Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT). Unidad Monterrey

Tarea 1 Series de Tiempo

Anselmo Daniel Suarez Muñoz

11 de septiembre de 2024

1. Problema 1

1.1. Solución

Inciso a)
A continución se muestra la gráfica de la serie de tiempo de la base de datos AirlineSales

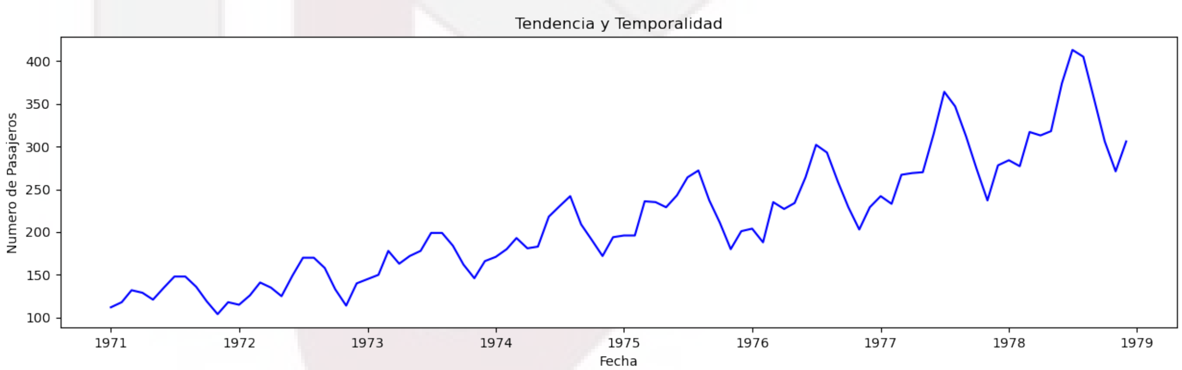

Figura 1.1: Serie de tiempo

En la figura 5.16 se observa una tendencia creciente apartir del año 1975. Es una de las tendecnias obvias más resaltantes.

Inciso b)
Para una mejor interpretación se podrían transformar los datos, yo sugeriría una transformación logarítmica

Incicso c)
A continuación observamos el gráfico de box-plots de los datos del mismo archivo para verificar si hay alguna otra tendencia.

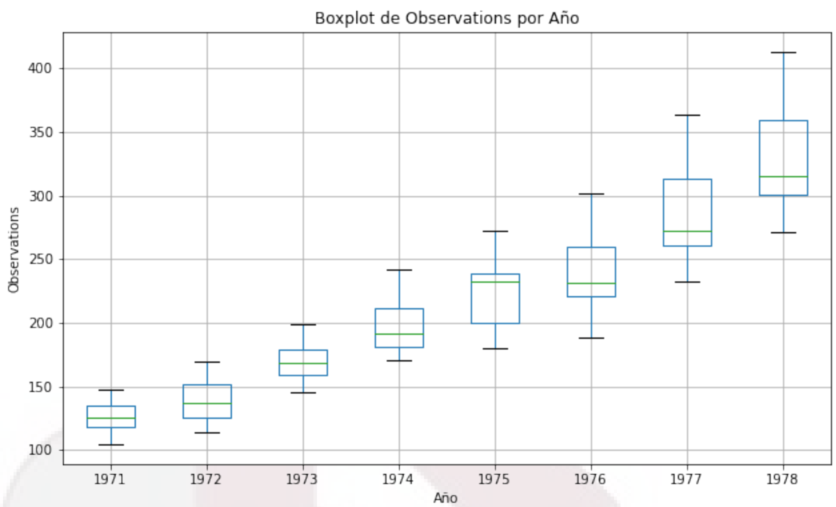

Figura 1.2: box-plot

Inciso c)
Ahora observamos el gráfico de la tendencia usando un filtro de medias móviles.

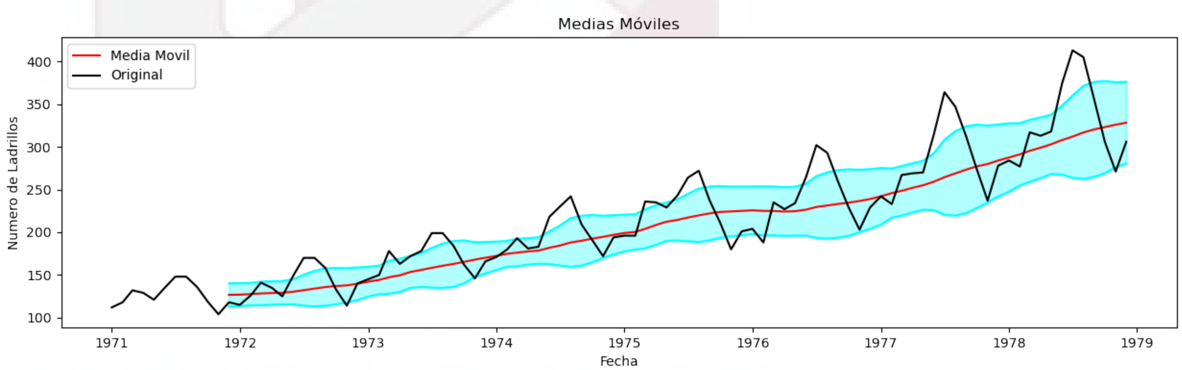

Figura 1.3: Tendencia

2. Problema 2

Solución
Definición (Operador Lag): El operador Lag es muy útil para ecuaciones en diferencias que se asocian a series de tiempo. Formalmente, el operador Lag se define como:

$$L : \{x_t\} \to \{y_t\}$$

donde los términos $\{x_t\}$ y $\{y_t\}$ son sucesiones (en nuestro contexto, series de tiempo). Entonces, el operador Lag se aplica de la siguiente manera:

$$L(x_t) = x_{t-1}$$

En términos más simples, el operador Lag aplicado a una sucesión genera una nueva sucesión donde el valor x_t es igual al valor que x_{t-1} (es decir, el valor de x en el tiempo t es igual al valor de x en el tiempo $t-1$). En general, este operador se puede aplicar k-veces, esto es,

$$L^k(x_t) = x_{t-k}$$

Además, este operador respeta la linealidad (es decir, saca escalares y distribuye sobre sumas).
Relación con polinomios característicos de una ecuación en diferencias asociada a una serie de tiempo: Supongamos que tenemos la siguiente serie de tiempo $y_t = a(L) + b(L^2)$, donde L representa al operador Lag. Para este caso específico, $aL + bL^2$ se denomina polinomio en el operador Lag. Es algebraicamente similar a un polinomio simple $az + bz^2$ donde z es un escalar. La diferencia es que el polinomio simple $az + bz^2$ se refiere a un número particular, mientras que un polinomio en el operador Lag $aL + bL^2$ se refiere a un operador que se aplicaría a una serie de tiempo $\{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ para producir una nueva serie de tiempo $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$.
Ejemplo de polinomio característico asociado a un modelo AR(2):
Primero, recordemos que la estructura de los modelos AR(2) es:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t$$

donde:

- X_t es el valor de la serie en el tiempo t,
- ϕ_1 y ϕ_2 son los parámetros del modelo (coeficientes autorregresivos),
- X_{t-1} y X_{t-2} son los valores de la serie en los dos periodos anteriores ($t-1$ y $t-2$),
- ϵ_t es un término de error o ruido blanco, que se asume como un proceso con media cero y varianza constante.

Con fines didácticos, y dado que el problema nos pide dar un ejemplo asociado a un modelo AR(2), consideremos un modelo particular con parámetros $\phi_1 = 0{,}4$ y $\phi_2 = 0{,}6$. El modelo sería:

$$X_t = 0{,}4X_{t-1} + 0{,}6X_{t-2} + \epsilon_t$$

Aplicando el operador Lag al modelo AR(2) dado:

$$X_t = 0{,}4X_{t-1} + 0{,}6X_{t-2} + \epsilon_t$$

Podemos expresar el término de error ϵ_t como:

$$\epsilon_t = X_t - 0{,}4LX_t - 0{,}6L^2X_t$$

Por lo tanto, podemos reescribirlo como:

$$\epsilon_t = (1 - 0{,}4L - 0{,}6L^2)X_t$$

De modo que el polinomio característico asociado es:

$$1 - 0{,}4L - 0{,}6L^2 = 0$$

3. Problema 3

3.1. solución

4. Estimación y Eliminación de Tendencia y Componentes Estacionales

Para analizar una serie de tiempo, el primer paso es graficar los datos para identificar discontinuidades. Es útil dividir el análisis en segmentos homogéneos. La gráfica puede sugerir la aplicación del modelo de descomposición clásica:

$$X_t = m_t + s_t + Y_t \tag{4.1}$$

donde m_t representa la tendencia (una función que cambia lentamente), s_t es la estacionalidad (una función con periodo conocido) y Y_t es el ruido aleatorio. Si las fluctuaciones estacionales y de ruido aumentan con el nivel del proceso, se debe aplicar una transformación a los datos para descomponer la serie. Los componentes de tendencia y estacionalidad se tratan como deterministas (se estiman), con la expectativa de que el ruido sea un proceso aleatorio estacionario, permitiendo el uso de un modelo probabilístico para análisis y predicción de $\{X_t\}$.
Un enfoque alternativo es el de Box y Jenkins, que implica aplicar operadores de diferencia repetidamente a los datos $\{x_t\}$ hasta que las diferencias se asemejen a un proceso estacionario $\{W_t\}$, permitiendo el uso de la teoría correspondiente para el modelo, análisis y predicción de $\{W_t\}$.

4.1. Eliminación de Tendencia en Ausencia de Estacionalidad

En ausencia de estacionalidad, el modelo se transforma a:

$$X_t = m_t + Y_t \tag{4.2}$$

donde se puede asumir sin pérdida de generalidad que $E(Y_t) = 0$. Los métodos para trabajar con estos modelos incluyen:

- **Estimación de Mínimos Cuadrados de** m_t: Ajustar una función paramétrica como $m_t = a_0 + a_1t + a_2t^2$ para minimizar $\sum_t (x_t - m_t)^2$. La tendencia estimada $\hat{m}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1t + \hat{a}_2t^2$ sirve como predictor de valores futuros.

- **Suavización Mediante Media Móvil**: La media móvil bilateral es:

$$W_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} X_{i+j} \tag{4.3}$$

Para $q+1 \leq t \leq n-q$, estimaciones de la tendencia $\hat{m}_i$ son:

$$\hat{m}_i = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^{q} X_{i+j} \tag{4.4}$$

La suavización exponencial es otra opción:

$$\hat{m}_t = \sum_{j=0}^{t-2} a(1-a)^j X_{t-j} + (1-a)^{t-1} X_1 \tag{4.5}$$

- **Diferenciación para Generar Datos Estacionarios**: Aplicando el operador de diferencia ∇:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} \tag{4.6}$$

La tendencia lineal se convierte en una constante $\nabla m_t = a$, y para una tendencia polinómica, $\nabla^k X_t = k! a_k + \nabla^k Y_t$, donde la diferencia de orden k produce una serie estacionaria.

4.2. Eliminación de Tendencia y Estacionalidad

Para eliminar tanto la tendencia como la estacionalidad en el modelo general $X_t = m_t + s_t + Y_t$, donde $E(Y_t) = 0$ y $s_{t+d} = s_t$, se pueden usar los siguientes métodos:

- **Método de Tendencia Pequeña**: Si la tendencia es pequeña y la estacionalidad es cero, la estimación natural es:

$$\hat{m}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{h} x_{j,k} \tag{4.7}$$

Para la estacionalidad:

$$\hat{s}_k = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{h} (x_{j,k} - \hat{m}_j) \tag{4.8}$$

- **Estimación de la Media Móvil**: Aplicar un filtro de media móvil para estimar m_t:

$$\hat{m}_t = \frac{1}{d} \sum_{i=t-q}^{t+q} x_i \tag{4.9}$$

La estacionalidad se estima a partir de las desviaciones promedio.

- **Diferenciación en Lag-d**: Usar el operador de diferencia ∇^d:

$$\nabla^d X_t = X_t - X_{t-d} \tag{4.10}$$

La tendencia se elimina aplicando métodos previos.

4.3. Función de Autocovarianza de un Proceso Estacionario

Si $\gamma(\cdot)$ es la función de autocovarianza de un proceso estacionario $\{X_t\}$, entonces:

$$\gamma(0) \geq 0 \tag{4.11}$$

$$|\gamma(h)| \leq \gamma(0) \text{ para todo } h \tag{4.12}$$

$$\gamma(h) = \gamma(-h) \tag{4.13}$$

Una función de autocovarianza es definida no negativa si:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i \kappa(t_i - t_j) a_j \geq 0 \tag{4.14}$$

Teorema: Una función de valores reales definida en los enteros es la función de autocovarianza de una serie estacionaria si y solo si es par y definida no negativa. La función de autocorrelación $\rho(\cdot)$ satisface las propiedades de la función de autocovarianza y además $\rho(0) = 1$.
La función de autocovarianza muestral de una serie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-h} (x_{j+h} - \bar{x})(x_j - \bar{x}) \tag{4.15}$$

donde $\bar{x}$ es la media muestral.
Observaciones: La función de autocorrelación muestral se define como:

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)} \tag{4.16}$$

Estas funciones pueden calcularse para cualquier conjunto de datos y pueden indicar no estacionariedad si muestran una disminución lenta o un comportamiento periódico.

5. Problema 4

5.1. Solución

En este apartado se aplican de manera computacional los métodos descritos en la sección anterior para los archivos Electricity.xls y ClayBricks.xls, aquí se adjuntan las grágficas para cada uno de los archivos.

Método 1: Estimación por minimos cuadrados de m_t

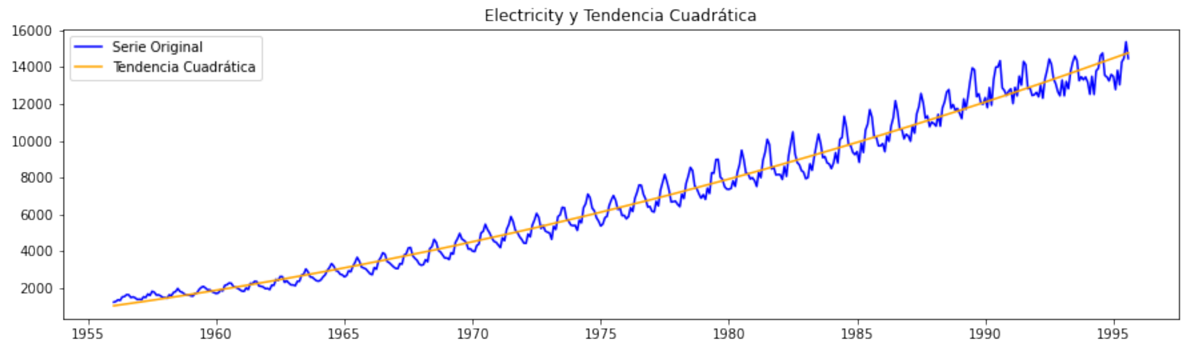

Figura 5.1: Residuos archivo Electricity

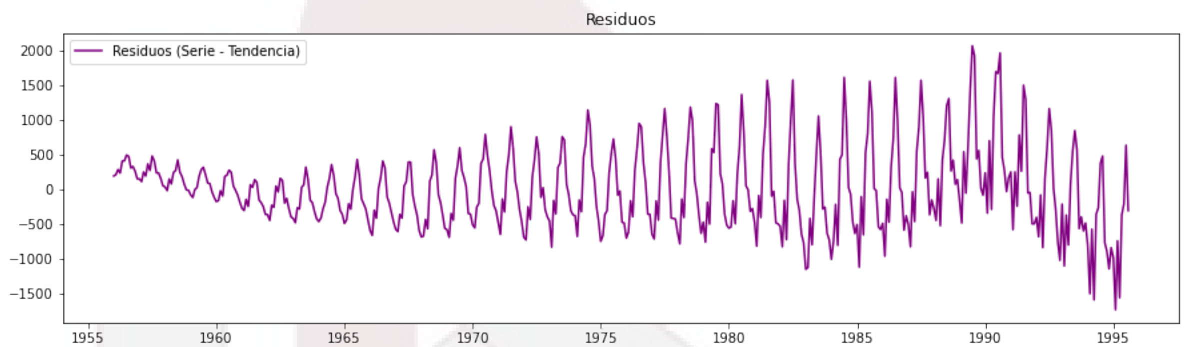

Figura 5.2: Tendencia archivo Electricity

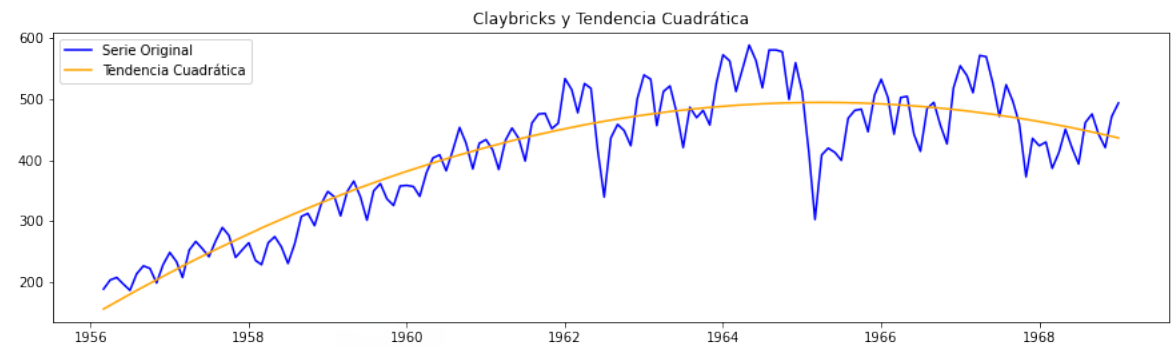

Figura 5.3: Tendencia archivo ClayBricks

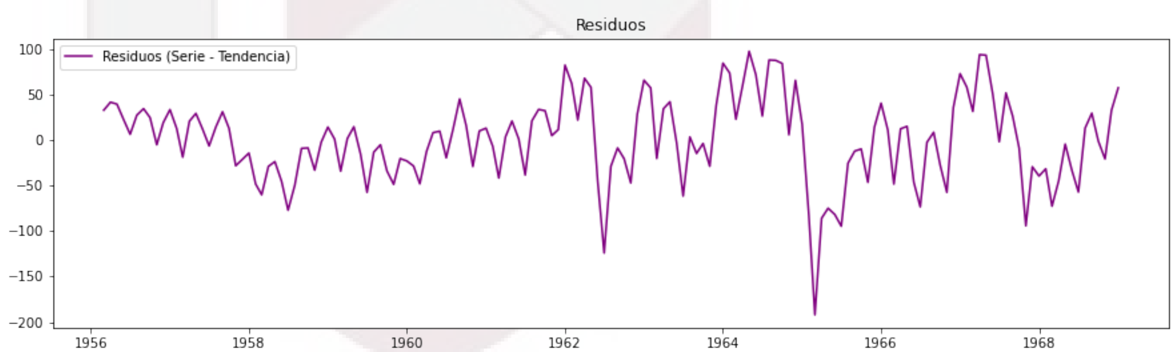

Figura 5.4: Residuos archivo ClayBricks

Método 2: Suavizado mediante una media móvil

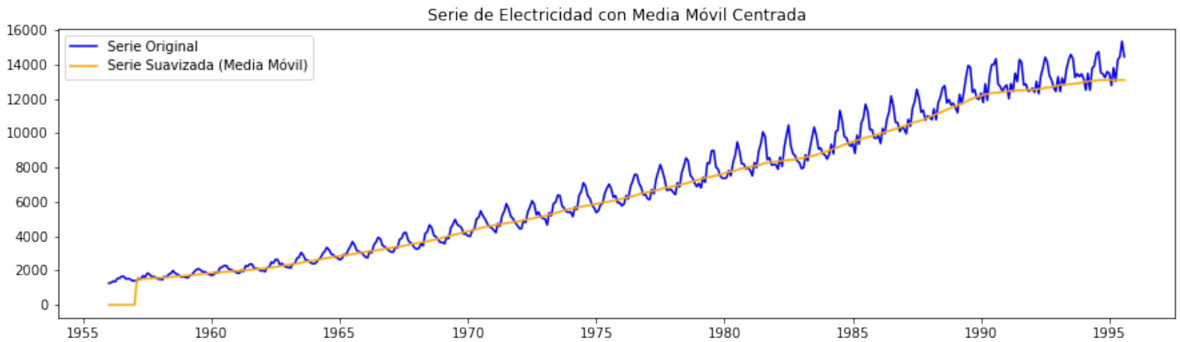

Figura 5.5: Residuos archivo ClayBricks

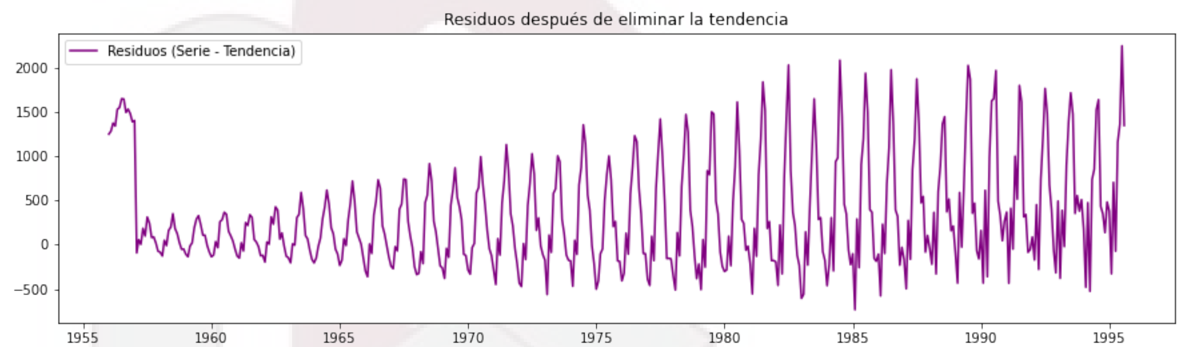

Figura 5.6: Residuos archivo ClayBricks

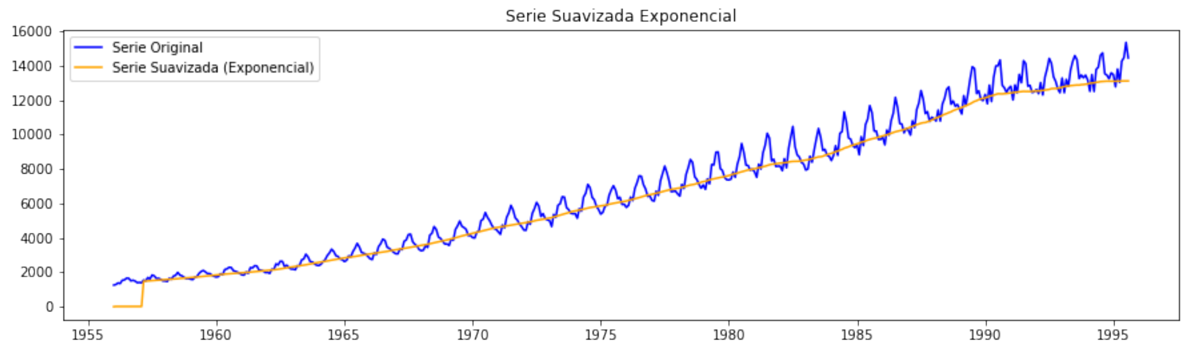

Figura 5.7: Residuos archivo ClayBricks

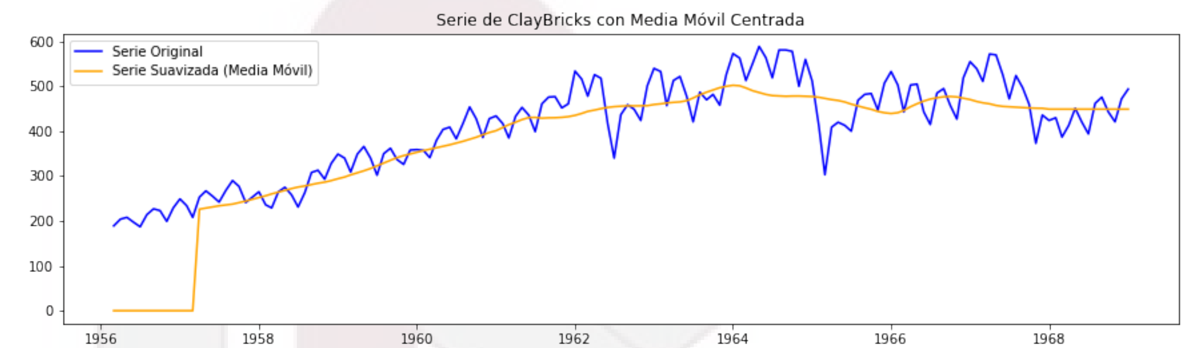

Figura 5.8: Residuos archivo ClayBricks

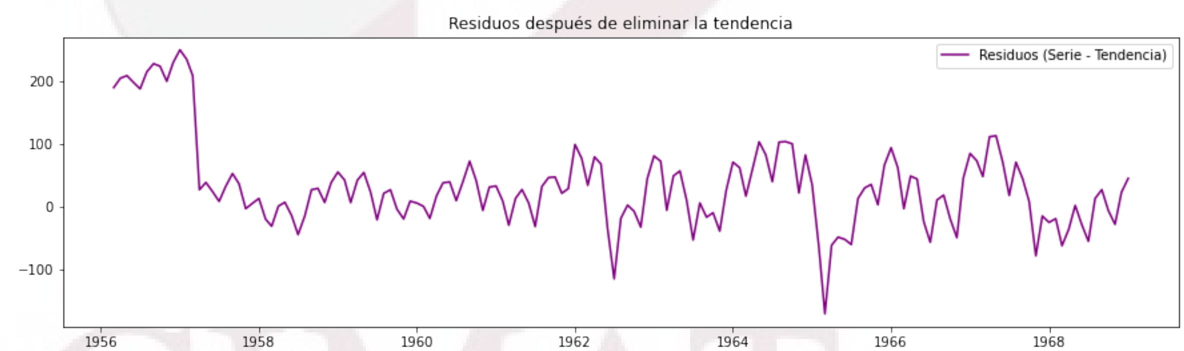

Figura 5.9: Residuos archivo ClayBricks

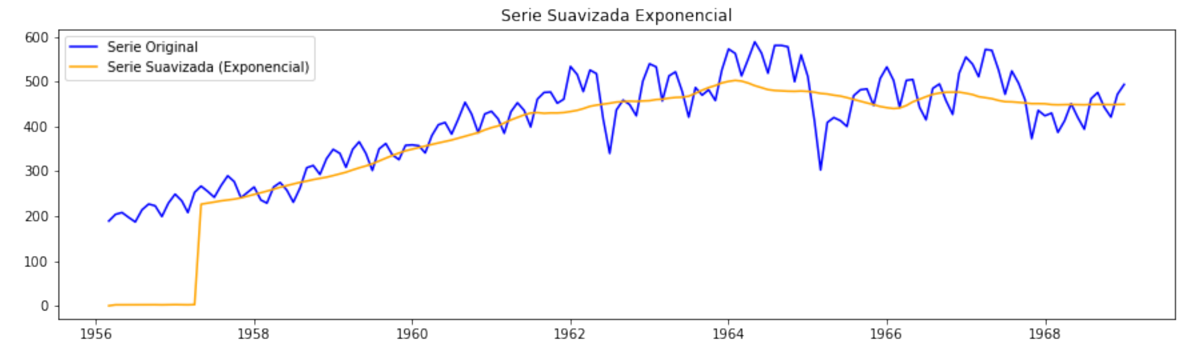

Figura 5.10: Residuos archivo ClayBricks

Método 3 Diferenciación para Generar Datos Estacionarios

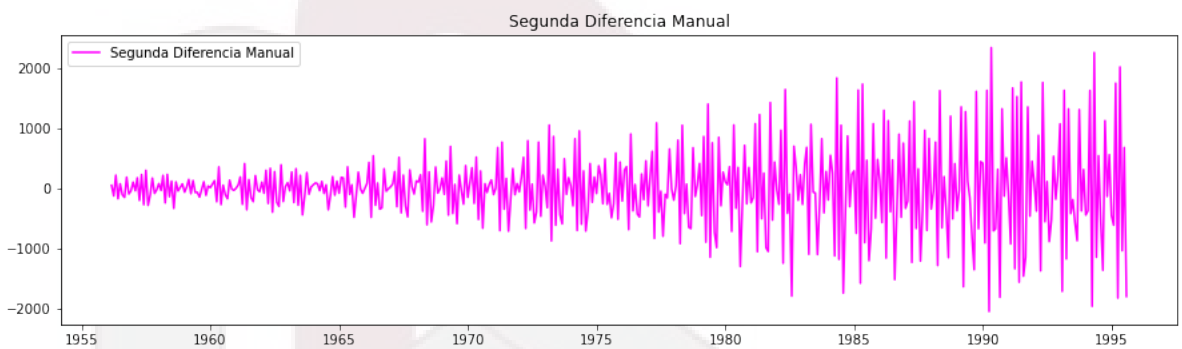

Figura 5.11: Residuos archivo ClayBricks

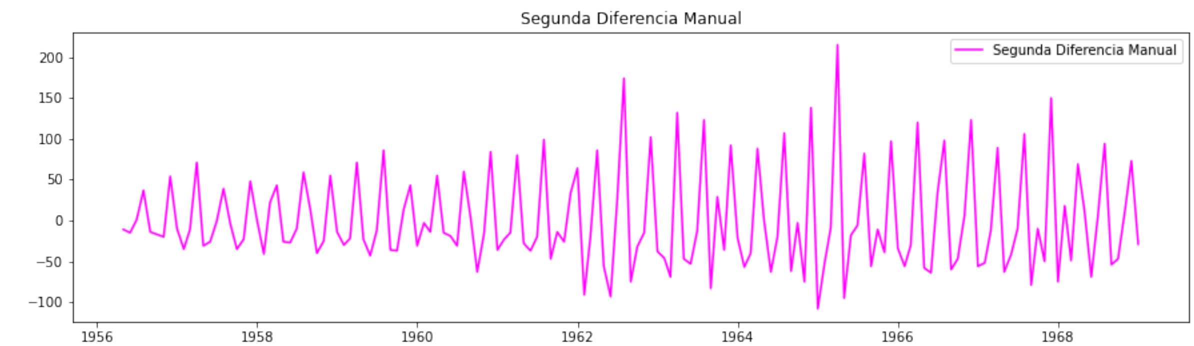

Figura 5.12: Residuos archivo ClayBricks

Método S1 Método de Tendencia Pequeña

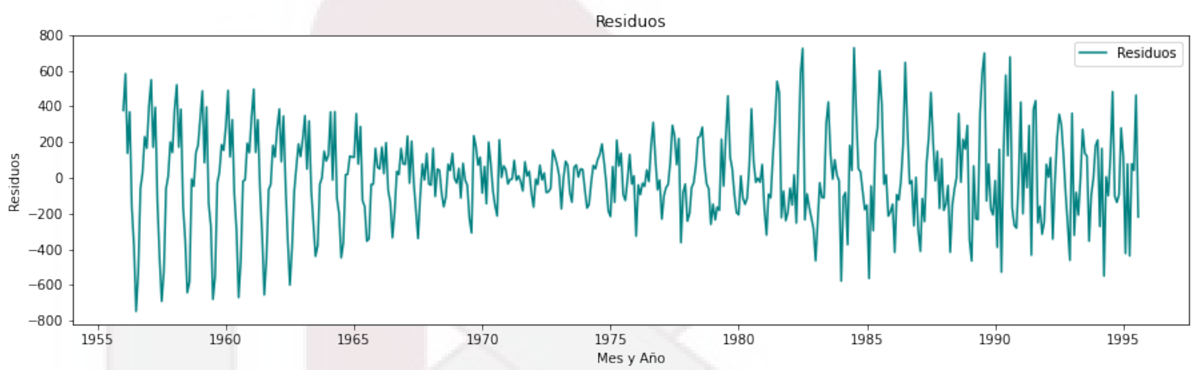

Figura 5.13: Residuos archivo ClayBricks

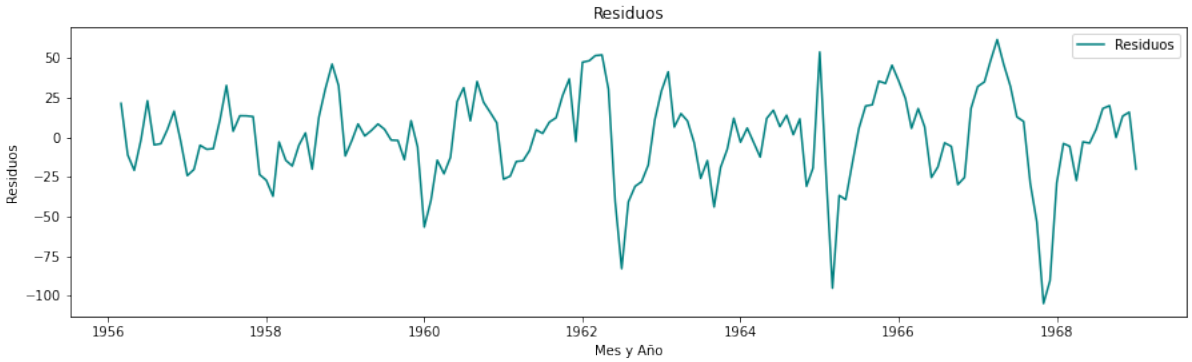

Figura 5.14: Residuos archivo ClayBricks

Método S2 Método de Estimación de media móvil

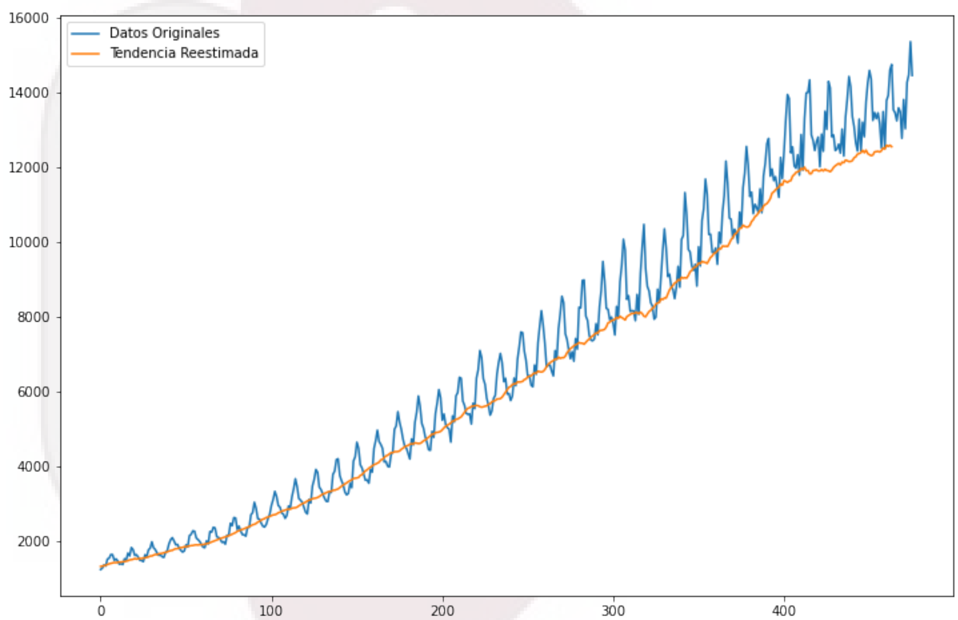

Figura 5.15: Residuos archivo ClayBricks

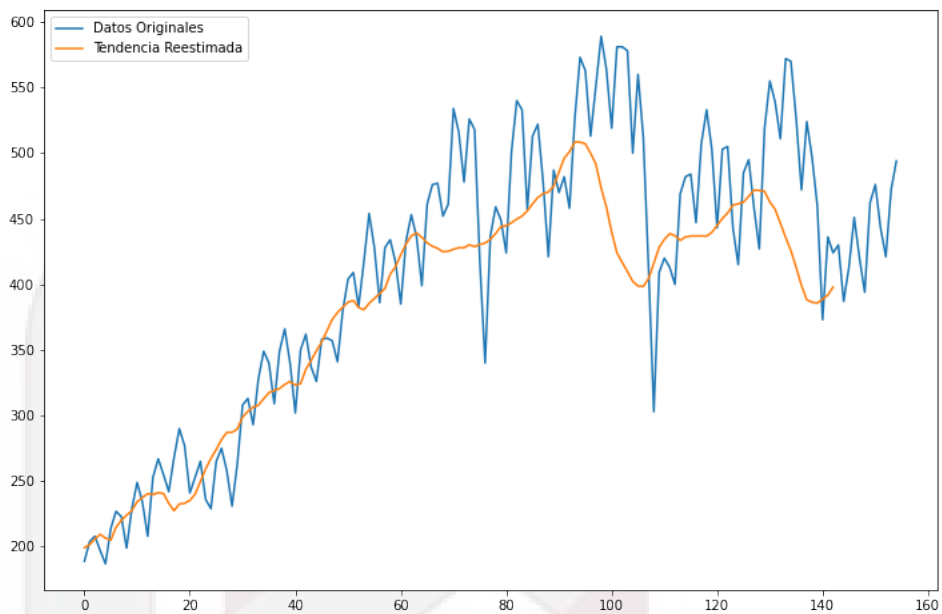

Figura 5.16: Residuos archivo ClayBricks