2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题 分析、详解和评注

考研数学专家 曹显兵、刘喜波教授 解答

分析解答所用参考资料：曹显兵（线代、概率部分）与刘喜波（高数部分）的授课讲稿，黄先开、曹显兵与刘喜波主编的参考书：1.《2010 考研数学经典讲义》，简称经典讲义(人大社出版). 2.《2010 考研数学最新精选 600 题》，简称 600 题. 3.《2010 考研数学经典冲刺 5 套卷》，简称冲刺卷.

一、**选择题**：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点数为

(A) 0.　　(B)1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　【　】

【答案】 应选(B).

【分析】间断点为 $x=0,\pm1$，计算各点处的极限以判断间断点的类型

【详解】 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 有间断点 $x=0,\pm1$. 又

$$f(x)=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{x}{x+1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1,\lim\limits_{x\to0^-}=x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=-1$，所以 $x=0$ 为跳跃间断点.

又 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $x=1$ 为可去间断点，且

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x}{x+1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\infty$$，所以 $x=-1$ 为无穷间断点，因而选择(B).

【评注】 $x\to0$ 时的极限要考虑单侧极限.

原题见《经典讲义》高等数学部分习题精选一解答题的第 10 题， 以及强化班讲义第一讲中的例题 38.

(2) 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解. 若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解， $\lambda y_1-\mu y_2$ 是对应的齐次方程的解，则

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$.　　(D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$.　　【　】

【答案】 应选(A) .

【分析】 此题主要考察线性微分方程解的性质和结构

【详解】 因 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是方程 $y'+p(x)y=0$ 的解，所以

$$(\lambda y_1 - \mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1 - \mu y_2)=0,$$

即 $$\lambda[y_1'+p(x)y_1]-\mu[y_2'+p(x)y_2]=0 .$$

由已知得 $$(\lambda-\mu)q(x)=0,$$

因为 $q(x)\neq 0$, 所以 $\lambda-\mu=0$,

又 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是非齐次 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解,

故 $$(\lambda y_1 + \mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1 + \mu y_2)=q(x) .$$

即 $$\lambda[y_1'+p(x)y_1]-\mu[y_2'+p(x)y_2]=q(x) .$$

由已知得 $$(\lambda+\mu)q(x)=q(x) .$$

因为 $q(x)\neq 0$, 所以 $\lambda+\mu=1$,

解得 $$\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2} .$$

【评注】此题属反问题，题目构造较新颖.

原题见《经典讲义》高等数学部分第十章解的性质和解的结构定理

(3) 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，则 $a=$

(A)4e (B)3e (C)2e (D)e 【 】

【答案】 应选(C).

【分析】 利用导数的几何意义（切点处斜率相等）及两条曲线都经过切点.

【详解】因 $y=x^2$ 与 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，故 $2x=a\cdot\dfrac{1}{x}$, 即 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$.

在 $y=x^2$ 上， $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 时， $y=\dfrac{a}{2}$ ； 在 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 上， $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 时，

$y=a\ln\sqrt{\dfrac{a}{2}}=a\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2}$. 因此 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{a}{2}$ ，即 $a=2e$. 所以选 (C).

原题见《经典讲义》高等数学部分第二章的例题 2.27, 以及强化班讲义第七讲中的例题 2.

(4) 设 m,n 是正整数，则反常积分 $\int_0^1 \dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性

(A) 仅与 m 的取值有关. (B) 仅与 n 有关.

(C) 与 m,n 取值都有关. (D) 与 m,n 取值都无关. 【 】

【答案】 应选(D).

【分析】 $x=0$、1 为瑕点，插入分点 $\dfrac{1}{2}$，利用比较判别法判断两个无界函数反常积分的敛散性.

【详解】 $$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{[\ln(1-x)]^{\frac{2}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{[\ln(1-x)]^{\frac{2}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}dx=I_1+I_2 .$$

对 I_1， 当 $x\to 0^+$时，$\dfrac{[\ln(1-x)]^{\frac{2}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}\sim x^{\frac{2}{m}-\frac{1}{n}}$. 显然 $\dfrac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{m}}-\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}>-\mathbf{1}$，由比较判别法知无论正整数 m,n 取何值, 反常积分 I_1 是收敛的.

对 I_2，

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{[\ln(1-x)]^{\frac{2}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}=\lim_{x\to1^-}\frac{[\ln(1-x)]^{\frac{2}{m}}}{(1-x)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{-\frac{2}{m}[\ln(1-x)]^{\frac{2}{m}-1}(1-x)^{-1}}{-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to1^-}\frac{4[\ln(1-x)]^{\frac{2}{m}-1}}{m(1-x)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{-4(\frac{2}{m}-1)[\ln(1-x)]^{\frac{2}{m}-2}(1-x)^{-1}}{-m\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to1^-}\frac{8(2-m)[\ln(1-x)]^{\frac{2}{m}-2}}{m^2(1-x)^{-\frac{1}{2}}}=0.$$

由比较判别法知无论正整数 m,n 取何值反常积分 I_2 是收敛的，因此应选(D).

【评注】根据当年考试大纲的要求，此题属超纲范围.

(5) 设函数 $z=z(x,y)$,由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2^{'}\neq 0$，则

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$$

(A) x . (B) z . (C) $-x$. (D) $-z$. 【 】

【答案】 应选(B) .

【分析】 利用公式直接求两个一阶偏导数.

【详解】因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{F_1'\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\dfrac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\dfrac{1}{x}}=\dfrac{F_1'\cdot\dfrac{y}{x}+F_2'\cdot\dfrac{z}{x}}{F_2'}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{x}}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=-\frac{F_1'}{F_2'},$$

所以 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\dfrac{yF_1'}{F_2'}=\dfrac{F_2'\cdot z}{F_2'}=z$. 因此应选(B).

【评注】此题也可两边求全微分求得 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

原题见《经典讲义》高等数学部分的第六章的例题 6.19, 以及强化班讲义第八讲中的例题 8.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$. (B) $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$. (D) $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$. 【　　】

【答案】 应选(D).
【分析】用二重积分（或定积分）的定义.
【详解】 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n(1+\frac{i}{n})n^2[1+(\frac{j}{n})^2]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})[1+(\frac{j}{n})^2]}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy,$$

所以应选(D).
【评注】1. 也可用定积分定义计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n})\sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2}\cdot\frac{1}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n})\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2}\cdot\frac{1}{n})$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy.$$

2. 以往多次考过定积分定义求极限，本题是首次考查二重积分定义求极限，题目较新颖.

(7) 设向量组I: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组II: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示, 则列命题正确的是

(A) 若向量组 I 线性无关，则 $r\le s$.　(B) 若向量组 I 线性相关，则 $r > s$.

(C) 若向量组 II 线性无关，则 $r\le s$.　(D) 若向量组 II 线性相关，则 $r > s$.　【　】

【答案】应选(A) .

【详解】因向量组 I 能由向量组 II 线性表示，所以 r（I）$\le r$（II），即

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\le s,$$

若向量组I线性无关，则$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=r$，所以 $r\le s$. 故应选(A).

【评注】这是线性代数中的一个重要定理，对定理熟悉的考生可直接得正确答案.

原题见《经典讲义》线性代数部分的第三章§1 中的推论 3.5.

(8) 设A为 4 阶实对称矩阵，且$A^2+A=O$，若A的秩为 3，则A与相似于

(A) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$.　【　】

【答案】应选 (D) .

【详解】设λ为A的特征值，由$A^2+A=O$，知特征方程为$\lambda^2+\lambda=0$，所以$\lambda=-1$ 或 0. 由于A为实对称矩阵，故A可相似对角化，即 $A\sim\Lambda$，r（A）$=r$（Λ）$=3$，因此

$$A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix},$$

应选(D) .

【评注】(1)若 A 可对角化，则 r（A）$=A$ 的非零特征值的个数.

(2)本题由$A^2+A=O$即可得到A可对角化，因此题设条件A为实对称矩阵可去掉..

几乎原题见《经典讲义》线性代数部分的例题 5.30，5.39，以及强化班第一讲中的例题 8、冲刺辅导班讲义线性代数部分例题 4.

二、填空题：**9–14** 小题，每小题 **4** 分，共 **24** 分，请将答案写在答题纸指定位置上**.**

(9) 3 阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为 $y=$ ________.

【答案】应填 $y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$.

【分析】求特征方程的解，直接写出 3 阶常系数线性齐次微分方程的通解，属基础题型.

【详解】　$y'''-2y''+y'-2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2=0$,

即 $(\lambda-2)(\lambda^2+1)=0$，解得 $\lambda_1=2,\ \lambda_{2,3}=\pm i$，所以通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$$

【评注】虽然此题是 3 阶微分方程，但是考试大纲明确要求会的内容.

原题见《经典讲义》高等数学部分第十章的例题 10.13.

(10) 曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为 ________.

【答案】 应填 $y=2x$.

【分析】曲线只有斜渐近线，直接计算即可.

【详解】 函数的定义域是全体实数，于是不存在垂直渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$，故不存在水平渐近线，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=2$， $\lim\limits_{x\to\infty}(y-2x)=0$，所以曲线的斜渐近线为 $y=2x$.

【评注】求曲线的斜渐近线几乎每年均有考题，属基本题型.

原题见《经典讲义》高等数学部分的第三章的例题 3.73, 以及强化班讲义第七讲中的例题 5.

(11) 函数 $y=\ln(1-2x)$在$x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$ ________.

【答案】 应填 $-2^n\cdot(n-1)!$.

【分析】利用函数 $y=\ln(1-x)$ 的高阶导数公式.

【详解】 $[\ln(1-2x)]^{(n)}=-2^n\dfrac{(n-1)!}{(1-2x)^n}$. 令 $\boldsymbol{x=0}$，得所求 n 阶导数为$-2^n\cdot(n-1)!$,

故应填$-2^n\cdot(n-1)!$.

【评注】此题也可用$\ln(1-x)$的麦克劳林展开式，比较系数得到结果.

原题见《经典讲义》高等数学部分第二章的例题 2.44， 以及强化班讲义第二讲中的例题 18.

(12) 当$0\le\theta\le\pi$时，对数螺线$r=e^\theta$的弧长为 ________.

【答案】 应填$\sqrt{2}(e^\pi-1)$.

【分析】直接用极坐标下的弧长计算公式.

【详解】由弧长公式

$$s=\int_0^\pi\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta=\int_0^\pi\sqrt{2}e^\theta d\theta=\sqrt{2}(e^\pi-1).$$

故应填 $\sqrt{2}(e^\pi-1)$.

原题见《经典讲义》高等数学部分第四章例题 4.102.

(13) 已知一个长方形的长 l 以 $2cm/s$ 的速率增加，宽 w 以 $3cm/s$ 的速率增加。则当 $l=12cm, w=5cm$时，它的对角线增加速率为 ________ .

【答案】 应填$3cm/s$.

【分析】利用导数的物理意义.

【详解】设 $l=x(t), w=y(t)$，由题意知，在 $t=t_0$ 时

$$x(t_0)=12, y(t_0)=5，且 x'(t_0)=2, y'(t_0)=3.$$

又 $S(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$，所以 $S'(t)=\dfrac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$，

因而 $$S'(t_0)=\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{12\times 2+5\times 3}{\sqrt{12^2+5^2}}=3.$$

(14) 设A, B为 3 阶矩阵，且$|A|=3$, $|B|=2$, $|A^{-1}+B|=2$，则$|A+B^{-1}|=$ ____________.

【答案】 应填 3 .

【分析】本题考查矩阵的运算、行列式的性质.

【详解】由于 $|A+B^{-1}|=|(AB+E)B^{-1}|=|(AB+AA^{-1})B^{-1}|=|A(B+A^{-1})B^{-1}|$

$=|A|\cdot|A^{-1}+B|\cdot|B^{-1}|=3\cdot 2\cdot 2^{-1}=3$

因此应填 3 .

【评注】 也可以由 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}||\boldsymbol{B}|$ 得 $|A+B^{-1}|=3$.

类似的问题见《经典讲义》线代部分的例题 2.10.

三、解答题：**15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

(15) (本题满分 10 分)

求函数 $f\left(x\right)=\int_1^{x^2}\left(x^2-t\right)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

【分析】求变限积分 $f\left(x\right)$的一阶导数，利用其符号判断极值并求单调区间.

【详解】 $$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt,$$

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=0, x=\pm 1$. 因为当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$； 当$-1<x<0$时，$f'(x)>0$；当$x<-1$时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1),(0,1)$；$f(x)$ 的单调递增区间为

$(-1,0),(1,+\infty)$；极小值为 $f(1)=f(-1)=0$ ，极大值为 $f(0)=\dfrac{1}{2}(1-e^{-1})$.

【评注】也可用二阶导数的符号判断极值点，此题属基本题型.

原题见《经典讲义》高等数学部分第三章例题 3.69.

(16) (本题满分 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\,dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt$ $(n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由;

(II) 记 $u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\,dt$ $(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

【分析】对(I)比较被积函数的大小，对(II)用分部积分法计算积分 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt$ 再用夹逼定理求极限.

【详解】 (I) 当 $0<t<1$ 时， $0<\ln(1+t)<t$，故

$$|\ln t|[\ln(1+t)]^n<|\ln t|t^n,$$

由积分性质得 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\,dt<\int_0^1 t^n|\ln t|dt$ $(n=1,2,\cdots)$.

(II) $$\int_0^1 t^n|\ln t|dt=-\int_0^1 t^n\cdot\ln t\,dt=-\frac{1}{n+1}[t^{n+1}\cdot\ln t|_0^1-\int_0^1 t^{n+1}\cdot\frac{1}{t}dt]$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}\cdot t^{n+1}|_0^1=\frac{1}{(n+1)^2}.$$

于是有 $$0<u_n<\frac{1}{(n+1)^2},\quad (n=1,2,\cdots),$$

由夹逼定理得 $0\le\lim\limits_{n\to\infty}u_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

【评注】若一题有多问，一定要充分利用前面提供的信息。

(17) (本题满分 11 分)

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases},(t>-1)$ 所确定，其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数，且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$， $\psi'(1)=6$，已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，求函数 $\psi(t)$.

【分析】先求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，由 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$ 可得关于 $\psi(t)$ 的微分方程，进而求出 $\psi(t)$.

【详解】 由参数方程确定函数的求导公式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\psi'(t)}{2t+2}$ 可得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{\psi'(t)}{2t+2}\right)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^2}}{2t+2}=\frac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^3}.$$

由题意知 $$\frac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^3}=\frac{3}{4(1+t)},$$

即 $$\psi''(t)(t+1)-\psi'(t)=3(t+1)^2.$$

解微分方程 $$\begin{cases}\psi''(t)-\dfrac{\psi'(t)}{t+1}=3(t+1)\\ \psi(1)=\dfrac{5}{2},\psi'(1)=6\end{cases}$$

令 $y=\psi'(t)$，则 $$y'-\frac{1}{1+t}y=3(1+t).$$

所以 $$y=e^{\int\frac{1}{1+t}dt}\left(\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt+C\right)=(1+t)(3t+C).$$

因为 $y(1)=\psi'(1)=6$，故 $y=3t(t+1)$，即 $\psi'(t)=3t(t+1)$，

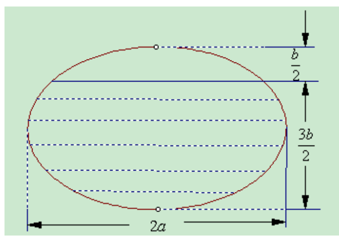
故 $$\psi(t)=\int 3t(t+1)dt=\frac{3}{2}t^2+t^3+C_1.$$

又由 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，得 $C_1=0$，故 $\psi(t)=\dfrac{3}{2}t^2+t^3$.

【评注】此题是参数方程确定函数的导数与微分方程相结合的一个综合题，有一定难度.

(18) (本题满分 10 分)

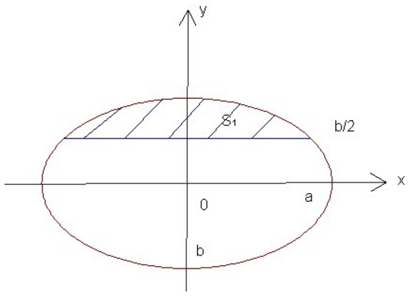
一个高为 l 的柱体形贮油罐，底面是长轴为 2a，短轴为 2b 的椭圆，现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为 $\dfrac{3}{2}b$ 时（如图），计算油的质量.



（长度单位为 m，质量单位为 kg，油的密度为常数 $\rho kg/m^3$）

【分析】先求油的体积，实际只需求椭圆的部分面积.

【详解】建立如图所示的直角坐标系. 油的质量 $M=\rho V$，



其中油的体积 $V=S_{底}\cdot l$

又 $$S_{底}=S_{椭圆}-S_1=\pi ab-2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-\frac{b}{2}\right)dx$$

$$=\pi ab-2b\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx+\frac{\sqrt{3}}{2}ab$$

$$=\pi ab+\frac{\sqrt{3}}{2}ab-2ab\cdot\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}d\frac{x}{a}$$

$$=\pi ab+\frac{\sqrt{3}}{2}ab-2ab\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

$$=\pi ab+\frac{\sqrt{3}}{2}ab-2ab\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{2}{3}\pi ab+\frac{\sqrt{3}}{4}ab\,.$$

故 $$M=S_{底}l\rho=\left(\frac{2}{3}\pi ab+\frac{\sqrt{3}}{4}ab\right)l\rho\,.$$

【评注】此题若不能记住公式 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$，则运算量稍显大.

(19) (本题满分 11 分)

设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$，确定 a，b 的值，使等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下化简为 $\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

【分析】利用复合函数的链导法则变形原等式即可.

【详解】由复合函数的链导法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial\xi}+b\frac{\partial u}{\partial\eta}\,,$$

所以 $$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

$$=\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$= a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= a(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}) + b(b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta})$$

$$= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

由 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，得

$$(5a^2 + 12a + 4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (5b^2 + 12b + 4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (12(a+b) + 10ab + 8)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

因而 $$\begin{cases} 5a^2 + 12a + 4 = 0 \\ 5b^2 + 12b + 4 = 0 \\ 12(a+b) + 10ab + 8 \neq 0 \end{cases}$$

解得 $$\begin{cases} a = -\dfrac{2}{5} \\ b = -2 \end{cases} \quad 或 \begin{cases} a = -2 \\ b = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

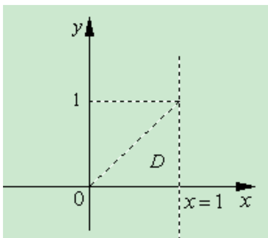
【评注】此题主要考查复合函数链导法则的熟练运用，是对运算能力的考核.

原题见《经典讲义》高等数学部分习题精选六选择题的第 1 题，及强化班讲义第八讲中的例题 10.

(20)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $I = \iint\limits_D r^2 \sin\theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta}\, dr d\theta$，其中 $D = \left\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \sec\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}$

【分析】化极坐标积分区域为直角坐标区域，相应的被积函数也化为直角坐标系下的表示形式，然后计算二重积分.



【详解】直角坐标系下 $D = \left\{(x,y) \middle| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\right\}$

所以 $I = \iint\limits_D r^2 \sin\theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta}\, dr d\theta$

$$=\iint_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}\cdot rdrd\theta$$

$$=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2+y^2}d\left(1-x^2+y^2\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}\left[1-\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx\quad(令\, x=\sin\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1+\cos2\theta}{2})^2d\theta$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{1}{8}\cos4\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{16}\pi.$$

(21) (本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在闭区间$[0, 1]$上连续，在开区间（0, 1）内可导，且$f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$.

证明：存在$\xi\in(0,\frac{1}{2})$，$\eta\in(\frac{1}{2}, 1)$，使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

【分析】这是一个双介值的证明题，构造辅助函数用两次拉格朗日中值定理.

【证明】令$F\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{3}x^3$

$F\left(x\right)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上用拉格朗日中值定理，　$\exists\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right), F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(0\right)=\frac{1}{2}F'\left(\xi\right)$①

$F\left(x\right)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上利用拉格朗日中值定理，$\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right), F\left(1\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}F'\left(\eta\right)$②

两式相加得　　$f'\left(\xi\right)+f'\left(\eta\right)=\xi^2+\eta^2$.

【评注】一般来说，对双介值问题，若两个介值有关联同时用两次中值定理，若两个介值无关联时用一次中值定理后，再用一次中值定理.

原题见《经典讲义》高等数学部分第三章的例题 3.31-3.33，及强化班讲义第五讲中的例题 21、22.

(22) (本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同解,

(I) 求λ, a ；

(II) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

【分析】 本题考查方程组解的判定与通解的求法. 由非齐次线性方程组存在 2 个不同解知对应齐次线性方程组有非零解，而且非齐次线性方程组有无穷多解.

【详解】(I) **方法 1** $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$.

由线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同解，得 $\lambda=-1$, $a=-2$.

方法 2 由线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有 2 个不同的解，知 $r(A)=r(A, b)<3$, 因此方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0 ,$$

得$\lambda=1$ 或–1；而当$\lambda=1$ 时, $r(A)=1\neq r(A, b)=2$, 此时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解，所以 $\lambda=-1$. 由 $r(A)=r(A, b)$ 得 $a=-2$.

(2) 当$\lambda=-1$, $a=-2$ 时,

$$\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解: $x=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, k 为任意常数.

几乎原题见《经典讲义》线性代数部分的例题 4.15，4.16, 以及强化班第四讲中的例题 6.

(23) (本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵$Q$使得$Q^TAQ$为对角矩阵，若$Q$的一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$,求a, Q.

【分析】 本题考查实对称矩阵的正交对角化问题. 由 Q 的列向量都是特征向量可得 a 的值

以及对应的特征值, 然后由 A 可求出其另外两个线性无关的特征向量，于是最终求出 Q**.**

【详解】记 $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. 由 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$, 即 $\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

得 $a=-1$, λ=2 , 因此 $A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{pmatrix}$.

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+4&1&-4\\0&\lambda-3&1\\-\lambda-4&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+4&1&-4\\0&\lambda-3&1\\0&2&\lambda-4\end{vmatrix}$

$=(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$

得A的特征值为 $\lambda_1=2$， $\lambda_2=-4$, $\lambda_3=5$， 且对应于$\lambda_1=2$ 的特征向量为

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T.$$

当$\lambda_2=-4$ 时，$(-4E-A)=\begin{bmatrix}-4&1&-4\\1&-7&1\\-4&1&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-7&1\\-4&1&-4\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

由$(-4E-A)x=0$ 得对应于$\lambda_2=-4$ 的特征向量为 $\alpha_2=(-1, 0, 1)^T$.

当$\lambda_2=5$ 时，$(5E-A)=\begin{bmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

由$\boldsymbol{(5E-A)x=0}$ 得对应于$\lambda_2=5$ 的特征向量为$\alpha_3=(1,-1,1)^T$.

将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$单位化得：$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$， $\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$， $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$.

因A为实对称矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为对应于不同特征值的特征向量,所以$\eta_1,\eta_2,\eta_3$为单位正交向量组. 令

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}，则Q为正交矩阵，Q^TAQ=\begin{bmatrix}2&&\\&-4&\\&&5\end{bmatrix}.$$

完全类似的问题见《经典讲义》线性代数部分的例题 5.15，6.12, 以及强化班第五讲中的例题 10.