Laurent 级数

钟思佳

东南大学数学系

May 25, 2018

Outline

双边无穷级数

If $f(z)$ 在z_0不解析， 不能展成$z-z_0$的幂级数, 该怎么办?

幂级数 $c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$

收敛圆：$|z - z_0| < R_1$, 在收敛圆内解析。

$$\frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots ?$$

令$\xi = \dfrac{1}{z - z_0} \Rightarrow c_{-1}\xi + c_{-2}\xi^2 + \cdots + c_{-n}\xi^n + \cdots$

收敛圆：$|\xi| < R_\xi$ 在收敛圆内解析。

$\dfrac{c_{-1}}{z - z_0} + \dfrac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \dfrac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots$

在$|z - z_0| > R_2$ 解析，$R_2 = 1/R_\xi$.

$$\cdots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

在$R_2 < |z-z_0| < R_1$ 解析, 上式称为无穷双边级数

规定:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n\text{收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n\text{收敛且} \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n\text{收敛}$$

If $R_1 \leq R_2$, 处处发散

幂级数在收敛圆内有的性质，无穷双边级数在收敛圆环域内也有。

展开为Laurent级数

Theorem (1)

设$f(z)$在$R_1 < |z - z_0| < R_2$内解析，则在此圆环域内，$f(z)$可唯一地表示为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

其中$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

L: 圆环域内任意绕z_0地一条逆时针方向的简单闭曲线。

上述展开称为Laurent展开，此级数称为Laurent级数。

Remark:

- c_n形式上虽然与Taylor级数相似，却不同，即使n为正整数也不能用高阶导数表示，因为在z_0处不可导；
- 直接展一般比较麻烦，用系数的唯一性通过代数运算等方法展会好一些。

例1. 求$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$分别在圆环域内的Laurent展式。

(1) $0<|z|<1$

(2) $1<|z|<\infty$

(3) $0<|z-1|<1$

(4) $0<|z-a|<a-1\ (a>1)$

Remark:

- 在不同域Laurent展式不同，但在一个圆环域内Laurent展式只有一个
- if在z_0解析，则在z_0的去心邻域Laurent展式即z_0邻域的Taylor级数，i.e. Taylor级数是Laurent级数的特殊情况

例2. 求$f(z)=\dfrac{1}{(z-2i)^2(z-i)}$在以$z=i$为中心的各圆环域内的Laurent展式.

例3. $f(z) = \tan\frac{1}{z}$，在$0 < |z| < R$内能否展成Laurent级数?