2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试卷

一、选择题：（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(1)当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$. (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$. (D) $1-\cos\sqrt{x}$. 【 】

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$

(A) 0. (B) 1. (C) $-\frac{\pi}{2}$. (D) $\frac{\pi}{2}$. 【 】

(3)如图，连续函数 $y=f(x)$在区间[−3，−2]，[2，3]上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间[−2，0]，[0，2]的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. 则下列结论正确的是

(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$. (B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$. (D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$. 【 】

(4)设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是：

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$. (B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在. (D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

【 】

(5)曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$，渐近线的条数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 】

(6) 设函数 $f(x)$在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$. 令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots,)$，则下列结论正确的是：

(A) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛. (B) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛. (D) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散. 【 】

(7) 二元函数 $f(x, y)$在点(0，0) 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{x\to 0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$. 【　】

(8) 设函数 $f(x, y)$连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$.　(B) $\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$.

(C) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$.　(D) $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$. 【　】

(9) 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$. (D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$. 【　】

(10) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 A 与 B

(A)合同，且相似.　(B) 合同，但不相似 .

(C)不合同，但相似.　(D) 既不合同，又不相似.　【　】

二、填空题 (11－16 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}$=______________ .

(12) 曲线$\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t,\\ y=1+\sin t\end{cases}$上对应于$t=\dfrac{\pi}{4}$的点处的法线斜率为____________ .

(13) 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0)=$___________ .

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为__________ .

(15) 设$f(u,v)$是二元可微函数， $z=f(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y})$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________ .

(16) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为__________.

三、**解答题**：17－24 小题，共 86 分.

(17) （本题满分 10 分）

设 $f(x)$是区间$[0,\dfrac{\pi}{4}]$上的单调、可导函数，且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt,$$

其中 f^{-1}是 f 的反函数，求 $f(x)$.

(18) （本题满分 11 分）

设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0\le x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域 。

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(II) 当 a 为何值时，$V(a)$最小？并求此最小值.

(19) （本题满分 10 分）

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解。

(20) （本题满分 11 分）

已知函数 $f(u)$具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定，

设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\dfrac{dz}{dx}\Big|_{x=0},\dfrac{d^2z}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

（21）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$, $g(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

（22）（本题满分 11 分）

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2, \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,\|x|+|y|\le 2\}$.

(23) (本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &=0, \\ x_1+2x_2+ax_3 &=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3 &=0. \end{cases} \quad ①$$

与方程 $$x_1+2x_2+x_3=a-1 \quad ②$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

(24) (本题满分 11 分)

设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, $\alpha_1 = (1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量,记 $B = A^5 - 4A^3 + E$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量.

(II) 求矩阵 B.

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解和评注

一、选择题：（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(1)当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$. (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$. (D) $1-\cos\sqrt{x}$. 【 】

【答案】 应选(B).

【分析】利用已知无穷小量的等价代换公式，尽量将四个选项先转化为其等价无穷小量，再进行比较分析找出正确答案.

【详解】当 $x \to 0^+$ 时，有 $1-e^{\sqrt{x}} = -(e^{\sqrt{x}}-1) \sim -\sqrt{x}$；$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$；

$1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}x.$ 利用排除法知应选(B).

【评注】 本题直接找出 $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ 的等价无穷小有些困难，但由于另三个的等价无穷小很容易得到，因此通过排除法可得到答案。事实上，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \overset{\sqrt{x}=t}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t^2)-\ln(1-t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1}{1-t}}{1} = \lim_{t\to 0^+}\frac{2t(1-t)+1+t^2}{(1+t^2)(1-t)} = 1.$$

完全类似例题见《经典讲义》P.28 例 1.63, 例 1.64, 例 1.65 及辅导班讲义例 1.6.

(2) 函数 $f(x) = \dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$

(A) 0. (B) 1. (C) $-\frac{\pi}{2}$. (D) $\frac{\pi}{2}$. 【 】

【分析】 本题 $f(x)$为初等函数，找出其无定义点即为间断点，再根据左右极限判断其类型。

【详解】 $f(x)$在 $[-\pi,\pi]$ 上的无定义点，即间断点为 $x=0,1,\pm\frac{\pi}{2}$.

又 $$\lim_{x\to 0^-}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=1\cdot(-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=1\cdot 1=1,$$

可见 x=0 为第一类间断点，因此应选(A).

【评注】本题尽管可计算出 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}f(x)=\infty$，从而 $x=1,\pm\frac{\pi}{2}$ 均为第二类间断点，但根据四个选项的答案，已经确定 x=0 为第一类间断点后，后面三个极限问题事实上没必要再计算。

完全类似例题见《经典讲义》P.30 例 1.69, P.32 例 1.72 及辅导班讲义例 1.11.

(3)如图，连续函数 $y=f(x)$在区间[−3，−2]，[2，3]上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间[−2，0]，[0，2]的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. 则下列结论正确的是

(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$.　　(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$.　　(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$.　　**【　　】**

【答案】 应选(C).

【分析】 本题考查定积分的几何意义，应注意 $f(x)$在不同区间段上的符号，从而搞清楚相应积分与面积的关系。

【详解】 根据定积分的几何意义，知 $F(2)$为半径是 1 的半圆面积：$F(2)=\frac{1}{2}\pi$，

$F(3)$是两个半圆面积之差：$F(3)=\frac{1}{2}[\pi\cdot 1^2-\pi\cdot(\frac{1}{2})^2]=\frac{3}{8}\pi=\frac{3}{4}F(2)$，

$$F(-3)=\int_0^{-3}f(x)dx=-\int_{-3}^0 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx=F(3)$$

因此应选(C).

【评注 1】 本题 $F(x)$由积分所定义，应注意其下限为 0，因此

$F(-2)=\int_0^{-2}f(x)dx=\int_{-2}^0 -f(x)dx$，也为半径是 1 的半圆面积。可知(A) (B) (D)均不成立.

【评注 2】若试图直接去计算定积分，则本题的计算将十分复杂，而这正是本题设计的巧妙之处。

完全类似例题见《经典讲义》P.152 例 7.15, 例 7.16，例 7.18 及辅导班讲义例 7.12

(4)设函数 $f(x)$在 x=0 处连续，下列命题错误的是：

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)$=0.　　(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)$=0.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在. (D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

【 】

【答案】 应选(D).

【分析】 本题为极限的逆问题，已知某极限存在的情况下，需要利用极限的四则运算等进行分析讨论。

【详解】(A),(B)两项中分母的极限为 0，因此分子的极限也必须为 0，均可推导出 $f(0)=0$. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0, f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，可见(C)也正确，故应选(D). 事实上，可举反例：$f(x)=|x|$ 在 x=0 处连续，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0 \text{存在，但 } f(x)=|x| \text{ 在 } x=0 \text{ 处不可导.}$$

重要知识点提示见《经典讲义》P.39，完全类似例题见 P.41 例 2.1, P.42 例 2.6 及 P.60 习题 2 及辅导班讲义例 2.5.

(5)曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$，渐近线的条数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 】

【答案】 应选(D).

【分析】 先找出无定义点，确定其是否为对应垂直渐近线；再考虑水平或斜渐近线。

【详解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=\infty$，所以 $x=0$ 为垂直渐近线；

又 $\lim\limits_{x\to -\infty}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=0$，所以 y=0 为水平渐近线；

进一步，$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}[\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=1$，

$$\lim_{x\to +\infty}[y-1\cdot x]=\lim_{x\to +\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x]=\lim_{x\to +\infty}[\ln(1+e^x)-x]$$

$$=\lim_{x\to +\infty}[\ln e^x(1+e^{-x})-x]=\lim_{x\to +\infty}\ln(1+e^{-x})=0,$$

于是有斜渐近线：$y=x$. 故应选(D).

【评注】 一般来说，有水平渐近线(即 $\lim\limits_{x\to\infty}y=c$)就不再考虑斜渐近线，但当 $\lim\limits_{x\to\infty}y$ 不存在时，就要分别讨论 $x\to -\infty$ 和 $x\to +\infty$ 两种情况，即左右两侧的渐近线。本题在 x<0 的一侧有水平渐近线，而在 x>0 的一侧有斜渐近线。关键应注意指数函数 e^x 当 $x\to\infty$ 时极限不存在，必须分 $x\to -\infty$ 和 $x\to +\infty$ 进行讨论。

重点提示见《经典讲义》P.145，类似例题见 P.150 例 7.13, 例 7.14 及辅导班讲义例 7.8.

(6) 设函数 $f(x)$在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$. 令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots,)$，

则下列结论正确的是：

(A) 若$u_1 > u_2$，则$\{u_n\}$必收敛.　　(B) 若$u_1 > u_2$，则$\{u_n\}$必发散.

(C) 若$u_1 < u_2$，则$\{u_n\}$必收敛.　　(D) 若$u_1 < u_2$，则$\{u_n\}$必发散.　　【　】

【答案】 应选(D).

【分析】 利用反例通过排除法进行讨论。

【详解】 设 $f(x)=x^2$, 则 $f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数，且$f''(x)>0, u_1<u_2$，但$\{u_n\}=\{n^2\}$发散，排除(C); 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数，且$f''(x)>0, u_1>u_2$，但$\{u_n\}=\{\dfrac{1}{n}\}$收敛，排除(B); 又若设$f(x)=-\ln x$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数，且$f''(x)>0, u_1>u_2$，但$\{u_n\}=\{-\ln n\}$发散，排除(A). 故应选(D).

【评注】也可直接证明(D)为正确选项. 若$u_1<u_2$，则存在$k>0$，使得$u_2-u_1>k>0$.

在区间$[1,2]$上应用拉格朗日中值定理, 存在$\xi_1\in(1,2)$使得

$$\frac{u_2-u_1}{2-1}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(\xi_1)>k>0,$$

又因为在$(0,+\infty)$上$f''(x)>0$, 因此$f'(x)$在$(\xi_1,+\infty)$上单调增加，于是对$\forall x\in(\xi_1,+\infty)$有

$$f'(x)>f'(\xi_1)>k>0.$$

在区间$[\xi_1,x]$上应用拉格朗日中值定理, 存在$\xi_2\in(\xi_1,x)$使得 $\dfrac{f(x)-f(\xi_1)}{x-\xi_1}=f'(\xi_2)$，

即
$$f(x)=f(\xi_1)+f'(\xi_2)(x-\xi_1)\to+\infty,(x\to+\infty)$$

故应选(D).

重要提示与例题见《经典讲义》P.19 例 1.40, 例 1.41、《真题（二）P.80 题 2》及辅导班讲义例 1.12

(7) 二元函数$f(x, y)$在点(0，0) 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{x\to0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$，且$\lim\limits_{y\to0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$.　【　】

【答案】 应选(C).

【详解】 选项(A)相当于已知$f(x, y)$在点(0,0)处连续，选项(B)相当于已知两个一阶偏导数$f_x'(0,0), f_y'(0,0)$存在，因此(A),(B) 均不能保证$f(x, y)$在点（0，0）处可微。

选项(D)相当于已知两个一阶偏导数$f_x'(0,0), f_y'(0,0)$存在，但不能推导出两个一阶偏导函数$f_x'(x, y), f_y'(x, y)$在点(0,0) 处连续，因此也不能保证$f(x, y)$在点 (0，0) 处可微。

若 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+0^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=0$，即 $f_x'(0,0)=0$, 同理有 $f_y'(0,0)=0$.

从而 $$\lim_{\rho\to0} \frac{[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)]-(f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y)}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho\to0} \frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\rho} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to0} \frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

根据可微的定义，知函数$f(x, y)$ 在(0，0) 处可微，故应选(C).

几乎原题见《经典讲义》P.182 例 9.2，本题难度较大，概念性强

(8) 设函数$f(x, y)$连续，则二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^{1} f(x,y)dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx$.　　(B) $\int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx$.

(C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x,y)dx$.　　(D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$.　　【　　】

【答案】 应选(B).

【分析】 先确定积分区域，画出示意图，再交换积分次序。

【详解】 积分区域 D: $\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi, \sin x \le y \le 1$, 也可表示为

$$D:\ 0 \le y \le 1, \pi - \arcsin y \le x \le \pi,$$

故 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^{1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx$，应选(B).

【评注】确定 y 的取值范围时应注意：当$\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi$时，$y=\sin x=\sin(\pi-x), 0 \le \pi - x \le \dfrac{\pi}{2}$, 于是$\pi - x = arc\sin y$，从而 $x=\pi-\arcsin y$.

完全类似例题见《经典讲义》P.208 例 10.13, 例 10.14,例 10.15 及辅导班讲义例 10.9

(9) 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$. (B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$. (D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$. 【 】

【答案】应选(A) .

【详解 1】直接可看出(A)中 3 个向量组有关系

$$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)=-(\alpha_3-\alpha_1)$$

即(A)中 3 个向量组有线性相关, 所以选(A) .

【详解 2】用定义进行判定:令

$$x_1(\alpha_1-\alpha_2)+x_2(\alpha_2-\alpha_3)+x_3(\alpha_3-\alpha_1)=0,$$

得 $$(x_1-x_3)\alpha_1+(-x_1+x_2)\alpha_2+(-x_2+x_3)\alpha_3=0.$$

因$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以 $\begin{cases} x_1 \qquad\quad -x_3=0, \\ -x_1+x_2 \qquad =0, \\ \qquad -x_2+x_3=0. \end{cases}$

又 $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

故上述齐次线性方程组有非零解, 即$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关. 类似可得(B), (C), (D)中的向量组都是线性无关的.

这是一个基本题，完全类似的问题见《经典讲义》P.314 例 3.5 和辅导班上对应章节的例题

(10) 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,则$A$与$B$

(A)合同, 且相似. (B) 合同, 但不相似 .

(C)不合同, 但相似. (D) 既不合同, 又不相似. 【 】

【答案】应选 (B) .

【详解】 由$|\lambda E-A|=0$ 得A的特征值为 0, 3, 3, 而B的特征值为 0, 1, 1，从而A与B不相似.

又 $r(A)=r(B)=2$, 且A、B有相同的正惯性指数, 因此A与B合同. 故选(A) .

【评注】1)若A与B相似, 则$|A|=|B|$; $r(A)=r(B)$; $tr(A)=tr(B)$; A与B有相同的特征值.

2)若A、B为实对称矩阵, 则 A与B合同$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$, 且$A$、$B$有相同的正惯性指数.

这是数学二首次要求考查的内容，完全类似的问题见《历年真题（一）》P307 的小结

二、**填空题** (11－16 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$______________ .

【答案】 应填$-\dfrac{1}{6}$.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\dfrac{1-(1+x^2)\cos x}{x^2}$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x\cos x+(1+x^2)\sin x}{2x}=\dfrac{1}{3}\cdot(-1+\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{6}.$

完全类似例题见《经典讲义》P.14 例 1.24, 例 1.25 及辅导班讲义例 1.7.

(12) 曲线$\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t,\\ y=1+\sin t\end{cases}$上对应于$t=\dfrac{\pi}{4}$的点处的法线斜率为_____________ .

【答案】 应填$1+\sqrt{2}$.

【详解】 因为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\cos t}{-\sin t-2\cos t\sin t}$，于是$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$，故法线斜率为 $1+\sqrt{2}$.

完全类似例题见《经典讲义》P. 46 例 2. 15, 例 2. 16 及辅导班讲义例 2. 14.

(13) 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0)=$____________ .

【答案】 应填$\dfrac{1}{3}(-1)^n n!(\dfrac{2}{3})^n$.

【详解】 $y=(2x+3)^{-1},\quad y'=-1\cdot 2(2x+3)^{-2}, y''=-1\cdot(-2)\cdot 2^2(2x+3)^{-3}$

一般地，$y^{(n)}=(-1)^n n!\cdot 2^n(2x+3)^{-n-1}$，

从而 $y^{(n)}(0)=\dfrac{1}{3}(-1)^n n!(\dfrac{2}{3})^n.$

完全类似例题见《经典讲义》P.56 例 2.49, 例 2.50 及辅导班讲义例 2.16.

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为___________ .

【答案】 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$. 其中 C_1,C_2 为任意常数.

【详解】 特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+3=0$，解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$. 可见对应齐次线性微分方

程 $y''-4y'+3y=0$ 的通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}$.

设非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的特解为 $y^*=ke^{2x}$，代入非齐次方程可得 $k=-2$. 故通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}-2e^{2x}$.

完全类似例题见《经典讲义》P.172 例题 8.7 及辅导班讲义例 8.9.

(15) 设 $f(u,v)$是二元可微函数， $z=f(\frac{y}{x},\frac{x}{y})$, 则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$___________ .

【答案】 $-\frac{2y}{x}f_1'+\frac{2x}{y}f_2'$.

【详解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot(-\frac{y}{x^2})+f_2'\cdot\frac{1}{y}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{1}{x}+f_2'\cdot(-\frac{x}{y^2})$，于是有

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x[-\frac{y}{x^2}f_1'+\frac{1}{y}f_2']-y[\frac{1}{x}f_1'-\frac{x}{y^2}f_2']=-\frac{2y}{x}f_1'+\frac{2x}{y}f_2'.$$

完全类似例题见辅导班讲义例 9.6 及《经典讲义》P199 习题三 1-3.

(16) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为___________.

【答案】应填 1 .

【详解】依矩阵乘法直接计算得 $A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 故 $r(A^3)=1$.

完全类似的问题见《经典讲义》P300 题型七和辅导班上对应章节的例题

三、**解答题**：17－24 小题，共 86 分.

(17) （本题满分 10 分）

设 $f(x)$是区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上的单调、可导函数，且满足

$$\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)dt=\int_0^{x}t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt,$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数，求 $f(x)$.

【分析】 等式两端先对 x 求导，再积分即可。

【详解】 在等式$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt=\int_0^x t\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt$两端先对 x 求导，得

$$f^{-1}[f(x)]f'(x)=x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x},$$

即 $xf'(x)=x\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$， 也即 $f'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$.

于是 $f(x)=\displaystyle\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$

$$=\ln(\sin x+\cos x)+c.$$

由题设知, $f(0)=0$, 于是 $c=0$，故 $f(x)=\ln(\sin x+\cos x)$.

几乎原题见《经典讲义》P.50 例 2.28.

(18) （本题满分 11 分）

设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0\le x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域 。

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(II) 当 a 为何值时，$V(a)$最小? 并求此最小值.

【分析】$V(a)$的可通过广义积分进行计算，再按通常方法求 $V(a)$ 的最值即可。

【详解】 (I) $V(a)=\pi\displaystyle\int_0^{+\infty} y^2dx=\pi\int_0^{+\infty} xa^{-\frac{x}{a}}dx=-\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{+\infty} xda^{-\frac{x}{a}}$

$$=-\frac{a}{\ln a}\pi[xa^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} a^{-\frac{x}{a}}dx]=\frac{a^2\pi}{(\ln a)^2}.$$

$$\text{(II)}\quad V'(a)=\pi\cdot\frac{2a(\ln a)^2-a^2(2\ln a)\cdot\frac{1}{a}}{(\ln a)^4}=0,$$

得 $\ln a[\ln a-1]=0$， 即 $a=e$.

由于 $a=e$ 是惟一的驻点，是极小值点，也是最小值点，最小值为$V(e)=\pi e^2$.

【评注】事实上, 当 $1<a<e$ 时, $V'(a)<0$, $V(a)$单调减少, 当 $a>e$ 时, $V'(a)>0$, $V(a)$单调增加, 所以 $a=e$ 是 $V(a)$的极小值点，也是最小值点

完全类似例题见辅导班讲义例 7.16 及《经典讲义》P162 习题 17.

(19) （本题满分 10 分）

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$的特解。

【分析】本题为可降阶的二阶微分方程，作变量代换即可。

【详解】令 $y'=u$，则原方程化为

$$u'(x+u^2)=u \quad 即 \quad \frac{dx}{du}-\frac{1}{u}x=u,$$

其解为 $$x=e^{-\int -\frac{1}{u}du}(\int ue^{\int -\frac{1}{u}du}du+C)=u(u+C),$$

利用 $u=y'(1)=1$,有 $C=0$, 于是 $x=u^2$，由 $y'(1)=1$知应取$u=\sqrt{x}$.

再由 $y'=\sqrt{x}$，积分得 $y=\int\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1$，代入初始条件 $y(1)=1$，得 $C_1=\frac{1}{3}$，

故满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$的特解为 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}$.

完全类似例题见辅导班讲义例 8.9 及《经典讲义》P.171 例 8.6.

(20) （本题满分 11 分）

已知函数 $f(u)$具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$由方程 $y-xe^{y-1}=1$所确定，

设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\frac{dz}{dx}\Big|_{x=0}, \frac{d^2z}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

【详解】 $$\frac{dz}{dx}=f'(\ln y-\sin x)\cdot(\frac{y'}{y}-\cos x),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f''\cdot(\frac{y'}{y}-\cos x)^2+f'\cdot(\frac{y''y-y'^2}{y^2}+\sin x)$$

在 $y-xe^{y-1}=1$中, 令 $x=0$ 得 $y=1$. 而由 $y-xe^{y-1}=1$两边对 x 求导得

$$y'-e^{y-1}-xe^{y-1}y'=0$$

再对 x 求导得 $$y''-e^{y-1}y'-e^{y-1}y'-xe^{y-1}y'^2-xe^{y-1}y''=0$$

将 $x=0$, $y=1$ 代入上面两式得 $y'(0)=1, y''(0)=2.$

故 $$\frac{dz}{dx}\Big|_{x=0}=f'(0)(0-0)=0,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}\Big|_{x=0}=f'(0)\cdot(2-1)=1.$$

完全类似例题见辅导班讲义例 2.16 及《经典讲义》P.54 例 2.42,P.55 例 2.45.

（21）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$, $g(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, 证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

【分析】需要证明的结论与导数有关，自然联想到用微分中值定理，事实上，若令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则问题转化为证明 $F''(\xi)=0$，只需对 $F'(x)$ 用罗尔定理，关键是找到 $F'(x)$ 的端点函数值相等的区间(特别是两个一阶导数同时为零的点)，而利用 $F(a)=F(b)=0$，若能再找一点 $c\in(a,b)$，使得 $F(c)=0$，则在区间 $[a,c],[c,b]$ 上两次利用罗尔定理有一阶导函数相等的两点，再对 $F'(x)$ 用罗尔定理即可。

【证明】构造辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，由题设有 $F(a)=F(b)=0$. 又 $f(x), g(x)$在(a, b)内具有相等的最大值, 不妨设存在 $x_1\le x_2$，$x_1,x_2\in(a,b)$ 使得

$$f(x_1)=M=\max_{[a,b]}f(x), g(x_2)=M=\max_{[a,b]}g(x),$$

若 $x_1=x_2$，令 $c=x_1$，则 $F(c)=0.$

若 $x_1<x_2$，因 $F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\ge 0, F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\le 0$，从而存在 $c\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使 $F(c)=0.$

在区间 $[a,c],[c,b]$ 上分别利用罗尔定理知，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

再对 $F'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，知存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，有

$$F''(\xi)=0,\quad \text{即}\quad f''(\xi)=g''(\xi).$$

完全类似例题见《经典讲义》P.120 例 5.11，例 5.12, 例 5.13, P.127 例 5.27 及辅导班讲义例 5.3-5.

（22）（本题满分 11 分）

设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2, \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 2\}$.

【分析】被积函数为分区域函数，利用积分的可加性分区域积分，在计算过程中注意利用区域的对称性和被积函数的奇偶性进行化简。

【详解 1】由区域的对称性和被积函数的奇偶性有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = 4\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$$

其中D_1为D在第一象限的部分.

设 $D_{11}=\{(x,y)|0\le y\le 1-x\ 0\le x\le 1\}$