2013年研究生入学考试数学二试题及详解

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$（　　）．

(A) 比 x 高阶的无穷小　　(B) 比 x 低阶的无穷小

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小　　(D) 与 x 等价的无穷小

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$，则 $\sin\alpha(x)$ 是与 x 同阶但不等价的无穷小. 又 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$，则 $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$，$\alpha(x)$ 是与 x 同阶但不等价的无穷小．选(C)．

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)-\ln y+x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\frac{2}{n})-1]=$（　　）．

(A) 2　　(B) 1　　(C) -1　　(D) -2

解：$\cos(xy)-\ln y+x=1$，当 $x=0$ 时，$\ln y=0$，则 $y(0)=f(0)=1$．

方程两边对 x 求导，得 $-(y+xy')\sin(xy)-\frac{y'}{y}+1=0$，$y'=\frac{y-y^2\sin(xy)}{1+xy\sin(xy)}$，

$y'(0)=f'(0)=1$．则 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\frac{2}{n})-1]=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2$．选(A)．

讨论：若题目中的方程为 $\cos(xy)+\ln y-x=1$，仍得 $y(0)=f(0)=1$. 方程两边对 x 求导，可得 $y'=\frac{y+y^2\sin(xy)}{1-xy\sin(xy)}$，仍得 $y'(0)=f'(0)=1$．则 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\frac{2}{n})-1]=2$．仍选(A)．

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）．

(A) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点　　(B) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

(C) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导　　(D) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

解：$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_0^x\sin t\mathrm{d}t=[-\cos t]_0^x=1-\cos x, & 0\le x<\pi\\ \int_0^\pi\sin t\mathrm{d}t+\int_\pi^x 2\mathrm{d}x=2x-2\pi+2, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，

$F(\pi^-)=1-\cos\pi=2$，$F(\pi^+)=2$，$F(\pi)=2$，则$F(x)$在$x=\pi$处连续；

$F'_-(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1-\cos x-2}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\sin x}{1}=0$，$F'_+(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{2x-2\pi+2-2}{x-\pi}=2$，

则$F(x)$在$x=\pi$处连续但不可导．选(C)．

(4) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<\mathrm{e}\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge \mathrm{e}\end{cases}$，若反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，则(　　)．

(A) $\alpha<-2$　　(B) $\alpha>2$　　(C) $-2<\alpha<0$　　(D) $0<\alpha<2$

解：$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x$

$=[\dfrac{1}{2-\alpha}(x-1)^{2-\alpha}]_1^{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{\ln^{\alpha}x}\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}$．$[\dfrac{1}{2-\alpha}(x-1)^{2-\alpha}]_1^{\mathrm{e}}$收敛，则$\alpha<2$；

$\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{\ln^{\alpha}x}\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}$收敛，则$\alpha>0$，得$0<\alpha<2$．选(D)．

(5) 设$z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，其中函数f可微， 则$\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$(　　)．

(A) $2yf'(xy)$　　(B) $-2yf'(xy)$　　(C) $\dfrac{2}{x}f(xy)$　　(D) $-\dfrac{2}{x}f(xy)$

解：由$z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，得

$\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{y}[-\dfrac{y}{x^2}f(xy)+\dfrac{y^2}{x}f'(xy)]+\dfrac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)=2yf'(xy)$．选(A)．

(6) 设D_k是圆域$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$在第$k$象限的部分，记$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$(k=1,2,3,4)$，则(　　)．

(A) $I_1>0$　　(B) $I_2>0$　　(C) $I_3>0$　　(D) $I_4>0$

解：在区域D_2内，恒有$y>x$，则$I_2>0$．选(B)．

事实上，$I_1=\iint\limits_{D_1}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(\sin\theta-\cos\theta)r\mathrm{d}r=\dfrac{1}{3}[-\cos\theta-\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$，

类似可求出 $I_2=\frac{1}{3}[-\cos\theta-\sin\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{3}$，$I_3=\frac{1}{3}[-\cos\theta-\sin\theta]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}=0$，

$I_4=\frac{1}{3}[-\cos\theta-\sin\theta]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}=-\frac{2}{3}$.

(7) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则(　　).

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

解：将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 按列分块，记为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 & \cdots & \boldsymbol{\gamma}_n\end{bmatrix}$.

则 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 & \cdots & \boldsymbol{\gamma}_n\end{bmatrix}$,

所以 $\boldsymbol{\gamma}_1=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n$，……，$\boldsymbol{\gamma}_n=b_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n$，

即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示.

因 $\boldsymbol{B}$ 可逆，可得 $\boldsymbol{CB}^{-1}=\boldsymbol{A}$，同理可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可用矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表示. 即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价. 选(B).

(8) 矩阵 $\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为(　　).

(A) $a=0, b=2$　　(B) $a=0$, b 为任意实数

(C) $a=2, b=0$　　(D) $a=2$, b 为任意实数

解：记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则对角阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda=0, 2, b$.

因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=0, 2, b$.

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-b & -a\\ -1 & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -a & -1\\ 0 & \lambda-b & -a\\ -\lambda & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1 & -a & -1\\ 0 & \lambda-b & -a\\ 0 & -2a & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$=\lambda[(\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2]$，由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=0,2,b$，得 $a=0,b$ 为任意实数.

当 $a=0,b$ 为任意实数时，实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & b & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，存在满秩矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$，

使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & b & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

故 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件为 $a=0,b$ 为任意实数．选(B).

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=$______.

解法1：属于1^{∞}型极限，由 $\lim f(x)^{g(x)}=\lim g(x)[f(x)-1]$，得

$$\lim_{x\to 0}(2-\frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1-\frac{\ln(1+x)}{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2(1+x)}=\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\sqrt{\mathrm{e}}$.

解法2：$\lim\limits_{x\to 0}(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\{[1+\dfrac{x-\ln(1+x)}{x}]^{\frac{x}{x-\ln(1+x)}}\}^{\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$

$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}}=\sqrt{\mathrm{e}}$.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=0}=$______.

解：$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$，则 $f(-1)=0$，$f'(x)=\sqrt{1-\mathrm{e}^x}$，$f'(-1)=\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}$.

$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=0}=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}}=\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}$.

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\ (-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6})$， 则 L 所围平面图形的面积是______.

解：$r=\cos 3\theta$，则 $S=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}(\cos 3\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\theta)\mathrm{d}\theta$

$=\frac{1}{2}(\theta+\frac{1}{6}\sin 6\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}$.

(12) 曲线 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为______.

解：$\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$，$y'_t=\frac{t}{1+t^2}$，$x'_t=\frac{1}{1+t^2}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=t$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=1}=1$，法线斜率 $k=-1$.

对应于 $t=1$ 的点为 $(\frac{\pi}{4},\frac{\ln 2}{2})$，法线方程为 $y-\frac{\ln 2}{2}=-(x-\frac{\pi}{4})$，即 $x+y=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$.

(13) 已知 $y_1=\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}$， $y_2=\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$， $y_3=-x\mathrm{e}^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的3个解，则该方程满足条件 $y\big|_{x=0}=0$， $y'\big|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$______.

解： $y_1-y_3=\mathrm{e}^{3x}$， $y_2-y_3=\mathrm{e}^{x}$ 都是对应的齐次线性微分方程的解，且线性无关，

则该非齐次线性微分方程的通解为 $y=A\mathrm{e}^{3x}+B\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$，从而得

$y'=3A\mathrm{e}^{3x}+B\mathrm{e}^{x}-2x\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2x}$，将 $y\big|_{x=0}=0$， $y'\big|_{x=0}=1$ 代入，得 $A=1$， $B=-1$，

则 $y=\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$.

(14) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是3阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式， A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

解：由 $a_{ij}+A_{ij}=0$，得 $A_{ij}=-a_{ij}\ (i,j=1,2,3)$，

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}，则\ |\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}|.$$

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^3$， $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2$，于是 $-|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2$，得 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

又 $|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=-(a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2)\ (i=1,2,3)$，因 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵，则

$|\boldsymbol{A}| \neq 0$．故只有$|\boldsymbol{A}|=-1$符合题目要求.

三、解答题：15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分10分）当$x \to 0$时，$1-\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$与$ax^n$为等价的无穷小，求$n$与$a$的值.

解法1：$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)\cos 3x = \frac{1}{2}(\cos^2 3x + \cos x \cdot \cos 3x)$

$=\frac{1}{4}(1+\cos 6x+\cos 4x+\cos 2x)$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\cos 6x-\cos 4x-\cos 2x}{4ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x+4\sin 4x+2\sin 2x}{4anx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 6x+4\cos 4x+\cos 2x}{an(n-1)x^{n-2}}=1,$$

则$n-2=0$，$an(n-1)=14$，得$n=2$，$a=7$.

解法2：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 2x\cos 3x+2\sin 2x\cos x\cos 3x+3\sin 3x\cos x\cos 2x}{anx^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 2x\cos 3x+4\sin x\cos^2 x\cos 3x+3(3\sin x-4\sin^3 x)\cos x\cos 2x}{anx^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cos 3x+4\cos^2 x\cos 3x+3(3-4\sin^2 x)\cos x\cos 2x}{anx^{n-2}}=1,$$

则$n-2=0$，$an=14$，得$n=2$，$a=7$.

(16)（本题满分10分）设D是由曲线$y=x^{\frac{1}{3}}$，直线$x=a\ (a>0)$及x轴所围成的平面图形，V_x，V_y分别是D绕x轴，y轴旋转一周所得旋转体的体积．若$V_y=10V_x$，求a的值.

解：曲线$y=x^{\frac{1}{3}}$，即$x=y^3$过原点，交直线$x=a$于点$(a, a^{\frac{1}{3}})$．则

$$V_x=\pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_0^a=\frac{3\pi}{5}a^{\frac{5}{3}};$$

$$V_y=\pi a^2\cdot a^{\frac{1}{3}}-\pi\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}y^6\mathrm{d}y=\pi a^{\frac{7}{3}}-\frac{\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}，或V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}.$$

由$V_y=10V_x$，得$\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=6\pi a^{\frac{5}{3}}$，则$a^{\frac{2}{3}}=7$，又$a>0$，得$a=7\sqrt{7}$.

(17)（本题满分 10 分）设平面区域D由直线$x=3y$，$y=3x$及$x+y=8$围成，

计算$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：联立解$y=3x$及$x+y=8$，得交点$(2,6)$；联立解$x=3y$及$x+y=8$，得交点$(6,2)$.

区域D是由顶点为$(0,0)$，$(2,6)$，$(6,2)$的三角形，画出积分域图.

于是$I=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{3x}\mathrm{d}y+\int_2^6 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\int_0^2 x^3\mathrm{d}x+\int_2^6 x^2(8-\frac{4x}{3})\mathrm{d}x$

$=\frac{2}{3}x^4\Big|_0^2+[\frac{8}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4]_2^6=\frac{32}{3}+576-432-\frac{64}{3}+\frac{16}{3}=144-\frac{16}{3}=138\frac{2}{3}$.

(18)（本题满分 10 分）设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，且$f(1)=1$，证明：

(I) 存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=1$；

(II) 存在$\eta\in(-1,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

证：(I) $f(x)$为奇函数，在$[-1,1]$二阶可导，则$f(x)$在$[-1,1]$上连续可导，且$f(0)=0$.

又$f(1)=1$，根据拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$.

或令$F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[-1,1]$上连续可导，$F'(x)=f'(x)-1$.

$F(0)=0$，$F(1)=0$，根据罗尔定理，存在$\xi\in(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=1$.

(II) $f(x)$为奇函数，在$[-1,1]$上二阶可导，则$f'(x)$为偶函数，在$[-1,1]$上连续可导.

令$G(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)-1]$，则$G(x)$在$[-1,1]$上连续可导，$G'(x)=\mathrm{e}^x[f''(x)+f'(x)-1]$.

$G(\xi)=0$，$G(-\xi)=\mathrm{e}^{-\xi}[f'(-\xi)-1]=\mathrm{e}^{-\xi}[f'(\xi)-1]=0$，根据罗尔定理，存在

$\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得$G'(\eta)=0$，即$f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19)（本题满分10分）求曲线$x^3-xy+y^3=1\ (x\geq0,y\geq0)$上的点到坐标原点的最长距离和最短距离.

解：构造拉格朗日函数$L=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1)$，由$L'_x=0$，$L'_y=0$，$L'_\lambda=0$，

得$\begin{cases} 2x+3\lambda x^2-\lambda y=0 \\ 2y+3\lambda y^2-\lambda x=0 \\ x^3-xy+y^3-1=0 \end{cases}$，前两式相减，得$(x-y)(2+\lambda+3\lambda x+3\lambda y)=0$，

当$y=x$时，代入$x^3-xy+y^3-1=0$，得$2x^3-x^2-1=0$，解得$x=1$，则$y=1$.

当$2+\lambda+3\lambda x+3\lambda y=0$时，因$x\geq 0, y\geq 0$，则$1+3x+3y>0$，故$\lambda=-\dfrac{2}{1+3x+3y}$，

代入前两式均得$x+3xy+y=0$，因$x\geq 0, y\geq 0$，曲线上点的坐标x, y又不能同时为零，

则$x+3xy+y=0$无解.

于是，曲线上的点$(1,1)$，到坐标原点的距离最长，$d_{\max}=\sqrt{2}$，

曲线的端点$(0,1)$或$(1,0)$，到坐标原点的距离最短，$d_{\min}=1$.

(20)（本题满分11分）设函数$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$

(I) 求$f(x)$的最小值；

(II) 设数列$\{x_n\}$满足$\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限.

解：(I) $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，定义域$x>0$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，有惟一驻点$x=1$.

当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，函数单调减少；当$x>1$时，$f'(x)>0$，函数单调增加.

则函数的极小值即最小值为$f(1)=1$.

(II) 由(I)得$\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\geq 1$，又已知$\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，则$\dfrac{1}{x_n}>\dfrac{1}{x_{n+1}}$，定义域$x_n>0$，

得$x_n<x_{n+1}$，即数列$\{x_n\}$单调增加.

又$\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，则$\ln x_n<1$，$0<x_n<\mathrm{e}$，即数列$\{x_n\}$有上界，则$\{x_n\}$极限存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对$\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$两边取极限，得$\ln A+\dfrac{1}{A}\leq 1$，又$\ln A+\dfrac{1}{A}\geq 1$，则

$\ln A+\dfrac{1}{A}=1$，得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=1$.

(21)（本题满分11分）设曲线L的方程为$y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x\ (1\leq x\leq \mathrm{e})$

(I) 求L的弧长；

（II）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1$，$x=\mathrm{e}$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的形心的横坐标.

解：（I） $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$，$y'=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$，则曲线的弧长为

$$L=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+\frac{1}{4}(x-\frac{1}{x})^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}(x+\frac{1}{x})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}x^2+\ln x]_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$$

（II）平面图形 D 的形心的横坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\int_1^{\mathrm{e}}x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x}\mathrm{d}y}{\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x}\mathrm{d}y}=\frac{\int_1^{\mathrm{e}}(x^3-2x\ln x)\mathrm{d}x}{\int_1^{\mathrm{e}}(x^2-2\ln x)\mathrm{d}x}=\frac{[\frac{x^4}{4}-x^2\ln x+\frac{x^2}{2}]_1^{\mathrm{e}}}{[\frac{x^3}{3}-2x\ln x+2x]_1^{\mathrm{e}}}$$

$$=\frac{\frac{\mathrm{e}^4}{4}-\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{3}{4}}{\frac{\mathrm{e}^3}{3}-\frac{7}{3}}=\frac{3(\mathrm{e}^4-2\mathrm{e}^2-3)}{4(\mathrm{e}^3-7)}.$$

(22)（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$. 当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求出所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解：设 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$ 即 $\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$，

得方程组 $\begin{cases}ax_3-x_2=0\\ x_2+ax_4-ax_1=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}$，即 $\begin{bmatrix}0 & -1 & a & 0\\ -a & 1 & 0 & a\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ b\end{bmatrix}$.

其增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{D}}=\begin{bmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{bmatrix},$$

方程组有解的条件是 $\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{D}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{D})$，则 $a=-1$，$b=0$.

此时方程组化为 $\begin{cases}x_1=x_3+x_4+1\\ x_2=-x_3\end{cases}$，记 $x_3=c_1, x_4=c_2$，则 $x_1=c_1+c_2+1, x_2=-c_1$，

即矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_1+c_2+1 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

(23)（本题满分 11 分）设二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$；

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

解：(I) $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$

$$=(2a_1^2+b_1^2)x_1^2+(2a_2^2+b_2^2)x_2^2+(2a_3^2+b_3^2)x_3^2+$$

$$+2(2a_1a_2+b_1b_2)x_1x_2+2(2a_1a_3+b_1b_3)x_1x_3+2(2a_2a_3+b_2b_3)x_2x_3,$$

二次型 f 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2a_1^2+b_1^2 & 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_1a_3+b_1b_3 \\ 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_2^2+b_2^2 & 2a_2a_3+b_2b_3 \\ 2a_1a_3+b_1b_3 & 2a_2a_3+b_2b_3 & 2a_3^2+b_3^2 \end{bmatrix}$.

由于 $2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}=2\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 2a_1^2+b_1^2 & 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_1a_3+b_1b_3 \\ 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_2^2+b_2^2 & 2a_2a_3+b_2b_3 \\ 2a_1a_3+b_1b_3 & 2a_2a_3+b_2b_3 & 2a_3^2+b_3^2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{A},$$

则二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 因 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1,\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0,\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$.

由 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$，得 $\boldsymbol{A\alpha}=2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A\beta}=2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}$，

则 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\le \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})+\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})=2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值只有 2 个，即

$\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=0$， 则 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.