ECUACIONES DIFERENCIALES

Las ecuaciones diferenciales se usan habitualmente para construir MODELOS MATEMATICOS de problemas de la ciencia y la ingeniería.

Ejemplo:

Podemos considerar el modelo que describe la temperatura de un objeto que se enfría. La velocidad de cambio de la temperatura del cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que lo rodea. (Ley de enfriamiento de Newton)

Llamemos "A" a la temperatura del ambiente, y representemos con $y(t)$ a la temperatura del objeto. Supongamos que conocemos la temperatura del cuerpo en el instante $t=0$, y llamémosla y_0.

La E.D. que describe este modelo es:

$$\frac{dy}{dt} = -k\,(y - A) \qquad \text{con } y(0) = y_0$$

¿Podemos resolverla analíticamente? Sí, pues esta E.D. es bastante sencilla.

¿Por qué método? Por ejemplo por Transformada de Laplace.

$$y'(t) = -k\,y(t) + K\,A \quad \Rightarrow \quad s\,Y(s) - y_0 = -k\,Y(s) + \frac{KA}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s)\,(s+k) = \frac{KA}{s} + y_0$$

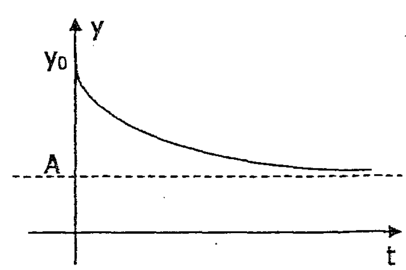
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{K\,A + s\,y_0}{s\,(s+k)}$$

Para antitransformar descomponemos Y(s) en fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+k} \qquad \text{Resulta:} \quad a = A \ \wedge \ b = y_0 - A \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{y_0 - A}{s+k}$$

Finalmente: $y(t) = A + (y_0 - A)\,e^{-kt}$

Es decir que la temperatura del cuerpo luego de transcurrido un tiempo determinado se aproxima a la temperatura del ambiente.



Si bien en este caso pudimos resolver la E.D. por un método analítico, en muchos casos ello no es posible, y entonces se debe recurrir a métodos numéricos.

Ejemplo:

La E.D. $y'(t) = t^3 + y^2$ con $y(0) = 0$ no tiene "expresión cerrada" de solución.

Es decir, que no se conoce ninguna expresión analítica que la satisfaga.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN:

Recordemos la clasificación:

Orden de una E.D. es el orden de la mayor derivada.

E.D. **Ordinaria**: es aquella en la que solamente figuran derivadas totales, no parciales, o sea tiene una sola variable independiente.

Ejemplos:

a) La E.D. de enfriamiento de un objeto (ejemplo anterior): $\dfrac{dy}{dt} = -k\,(y - A)$

es una E.D. ordinaria de orden 1.

b) La E.D. de oscilación del péndulo ideal: $m\,l\,y''(t) = F(t) - m\,g\,y(t)$

es una E.D. ordinaria pero de orden 2.

c) La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

es una E.D. de orden 2 pero no es ordinaria, sino en derivadas parciales. Hay dos variables independientes (t, x).

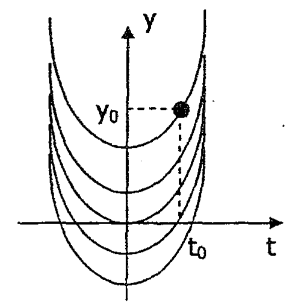
Nosotros vamos a estudiar las E.D. ordinarias de orden 1, cuya forma genérica es:

$F(t,y,y') = 0$ o bien si se puede despejar: $y' = f(t,y)$

En realidad, dada una E.D. de orden 1, existen infinitas funciones soluciones, toda una familia. Para determinar una de ellas se necesita conocer algún dato más.

Ejemplo:

Consideremos la ecuación: $y(t)' = 2t$



Todos sabemos que las soluciones son las parábolas de eje focal y: $y(t) = t^2 + C$

La pregunta que nos hacemos es:

Si fijamos un punto del plano (t_0, y_0)

¿habrá alguna de las curvas que pase por él?

Y si es así, ¿cuántas?

Pues en este caso, es sencillo ver que siempre habrá una.

Pero no en todas las E.D. pasa lo mismo.

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL:

Se denomina así a todos los problemas: $y' = f(t,y)$ con $y(t_0) = y_0$

Como comentamos antes, queremos saber si el hecho de fijar $y(t_0) = y_0$ (que es un punto del plano) nos conduce a hallar una única solución.

La respuesta la hallaremos en el siguiente teorema:

TEOREMA de existencia y unicidad de solución de problemas de valor inicial

Dado: $y' = f(t,y)$ con $y(t_0) = y_0$ (*)

Si $f(t,y)$ es continua en $R = \{(t,y) \,/\, a \le t \le b \ \wedge \ c \le y \le d\}$ tal que $(t_0, y_0) \in R$ y además $f(t,y)$ verifica la condición de Lipschitz en R, entonces el problema de valor inicial (*) tiene solución única en un entorno $t_0 \le t \le t_0 + \delta$

CONDICION DE LIPSCHITZ

Sea la función $f(t,y)$, se dice que verifica la condición de Lipschitz $\Leftrightarrow \exists\, L > 0$ tal que

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L\, |y_1 - y_2|$

<u>Propiedad:</u>

Sea la función $f(t,y)$, si $|f'_y(t,y)| \le L$ entonces L es la constante de Lipschitz.

Dem) Fijando t y usando el T.V.M. $\Rightarrow \exists\, c \,/\, y_1 < c < y_2$

$\wedge \ |f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |f'_y(t,y)| \bullet |y_1 - y_2| \le L\, |y_1 - y_2|$

Ejemplos:

Analizar si las siguientes funciones verifican la condición de Lipschitz en el rectángulo:

$$R = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \le t \le 3 \ \wedge 0 \le y \le 5 \}$$

a) $f(t,y) = e^{-2t} - 2y$ b) $f(t,y) = 2ty^2$ c) $f(t,y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{3}}$

Solución:

a) $| f(t,y_1) - f(t,y_2) | = | e^{-2t} - 2y_1 - e^{-2t} + 2y_2 | = | (-2)(y_1 - y_2) | = 2 | y_1 - y_2 |$

$\Rightarrow L = 2$ *es la constante de Lipschitz.*

Si la calculamos de otra forma: $| f'_y(t,y) | = | -2 | = 2 = L$ *da lo mismo.*

b) $| f(t,y_1) - f(t,y_2) | = | 2ty_1^2 - 2ty_2^2 | = | 2t(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) | =$

$= | 2t(y_1 + y_2) | \bullet | y_1 - y_2 | \le 2 \bullet 3 \bullet (5 + 5) \bullet | y_1 - y_2 | = 60 \, | y_1 - y_2 |$

ya que como $0 \le t \le 3 \ \wedge \ 0 \le y \le 5 \Rightarrow 2t(y_1 + y_2) \le 60$

Si la calculamos de otra forma: $| f'_y(t,y) | = | 4ty | \le 4 \bullet 3 \bullet 5 = 60$

c) $| f'_y(t,y) | = | \frac{1}{2} y^{-\frac{2}{3}} | \Rightarrow \lim_{y \to 0} f'_y(t,y) \to \infty$ *no está acotada* $\Rightarrow$ *no existe L*

No cumple la condición de Lipschitz.

RESOLUCION NUMERICA DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Dado el problema: $y' = f(t,y)$ con $y(a) = y_0$ $y(b) = ?$

Resolverlo numéricamente significa encontrar una sucesión de puntos que satisfacen la E.D. en el intervalo [a,b]. Es decir que en vez de obtener la solución como una función continua, se la obtiene tabulada para n puntos discretos.

Para todos los métodos vamos a dividir el intervalo [a,b] en subintervalos tal que :
$a = t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n = b$ tal que $h = \frac{b-a}{n}$ $\wedge$ $h = t_{i+1} - t_i$ (equiespaciados)

El problema consiste en aproximar $y(t_0), y(t_1), y(t_2), \cdots, y(t_n)$.

Por convención llamaremos $y_i = y(t_i)$ (o sea el valor correcto) y a la aproximación correspondiente lo llamaremos w_i.

La idea de los métodos numéricos es ir calculando en forma aproximada las imágenes de los t_i, que llamaremos w_i ya que no van a coincidir con las exactas y_i.

Es decir que en cada punto habrá un error: $| y_i - w_i |$ llamado error de discretización o truncamiento (o **error de truncamiento local**), depende del método utilizado.

Es importante estudiar el comportamiento del E.T.L. ya que hace a la estabilidad del método. Sin embargo, hay algunas E.D. inestables o mal condicionadas, donde pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales modifican sustancialmente la solución, independientemente del método empleado.

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLVER UNA E.D.:

Se dividen en dos grandes grupos:

- **De un paso o paso simple:** el valor y_{i+1} se calcula a partir de la ecuación dada y de información únicamente de t_i.

  De paso simple estudiaremos los métodos de Euler, Taylor, Heun y Runge-Kutta.

- **De paso múltiple o multipaso:** usan varios puntos $y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}, \cdots, y_{i-k}$ para hallar y_i (requieren información de varios puntos, no sólo del anterior).

  De paso múltiple existen los métodos de Adams Bashforth, Adamas Moulton, Milne Simpson, etc.

1) MÉTODO DE EULER

Es un método de paso simple, consiste en aproximar la función por la Serie de Taylor:

$$y(t+h) = y(t) + y'(t) \bullet h + \frac{y''(t)}{2} \bullet h^2 + \frac{y'''(t)}{6} \bullet h^3 + \bullet\bullet\bullet$$

Pero solamente tomamos hasta el orden 1 del desarrollo: $y(t+h) \cong y(t) + y'(t) \bullet h$

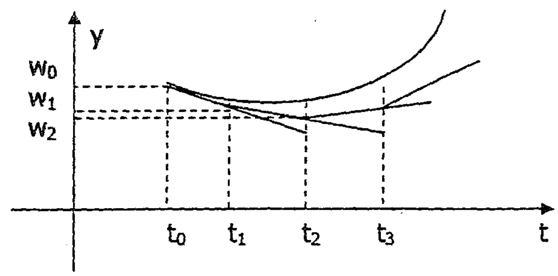
Tomando $t = t_i \Rightarrow t+h = t_{i+1}$ y además, $y'(t) = f(t,y)$

Obtenemos: $\boxed{w_{i+1} = w_i + h \bullet f(t_i, w_i)}$ con $w_0 = y_0$

El error de truncamiento local del Algoritmo de Euler es: $\text{E.T.L.} = \frac{h^2}{2} y''(\varphi)$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL MÉTODO DE EULER:

Partiendo del punto dado de la función: (t_0, y_0) para hallar el w_1 se mueve por la recta tangente a la curva trazada por (t_0, y_0). A partir de este punto (t_1, w_1) se desplaza en la dirección de la recta tangente a la curva por (t_1, y_1) llegando a otro punto (t_2, w_2) y así sucesivamente, describiendo una poligonal.



Ejemplo a resolver por EULER:

Resolver usando el método de Euler: $y'(t) = -y(t) + t + 1$ $t \in [0,1]$ $y(0) = 1$ para N=10

Solución: *primero calculemos h:* $h = \frac{1}{10} = 0.1$

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{i+1} = w_i + 0.1(-w_i + t_i + 1) \end{cases}$$

$w_1 = w_0 + 0.1\,(-w_0 + t_0 + 1) = 1 + 0.1\,(-1 + 0 + 1) = 1$
$w_2 = w_1 + 0.1\,(-w_1 + t_1 + 1) = 1 + 0.1\,(-1 + 0.1 + 1) = 1.01$
$w_3 = w_2 + 0.1\,(-w_2 + t_2 + 1) = 1.01 + 0.1\,(-1.01 + 0.2 + 1) = 1.029$
y así sucesivamente hasta llegar a w_{10}.

La solución exacta de la ecuación diferencial resuelta por métodos convencionales es $y(t) = t + e^{-t}$
En la siguiente tabla mostramos los valores w_i *obtenidos por el método de Euler y en la tercera columna de la tabla están los valores* $y_i = y(t_i)$ *según la solución exacta.*

i	t_i	w_i	y_i
0	0	1	1.000000
1	0.1	1	1.004837
2	0.2	1.01	1.018731
3	0.3	1.029	1.040818
4	0.4	1.0561	1.070320
5	0.5	1.09049	1.106531
6	0.6	1.131441	1.148812
7	0.7	1.1782969	1.196585
8	0.8	1.23046721	1.249329
9	0.9	1.28742049	1.306570
10	1.0	1.34867844	1.367879

Si bien el sistema tiene infinitas soluciones, la que se ha adoptado es tomando como variables independientes: $a_1 = 0.5 \quad \wedge \quad b_2 = 0$

Y las demás variables quedan determinadas:

$a_2 = 0.5$; $a_3 = 1$; $b_1 = 0.5$; $b_3 = 0.5$; $b_4 = 0$; $b_5 = 0$; $b_6 = 1$;
$w_1 = 1/6$; $w_2 = 1/3$; $w_3 = 1/3$; $w_4 = 1/6$

De esta forma, la fórmula del método Runge - Kutta de orden 4 nos queda:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) \qquad \text{R-K } 4^{to} \text{ orden}$$

con:

$$\begin{cases} k_1 = h\, f(t_i, w_i) \\ k_2 = h\, f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = h\, f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = h\, f(t_i + h, w_i + k_3) \end{cases}$$

Error en los métodos de Runge-Kutta de 4^{to} orden: $E = \frac{h^4}{5!}\, y^{V}(\varphi)$

Ejemplos:

Ej. 1) Sea $y' = f(t,y) = \dfrac{1}{x+y}$ con $y(0) = 2$

Hallar y(0.4) con h=0.2 utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4.

Solución:

Primer paso: de 0 a 0.2

$k_1 = 0.2 \bullet f(0,2) = 0.2 \bullet 0.5 = 0.1$

$k_2 = 0.2 \bullet f(0.1, 2+0.05) = 0.2 \bullet 0.4651162 = 0.093023$

$k_3 = 0.2 \bullet f(0.1, 2+0.046511) = 0.2 \bullet 0.465872 = 0.093174$

$k_4 = 0.2 \bullet f(0.2, 2+ 0.093174) = 0.2 \bullet 0.4360767 = 0.0872153$

$y(0.2) \cong 2 + \frac{1}{6}[\, 0.1 + 2 \bullet 0.0.93023 + 2 \bullet 0.093174 + 0.0872153\,] =$

2.09326845323

Segundo paso: de 0.2 a 0.4

$k_1 = 0.2 \bullet f(0.2, 2.09326845323) = 0.2 \bullet = 0.4360588 = 0.08721176$

$k_2 = 0.2 \bullet f(0.3, 2.09326845323+ 0.436058848) = 0.2 \bullet 0.41036174 = 0.0820723$

$k_3 = 0.2 \bullet f(0.3, 2.09326845323+ 0.04103617) = 0.2 \bullet 0.41079493 = 0.082158986$

$k_4 = 0.2 \bullet f(0.4, 2.09326845323+0.082158986) = 0.2 \bullet 0.388285 = 0.077657$

$y(0.4) \cong 2.09326845323 + \frac{1}{6}[\,0.08721176+ 2 \bullet 0.0820723 + 2 \bullet 0.082158986+$

$0.077657] = \mathbf{2.17549036173}$

Ej. 2: La velocidad de emisión de radioactividad de una sustancia es proporcional a la cantidad de sustancia remanente. La ecuación diferencial es por tanto, $y' = -ky$, en el que el signo menos indica el hecho de que la radioactividad disminuye con el tiempo. Supóngase que k = 0.01 y que hay 100 g del material al tiempo t = 0; ¿cuánto material queda cuando t = 100? . La solución de la ecuación es $y = 100e^{-kt}$; la respuesta exacta es 36.788 g. Resuelva la ecuación numéricamente usando:

a) Método de Euler con h = 50
b) Método de Runge Kutta de orden 4 para h = 100

Solución:

a) *Por Euler:* $y(50) = 100 + 50 \bullet (-0.01 \bullet 100) = 50$

$y(100) = 50 + 50 \bullet (-0.01 \bullet 50) = \mathbf{25}$

b) *Por Runge Kutta de 4^to^ orden:*

$k_1 = 100 \bullet (-0.01 \bullet 100) = -100$ $\quad k_2 = 100 \bullet (-0.01 \bullet 50) = -50$

$k_3 = 100 \bullet (-0.01 \bullet 75) = -75$ $\quad k_4 = 100 \bullet (-0.01 \bullet 25) = -25$

$y(100) = 100 + 1/6\,(- 100 - 100 - 150 - 25) = \mathbf{37{,}5}$

Respuesta: Luego de 100 s quedan 37.5 g de material radioactivo.

Ej: 3: Dada la siguiente ecuación diferencial: $y'(t) = 2\,y(t) + t^2 - 2\,t$ con $y(0)=1$

a) Verifique la condición de Lipschitz.
b) Halle una aproximación de y(0.2) utilizando el Método de Runge-Kutta de orden 4 con h=0.1 y trabajando con F(3,10,23,45)

Solución:

a) $f(t,y) = 2\,y(t) + t^2 - 2\,t$

$/f(t,y_1) - f(t,y_2)/ = /(2\,y_1 + t^2 - 2t) - (2\,y_2 + t^2 - 2t)/ = /2\,(y_1 - y_2)/ = 2/y_1 - y_2/$

$\Rightarrow L = 2$ y se cumple que $L = \max_{a \le t \le b} \left| f'_y(t) \right|$

b) *Primer paso: de 0 a 0.1*

$k_1 = 0.1 \bullet f(0,1) = 0.1 \bullet (2 \bullet 1 + 0^2 - 2 \bullet 0) = \mathbf{0.2}$

$k_2 = 0.1 \bullet f(0.05\,,1+0.1) = 0.1 \bullet (2 \bullet 1.1 + (0.05)^2 - 2 \bullet (0.05)) = \mathbf{0.21}$

$k_3 = 0.1 \bullet f(0.05\,,1+0.105) = 0.1 \bullet (2 \bullet 1.11 + (0.05)^2 - 2 \bullet (0.05)) = \mathbf{0.212}$

$k_4 = 0.1 \bullet f(0.1\,,1+0.212) = 0.1 \bullet (2 \bullet 1.21 + (0.1)^2 - 2 \bullet (0.1)) = \mathbf{0.223}$

$y(0.1) = 1 + 1/6\,(0.2 + 2 \bullet 0.21 + 2 \bullet 0.212 + 0.223) = \mathbf{1.21}$

Segundo paso: de 0.1 a 0.2

$k_1 = 0.1 \bullet f(0.1,1.21) = 0.1 \bullet (2 \bullet 1.21 + (0.1)^2 - 2 \bullet (0.1)) = \mathbf{0.223}$

$k_2 = 0.1 \bullet f(0.15\,,1.21+0.112) = 0.1 \bullet (2 \bullet 1.32 + (0.15)^2 - 2 \bullet (0.15)) = \mathbf{0.236}$

$k_3 = 0.1 \bullet f(0.15\,,1.21+0.118) = 0.1 \bullet (2 \bullet 1.33 + (0.15)^2 - 2 \bullet (0.15)) = \mathbf{0.238}$

$k_4 = 0.1 \bullet f(0.2\,,1.21+0.238) = 0.1 \bullet (2 \bullet 1.45 + (0.2)^2 - 2 \bullet (0.2)) = \mathbf{0.254}$

$y(0.2) = 1.21 + 1/6\,(0.223 + 2 \bullet 0.236 + 2 \bullet 0.238 + 0.254) = \mathbf{1.45}$

Ej.4: Dada la siguiente ecuación diferencial: $y' - y = 2\,t - t^2$ con $y(0)=1$ $y(1)=?$
Resuelva numéricamente por el método de Runge-Kutta de 4to. orden, con h=0.5.
Compare el resultado obtenido con la solución analítica.

Solución:

Primer paso: de 0 a 0.5 $y' = f(t,y) = 2\,t - t^2 + y$

$k_1 = 0.5 \bullet f(0,1) = 0.5 \bullet (1) = 0.5$

$k_2 = 0.5 \bullet f(0.25,1+0.25) = 0.5 \bullet 1.6875 = 0.84375$

$k_3 = 0.5 \bullet f(0.25,1+0.421875) = 0.5 \bullet 1.859375 = 0.9296875$

$k_4 = 0.5 \bullet f(0.5,1+0.9296875) = 0.5 \bullet 2.6796875 = 1.33984375$

$y(0.5) \cong 1 + \frac{1}{6}\,[0.5 + 2 \bullet 0.84375 + 2 \bullet 0.9296875 + 1.33984375] =$

1.89778645833

Si el intervalo es grande o bien se requiere gran cantidad de pasos (+ de 100) lo mejor sería usar A-B / A-M . En casos donde el intervalo es mediano se suele usan Euler modificado o bien Runge-Kutta de orden 2 o 4.

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1[ER] ORDEN

Sea el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)) \end{cases} \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0 \ \wedge \ y(t_0) = y_0$$

Vemos que son dos ecuaciones diferenciales de orden 1 con dos funciones a determinar (x(t) e y(t))

☑ Ejemplo:

Las ecuaciones de Lotka - Volterra que modelan la dinámica de poblaciones

$$\begin{cases} x'(t) = x - x\,y - 0.1\,x^2 \\ y'(t) = x\,y - y - 0.05\,y^2 \end{cases}$$

Se desea resolver este tipo de sistemas en forma numérica. Simplemente es utilizar los métodos vistos anteriormente pero para cada una de las variables dependientes.

MÉTODO DE EULER PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES:

El problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)) \end{cases} \quad \text{se puede escribir:} \quad \begin{cases} dx = f(t, x, y)\,dt \\ dy = g(t, x, y)\,dt \end{cases}$$

Si en vez de tomar los diferenciales, los sustituimos por incrementos:

$dt = t_{i+1} - t_i$ $\quad dx = x_{i+1} - x_i$ $\quad dy = y_{i+1} - y_i$

Reescribiendo el sistema: $\begin{cases} x_{i+1} - x_i = f(t_i, x_i, y_i)\,(t_{i+1} - t_i) \\ y_{i+1} - y_i = g(t_i, x_i, y_i)\,(t_{i+1} - t_i) \end{cases}$

y teniendo en cuenta que $t_{i+1} - t_i = h \Rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \bullet f(t_i, x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h \bullet g(t_i, x_i, y_i) \end{cases} \quad \text{Método de EULER}}$

$x(0.2) = x(0.15) + 0.05 \bullet f(0.15, x(0.15), y(0.15))$
$= 8.62675 + 0.05 \bullet (8.62675 + 2 \bullet 8.65325) = 9.9234125$

$y(0.2) = y(0.15) + 0.05 \bullet f(0.15, x(0.15), y(0.15))$
$= 8.65325 + 0.05 \bullet (3 \bullet 8.62675 + 2 \bullet 8.65325) = 10.8125875$

Errores:

$e(x) = 0.61621272 \Rightarrow er(x) = 5.8\ \%$ $\qquad e(y) = 0.9031965647 \Rightarrow er(y) = 7.7\ \%$

Hemos comprobado que al disminuir el h a la mitad, los errores han disminuido en la misma proporción.

MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE 4TO ORDEN PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES:

Sea el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)) \end{cases} \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0 \ \wedge \ y(t_0) = y_0$$

Este método surge del mismo análisis realizado para ecuaciones de una sola variable dependiente, pero aplicado a cada una de ellas:

Las fórmulas a aplicar son: $\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4) \end{cases}$

siendo:

$$f_1 = f(t_i, x_i, y_i) \qquad g_1 = g(t_i, x_i, y_i)$$

$$f_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f_1, y_i + \frac{h}{2} g_1) \qquad g_2 = g(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f_1, y_i + \frac{h}{2} g_1)$$

$$f_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f_2, y_i + \frac{h}{2} g_2) \qquad g_3 = g(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f_2, y_i + \frac{h}{2} g_2)$$

$$f_4 = f(t_i + h, x_i + h f_3, y_i + h g_3) \qquad g_4 = g(t_i + h, x_i + h f_3, y_i + h g_3)$$

☑ Ejemplo:

Resolver el problema anterior: $\begin{cases} x'(t) = x + 2y \\ y'(t) = 3x + 2y \end{cases}$ con $x(0) = 6 \ \wedge \ y(0) = 4$

con el método de Runge Kutta de orden 4 tomando h=0.2

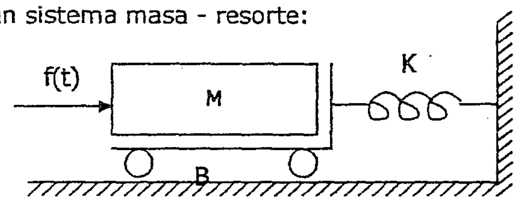
ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Hasta ahora, hemos estudiado métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales solamente de primer orden.

Sin embargo, muchos modelos matemáticos de sistemas consisten en ecuaciones de orden supeior.

Por ejemplo, el modelo matemático de un sistema masa - resorte:

$$M\,x''(t) + B\,x'(t) + K\,x(t) = f(t)$$



es una ecuación de orden 2.

Entonces... ¿cómo se resuelven las ecuaciones de orden superior?

En realidad, las ecuaciones diferenciales de orden superior pueden transformarse en sistemas de ecuaciones diferenciales de orden 1, y por lo tanto, las podemos resolver con los métodos ya vistos.

Consideremos una ecuación diferencial de orden 2:

$$x''(t) = f(\,t, x(t), x'(t)\,) \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0 \ \wedge \ x'(t_0) = y_0$$

Si hacemos la sustitución: $x'(t) = y(t)$ nos queda un sistema de dos ecuaciones diferenciales de orden 1.

Como $x'(t) = y(t)$ entonces $x''(t) = y'(t)$

El sistema es: $$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = f(t, x(t), y(t)) \end{cases} \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0 \ \wedge \ y(t_0) = y_0$$

y por lo tanto no tenemos ningún problema en resolverlo, verdad?

FIN