



# Estratégia empresarial de TI

---

## Aula 3 – Teoria dos jogos (2)

*Prof. E. A. Schmitz*



# Elementos de um Jogo

---

Modelo estratégico de um jogo contém os seguintes elementos básicos:

$N = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  (conjunto de  $n$  jogadores) (1)

$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\}$  (conjunto de estratégias para cada jogador  $P_i$ ) (2)

$S_p = \{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n\}$  (conjunto de perfís estratégicos) (3)

$U_i : S_p \rightarrow \mathbb{R}$  (função utilidade para o jogador  $P_i$ ) (4)

Notação prática:

$S_{-i}$  = (conjunto de todas estratégias dos outros jogadores exceto  $P_i$ )



## Qual a decisão de P1?

P1/P2	l	r
U	5,1	0,2
M	1,4	4,1
D	4,2	2.3

1-Não existe dominância!

2-Jogador pode usar sua crença (*a priori belief*) sobre o comportamento do adversário

3.Se P1 acredita que  $\text{prob}(l)=\text{prob}(r)=0,5$  então:

Valor esperado (U,0.5,0.5)= $0.5*5+0.5*0=2.5$

Valor esperado(M,0.5,0.5)= $0.5*1+0.5*4=2.5$

Valor esperado(D,0.5,0.5)= $0.5*4+0.5*2=3.0$

4-A **melhor resposta** de P1, dada sua crença sobre P2 é D.



## Melhor resposta

P1/P2	l	r
U	5,1	0,2
M	1,4	4,1
D	4,2	2,3

1-A melhor resposta de P1, depende da crença sobre o comportamento de P2

2-seja  $p$  a estimativa a priori de P2 jogar r.

3-Assim podemos generalizar o resultado anterior:

$$E(U, p, 1-p) = (1-p) * 5 + (p) * 0 = -5p + 5$$

$$E(M, p, 1-p) = (1-p) * 1 + (p) * 4 = 3p + 1$$

$$E(D, p, 1-p) = (1-p) * 4 + (p) * 2 = -2p + 4$$

4-Como varia a melhor resposta de P1 em função da crença de P1?



# Equilíbrio de Nash

---

1-Uma estratégia  $s_i^*$  é a melhor resposta ao vetor estratégico dos outros jogadores se:

$u_i(s_i, s_{-i}^*) \leq u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$  para todas as estratégias ( $s_i$ ) do jogador  $i$ .

2-Um perfil estratégico  $s^*=(s_1^*, s_2^*, \dots s_N^*)$  é um NE se  $u_i(s_i, s_{-i}^*) \leq u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$  para todos jogadores e todas as suas estratégias ( $i$  e  $s_i$ ).

3-Justificativa: *minimum regret* (para todos)



## Exemplo 1

	R	L
U	-3,-3	0,-9
D	-9,0	-1,-1

$S_1 = \{U, D\}$   $S_2 = \{R, L\}$

$S_p = \{(U, R), (U, L), (D, R), (D, L)\}$

$S^* = (U, R)$  pois:

$U_1(D, R) \leq U_1(U, R)$  : U é a melhor resposta a R

$U_1(D, L) \leq U_1(U, L)$  : U é a melhor resposta a L

$U_2(L, U) \leq U_2(R, U)$  : R é melhor resposta a U

$U_2(L, D) \leq U_2(R, D)$  : R é melhor resposta a U



## Exemplo 2

P1/P2	L	C	R
U	0, <u>4</u>	<u>4</u> ,0	5,3
M	<u>4</u> ,0	0, <u>4</u>	5,3
D	3,5	3,5	<u>6</u> , <u>6</u>

Algoritmo:

- 1-para cada ação de p2 marque a melhor resposta de 1
- 2-para cada ação de p1 marque a melhor resposta de 2
- 3-equilíbrios: células onde as melhores respostas coincidem



## Exemplo 3-Bertrand

---

	H	M	L
H	6,6	0,10	0,8
M	10,0	5,5	0,8
L	8,0	8,0	4,4





## Exemplo 4-Batalha dos sexos

---

H\W	Box	Ballet
Box	3,1	0,0
Ballet	0,0	1,3



## Exemplo 5-Dilema dos prisioneiros

---

P1/P2	Dedura	Cala
Dedura	-3,-3	0,-5
Cala	-5,0	-1,-1



## Equilíbrio misto de Nash

---

- 1-Uma estratégia mista  $P_i$  é uma randomização sobre as estratégias do jogador  $i$ . Associa uma variável aleatória  $P_i: S_i \rightarrow 0..1$  às estratégias  $S_i$  de  $P_i$ .
- 2-O valor esperado de uma estratégia mista  $P_i$  é o valor ponderado (por  $P_i$ ) dos valores esperados de cada uma das estratégias.
- 3-Um perfil estratégico misto  $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_N^*)$  é um equilíbrio misto NE se para cada jogador  $i$ ,  $p_i^*$  é a melhor resposta para todo  $p_{-i}^*$ .



## Exemplo 6-Matching pennies

P1/P2	H	T
H	1,-1	-1,1
T	-1,1	1,-1

1-Não existe NE

2-Suponha que 1 joga H com  $\text{prob}=p$  e T com  $\text{prob}=(1-p)$

3- $E2(p2=H)=p \cdot -1 + (1-p) \cdot 1 = 1-2p$  e  $E2(p2=T)=p \cdot 1 + (1-p) \cdot -1 = 2p-1$

4-Ambas estratégias devem ter o mesmo valor esperado (porquê?) ,  
então  $E2(H)=E2(T)$  donde:  $p=1/2$

5-O mesmo raciocínio se aplica ao jogador 2 , gerando  $q=1/2$

6-O equilíbrio misto de Nash é:  $\{(0.5,0.5); (0.5,0.5)\}$



## Exemplo 7-Batalha dos sexos

---

H\W	Box	Ballet
Box	2,1	0,0
Ballet	0,0	1,2

1-Quais são os equilíbrios?



## Exemplo 8-Venus x Serena

---

V\S	r	l
R	50,50	80,20
L	90,10	20,80

1-Quais são os equilíbrios? Pay-offs são as probabilidades (%) de ganhar o ponto.