2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，求 $f'(x)$ 的零点个数（　）

$(A)\ 0$　　$(B)\ 1$　　$(C)\ 2$　　$(D)\ 3$

（2）曲线方程为 $y=f(x)$ 函数在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$（　）

(A) 曲边梯形 $ABCD$ 面积.　　(B) 梯形 $ABCD$ 面积.

(C) 曲边三角形 ACD 面积.　　(D) 三角形 ACD 面积.

（3）在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是（　）

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

（4）判断函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{|x-1|}\sin x\,(x>0)$ 间断点的情况（　）

(A) 有 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点

(B) 有 1 个跳跃间断点，1 个无穷间断点

(C) 有两个无穷间断点

(D) 有两个跳跃间断点

（5）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是（　）

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

（6）设 f 连续，$x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=u^2$，$u>1$，则 $F(u,v)=\iint\limits_D \dfrac{f\left(u^2+v^2\right)}{\sqrt{u^2+v^2}}dudv$，

则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$（　）

(A) $vf\left(u^2\right)$　　(B) $vf(u)$

$(C)\ \frac{v}{u}f\left(u^2\right)$　　　　　$(D)\ \frac{v}{u}f\left(u\right)$

（7）设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3=0$，则（　　）

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.　　　　(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.　　　　(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

（8）设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 A 合同的矩阵为（　　）

$(A)\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　　　　$(B)\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

$(C)\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　　　　$(D)\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$ ________

（10）曲线 $\sin\left(xy\right)+\ln\left(y-x\right)=x$ 在点 $\left(0,1\right)$ 处的切线方程为________.

（11）求函数 $f(x)=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点____________.

（12）已知 $z=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ _______.

（13）矩阵 A 的特征值是 $\lambda,2,3$，其中 λ 未知，且 $\left|2A\right|=-48$，则 $\lambda=$_______.

（14）设 A 为 2 阶矩阵，a_1,a_2 为线性无关的 2 维列向量，$Aa_1=0,Aa_2=2a_1+a_2$，则 A 的非零特征值为_________.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left[\sin x-\sin\left(\sin x\right)\right]\sin x}{x^4}$.

（17）（本题满分 10 分）

求积分 $\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(18)（本题满分 10 分）

求函数$u=x^2+y^2+z^2$在在约束条件$z=x^2+y^2$和$x+y+z=4$下的最大和最小值.

(19)（本题满分 10 分）

曲线$y=f(x)$满足$f(0)=1$对于任意的t曲线是严格递增，在x轴上$t>0$，该曲线与直线$x=0,x=t(t>0)$及$y=0$围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕x轴旋转一周得一旋转体，其体积为$V(t)$，侧面积为$S(t)$. 如果$f(x)$二阶可导，且$\dfrac{S(t)}{V(t)}=2$，求曲线$y=f(x)$.

(20)（本题满分 11 分）

求二重积分$\iint\limits_D \max(xy,1)dxdy$，其中$D=\{(x,y)\big|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$

(21)（本题满分 11 分）

证明(1)积分中值定理；

(2)已知$\varphi(x)$在[1, 3]上连续且可导，$\varphi(2)>\varphi(1),\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$证明至少存在一点$\xi\in(1,3)$，使得$\varphi'(\xi)=0$.

(22)（本题满分 11 分）

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}$，现矩阵$A$满足方程$AX=B$，其中$X=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T$，$B=\left(1,0,\cdots,0\right)^T$，

（1）求证$|A|=\left(n+1\right)a^n$

（2）a为何值，方程组有唯一解，求x_1

（3）a为何值，方程组有无穷多解，求通解

(23)（本题满分 11 分）

设A为 3 阶矩阵，a_1,a_2为A的分别属于特征值$-1,1$特征向量，向量a_3满足$Aa_3=a_2+a_3$，

证明（1）a_1,a_2,a_3线性无关；

（2）令$P=\left(a_1,a_2,a_3\right)$，求$P^{-1}AP$

2008年考研数学二试题分析、详解和评注

一，选择题：(本题共8小题，每小题4分，共32分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $f(x)=x^2(x-1)(x+2)$，则 $f'(x)$ 的零点个数为**【　　】.**

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

【答案】应选(D).

【详解】 $f'(x)=4x^3+3x^2-4x=x(4x^2+3x-4)$.

令 $f'(x)=0$，可得 $f'(x)$ 有三个零点．故应选(D).

(2)曲线方程为 $y=f(x)$，函数在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ 在几何上表示**【　　】.**

(A) 曲边梯形 $ABCD$ 的面积.　　(B) 梯形 $ABCD$ 的面积.

(C) 曲边三角形 ACD 面积.　　(D) 三角形 ACD 面积.

【答案】 应选(C).

【详解】 $\int_0^a xf'(x)dx=\int_0^a xdf(x)=af(a)-\int_0^a f(x)dx$，

其中 $af(a)$ 是矩形面积，$\int_0^a f(x)dx$ 为曲边梯形的面积，所以 $\int_0^a xf'(x)dx$ 为曲边三角形 ACD 的面积．故应选(C).

(3)在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意的常数）为通解的是**【　　】.**

(A)　$y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B)　$y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C)　$y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D)　$y'''-y''+4y'-4y=0$.

【答案】 应选(D).

【详解】由 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$，可知其特征根为

$\lambda_1=1$，$\lambda_{2,3}=\pm 2\mathrm{i}$，故对应的特征值方程为

$$(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)=(\lambda-1)(\lambda^2+4)$$

$$=\lambda^3+4\lambda-\lambda^2-4$$

$$=\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda-4$$

所以所求微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$．应选(D).

(4) 判定函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{|x-1|}$，$(x>0)$ 间断点的情况【　　】.

(A) 有一个可去间断点，一个跳跃间断点.　(B) 有一跳跃间断点，一个无穷间断点.
(C) 有两个无穷间断点.　(D)有两个跳跃间断点.

【答案】 应选(A).

(5)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是【　　】.

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

【答案】 应选(B).

【详解】若若 $\{x_n\}$ 单调，则由函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界知，若 $\{f(x_n)\}$ 单调有界，因此若 $\{f(x_n)\}$ 收敛．故应选(B).

(6)设函数 $f(x)$ 连续，$x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=u^2,u>1$，若 $F(u,v)=\iint\limits_D \dfrac{f(u^2+v^2)}{\sqrt{u^2-v^2}}dudv$，则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$【　　】.

(A) $vf(u^2)$　(B) $vf(u)$　(C) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$　(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$

【答案】 应选(A).

【详解】利用极坐标，得

$$F(u,v)=\iint\limits_D \frac{f(u^2+v^2)}{\sqrt{u^2-v^2}}dudv=\int_0^v dv\int_1^u \frac{f(r^2)}{r}rdr=v\int_1^u f(r^2)dr$$

，所以 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=vf(u^2)$．故应选(A).

(7)设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵．若 $A^3=0$，则下列结论正确的是【　　】.

(A) $E-A$ 不可逆，则 $E+A$ 不可逆.　(B) $E-A$ 不可逆，则 $E+A$ 可逆.
(C) $E-A$ 可逆，则 $E+A$ 可逆.　(D) $E-A$ 可逆，则 $E+A$ 不可逆.

【答案】应选(C).

【详解】$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$，$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$.

故 $E-A$，$E+A$ 均可逆．故应选(C).

(8) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上，与 A 合同矩阵为【　　】.

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

【答案】 应选(D).

【详解】$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$

则 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$，记 $D=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，则

$$\left|\lambda E-D\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$$

则 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$，正负惯性指数相同.故选 D.

二、填空题：(9－14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(9)已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^x-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$

【答案】 应填 2.

(10)微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是______________ .

【答案】 应填 $y=x(C-e^{-x})$.

(11)曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 的切线方程为______________ .

【答案】 应填 $y=x+1$.

【详解】

(12)曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为__________ .

【答案】 $(-1,-6)$.

【详解】

(13)设 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$__________ .

【答案】 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$.

(14)设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2,3,\lambda$. 若行列式 $|2A|=-48$，则 $\lambda=$__________.

【答案】应填 -1.

三、解答题(15－23 小题，共 94 分).

(15)(本题满分 9 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【详解 1】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)\cos x}{6x}$（或$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(\sin x)^2}{3x^2}$，或$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\sin^2 x+o(\sin^2 x)}{3x^2}$）

$=\dfrac{1}{6}$.

【详解 2】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin^4 x}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{3t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{t^2}{2}}{3t^2}$（或$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{6t}$）

$=\dfrac{1}{6}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du\end{cases}$确定，其中 $x=x(t)$ 是初值问题$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0\\ x\big|_{t=0}=0\end{cases}$的解，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【详解 1】由$\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0$得

$e^x dx=2tdt$，积分得$e^x=t^2+C$.

由条件$x\big|_{t=0}=0$，得$C=1$，即$e^x=t^2+1$，

故 $x=\ln(1+t^2)$.

方程组$\begin{cases} x=\ln(1+t\ \ ) \\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du \end{cases}$两端同时对$t$求导得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{dy}{dt}=2t\ln(1+t^2) \end{cases}.$$

所以$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)$，

从而$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left[(1+t^2)\ln(1+t^2)\right]}{dx}=\dfrac{\frac{d\left[(1+t^2)\ln(1+t^2)\right]}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$$=\frac{2t\ln(1+t^2)+2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)[\ln(1+t^2)+1].$$

17（**本题满分 9 分**）计算$\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

【详解 1】 由于$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$，故$\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$是反常积分.

令$\arcsin x=t$，有$x=\sin t$，$t\in[0,\dfrac{\pi}{2})$.

$$\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{t}{2}-\frac{\cos 2t}{2})dt$$

$$=\frac{t^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}td\sin 2t=\frac{\pi^2}{16}-\frac{t\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}.$$

【详解 2】 $\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2d(\arcsin x)^2$

$$=\frac{1}{2}x^2(\arcsin x)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx$$

$$=\frac{\pi^2}{8}-\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx$$

令 $\arcsin x=t$，有 $x=\sin t$， $t\in[0,\frac{\pi}{2})$.

$$\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\sin 2tdt$$

$$=-\frac{1}{4}(t^2\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos 2tdt)$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4},$$

所以 $\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$.

(18)(本题满分 11 分)

计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y),0\le x\le 2,0\le y\le 2\right\}$.

【详解】将区域 D 分成如图所示得两个子区域 D_1,D_2 和 D_3 . 于是

$$\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy=\iint\limits_{D_1}\max\{xy,1\}dxdy+\iint\limits_{D_2}\max\{xy,1\}dxdy+\iint\limits_{D3}\max\{xy,1\}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1}xydxdy+\iint\limits_{D_2}1dxdy+\iint\limits_{D3}1dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^2dx\int_{\frac{1}{x}}^2xydy+\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^2dy+\int_{\frac{1}{2}}^2dx\int_0^{\frac{1}{x}}dy$$

$$=\frac{15}{4}-\ln 2+1+2\ln 2=\frac{19}{4}+\ln 2.$$

(19)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数，且 $f(0)=1$. 对任意的 $t\in[0,+\infty)$，直线 $x=0,x=t$，曲线 $y=f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体，若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数 $f(x)$ 的表达式.

【详解】根据题意，因为

旋转体体积$V=\pi\int_0^t f^2(x)dx$，侧面积$S=2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$.

所以 $$2\pi\int_0^t f^2(x)dx=2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx .$$

上式两边同时对t求导得

$$f^2(t)=f(t)\sqrt{1+f'^2(t)} .$$

解得 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=t+C_1$， $y+\sqrt{y^2-1}=Ce^t$.

由 $y(0)=1$，得$C=1$.

所以 $y+\sqrt{y^2-1}=e^t$ 或 $y=f(x)=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$.

(20)(本题满分 11 分)

(I) 证明积分中值定理：若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\eta\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$；

(II) 若函数$\varphi(x)$具有二阶导数，且满足$\varphi(2)>\varphi(1)$， $\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点$\xi\in(1,3)$，使得$\varphi''(\xi)<0$.

【证法 1】若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则必存在最大值M和最小值m．即

$$m\le f(x)\le M ,\quad x\in[a,b]$$

于是有

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a) .$$

即

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le M$$

根据闭区间上连续函数的介值定理，在$[a,b]$上至少存在一点$\eta\in[a,b]$，使得

$$f(\eta)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

因此而的证.

（II）存在$\eta\in[2,3]$，使得$\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta)$.

由$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta)$，知$\eta\in(2,3]$.

由$\varphi(2)>\varphi(1)$，利用微分中值定理，存在$\xi_1\in(1,2)$，使得

$$\varphi'(\xi_1)=\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}>0.$$

由$\varphi(2)>\varphi(\eta)$，利用微分中值定理，存在$\xi_2\in(2,\eta)$，使得

$$\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2}<0.$$

存在存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3)$，使得

$$\varphi''(\xi)=\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

（21）(本题满分 11 分)

求函数$u=x^2+y^2+z^2$在约束条件$z=x^2+y^2$和$x+y+z=4$下的最大值和最小值.

【详解 1】作拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4).$$

令

$$\begin{cases}F_x'=2x+2\lambda x+\mu=0\\F_y'=2y+2\lambda y+\mu=0\\F_z'=2z-\lambda+\mu=0\\x^2+y^2-z=0\\x+y+z-4=0\end{cases}$$

解之得$(x_1,y_1,z_1)=(1,1,2),(x_2,y_2,z_2)=(-2,-2,8),$故所求得最大值为 72, 最小值为 6.

【详解 2】由题意知, $u=x^4+y^4+2x^2y^2+x^2+y^2$在条件$x+y+x^2+y^2=4$下的最值.

令$$\begin{cases}F_x'=4x^3+4xy^2+2x+\lambda(1+2x)=0\\F_y'=4y^3+4x^2y+2y+\lambda(1+2y)=0\\x+y-4+x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x' = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ F_y' = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ F_z' = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

解之得$(x_1, y_1, z_1) = (1,1,2), (x_2, y_2, z_2) = (-2,-2,8),$故所求得最大值为 72,最小值为 6.

(22) (本题满分 12 分).

设n元线性方程组$Ax=b$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

（I）证明行列式$|A| = (n+1)a^n$；

（II）当a为何值时，该方程组有惟一解，并求x_1.

（III）当a为何值时，该方程组有无穷多解，并求其通解.

【详解】（I）【证法 1】数学归纳法．记$D_n = |A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$

以下用数学归纳**法**证明$D_n = (n+1)a^n$.

当$n=1$时，$D_1 = 2a$，结论成立.

当$n=2$时，$D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$，结论成立.

假设结论对小于n的情况成立．将D_n按第一行展开得

$$D_n = 2aD_{n-1} - \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

$$= 2ana^{n-1} - a^2(n-1)a^{n-2}$$

$$= (n+1)a^n$$

故 $\left|A\right| = (n+1)a^n$.

【注】本题（1）也可用递推法．由 $D_n = \cdots = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$ 得，$D_n - aD_{n-1} = a(D_{n-1} - aD_{n-2}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - a^{n-2}D_1) = a^n$．于是 $D_n = (n+1)a^n$

(I)【证法 2】消元法．记 $|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$

$$\underline{\underline{r_2 - \frac{1}{2}ar_1}} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal{r_3-\frac{2}{3}ar_2}\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & & \\ & & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$$

$$=\cdots\cdots$$

$$\xlongequal{r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}}\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix}_n$$

$$=(n+1)a^n.$$

(II)【详解】当$a\neq 0$时，方程组系数行列式$D_n\neq 0$，故方程组有惟一解．由克莱姆法则，将D_n得第一列换成b，得行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1} = D_{n-1}=na^{n-1}$$

所以，$x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{a}{(n+1)a}$．

(III)【详解】 当$a=0$时，方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此时方程组系数矩阵得秩和增广矩阵得秩均为$n-1$，所以方程组有无穷多组解，其通解为

$x=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T+k\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$，其中$k$为任意常数.

(23) (本题满分 10 分)

设A为 3 阶矩阵，α_1,α_2为A的分别属于特征值$1,-1$的特征向量，向量α_3满足

$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_1$，

(I)证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；

(II)令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求$P^{-1}AP$.

【详解】(I)【证明】设有一组数k_1,k_2,k_3，使得 $k\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$.

用A左乘上式，得$k_1(A\alpha_1)+k_2(A\alpha_2)+k_3(A\alpha_3)=0$.

因为 $A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_1$，

所以 $-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，

即$2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$.

由于α_1,α_2是属于不同特征值得特征向量，所以线性无关，因此

$k_1=k_3=0$，从而有$k_2=0$.

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

（II）由题意，$AP=P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 而由（I）知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，从而$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可逆．故

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$