y^2+z^2=4$与平面$x+y+z=1$的交线，试求第一型曲线积分$\oint_L (xy+yz+zx)ds$（15‘竞赛题）

历年试题

1. （05期中）计算$\int_L x^2 ds$，其中L是曲面$x^2+y^2+z^2=9$与平面$z=\sqrt{5}$的交线

2. (06期中) 设在xoy平面上有薄板$a^2 \leq x^2+y^2 \leq a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ (其中常数$a>0$)，其面密度为$\mu=\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求此薄板的质心坐标

3. (09期中) 设曲线C为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ （$a>0$）与平面$y=x$的交线，则曲线积分$\int_C(\sqrt{2y^2+z^2}+z)ds=$

4. (09期中) 设曲面$S:\ |x|+|y|+|z|=1$，则$\iint_S(x+|y|)dS=$

5. (09期中) 设L是摆线$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$上从$t = 0$到$t = \pi$的弧段，则$L$的形心的横坐标为

(A) 1 (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

6. （09期中）平面$x + y + z = 1$被抛物面$z = x^2 + y^2$截得一椭圆，(1) 求该椭圆到坐标原点的最长距离和最短距离；(2) 求该椭圆所围平面区域的面积

7. (10期中) 曲面$z = 13 - x^2 - y^2$将球面$x^2 + y^2 + z^2 = 25$分成三部分，试计算球面被分割成三部分的曲面面积之比

8. (15期末) 求由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1-\dfrac{1}{2}x$所围立体的表面积

9. (16期中) 设D 由抛物线$y=x^2$及直线$y=1$围成的平面薄片，薄片上点(x,y)的密度函数为$\mu(x,y)=x+1$，求该薄片D对直线$y=-1$的转动惯量

10. (16期中)计算$\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{|x|}{z}dA$，其中$\Sigma$是柱面$x^2+y^2=2ay$ (a>0) 被锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和平面$z=2a$所截下的部分