1995 年全国硕士研究生入学统一考试理工

数学二试题详解及评析

一、　填空题

（1）设 $y=\cos(x^2)\sin^2\frac{1}{x}$,则$y'=$______.

【答】　$-2x\sin\left(x^2\right)\sin^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}\cos\left(x^2\right).$

【详解】　$y'=[\cos(x^2)]'\sin^2\frac{1}{x}+\cos(x^2)\cdot\left(\sin^2\frac{1}{x}\right)'$

$$=-2x\sin\left(x^2\right)\sin^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}\cos\left(x^2\right).$$

（2）微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为______.

【答】　$y=-2x+C_1\cos x+C_2\sin x..$

【详解】　相应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0,$其根为$\lambda_1=i,\lambda_2=-i,$

由于非齐次项为 $-2x,\lambda=0$ 不是特征根，可设非齐次方程的特解为 $y^*=A+Bx$，代入原方程解，得 $A=0,B=-2$，因此通解为

$$y=-2x+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

（3）曲线$\begin{cases}x=1+t^2\\y=t^3\end{cases}$在$t=2$ 处的切线方程为______.

【答】　$3x-y-7=0.$

【详解】　当 $t=2$时，$x_0=5,y_0=8,$ 且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3}{2}t,\qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=3,$$

可知过曲线$\begin{cases}x=1+t^2\\y=t^3\end{cases}$上对应于$t=2$ 的切线斜率为 3，切点为点（5，8）.

因此切线方程为

$$y-8=3\left(x-5\right)或3x-y-7=0.$$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$______.

【答】 $\dfrac{1}{2}$.

【详解】 利用夹逼定理，由

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$

知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}=\frac{1}{2}.$$

（5）曲线 $y=x^2e^{-x^2}$ 的渐近线方程为______.

【答】 y=0.

【详解】 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{2xe^{x^2}}=0,$

所以，y=0 水平为渐近线.

二、选择题

（1）设 $f(x)$和$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，$f(x)$为连续函数，且 $f(x)\neq 0,\varphi(x)$ 有间断点，则

$(A)\varphi\left[f(x)\right]$必有间断点.　　$(B)\left[\varphi(x)\right]^2$ 必有间断点.

$(C)\varphi\left[f(x)\right]$必有间断点.　　$(D)\left[\varphi(x)\right]^2$ 必有间断点.

【 】

【答】 应选（D）.

【详解】 方法一（用反证法）：

若 $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 无间断点，即连续，则

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)=\varphi(x)$$

也连续，与已知条件矛盾，所以$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点.（A）、（B）、（C）均可举反例说明不成立.

方法二：

取$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<1\end{cases}$, $f(x)=x^4+1$,则$f(x),\varphi(x)$符合要求，而$\varphi\left[f(x)\right]=1$,

$\varphi^2(x)=1, f\left[\varphi(x)\right]=2$均无间断点，故排除（A）、（B）、（C），应选（D）.

（2）曲线$y=x(x-1)(2-x)$与 x 轴所围图形的面积可表示为

$$(A)-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx.$$
$$(B)\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx.$$
$$(C)-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx.$$
$$(D)\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx.$$

【 】

【答】 应选（C）.

【详解】 曲线$y=x(x-1)(2-x)$与 x 轴的交点为$x=0,x=1,x=2$，因此该曲线与 x 轴所围图形的面积可表示为

$$\int_0^2 \left|x(x-1)(2-x)\right|dx=-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx.$$

（3）设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且对任意x_1、x_2,当$x_1>x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$则

(A)对任意$x, f'(x)>0.$ (B)对任意$x, f'(x)\leq 0.$

(C)函数$f(-x)$单调增加. (D)函数$-f(-x)$单调增加.

【 】

【答】 应选（D）.

【详解】 因为对任意x_1、x_2,当$x_1>x_2$时，$-x_1<-x_2$,则有$f(-x_1)<f(-x_2)$,

即 $-f(-x_1)>-f(-x_2)$ ，

故$-f(-x)$是单调增加的.

(4) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上$f''(x)>0$,则$f'(1)$、$f'(0)$、$f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$的大小顺序是

$(A)\ f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$ $(B)\ f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

$(C)\ f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$ $(D)\ f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

【 】

【答】　应选(B)。

【详解】　由题设 $f''(x)>0$,所以$f'(x)$单调增加，即

$$f'(0)<f'(x)<f'(1)\qquad \left(x\in(0,1)\right),$$

又　$f(1)-f(0)=f'(\xi),\qquad \xi\in(0,1),$

于是有

$$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0).$$

可见应选（B）.

（5）设 $f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$.若使$F(x)$在$x=0$处可导，则必有

$(A)\ f(0)=0.$　　　　$(B)\ f'(0)=0.$

$(C)\ f(0)+f'(0)=0.$　　　　$(D)\ f(0)-f'(0)=0.$

【答】　应选（A）

【详解】　因

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{\sin x}{x}\cdot f(x)\right]=f'(0)-f(0),$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=f'(0)+f(0).$$

要使$F'(0)$存在,必有$F'_-(0)=F'_+(0)$,即　$f'(0)-f(0)=f'(0)+f(0),$

从而有 $f(0)=0.$

三、(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\left(1-\sqrt{\cos x}\right)}.$

【详解】

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\left(1-\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{x\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\frac{1}{2}.$$

（2）设函数 $y=y\left(x\right)$由方程$xe^{f(y)}=e^{y}$确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$,求$\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

【详解】　方法一：

方程两边取自然对数，得

$$\ln x+f\left(y\right)=y,$$

对 x 求导，得

$$\frac{1}{x}+f'\left(y\right)\cdot y'=y',$$

从而

$$y'=\frac{1}{x\left[1-f'\left(y\right)\right]},$$

故

$$y''=-\frac{1-f'\left(y\right)-xf''\left(y\right)y'}{x^{2}\left[1-f'\left(y\right)\right]^{2}}=-\frac{\left(1-f'\left(y\right)\right)^{2}-f''\left(y\right)}{x^{2}\left[1-f'\left(y\right)\right]^{3}}.$$

方法二：

在等式 $xe^{f(y)}=e^{y}$ 两边对 x 求导，得

$$e^{f(y)}+xe^{f(y)}f'\left(y\right)y'=e^{y}y',$$

从而

$$y'=\frac{e^{f(y)}}{e^{f(y)}-xe^{f(y)}f'\left(y\right)}=\frac{e^{f(y)}}{xe^{f(y)}\left[1-f'\left(y\right)\right]}=\frac{1}{x\left[1-f'\left(y\right)\right]},$$

y'' 的求法同方法一.

（3）设 $f\left(x^{2}-1\right)=\ln\dfrac{x^{2}}{x^{2}-2}$,且$f\left[\varphi\left(x\right)\right]=\ln x$,求$\int\varphi\left(x\right)dx$.

【详解】　由于

$$f\left(x^{2}-1\right)=\ln\frac{\left(x^{2}-1\right)+1}{\left(x^{2}-1\right)-1}$$

故　$$f\left(x\right)=\ln\frac{x+1}{x-1}.$$

又　$$f\left[\varphi\left(x\right)\right]=\ln\frac{\varphi\left(x\right)+1}{\varphi\left(x\right)-1}=\ln x,$$

从而　$$\frac{\varphi\left(x\right)+1}{\varphi\left(x\right)-1}=x,即\varphi\left(x\right)=\frac{x+1}{x-1},$$

于是

$$\int \varphi(x)dx=\int \frac{x+1}{x-1}dx=2\ln(x-1)+x+C.$$

（4）设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,试讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性.

【详解】 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=x\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4},$$

而 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan\dfrac{1}{x^2}}{x}=\frac{\pi}{2},$$

又 $$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\arctan\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right)=\frac{\pi}{2},$$

所以 $f'(x)$在$x=0$处是连续的.

（5）求摆线$\begin{cases} x=1-\cos t \\ y=t-\sin t \end{cases}$一拱$(0\le t\le 2\pi)$的弧长.

【详解】 弧微分

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{\sin^2 t+(1-\cos t)^2}dt$$
$$=\sqrt{2(1-\cos t)}dt=2\sin\frac{t}{2}dt \qquad (0\le t\le 2\pi),$$

从而 $$S=\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8.$$

（6）设单位质点在水平面内作直线运动，初速度 $v|_{t=0}=v_0$.已知阻力与速度成正比（比例常数为 1），问 t 为多少时此质点的速度为 $\dfrac{v_0}{3}$? 并求到此时刻质点所经过的路程.

【详解】 设质点的运动速度为 v (t),由题设，阻力

$$f=m\frac{d^2s(t)}{dt^2}=m\frac{dv}{dt}=v'(t),$$

而 $f=-v(t)$,即有

$$\begin{cases} v'(t)+v(t)=0 \\ v|_{t=0}=v_0 \end{cases},$$

解此方程，得

$$v(t)=v_0e^{-t},$$

由$\dfrac{v_0}{3}=v_0e^{-t}$,得$t=ln3$.

所以，从 t=0 到$t=ln3$，该质点所经过的路程为

$$S=\int_0^{\ln 3}v_0e^{-t}=\frac{2}{3}v_0.$$

四、求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值.

【详解】 由题知

$$f'(x)=2x\left(2-x^2\right)e^{-x^2},$$

令 $f'(x)=0$,知$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内有唯一驻点$x=\sqrt{2}$.

当$0<x<\sqrt{2}$时，$f'(x)>0$'当$x>\sqrt{2}$时，$f'(x)<0$.

所以 $x=\sqrt{2}$ 是极大值点，由极值点唯一知，这也是最大值点，最大值为

$$f\left(\sqrt{2}\right)=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\Big|_0^2-\int_0^2e^{-t}dt=1+e^{-2}.$$

因为 $\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=1$,以及$f(0)=0$,

故 x=0 是最小值点.

所以 f (x)的最小值为 0.

五、设 $y=e^x$是微分方程$xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y\big|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

【详解】 把 $y=e^x$ 代入原方程，得

$$p(x)=xe^{-x}-x,$$

代入原方程，得

$$xy'+\left(xe^{-x}-x\right)y=x,$$

化为标准形式

$$y'+\left(e^{-x}-1\right)y=1,$$

此为一阶线性微分方程，其通解为

$$y=e^{-\int\left(e^{-x}-1\right)dx}\left[\int e^{\int\left(e^{-x}-1\right)dx}dx+C\right]=e^x+Ce^{x+e^{-x}}.$$

由 $y\big|_{x=\ln 2}=0$，得 $C=-e^{-\frac{1}{2}}$.

故所求特解为

$$y^{*}=e^{x}-e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}.$$

六、如图，设曲线 L 的方程为 $y=f\left(x\right)$，且$y''>0.MT$、MP分别为该曲线在点$M\left(x_0,y_0\right)$处的切线和法线.已知线段 MP 的长度为$\dfrac{\left(1+y_0'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$（其中$y_0'=y'\left(x_0\right),y_0''=y''\left(x_0\right)$），试推导出点$P\left(\xi,\eta\right)$的坐标表达式.

【详解】 由题设得

$$\left(x_0-\xi\right)^2+\left(y_0-\eta\right)^2=\frac{\left(1+y_0'^2\right)^3}{y_0''^2} \qquad ①$$

又 PM与MT 垂直，所以

$$y_0'=-\frac{x_0-\xi}{y_0-\eta} \qquad ②$$

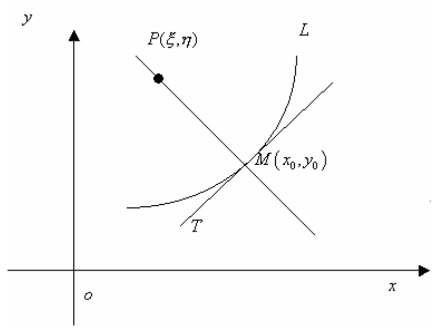
由①、②，解得

$$\left(y_0-\eta\right)^2=\frac{\left(1+y_0'^2\right)^3}{y_0''^2}.$$

由于 $y''\geq 0$，曲线 L 是凹的，故 $y_0-\eta<0$，从而

$$y_0-\eta=-\frac{1+y_0'^2}{y_0''}$$

又 $$x_0-\xi=-y_0'\left(y_0-\eta\right)=\frac{y_0'\left(1+y_0'^2\right)}{y_0''^2},$$



于是得

$$\begin{cases}\xi=x_0-\dfrac{y_0'\left(1+y_0'^2\right)}{y_0''^2}\\[2ex]\eta=y_0+\dfrac{1+y_0'^2}{y_0''}\end{cases}$$

七、设 $f\left(x\right)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算$\int_0^{\pi}f\left(x\right)dx$.

【详解】 用分部积分法.

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = xf(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} xf'(x)dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi - t}dt - \int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{\pi - x}dx = \int_0^{\pi}\sin xdx = 2.$$

八、设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$,且$f''(x) > 0$,证明$f(x) \ge x$.

【详解】　方法一：

由题设知　　$f(0) = 0,\ f'(0) = 1.$

令$F(x) = f(x) - x$,　　　则$F(0) = 0$,

由于　$F''(x) = f''(x) > 0$,知$F(0)$是$F(x)$的极小值，$F''(x)$单调，故$F(x)$只有一个驻点，从而 F（0）是 F(x) 的极小值，因为$F(x) \ge F(0) = 0$,即 $f(x) \ge x.$

方法二：

用泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2}f''(\xi) = x + \frac{x^2}{2}f''(\xi)\quad (\xi\text{在}0\text{与}x\text{之间}),$$

因为 $f''(\xi)$>0，所以 $f(x) \ge x.$

方法三：

由于 $f''(x) > 0$,故$f'(x)$单调增加，且

$$f(x) - f(0) = xf'(\xi), \xi \in (0, x).$$

由条件知　　$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,$

故　　　$f(x) = xf'(\xi).$

若　$x > 0, \xi \in (0, x), f'(\xi) > f'(0) > 1,$

因此　　$f(x) = xf'(\xi) > x.$

同理　　$x \le 0$时，$f(x) > x.$