1996 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学二试题详解及评析

一、填空题

（1）设 $y=\left(x+e^{-\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$，则 $y'\big|_{x=0}=$______.

【答】 $\frac{1}{3}$.

【详解】 $y=\left(x+e^{-\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left[1+e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$，

所以 $y'\big|_{x=0}=\frac{1}{3}$.

（2）$\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)dx=$______.

【答】 2.

【详解】

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)dx\\&=\int_{-1}^{1}\left(x^2+2x\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)dx\\&=\int_{-1}^{1}2x\sqrt{1-x^2}dx+\int_{-1}^{1}dx\\&=0+2=2\end{aligned}$$

(3)微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为______.

【答】 $y=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$.

【详解】 特征方程 $\lambda^2+2\lambda+5=0$ 的解为 $\lambda=-1\pm 2i$，

所以通解为

$$y=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=$______.

【答】 2.

【详解】方法一：

令 $\frac{1}{x}=t$,则由洛必达法则知

原式＝

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin\ln(1+3t)-\sin\ln(1+t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[\cos\ln(1+3t)\cdot\frac{3}{1+3t}-\cos\ln(1+t)\cdot\frac{1}{1+t}\right]$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{3}{1+3t}-\frac{1}{1+t}\right)$$
$$=2$$

方法二：

直接利用三角函数和差化积公式.

原式＝

$$\lim_{x\to\infty}2x\sin\frac{\ln\dfrac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}}{2}\cos\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}{2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}2x\sin\frac{\ln\left(+\frac{2}{x+1}\right)}{2}=\lim_{x\to\infty}2x\cdot\sin\frac{1}{x+1}$$
$$=2$$

（5）由曲线 $y=x+\dfrac{1}{x}, x=2$ 及 $y=2$ 所围图形的面积 $S=$______.

【答】 $\ln 2-\dfrac{1}{2}.$

【详解】 $S=\int_1^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right]dx=\left(\frac{1}{2}x^2+\ln x-2x\right)\Big|_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}$

二、选择题

（1）设当 $x\to 0$ 时，$e^x-\left(ax^2+bx+1\right)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则

（A） $a=\dfrac{1}{2},b=1.$ （B） $a=1,b=1$

（C） $a=-\dfrac{1}{2},b=-1$ （D） $a=-1,b=1$

【 】

【答】应选（A）

【详解】 方法一：

由于 $x\to 0$ 时，

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$$

则由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-b)x+\left(\dfrac{1}{2}-a\right)x^2+o(x^2)}{x^2}$

$=0$

必有 $1-b=0,\dfrac{1}{2}-a=0$

解得 $a=\dfrac{1}{2},b=1.$

方法二：

因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2ax-b}{2x}$,

又 $\lim\limits_{x\to 0}2x=0,\ \lim\limits_{x\to 0}(e^x-2ax-b)=1-b$

必有 $b=1,$ 从而

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2a}{2}=1-2a=0,$$

所以 $a=\dfrac{1}{2}.$

（2）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$

（A）间断点.　　　　（B）连续而不可导的点

(C)可导的点，且 $f'(0)=0$　　　　（D）可导的点，$f'(0)\neq 0$

【 】

【答】应选（C）.

【详解】 由定义

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x=0,$$

由题设必有 $f(0)=0$

因此 $f'(0)=0$

（3）设 $f(x)$ 处处可导，则

（A） 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,$ 必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty,$

（B） 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{'}(x)=-\infty,$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,$

（C） 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$ 必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{'}(x)=+\infty,$

（D） 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{'}(x)=+\infty,$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$

【 】

【答】 应选（D）.

【详解】 方法一：

利用举反例排除不正确选项.

令 $f(x)=x,$ 则 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f^{'}(x)=\pm\infty,$ 但 $f^{'}(x)=1$，可见（A）、（C）均不正确.

因而只有（D）是正确选项.

方法二：

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{'}(x)=+\infty,$ 则存在 $M>0$ 及 $x_0>0$，当 $x>x_0$ 时， $f^{'}(x)>M$

于是当 $x>x_0$ 时，有

$$f(x)-f(x_0)=f^{'}(\xi)(x-x_0)>M(x-x_0)$$

从而有

$$f(x)>f(x_0)+M(x-x_0)\to+\infty(x\to+\infty)$$

（4）在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$

（A）无实根.　　（B）有且仅有一个实根

（C）有且仅有两个实根　　（D）有无穷多个实根

【 】

【答】应选（C）

【详解】 令 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x,$

由于 $f(-x)=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数，

因此只需考虑 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内的实根情况.

当 $x\geq0$ 时，

$$f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x,$$

$$f^{'}(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\sin x$$

可见，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时， $f^{'}(x)>0,$ $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，且 $f(0)=-1$， $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>1$，

因此 $f(x)=0$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一实根；

当 $x\ge\dfrac{\pi}{2}$ 时， $f(x)>0$，故在 $(0,+\infty)$ 上 $f(x)$ 仅存在唯一实根

根据 $f(x)$ 关于 y 轴对称的性质， $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有且仅有两个实根.

（5）设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)<f(x)<m,$（m 为常数），由曲线 $y=g(x),y=f(x),x=a$ 及 $x=b$ 所围成平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体积为

（A）$\int_a^b \pi\left[2m-f(x)+g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx,$

（B）$\int_a^b \pi\left[2m-f(x)-g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx,$

（C）$\int_a^b \pi\left[m-f(x)+g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx,$

（D）$\int_a^b \pi\left[m-f(x)-g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx,$

【 】

【答】 应选（B）

【详解】 因为

$$dV=\left[\pi\left(m-g(x)\right)^2-\pi\left(m-f(x)\right)^2\right]dx$$

$$\begin{aligned}V&=\int_a^b \pi\left[m-g(x)\right]^2dx-\int_a^b \pi\left[m-f(x)\right]^2dx\\&=\int_a^b \pi\left[2m-f(x)-g(x)\right]\left[f(x)-g(x)\right]dx\end{aligned}$$

所以正确选项应为（B）

三、计算 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx.$

【详解】 方法一：

原式＝

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}dx&=-\sqrt{e^{2x}-1}\Big|_0^{\ln 2}+\int_0^{\ln 2}\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)\Big|_0^{\ln 2}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

方法二：

令 $e^{-x}=\sin t$, 则 $dx=\frac{-\cos t}{\sin t}dt$,

原式＝

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos t}{\sin t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t}dt-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt$$

$$=-\ln\left(\csc t+\cot t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

方法三：

令 $\sqrt{1-e^{-2x}}=t$, 则

原式＝

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t^2}{1-t^2}dt=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-1+\frac{1}{1-t^2}\right)dt=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

(2) 求 $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

【详解】　方法一：

原式＝ $\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 t}dx=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$

方法二：

$$原式=\int\frac{dx}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}dx$$

$$=2\int\frac{d\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C$$

(3)设 $\begin{cases}x=\int_0^t f\left(u^2\right)du\\ y=\left[f\left(t^2\right)\right]^2\end{cases}$ ，其中 $f\left(u\right)$ 具有二阶导数，且 $f\left(u\right)\neq 0$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

【详阶】因为

$$\frac{dx}{dt}=f\left(t^2\right)$$
$$\frac{dy}{dt}=4tf\left(t^2\right)f'\left(t^2\right),$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=4tf^{'}\left(t^2\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4\left[f^{'}\left(t^2\right)+2t^2f^{''}\left(t^2\right)\right]}{f\left(t^2\right)}$$

(4)求函数 $f\left(x\right)=\frac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 点处带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒展开式.

【详解】 $f\left(x\right)$在在 $x=0$ 点处带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒展开式为：

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+f^{'}\left(0\right)x+\frac{1}{2!}f^{''}\left(0\right)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}\left(0\right)x^n+\frac{1}{\left(n+1\right)!}f^{(n+1)}\left(\theta x\right)x^{n+1}$$

其中 $0<\theta<1$.可见，关键是求出 $f\left(x\right)$在在 $x=0$ 点的 k 阶导数

$$f^{(k)}\left(0\right),k=0,1,2,\cdots,n+1$$

由于

$$f\left(x\right)=\frac{2}{1+x}-1,$$

$$f^{(k)}\left(x\right)=\frac{\left(-1\right)^k2\cdot k!}{\left(1+x\right)^{k+1}}\left(k=1,2,\cdots,n+1\right)$$

所以

$$f\left(x\right)=1-2x+2x^2+\cdots+\left(-1\right)^n2x^n+\left(-1\right)^{n+1}\frac{2x^{n+1}}{\left(1+\theta x\right)^{n+2}}\left(0<\theta<1\right)$$

（5）求微分方程 $y^{''}+y^{'}=x^2$ 的通解.

【详解】 对应的齐次方程的特征方程为：$\lambda^2+\lambda=0$

解得 $\lambda=0,\lambda=-1$

故齐次方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-x}$$

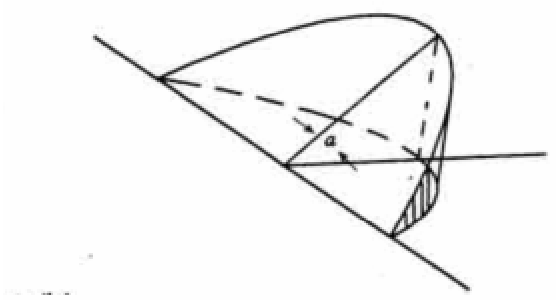
设非齐次方程的特解为：$x\left(ax^2+bx+c\right)$,代入原方程，得

$$a=\frac{1}{3},b=-1,c=2,$$

因此，原方程得通解为

$$y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+C_1+C_2e^{-x}$$

（6）设有一正椭圆柱体，其底面得长、短分别为 $2a, 2b$, 用过此柱体底面得短轴与底面成 α 角 $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 的平面截此柱体，得一楔形体（如图），求此楔形体的体积 V .



【详解】 方法一：

底面椭圆的方程为：

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ 以垂直于 y 轴的平行平面截此楔形体所得的截面为直角三角形，其一直角边为 $a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}},$ 令一直角边长为 $a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\tan\alpha,$

故截面面积为

$$S(y)=\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\tan\alpha$$

楔形体积为

$$V=2\int_0^b\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\tan\alpha dy=\frac{2a^2b}{3}\tan\alpha$$

方法二：

底面椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ 以垂直于 x 轴平行平面截此楔形体所得的截面为矩形，

其一边长为 $2y=2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$ 令一边长为 $x\tan\alpha$ ，故截面面积

$$S(x)=2bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\tan\alpha$$

楔形体的体积

$$V=\int_0^a 2bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\tan\alpha dx=\frac{2a^2b}{3}\tan\alpha$$

四、计算不定积分 $\int\frac{\arctan x}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$

【详解】

方法一：

$$\int\frac{\arctan x}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\int\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx^2-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$$

方法二：

令 $x=\tan t$,则

原式＝

$$\int t\left(\csc^2 t-1\right)dt=-t\cot t+\int\frac{\cos t}{\sin t}dt-\frac{1}{2}t^2$$

$$=-t\cot t+\ln\left|\sin t\right|-\frac{1}{2}t^2+C$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+C$$

五、设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}1-2x^2,x<-1\\ x^3,-1\le x\le 2\\ 12x-16,x>2\end{cases}$

（1） 写出 $f\left(x\right)$的反函数 $g\left(x\right)$的表达式；

（2） $g\left(x\right)$是否有间断点、不可导点，若有，指出这些点.

【详解】

（1）由题设， $f\left(x\right)$的反函数为

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, x<-1\\ \sqrt[3]{x}, -1\le x\le 8\\ \dfrac{x+16}{12}, x>8\end{cases}$$

（2）由于函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加且连续，故反函数 $g(x)$ 在在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加且连续，没有间断点.

由于 $f^{'}(0)=0$，且 $f(0)=0$，

故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的不可导点，

$f(-1)=-1$ 和 $f(2)=8$ 是 $g(x)$ 的两个可能的不可导点，

由于 $f^{'}(-1-0)=4, f^{'}(-1+0)=3,$

所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的不可导点，

因此 $g(x)$ 在 $f(-1)=-1$ 处不可导；

又 $f^{'}2(-1+0)=f^{'}(2-0)=12,$

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，因此 $g(x)$ 在 $x=f(2)=8$ 处可导.

六、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$ 的驻点，并判别它是否为极值点.

【详解】 对原方程两边求导，得

$$3y^2y^{'}-2yy^{'}+xy^{'}+y-x=0,$$

令 $y^{'}=0$，得 $y=x$，代入原方程，有

$$2x^3-x^2-1=0$$

从而解得唯一的驻点 $x=1$.

在（*）式两边对 x 求导得

$$(3y^2-2y+x)y^{''}+2(3y-1)y^{'2}+2y^{'}-1=0,$$

因此 $y^{''}\big|_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}>0$

故驻点 $x=1$ 是 $y=y(x)$ 的极小点.

七、设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0, f^{'}(a)f^{'}(b)>0$，证明：

存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$ 及 $f^{''}(\eta)=0.$

【详解】方法一（用反证法）

若不存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$，则在区间 (a,b) 内恒有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$，

不妨设 $f(x)>0$（对 $f(x)<0$，类似可证），则

$$f^{'}(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\le 0,$$
$$f^{'}(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\ge 0$$

从而 $f^{'}(a)f^{'}(b)\le 0$，这与已知条件矛盾，即在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f(\xi)=0$

再由 $f(a)=f(\xi)=f(b)$ 及罗尔定理，知存在 $\eta_1\in(a,\xi)$ 和 $\eta_2\in(\xi,b)$，使

$$f^{'}(\eta_1)=f^{'}(\eta_2)=0.$$

又在区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上，对 $f^{'}(x)$ 应用罗尔定理，知存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使 $f^{''}(\eta)=0.$

方法二：

不妨设 $f^{'}(a)>0, f^{'}(b)>0$（对 $f^{'}(a)<0, f^{'}(b)<0$ 时类似可证），即

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}>0, \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}>0,$$

由极限的保号性，存在 $x_1\in(a,a+\delta_1)$ 和 $x_2\in(b-\delta_2,b)$ 使得 $f(x_1)>0$ 及 $f(x_2)<0$，其中

δ_1,δ_2 为充分小的正数，显然 $x_1<x_2$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上应用介值定理知，

存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$

以下证明类似方法一.

八、设 $f(x)$ 为连续函数，

（1） 求初值问题 $\begin{cases} y^{'}+ay=f(x) \\ y\big|_{x=0}=0 \end{cases}$ 的解 $f(x)$，其中 a 是正常数；

（2） 若 $|f(x)|\le k$（k 为常数），证明：当 $x\ge 0$ 时，有 $|y(x)|\le\frac{k}{a}\left(1-e^{-ax}\right).$

【详解】

（1） 原方程的通解为

$$y(x)=e^{-ax}\left[\int f(x)e^{ax}dx+C\right]=e^{-ax}\left[F(x)+C\right],$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)e^{ax}$ 的任一原函数

由 $y(0)=0,$ 得 $C=-F(0)$

故 $y(x)=e^{-ax}\left[F(x)-F(0)\right]=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt,$

或者在原方程的两端同乘以 e^{at}，得

$$y'e^{ax}+aye^{ax}=f(x)e^{ax}$$

从而 $\left(ye^{ax}\right)'=f(x)e^{ax}$

所以 $ye^{ax}=\int_0^x f(t)e^{at}dt,$

或 $y(x)=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt,$

（2）

$$\begin{aligned}\left|f(x)\right| &\le e^{-ax}\int_0^x\left|f(t)\right|e^{at}dt\le ke^{-ax}\int_0^x e^{at}dt\\ &\le\frac{k}{a}e^{-ax}\left(e^{ax}-1\right)\\ &=\frac{k}{a}\left(1-e^{ax}\right)\left(x\ge 0\right)\end{aligned}$$