

基于 OMP 算法的快速压缩感知图像重构*

马博珩, 彭 艺

(昆明理工大学 信息工程与自动化学院, 云南 昆明 650500)

摘要:针对正交匹配追踪(OMP)算法在压缩感知理论下的重构效果和所需时间相互矛盾的问题,基于子空间追踪(SP)算法的回溯思想,使用共轭梯度下降算法代替最小二乘法对正交匹配追踪(OMP)算法进行改进.并且对所改进算法的重构精度、重构稳定性进行了仿真实验,结果表明所提算法能保证重构质量良好并且有更好的重构速度和稳定性.

关键词:压缩感知;OMP 算法;信号重构;图像重构

中图分类号:TN 911.72 **文献标志码:**A **文章编号:**0258-7971(2017)02-0207-05

压缩感知技术(compressed sensing, CS)是一种用于信号采样的新理论^[1-3].传统的信息采样是基于 Nyquist 采样定理,认为信号的采样率只有不低于最高频率的 2 倍,信号才能被精确地重构.但是压缩感知理论指出,若一个信号是稀疏信号或是在某个变换域上表现为稀疏信号,那么可以通过一个与变换基并不相关的矩阵将此信号投影到低维空间上.这一在低维空间上的投影,包含了原信号的全部信息可以精确地重构出原信号.在压缩感知理论下,信号采样并不是直接测量信号本身,其关键在于梳理信息在信号中的结构与内容^[1-2,4-5].

压缩感知理论由 Donoho 和 Candes 等在 2004 年首次提出来,目前压缩感知理论的主要研究方向^[6]分为信号稀疏性、测量矩阵和重构算法这 3 大部分.压缩感知中的采样过程相对简单,但重构非常复杂,所以对于重构算法的研究是压缩感知中相当重要的一方面^[7].目前来说,重构算法中贪婪迭代算法是应用非常广泛的一类,该类算法通过迭代方式来选出信号的最佳支撑,之后基于贪婪准则选择局部最优解,逐步逼近原始信号.最典型的贪婪算法是匹配追踪算法(Matching Pursuit),以及在其基础上改进的正交匹配追踪算法(Orthogonal Matching Pursuit)^[7-9].本文将针对 OMP 算法重构时间

较长的问题,结合子空间追踪(SP)算法的思想,引入共轭梯度下降算法代替最小二乘法,对正交匹配追踪(OMP)算法进行改进以及重构仿真实验.

1 压缩感知理论

在 CS 理论下,需要传输的信号并非是原始信号本身的采样值,而是原始信号在某个稀疏域上的投影.压缩感知本质是一种非线性压缩信号以及重建的方法.设有一维信号 $x \in \mathbf{R}$, 信号长 N 位, $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$. \mathbf{R}^N 内任何信号都可用 $M \times N$ 维的正交基向量 $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n]$ 的线性组合表示,即 $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Psi_i$, 其中系数 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n]$. 如果系数向量 α 中最多有 K 个非零的元素存在,那么可以认为信号 x 是 K -稀疏信号.而依据压缩感知理论所述,对于所有 $\|x\|_0 \leq K$ 的信号,都存在一个常数 $\delta \in (0, 1)$, 使得

$$(1 - \delta) \|x\|_2^2 \leq \|\Phi x\|_2^2 \leq (1 + \delta) \|x\|_2^2$$

成立,其中 δ 称为等距常数,为上式成立的最小值.当其成立时,则认为观测矩阵 Φ 满足有限等距性质(RIP).此时存在观测方程 $y = \Phi x$, $y \in \mathbf{R}^M$ 为 x 在观察矩阵 $\Phi_{M \times N}$ 上投影为 $M \times 1$ 维的观察向量.这时可以利用 y 中至少 $M \geq K \times \log(N/K)$ 个观察值将

* 收稿日期:2016-05-04

基金项目:云南省科技厅面上项目(KKS0201403016).

作者简介:马博珩(1992-),男,北京人,研究生,主要研究方向为压缩感知.E-mail:maboheng100@126.com.

通信作者:彭 艺(1975-),女,云南人,博士,副教授,主要研究方向为无线通信.

原信号还原出来.由于其中 $M \ll N$, 所以采样的信号并不完全, 称为欠采样, 正对 K -稀疏信号, 可以通过重构模型 $\min \|x\|_0, s.t. y = \Phi x$ 进行信号还原, 因为 $y = \Phi x$ 是存在多个解的, 这是一个 NP-hard 问题^[2]. 因此通过间接方式进行求解或是将其转换为 l_1 范数 $\min \|x\|_1, s.t. y = \Phi x$ 求解问题^[10-13], 是重构算法研究中的重要方向之一. 目前在压缩感知中的信号重构主要采用 2 种方式对原信号进行逼近, 一种是凸松弛法, 代表是 BP(基追踪算法). 另一种是贪婪类算法, 以 MP(匹配追踪算法)、OMP(正交匹配追踪算法)为典型代表, 是目前应用非常广泛的一类^[12].

2 正交匹配追踪算法 OMP 算法

OMP 算法是在 MP 算法的基础上进行改进的, 在沿用了 MP 算法原子选择标准而来, 来甄选相关性最大的原子. 同时通过对已选原子集的正交投影化改进 MP 算法迭代选择中出现的次优问题^[14-17].

OMP 算法步骤

输入 观测矩阵 Φ , 观测向量 y , 迭代次数为 K

输出 还原信号 \hat{x}

Step 1 初始化 设迭代次数 $t = 1$, 残差 $r_t = y$, 支撑集索引 Λ 为空集;

Step 2 计算残差 r_t 与观察矩阵的列向量 ϕ_j , 内积中的最大值所对应的索引, 即

$$\lambda_t = \arg \max_{j=1,2,3K,\dots,n} |\langle r_{t-1}, \phi_j \rangle|;$$

Step 3 更新索引集 Λ , 使 $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$, 更新原子集 $\Phi_t = [\Phi_t, \phi_{\lambda_t}]$, 将内积最大值所对应观察矩阵列向量 ϕ_{λ_t} 记入原子集;

Step 4 运用最小二乘法计算 \hat{x} 使残差最小

$$\hat{x} = \arg \min \|y - \Phi_t \hat{x}\|_2;$$

Step 5 更新残差 $r_t = y - \Phi_t \hat{x}$, 令迭代次数增加 1;

判断 停止条件(迭代次数 $< k$) 如果不成立执行 Step 2, 若是成立则停止迭代输出 \hat{x} .

OMP 算法的基本思想是依据内积选择观察矩阵的列, 使得选择的列与当前残差到达最大相关, 之后在残差中减去相关的部分信号, 再重复上述步骤直到迭代次数到达稀疏度 K .

OMP 算法利用已选择的原子集合的正交化来保证迭代的局部最优解. 但是无法保证局部最优解

的和是全局最优解. 而 SP 算法在重构过程中引入了回溯思想, 既是使得选入信号支撑集的元素并非永久性保存, 而是随着迭代的进行, 对于支撑集中已经存在的原子进行再次计算, 剔除其中非最优的原子, 并且依据现在迭代环节加入最优原子, 其目的在于以使局部最优解尽量接近于全局最优^[3].

通过 Matlab 仿真分析, 结果如图 1(实验采样率为 60%), 可见与引入“回溯”的思想的 SP 算法, OMP 算法得到欠定方程最优解的时间明显更短, 但是重构质量相对较差.



(a) 原始图像 (b) OMP 还原图像 (c) SP 还原图像

图 1 SP 算法与 OMP 算法重构效果对比

Fig1. Comparison of reconstruction effort of SP and OMP

3 针对 OMP 算法的改进

OMP 算法在计算中需要使用最小二乘法进行测量信号的计算, 但最小二乘法本质上是求解样本观测值与估计值的残差平方和最小的极值问题的一种方法, 在非经典线性问题求解上精度并不高, 使得信号重构过程中残差更新的误差逐渐积累, 降低重构质量^[14-15]. 因此针对此问题, 结合子空间追踪(SP)算法的“回溯”思想, 通过引入共轭梯度下降算法替代最小二乘法, 对正交匹配追踪(OMP)算法进行改进.

3.1 共轭梯度下降算法 共轭梯度法(conjugate gradient method, CG), 最初是为求解正定系数矩阵线性方程组而提出的^[15]. 进而被应用于无约束最优问题. 共轭梯度法作为典型的共轭方向法, 其任意搜索方向是互相共轭的^[17-18]. 利用已知点的梯度, 人为制造一组共轭方向, 并且根据这组方向进行搜索, 计算出目标的极小值.

使用共轭梯度法求解 $Ax = B$, 在 A 是对称正定矩阵时等价于求解二次最优化问题即

$$\min f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x, \text{ 其中, } x_0 \in \mathbf{R}^n, A \text{ 是对称正定矩阵}^{[17]}.$$

相关定义:

(1) 若矩阵 A 对称, 且对任意的 $x_0 \in \mathbf{R}^n, x \neq$

0, 有 $x^T A x \geq 0$, 则称 A 是对称正定矩阵.

(2) 设 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为正定矩阵, 若 \mathbf{R}^n 中非零向量 $D = [d_1, d_2, d_3, \dots, d_n]$ 满足 $d_i^T A d_j = 0, \forall i, j = 0, 1, 2, \dots, m-1, i \neq j$, 则称向量组 D 是 A 的共轭向量组, 且这 m 个向量线性无关. 此时从任一点 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 出发依次延向量组 D 进行搜索, 则最多仅需要经过 n 次迭代计算就可得到最优解.

(3) 在共轭梯度法中取初始点 $x^{(0)}$, 第 1 次搜索方向则为 $d^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)})$. 之后以每次新的共轭方向 $d^{(k+1)}$ 可以由 k 次迭代的负梯度 $g(x) = -\nabla f(x^{(k+1)})$ 与以解共轭向量的线性组合确定, 即 $d^{(k+1)} = -g_{k+1} + \beta_k d^{(k)}$.

新的搜索方向与上次搜索方向相垂直, 可见共轭是正交的扩展概念, 由于 $d^{(k+1)}$ 与 $d^{(k)}$ 关于 A 共轭, 可解出 $\beta_k = \frac{d^{(k)T} A g_{k+1}}{d^{(k)T} A d^k}$. 求解新的迭代点 $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$, 从向方向 x^k 处向 $d^{(k)}$ 方向取极小值. 步长 $\alpha_k = \frac{(d^k, r^k)}{(A d^k, d^k)}$, 其中 $r^k = r^{k-1} - \alpha_k A d^k$ [15-16, 18].

3.2 针对 OMP 算法的改进算法 共轭梯度法收敛快, 精度高. 其旨在利用一阶导数信息, 解决最速下降法收敛时会产生收束震荡致使运算时间过长的的问题, 又减少了牛顿法需要保存矩阵所占用的数据量以及矩阵求逆的运算量 [6-7].

将此方法引入 OMP 算法用以代替最小二乘法求解原始信号的估计值 \hat{x} , 以期取得良好的图像重构效果.

改进的算法

输入 观测矩阵 Φ , 观测向量 y , 迭代次数为 K ;

输出 还原信号 \hat{x}

Step 1 初始化 残差 $r_t = y$, 支撑集 Λ , 候选集 μ 为空集, 迭代次数 $t = 1$;

Step 2 计算残差 r 与观测矩阵的列向量 ϕ_j 内积除以列向量 ϕ_j 的 2 范数, 记录其中的最大值最大的 K 个的索引, 即

$$\lambda_t = \arg \max_{j=1,2,\dots,N} \left(\frac{|\langle r_{t-1}, \phi_j \rangle|}{\|\phi_j\|_2} \right);$$

Step 3 更新候选集 μ , 将选出的 K 个值对应的索引记入候选集, 使 $\mu = \mu_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$; 更新候选观测矩阵 $\Phi_{\lambda_t} = [\phi_{\lambda_t}]$ 将内积最大值所对应观察矩阵列向量 ϕ_{λ_t} 记入;

Step 4 运用共轭梯度法循环计算估计值 \hat{x} ,

初值为 0, $g_n = \Phi_{\lambda_t}^T \Phi_{\lambda_t} y$, 步长

$$\alpha_n = \frac{\langle r_n, \Phi_{\lambda_t}^T \Phi_{\lambda_t} r_{n-1} \rangle}{\|\Phi_{\lambda_t}^T \Phi_{\lambda_t} r_{n-1}\|_2^2},$$

计算并更新步长 d_n 以及信号 $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$, 直至共轭梯度法迭代次数达到 $n(\hat{x}$ 的长度).

Step 5 计算估算值 \hat{x} 中所能引起残差变化最大的 N 个, 并将对应索引记入支撑集 Λ .

$W = \arg \min \|y - \Phi_i \hat{x}_i\|_2, \forall i = 1, 2, \dots, K$, 更新原子集 $\Phi_A = [\phi_A]$ 将内积最大值所对应观察矩阵列向量记录;

Step 6 更新残差 $r_n = r_{n-1} - \Phi_A \hat{x}_A$, 更新候选集 $\mu = \Phi_A$, 令迭代次数 $t = N$;

判断 以 $t \geq K$ 为停止条件, 如果条件不成立, 则返回执行 Step 2, 若是条件成立, 则停止迭代并输出 \hat{x} .

4 仿真实验

4.1 验证算法重构成功率 试验中以一维信号

$x = \sin(2\pi f_1 T_s t_s) + 2\sin(2\pi f_2 T_s t_s) + 3\sin(4\pi f_3 T_s t_s) + 5\sin(2\pi f_4 T_s t_s)$ 为分析范例. 其中

$f_1 = 100 \text{ Hz}, f_2 = 250 \text{ Hz}, f_3 = 200 \text{ Hz}, f_4 = 400 \text{ Hz}$. 采样频率 $f_s = 800 \text{ Hz}$, 采样间隔 $t_s = 1/f_s$, 采样序列为 $1:1024$, 稀疏度为 $K = 24$.

定义重构成功率为 $\eta = \frac{\text{成功重构次数}}{\text{总测试次数}}$.

OMP 算法中理论上当采样次数 $M \geq K \times \log(N/K)$, 其中 K 是信号稀疏度, N 为信号长度, 信号的重构成功率可以无限接近于 1. 当 $N = 1024, K = 24$, M 理论上约为 40, 因此以高斯随机矩阵作为观察矩阵, 进行信号 x 的压缩采样使用 OMP 重构以及改进算法进行重构. 验证采样数量 M 在低于 40 的情况下, 2 种算法的重构成功率.

以重构后相对误差低于 10^{-8} 为重构成功标准, 在每种采样值下进行 1000 次重复, 计算采样数量变化过程中的算法成功率. 从图 2 中可以看出, 在使用相同的观察矩阵进行采样, 观测数低于 40 即低于理论重构采样数量下, 是改进算法成功率高于 OMP 算法, 随着采样数量增加到接近理论值时, 改进后的 OMP 算法与 OMP 算法的成功率基本相同. 可见改进算法的可靠性基本与 OMP 算法相同, 近乎完全重构.

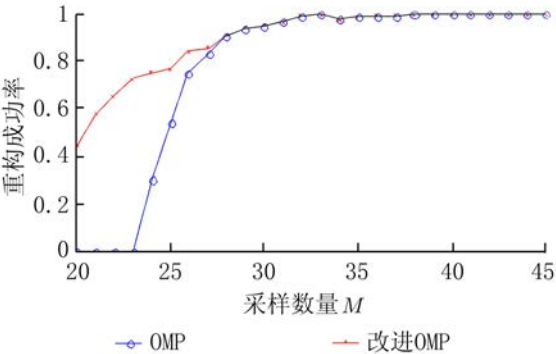


图 2 改进算法与 OMP 算法重构稳定性对比

Fig.2 Comparison of reconstruction stability of the improved algorithm and OMP

4.2 图像信号仿真 图像信号仿真实验中选用灰度位图(像素 256×256)验证本文算法.此次进行的测试实验程序是在 2.40 GHz、6 GB 内存、采用 Windows 7 系统的计算机上运行,在 MATLAB 2010 环境下进行操作.

对原始图像进行小波变换,对在小波域上的稀疏信号,使用高斯随机矩阵作为观测矩阵进行采样,应用改进算法尝试还原原始图像,并与其他重建算法还原图像进行对比试验说明.

从图 3 和表 1 可以看出,当采样率为 60%时,SAMP 算法重构效果最好,但由于使用步长逼近稀



图 3 改进算法与其他算法重建效果对比

Fig.3 Comparison of reconstruction effort of the improved algorithm and other algorithms

疏值,在步长的计算与迭代中需要耗费大量时间.SP 算法引入回溯思想用来选择最优原子集在提高

重构精度的情况下,算法计算的时间相对 OMP 算法也有所增加.而改进算法相比 OMP 算法由于在每次迭代中选出多个原子并且引入共轭梯度法从整体上进行信号估计,用以代替最小二乘法.在明显减少算法收敛时间的同时取得了相对较好的图像重构效果.

表 1 改进算法与其他算法重建时间对比

Tab.1 Comparison of reconstruction time of the improved algorithm and other algorithms

算法名称	重构质量 (PSNR)	重构时间/s
OMP 算法	28.533 8	32.138 0
SP 算法	29.857 4	38.115 0
SAMP 算法	29.957 4	229.780 0

5 结束语

本研究中,利用基于 OMP 的改进算法,实现了图像的重构.理论分析及实践仿真表明,改进的 OMP 算法能够有效缩减迭代收敛速度,并保证还原精度.但是本文也存在不足之处,由于共轭梯度算法更新方向并不一定是最优的,会导致重构精度变化范围小,一定程度上影响了压缩感知图像的重建质量,下一步将针对更新方向上的局限性进行算法改进,以期取得更好重建效果.

参考文献:

[1] CANDES E.Compressive sampling [C].Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Madrid Spain European Mathematicians Society Publishing House,2006,3:1 433-1 452.

[2] BARANIUK R.A lecture compressive sensing[J].IEEE Signal Processing Magazine,2007,24(4):118-121.

[3] 方红,杨海蓉.贪婪算法与压缩感知理论[J].自动化学报,2011,37(12):1 413-1 421.

FANG H, YANG H R. Greedy algorithms and compressed sensing [J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37 (12):1 413-1 421.

[4] JUSTIN ROMBERG.Imaging via compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine,2008,25(2):14 - 20.

[5] DAVID DONOHO,YAAKOV TSAIG.Fast solution of ell-1-norm minimization problems when the solution may be sparse[R].Stanford University Department of Statis-

- tics Technical Report, 2006.
- [6] MÁRIO A T, FIGUEIREDO, ROBERT D, et al. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing: Special Issue on Convex Optimization Methods for Signal Processing, 2007, 1(4): 586-598.
- [7] TROPP J, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Trans Information Theory, 2007, 53(12): 4 655-4 666.
- [8] OSHER S, MAO Y, DONG B, et al. Fast linearized Bregman iteration for compressive sensing and sparse denoising [J]. Communications in Mathematical Sciences, 2010, 8(1): 93-111.
- [9] 张宗念, 黄仁泰, 闫敬文. 压缩感知信号盲稀疏度重构算法 [J]. 电子学报, 2011, 39(1): 18-22.
ZHANG Z N, HUANG R T, YAN J W. A blind sparsity reconstruction algorithm for compressed sensing signal [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 18-22.
- [10] ZAYYANI H, BABAIE-ZADEH M, JUTTEN C. Bayesian pursuit algorithm for sparse representation [C]. Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Taipei, China; IEEE, 2009: 1 549-1 552.
- [11] TROPP J, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2007, 53(12): 4 655-4 666.
- [12] SCHNELLE S R, LASLA J N, HEGDE C, et al. Texas HoId'Em algorithms for distributed compressive sensing [C]. 2010 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP), 2010: 2 886-2 889.
- [13] KAREN E, ALESSANDRO F, VLADIMIR K. Compressed sensing image reconstruction via recursive spatially adaptive filtering [C]. IEEE International Conference on Image Processing, 2017: 549-552.
- [14] 欧庆波. 压缩感知在无线通信中的应用研究 [D]. 南京: 南京邮电大学, 2011.
OU Q B. The application of compressed sensing in wireless communication [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2011.
- [15] 李志林. 图像压缩感知重建算法研究 [D]. 北京: 北京交通大学, 2012.
LI Z L. Study on image compressed sensing reconstruction algorithms [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2012.
- [16] BLUMENSATH T, DAVIES M E. Gradient pursuits [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(6): 2 370-2 382.
- [17] HARMANY Z, THOMPSON D, WILLETT R, et al. Gradient projection for linearly constrained convex optimization in sparse signal recovery [C]. 2010 17th IEEE International Conference on Image Processing, 2010: 3 361-336 4.
- [18] HESTENES M R, STIEFEL E L. Methods of conjugate gradients for solving linear systems [J]. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 1952, 5(49): 409-436.

Fast compressed sensing image reconstruction based on OMP algorithm

MA Bo-heng, PENG Yi

(Institute of Information and Automation, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

Abstract: This paper proposed an improved OMP (Orthogonal Matching Pursuit) algorithm that replaced Ordinary Least Square algorithm with Conjugate Gradient Descent algorithm based on the backfitting idea of Subspace Pursuit algorithm, in order to solve the problem of contradiction between reconstruction effort and time required of OMP algorithm under compressive sensing theory. This paper also made simulation experiment on the accuracy and stability of reconstruction of the improved algorithm. The result showed that the improved algorithm made the quality of reconstruction satisfying with better speed and stability of reconstruction.

Key words: compressed sensing (CS); Orthogonal Matching Pursuit algorithm (OMP); signal reconstruction; image reconstruction