2014 年考研数学二真题与解析

一、选择题　1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．当 $x \to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的可能取值范围是（　）

（A）$(2,+\infty)$　　（B）$(1,2)$　　（C）$(\frac{1}{2},1)$　　（D）$(0,\frac{1}{2})$

【详解】$\ln^\alpha(1+2x) \sim 2^\alpha x^\alpha$，是 α 阶无穷小，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}} x^{\frac{2}{\alpha}}$ 是 $\frac{2}{\alpha}$ 阶无穷小，由题意可知 $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \frac{2}{\alpha} > 1 \end{cases}$

所以 α 的可能取值范围是 $(1,2)$，应该选（B）．

2．下列曲线有渐近线的是

（A）$y = x + \sin x$　　（B）$y = x^2 + \sin x$　（C）$y = x + \sin\frac{1}{x}$　　（D）$y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$

【详解】对于 $y = x + \sin\frac{1}{x}$，可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x} = 1$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x) = \lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x} = 0$，所以有斜渐近线 $y = x$

应该选（C）

3．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$，则在 $[0,1]$ 上（　）

（A）当 $f'(x) \ge 0$ 时，$f(x) \ge g(x)$　　（B）当 $f'(x) \ge 0$ 时，$f(x) \le g(x)$

（C）当 $f''(x) \ge 0$ 时，$f(x) \ge g(x)$　　（D）当 $f''(x) \ge 0$ 时，$f(x) \le g(x)$

【分析】此题考查的曲线的凹凸性的定义及判断方法．

【详解 1】如果对曲线在区间 $[a,b]$ 上凹凸的定义比较熟悉的话，可以直接做出判断． 显然

$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$ 就是联接 $(0,f(0)),(1,f(1))$ 两点的直线方程．故当 $f''(x) \ge 0$ 时，曲线是凹的，也就是 $f(x) \le g(x)$，应该选（D）

【详解 2】如果对曲线在区间 $[a,b]$ 上凹凸的定义不熟悉的话，可令

$F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$，则 $F(0) = F(1) = 0$，且 $F''(x) = f''(x)$，故当 $f''(x) \ge 0$ 时，曲线是凹的，从而 $F(x) \le F(0) = F(1) = 0$，即 $F(x) = f(x) - g(x) \le 0$，也就是

$f(x)\le g(x)$，应该选（D）

4．曲线 $\begin{cases} x=t^2+7, \\ y=t^2+4t+1 \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是（　　）

（A）$\frac{\sqrt{10}}{50}$ （B）$\frac{\sqrt{10}}{100}$ （C）$10\sqrt{10}$ （D）$5\sqrt{10}$

【详解】 曲线在点 $(x, f(x))$ 处的曲率公式 $K=\frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$，曲率半径 $R=\frac{1}{K}$．

本题中 $\frac{dx}{dt}=2t, \frac{dy}{dt}=2t+4$，所以 $\frac{dy}{dx}=\frac{2t+4}{2t}=1+\frac{2}{t}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{2}{t^2}}{2t}=-\frac{1}{t^3}$，

对应于 $t=1$ 的点处 $y'=3, y''=-1$，所以 $K=\frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}=\frac{1}{10\sqrt{10}}$，曲率半径 $R=\frac{1}{K}=10\sqrt{10}$．

应该选（C）

5．设函数 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$（　　）

（A）1 （B）$\frac{2}{3}$ （C）$\frac{1}{2}$ （D）$\frac{1}{3}$

【详解】注意（1）$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，（2）$x\to 0$ 时，$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$．

由于 $f(x)=xf'(\xi)$．所以可知 $f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{f(x)}{x}=\frac{\arctan x}{x}$，$\xi^2=\frac{x-\arctan x}{(\arctan x)^2}$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-arx\tan x}{x(\arctan x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x-\frac{1}{3}x^3)+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

6．设 $u(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则（　　）.

（A）$u(x,y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的边界上；

（B）$u(x,y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的内部；

（C）$u(x,y)$ 的最大值点在区域 D 的内部，最小值点在区域 D 的边界上；

（D）$u(x,y)$ 的最小值点在区域 D 的内部，最大值点在区域 D 的边界上．

【详解】$u(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续，所以 $u(x,y)$ 在 D 内必然有最大值和最小值．并且如果在内部存在驻点 (x_0,y_0)，也就是 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，在这个点处 $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$，由条件，显然 $AC-B^2<0$，显然 $u(x,y)$ 不是极值点，当然也不是最值点，所以 $u(x,y)$ 的最大值点和最小值点必定都在区域 D 的边界上．

所以应该选（A）．

7．行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ 等于

（A）$(ad-bc)^2$　　（B）$-(ad-bc)^2$　　（C）$a^2d^2-b^2c^2$　　（D）$-a^2d^2+b^2c^2$

【详解】

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}=-ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-(ad-bc)^2$$

应该选（B）．

8．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维向量，则对任意的常数 k,l，向量 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的

（A）必要而非充分条件　　（B）充分而非必要条件

（C）充分必要条件　　（D）非充分非必要条件

【详解】若向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则

（$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$）$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)K$，对任意的常数 k,l，矩阵 K 的秩都等于 2，所以向量 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 一定线性无关．

而当 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 时，对任意的常数 k,l，向量 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关，但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；故选择（A）．

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

9. $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}dx =$______.

【详解】$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{2})\right) = \frac{3\pi}{8}$.

10. 设 $f(x)$ 为周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1), x\in[0,2]$，则 $f(7)=$______.

【详解】当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=\int 2(x-1)dx = x^2-2x+C$，由 $f(0)=0$ 可知 $C=0$，即 $f(x)=x^2-2x$；$f(x)$ 为周期为 4 奇函数，故 $f(7)=f(-1)=f(1)=1$.

11. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $dz|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$______.

【详解】设 $F(x,y,z)=e^{2yz}+x+y^2+z-\frac{7}{4}$，$F_x=1, F_y=2ze^{2yz}+2y, F_z=2ye^{2yz}+1$，当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时，$z=0$，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1}{2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{1}{2}$，所以 $dz|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$.

12. 曲线 L 的极坐标方程为 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为______.

【详解】先把曲线方程化为参数方程 $\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta=\theta\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta=\theta\sin\theta \end{cases}$，于是在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处，$x=0, y=\frac{\pi}{2}$，$\frac{dy}{dx}\Big|_{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}\Big|_{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$，则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为 $y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)$，即 $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$.

13. 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上，若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$______.

【详解】质心坐标 $\bar{x}=\frac{\int_0^1 x\rho(x)dx}{\int_0^1 \rho(x)dx}=\frac{\int_0^1(-x^3+2x^2+x)dx}{\int_0^1(-x^2+2x+1)dx}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}}=\frac{11}{20}$.

14. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围

是______.

【详解】由配方法可知

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2 \end{aligned}$$

由于负惯性指数为 1，故必须要求 $4 - a^2 \geq 0$，所以 a 的取值范围是 $[-2,2]$.

三、解答题

15．（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$.

【分析】. 先用等价无穷小代换简化分母，然后利用洛必达法则求未定型极限.

【详解】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x} = \lim_{x\to\infty}(x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(x^2(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2}))-x\right) = \frac{1}{2}$$

16．（本题满分 10 分）

已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2y' = 1 - y'$，且 $y(2) = 0$，求 $y(x)$ 的极大值和极小值.

【详解】

解：把方程化为标准形式得到 $(1+y^2)\dfrac{dy}{dx} = 1 - x^2$，这是一个可分离变量的一阶微分方程，两边分别积分

可得方程通解为：$\dfrac{1}{3}y^3 + y = x - \dfrac{1}{3}x^3 + C$，由 $y(2) = 0$ 得 $C = \dfrac{2}{3}$，

即 $\dfrac{1}{3}y^3 + y = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}$.

令 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-x^2}{1+y^2} = 0$，得 $x = \pm 1$，且可知 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2x(1+y^2)^2 - 2y(1-x^2)^2}{(1+y^2)^3}$；

当 $x = 1$ 时，可解得 $y = 1$， $y'' = -1 < 0$，函数取得极大值 $y = 1$；

当 $x = -1$ 时，可解得 $y = 0$， $y'' = 2 > 0$，函数取得极小值 $y = 0$.

17．（本题满分 10 分）

设平面区域$D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4,x\ge 0.y\ge 0\}$. 计算$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$

【详解】由对称性可得

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxd=\iint\limits_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxd=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{(x+y)\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{1}dxd=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 r\sin\pi r dr=-\frac{3}{4}$$

18.（本题满分 10 分）

设函数$f(u)$具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$满足$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$．若

$f(0)=0,f'(0)=0$，求$f(u)$的表达式.

【详解】

设$u=e^x\cos y$，则$z=f(u)=f(e^x\cos y)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^{x\cos y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}=f''(e^x\cos y)e^{2x}$$

由条件$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$，

可知

$$f''(u)=4f(u)+u$$

这是一个二阶常用系数线性非齐次方程.
对应齐次方程的通解为：

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}\text{ 其中}C_1,C_2\text{为任意常数.}$$

对应非齐次方程特解可求得为$y^*=-\frac{1}{4}u$.

故非齐次方程通解为$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u$.

将初始条件 $f(0)=0, f'(0)=0$ 代入，可得 $C_1=\frac{1}{16}, C_2=-\frac{1}{16}$．

所以 $f(u)$ 的表达式为 $f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u$．

19．（本题满分 10 分）

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a.b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$，证明：

（1）　$0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,\ x\in[a,b]$；

（2）　$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$．

【详解】

（1）证明：因为 $0\le g(x)\le 1$，所以 $\int_a^x 0dx\le\int_a^x g(t)dt\le\int_a^x 1dt\quad x\in[a,b]$．

即 $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,\ x\in[a,b]$．

（2）令 $F(x)=\int_a^x f(u)g(u)du-\int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du$，

则可知 $F(a)=0$，且 $F'(x)=f(x)g(x)-g(x)f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)$，

因为 $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$，且 $f(x)$ 单调增加，

所以 $f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)\le f(a+x-a)=f(x)$．从而

$$F'(x)=f(x)g(x)-g(x)f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)\ge f(x)g(x)-g(x)f(x)=0,\qquad x\in[a,b]$$

也是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 单调增加，则 $F(b)\ge F(a)=0$，即得到

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

20．（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}, x\in[0,1]$，定义函数列

$$f_1(x)=f(x),\ f_2(x)=f(f_1(x)),\ \cdots, f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$$

设 S_n 是曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1,\ y=0$ 所围图形的面积．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$．

【详解】

$$f_1(x)=\frac{x}{1+x}, f_2(x)=\frac{f_1(x)}{1+f_1(x)}=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x},\quad f_3(x)=\frac{x}{1+3x},\cdots,$$

利用数学归纳法可得 $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$.

$$S_n=\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\frac{x}{1+nx}dx=\frac{1}{n}\int_0^1(1-\frac{1}{1+nx})dx=\frac{1}{n}(1-\frac{\ln(1+n)}{n}),$$

$$\lim_{n\to\infty}nS_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln(1+n)}{n}\right)=1.$$

21.（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线 $f(x,y)=0$ 所成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.

【详解】

由于函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，所以 $f(x,y)=y^2+2y+C(x)$，其中 $C(x)$ 为待定的连续函数.

又因为 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，从而可知 $C(y)=1-(2-y)\ln y$，

得到 $f(x,y)=y^2+2y+C(x)=y^2+2y+1-(2-x)\ln x$.

令 $f(x,y)=0$，可得 $(y+1)^2=(2-x)\ln x$. 且当 $y=-1$ 时，$x_1=1,x_2=2$.

曲线 $f(x,y)=0$ 所成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^2(y+1)^2dx=\pi\int_1^2(2-x)\ln xdx=(2\ln 2-\frac{5}{4})\pi$$

22.（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\end{pmatrix}$，E 为三阶单位矩阵.

（1） 求方程组 $AX=0$ 的一个基础解系；

（2） 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵.

【详解】（1）对系数矩阵 A 进行初等行变换如下：

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

得到方程组 $AX=0$ 同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = 3x_4 \end{cases}$$

得到 $AX=0$ 的一个基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

（2）显然 B 矩阵是一个 4×3 矩阵，设 $B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}$

对矩阵 (AE) 进行进行初等行变换如下：

$$(AE) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

由方程组可得矩阵 B 对应的三列分别为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即满足 $AB=E$ 的所有矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 2-c_1 & 6-c_2 & -1-c_3 \\ -1+2c_1 & -3+2c_2 & 1+2c_3 \\ -1+3c_1 & -4+3c_2 & 1+3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

23.（本题满分 11 分）

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

【详解】证明：设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&\boldsymbol{n}\end{pmatrix}$.

分别求两个矩阵的特征值和特征向量如下：

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-\boldsymbol{n})\lambda^{\boldsymbol{n}-1},$$

所以 A 的$\boldsymbol{n}$个特征值为$\lambda_1=\boldsymbol{n},\lambda_2=\lambda_3=\cdots\lambda_{\boldsymbol{n}}=0$；

而且 A 是实对称矩阵，所以一定可以对角化．且$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&0&&\\&&\cdots&\\&&&0\end{pmatrix}$；

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&\cdots&-1\\0&\lambda&\cdots&-2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda-\boldsymbol{n}\end{vmatrix}=(\lambda-\boldsymbol{n})\lambda^{\boldsymbol{n}-1}$$

所以 B 的$\boldsymbol{n}$个特征值也为$\lambda_1=\boldsymbol{n},\lambda_2=\lambda_3=\cdots\lambda_{\boldsymbol{n}}=0$；

对于$\boldsymbol{n}-1$重特征值$\lambda=0$，由于矩阵$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}$的秩显然为 1，所以矩阵 B 对应$\boldsymbol{n}-1$重特征值$\lambda=0$的特征向量应该有$\boldsymbol{n}-1$个线性无关，进一步矩阵 B 存在$\boldsymbol{n}$个线性无关的特征向量，即矩阵 B 一定可以对角化，且$\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&0&&\\&&\cdots&\\&&&0\end{pmatrix}$

从而可知$\boldsymbol{n}$阶矩阵$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&\boldsymbol{n}\end{pmatrix}$相似.