2009 年全国硕士研究生入学统一考试　数学二试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

（1）函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数，则（　　）

（A）1　　（B）2　　（C） 3　　（D） 无穷多个

【解析与点评】考点：简单极限运算与间断点的分类。**水木艾迪辅导的星级考点。参见水木艾迪考研数学 36 计例 1-1，1-2，1-3 等题目。**【答案】C

$f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 则当 x 取整数时，$f(x)$ 无定义。

$f(x)$ 的间断点有无穷多个，应是 $x-x^3=0$ 的解 $x_{1,2,3}=0,\pm 1$，可去间断点为 3 个，

即 $0,\pm 1$。$\lim\limits_{x\to o}\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\dfrac{1}{\pi}$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\dfrac{2}{\pi}$，

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\dfrac{2}{\pi}$。

(2)当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　　）

（A） $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　（B） $a=1,b=\dfrac{1}{6}$　（C） $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　（D） $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

【解析与点评】考点：**无穷小量比阶的概念与极限运算法则，此为水木艾迪强调的星级考点。参见木艾迪考研数学春季基础班教材《考研数学通用辅导讲义》例 4.67，强化班教材《大学数学强化 299》16、17 等例题。**【答案】A

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-\frac{6b}{a}\cdot ax}=-\frac{a^3}{6b}=1$$

$a^3=-6b$ 意味选项 B，C 错误。再由 $\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在，应有

$1-a\cos ax\to 0(x\to 0)$，故 $a=1$，D 错误，所以选 A。

（3）函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点（0，0）（　）

（A）不是 $f(x,y)$ 的连续点　　（B）不是 $f(x,y)$ 的极值点

（C）是 $f(x,y)$ 的极大值点　　　（D）是 $f(x,y)$ 的极小值点

【解析与点评】（方法 1） $dz = xdx + ydy = \frac{1}{2}d(x^2+y^2)$，

$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$，有最小值 0，立即有结果 D。这是水木艾迪一再强调的凑微分方法。

（方法 2）由 $dz = xdx + ydy$ 可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = x,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = y$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1,\quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0,\quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$$

在（0，0）处，$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0$，$AC - B^2 = 1 > 0$，故（0，0）为函数 $z = f(x,y)$ 的一个极小值点。【答案】D

（4）设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy + \int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx =$（　　）

（A）$\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)dy$　　（B）$\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy$

（C）$\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dy$　　（D）$\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

【解析】$\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy + \int_1^2 dy\int_x^2 f(x,y)dx$ 的积分区域为两部分：

$D_1 = \{(x,y) | 1 \le x \le 2, x \le y \le 2\},\quad D_2 = \{(x,y) | 1 \le y \le 2, y \le x \le 4-y\},$

$D = \{(x,y) | 1 \le y \le 2, 1 \le x \le 4-y\},$ 将二次积分交换积分秩序得到

$\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$，【答案】C。

（5）若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1,1)$ 上的曲率圆为 $x^2 + y^2 =2$，则 $f(x)$ 在区间（1，2）内（　　）

（A）有极值点，无零点（B）无极值点，有零点

（C）有极值点，有零点（D）无极值点，无零点

【解析与点评】在点（1，1）处的领域内 $f(x)$ 凸性不变（上凸），即 $f''(x) < 0$，由曲率圆概念得到 $f(1) = 1$，$y'(1) = f'(1) = -1$ 与 $y''(1) = f''(1) = -2$。

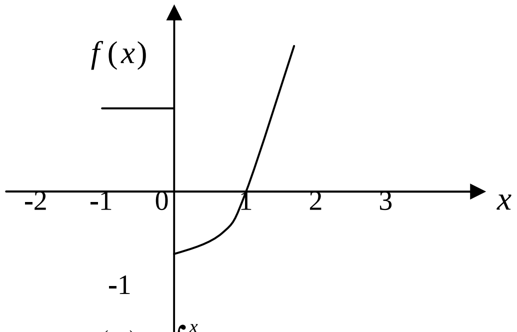
在 $[1,2]$ 上，$f'(x) \le f'(1) = -1 < 0$，即 $f(x)$ 单调减少，没有极值点。

$f(2) - f(1) = f'(\xi) < -1, \xi \in (1,2)$，　$f(2) < 0$，　$f(1) = 1 > 0$

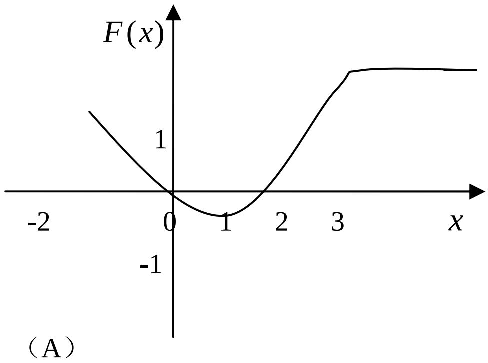
由零点定理，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有零点。应选（B）。【答案】B

考点：曲率圆概念，零点定理与拉格朗日微分中值定理是水木艾迪辅导的星级考点，尤其是拉格朗日微分中值定理的桥梁功能与逐点控制功能（连锁控制功能）是我们教学中一再强调的概念与方法，参见水木艾迪《考研数学通用教材-----微积分》（清华大学出版社）4.5节与相关例题，《考研数学 36 技》例 1-1，1-2，1-3 等题目。

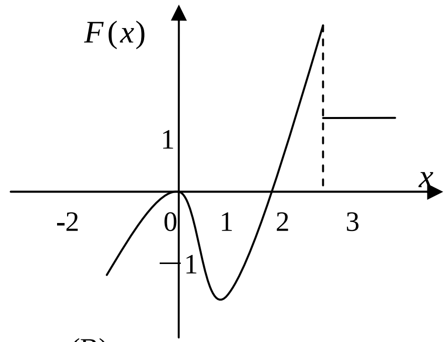
（6）设函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left[-1,3\right]$ 上的图形为



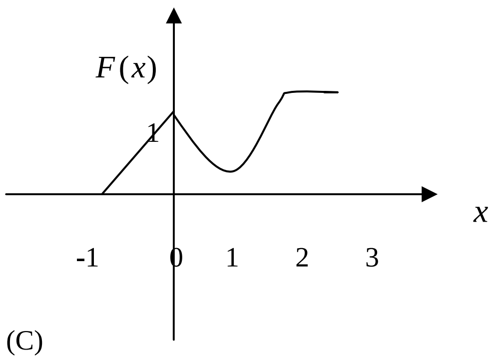
则函数 $F\left(x\right)=\int_0^x f(t)dt$ 为



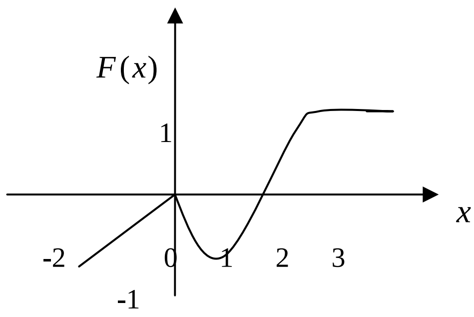
（A）



(B)



(C)



(D)

【解析与点评】考点：函数与其变限积分函数的关系、函数与其导函数之间的关系，定积分的几何意义。由 $y = f\left(x\right)$ 的图形可见，其图像与 x 轴及 y 轴、$x = 0$ 所围的图形的代数面积应为函数 $F\left(x\right)$，由于 $f(x)$ 由第一类间断点， $F\left(x\right)$ 只能为连续函数，不可导。

$x \in (-1,0)$ 时， $f(x) > 0$ 且为常数，应有 $F\left(x\right)$ 单调递增且为直线函数。

$x \in (0,1)$ 时， $f(x) < 0$， $F\left(x\right) \le 0,$ 且单调递减，。

$x \in (1,2)$ 时， $f(x) > 0$， $F\left(x\right)$ 单调递增。$x \in (2,3)$ 时， $f(x) = 0$， $F\left(x\right)$ 为常值函数。

正确选项为 D。【答案】D

（7）设 A、B 均为 2 阶矩阵，且 A^*,B^* 分别为 A、B 的伴随矩阵，若 $|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为（　　）

（A）$\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$ （C）$\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

【答案】B

【解析】由于分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}|A||B|=2\times 3=6$，即分块矩阵可逆，根据公式 $C^*=|C|C^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{|B|}B^* \\ \frac{1}{|A|}A^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$=6\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$$，故答案为 B。

【讲评】本题考查的知识点有：伴随矩阵和逆矩阵的关系，分块矩阵的行列式，分块矩阵的逆矩阵等。

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上

（9）曲线 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}du \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$，在 $(0,0)$ 处的切线方程为______

【答案】 $y=2x$

【解析与点评】考点：参数方程的导数，变限积分的导数，导数的几何应用。

$\frac{dy}{dt}=2t\ln(2-t^2)-t^2\cdot\frac{2t}{2-t^2}\Big|_{t=1}=-2$， $\frac{dy}{dt}=e^{-(1-t)^2}\cdot(-1)\Big|_{t=1}=-1$

$\frac{dy}{dt}=2$，切线方程为 $y=2x$ 。

导数与积分的几何应用是**水木艾迪考研数学辅导的星级考点，可参见水木艾迪春级班模拟试题 2-11 题。**

（10）已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|}dx=1$，则 k=________

【答案】-2

【解析】 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|}dx=2\int_0^{+\infty} e^{kx}dx=2\lim\limits_{b\to\bullet\infty}\frac{1}{k}e^{kx}\Big|_0^b$

此极限存在，必有 $k<0$，于是有 $1=0-\frac{2}{k},k=-2$。

（11） $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nxdx=$________

【答案】0

【解析与点评】定积分的分部积分法与回归法是水木艾迪辅导的星级考点。我们一再强调：与积分有关的极限问题不一定把积分完全算出来。

（方法 1） $I_n=\int_0^1 e^{-x}\sin nxdx=-\frac{e^{-x}}{n}\cos nx\Big|_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1 e^{-x}d\cos nx$

$$=-\frac{e^{-x}}{n}\cos nx\Big|_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1 e^{-x}d\cos nx$$

$$=\lim_{n\to\infty}I_n=0$$

（方法 1） $I_n=\int_0^1 e^{-x}\sin nxdx=-e^{-x}\sin nx\Big|_0^1+n\int_0^1 e^{-x}\cos nxdx$

$$=-e^{-1}\sin n-n\int_0^1\cos nxde^{-x}=-e^{-1}\sin n-n\cos nx\Big|_0^1-n^2 I_n+=$$

$$=-e^{-1}\sin n-ne^{-1}\cos n+ne^{-1}-n^2 I_n$$

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n\cos n+\sin n}{n^2+1}e^{-1}+\frac{n}{n^2+1}\right)=0$$

（12）设 $y=y(x)$ 是方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$________

【解析与点评】方程两边关于 x 求导得 $y+xy'+y'e^y=1$， $y'=\frac{1-y}{x+e^y}$

两边再次求导可得 $2y'+xy''+y''e^y+(y')^2e^y=0$，

得 $y''=-\frac{2y'+(y')^2e^y}{x+e^y}$ ，当 $x=0$ 时， $y=0$，

$y'(0)=\frac{1-0}{e^0}=1$， $y''(0)=-\frac{2+1}{1}=-3$。【答案】−3

（13）函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为________

【解析与点评】初等函数性质及其运算，最大最小值问题是**水木艾迪考研数学辅导的星级考点。可参见《大学数学同步强化 299》32、45 题，**

$y'=e^{2x\ln x}(2\ln x+2)$，令 $y'=0$ 得驻点为 $x=\frac{1}{e}$。当 $x\in(0,1]$ 时有

$y''=e^{2x\ln x}(2\ln x+2)^2+\frac{2}{x}e^{2x\ln x}>0$ **（可不必求出 $y''\left(\frac{1}{e}\right)$！又省时间了。）**

故 $x=\dfrac{1}{e}$ 为 $y=x^{2x}=e^{2x\ln x}$ 的极小值点，$y=e^{-\frac{2}{e}}$。

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时，$y'(x)<0$，y 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上递减，且 $y(0^{+})=\lim\limits_{x\to 0^{+}}x^{2x}=e^{0}=1$；

当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 时，$y'(x)>0$，y 在 $(\dfrac{1}{e},1]$ 上递增，且 $y(1)=1$。故 $y=x^{2x}$ 在区间 $\left(0,1\right]$ 上的最小值为 $y=e^{-\frac{2}{e}}$。【答案】$e^{-\frac{2}{e}}$。

（14）设 α,β 为 3 维列向量，β^{T} 为 β 的转置向量，若 $\alpha\beta^{T}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\beta^{T}\alpha=$ ________ 。

【答案】2

【解析】因为 $\alpha\beta^{T}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，根据相似矩阵有相同的特征值，得到 $\alpha\beta^{T}$ 的特征值是 $2,0,0$，而 $\beta^{T}\alpha$ 是一个常数，是矩阵 $\alpha\beta^{T}$ 的对角元素之和，则 $\beta^{T}\alpha=2+0+0=2$。

【点讲】本题考查的知识点有：相似矩阵有相同的特征值，矩阵的特征值的和等于矩阵的迹等性质。

三、解答题：15-23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 9 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^{4}x}$

【解析与点评】本题属于普通极限运算与无穷小量的等价关系，以及罗必达法则。**参见木艾迪考研数学春季基础班教材《考研数学通用辅导讲义》例 4.68，强化班教材《大学数学强化 299》例 22-1 等例题。**

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^{4}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^{2}\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{x^{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^{2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sec^{2}x}{1+\tan x}}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^{2}x}{2x(1+\tan x)}==\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^{2}x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^{2}x-2\sec^{2}x\tan x}{2}=\frac{1}{4}$$

（16）（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx \qquad (x>0)$

【解析与点评】定积分的分部积分法（独到之处!）与变量替换是水木艾迪辅导的星级考点。

令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$，得 $x=\frac{1}{t^2-1}$， $dx=\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$

原式$=\int \ln(1+t)\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt=\int \ln(1+t)\frac{-1}{(t^2-1)^2}d(t^2-1)$

$=\int \ln(1+t)d(\frac{1}{t^2-1})=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}dt$

$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int \frac{1}{4(t-1)}+\frac{-1}{4(t+1)}+\frac{-1}{2(t+1)^2}dt$

$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2(t+1)}+C$

$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}-\frac{1}{2(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1)}+C$

$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{(1+x)}+\sqrt{x})-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{(1+x)}-\sqrt{x})+C$

（17）（本题满分 10 分）设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数。求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

【解析与点评】$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$，$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f_{11}''\cdot 1+f_{22}''\cdot(-1)+f_{13}''\cdot x+f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot(-1)+f_{23}''\cdot x+f_3'\\&\quad+y\left[f_{31}''\cdot 1+f_{32}''\cdot(-1)+f_{33}''\cdot x\right]\\&=f_3'+f_{11}''-f_{22}''+xyf_{33}''+(x+y)f_{13}''+(x-y)f_{23}''\end{aligned}$$

【考点】复合函数求偏导，参见【水木艾迪考研】《大学数学同步强化 299》例 10.12，10.13，10.15，等，《考研数学三十六技》例 15-1，15-3，15-5 等，以及《考研数学通用辅导讲义-----微积分》101，103 等题。

（18）（本题满分 10 分）设非负函数 $y=y(x)(x\ge 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$，当曲

线 $y=y(x)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 D 的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积。

【考点】微分方程求解，定积分应用

【解析与点评】解法一： $xy''-y'+2=0$ ， $x^2y''-xy'+2x=0$ ，

上述方程为 Euler 方程，记 $x=e^t$ ，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$ ， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{x^2}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{dt}$ ，

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}=-2e^t$$

$$y=C_1+C_2e^{2t}+2e^t=C_1+C_2x^2+2x$$

为微分方程的通解，其中 C_1,C_2 为任意常数。又因为 $y=y(x)$ 通过原点时与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域的面积为 2，于是可得 $C_1=0$，

$$2=\int_0^1 y(x)dx=\int_0^1(2x+C_2x^2)dx=(x^2+\frac{C_2}{3}x^3)\Big|_0^1=1+\frac{C_2}{3}$$

从而 $C_2=3$。于是，所求非负函数 $y=2x+3x^2\quad(x\geq 0)$ 。

又由 $y=2x+3x^2$ 可得，在第一象限曲线 $y=f(x)$ 表示为 $x=\dfrac{1}{3}(\sqrt{1+3y}-1)$ ，于是 D 围绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为 $V=5\pi-V_1$，其中

$$V_1=\int_0^5\pi x^2dy=\int_0^5\pi\cdot\frac{1}{9}(\sqrt{1+3y}-1)^2dy=\frac{\pi}{9}\int_0^5(2+3y-2\sqrt{1+3y})dy=\frac{39}{18}\pi$$

$$V=5\pi-\frac{39}{18}\pi=\frac{51}{18}\pi=\frac{17}{6}\pi$$

解法二： $xy''-y'+2=0$ 为可降阶二次方程，记 $p=y'$，则

$xp'-p+2=0$ ， $\dfrac{dp}{p-2}=\dfrac{dx}{x}$ ， $p=2+C_1x$ ， $y=C_1+C_2x^2+2x$

后面同解法一。

【水木艾迪考研】《大学数学同步强化 299》143，例 75-1，例 78-3，《考研数学三十六技》例 11-5，例 11-6，例 8-8，《考研数学通用辅导讲义----微积分》例 7.16，例 7.21，7.5，例 8.13，例 8.14。

（19）（本题满分 10 分）求二重积分 $\iint\limits_D(x-y)dxdy,$ 其中

$$D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2,y\geq x\right\}$$

【考点】二重积分，极坐标。

【解析与点评】以下解法一为水木艾迪的特别推荐方法。

解法一：作变量代换（平移）$u=x-1, v=y-1$，$D=\{(u,v)|u^2+v^2\le 2, v\ge u\}$，

$$\iint_D (x-y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr=-\frac{8}{3}$$

解法二：由 $(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$ 得 $r\le 2(\sin\theta+\cos\theta)$,

$$\iint_D (x-y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot r^3\Big|_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right]d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^3d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta+\cos\theta)^3d(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}(\sin\theta+\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=-\frac{8}{3}$$

参见【水木艾迪考研】《大学数学同步强化 299》122，123，《考研数学三十六技》例 17-1，以及《考研数学通用辅导讲义-----微积分》例 12.7，12.27。

（20）（本题满分 12 分）设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线，当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点，当 $0\le x\le\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$。求 $y(x)$ 的表达式。

【考点】微分方程，分段函数的光滑性

【解析与点评】由题意，当 $-\pi<x<0$ 时，$y=-\frac{x}{y'}$，即 $ydy=-xdx$，得 $y^2=-x^2+c$，

又 $y(-\frac{\pi}{\sqrt{2}})=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 代入 $y^2=-x^2+c$ 得 $c=\pi^2$，从而有 $x^2+y^2=\pi^2$；

当 $0\le x<\pi$ 时，$y''+y+x=0$。齐次方程 $y''+y=0$ 的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$。

令非齐次方程的特解为 $y_1=Ax+b$，则有 $0+Ax+b+x=0$，得 $A=-1, b=0$，$y_1=-x$

$y''+y+x=0$ 的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-x$。

由于 $y=y(x)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 内的光滑曲线，故 y 在 $x=0$ 处连续，于是由

$$y(0-)=\pm\pi,\quad y(0+)=c_1$$

可得 $c_1=\pm\pi$ 时，$y=y(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

又当 $-\pi<x<0$ 时，有 $2x+2y\cdot y'=0$，得 $y'_-(0)=-\dfrac{x}{y}=0$，

当 $0\le x<\pi$ 时，有 $y=-c_1\sin x+c_2\cos x-1$, 得 $y'_+(0)=c_2-1$，由 $y'_-(0)=y'_+(0)$

得 $c_2-1=0$，即 $c_2=1$。故 $y=y(x)$ 的表达式为

$$y=\begin{cases}-\sqrt{\pi^2-x^2} & -\pi<x<0\\ -\pi\cos x+\sin x-x & 0\le x\le\pi\end{cases}\quad 或\quad y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2} & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

因为曲线过点 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\quad\dfrac{\pi}{2}\right)$, 所以曲线方程为 $y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2} & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x & 0\le x\le\pi\end{cases}$，

【水木艾迪考研】《大学数学同步强化 299》114，145，44
《考研数学三十六技》例 3-1，例 3-3，例 3-4，例 12-1，例 11-12，例 11-13，例 11-14
《微积分通用辅导讲义》例 8.22，例 8.24，例 3.17，例 3.18
（21）（本题满分 11 分）

（Ⅰ）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

（Ⅱ）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)\quad(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$。

【解析与点评】

（Ⅰ）过 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 的直线方程为

$$y(x)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

取辅助函数 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，则 $F(a)=F(b)$；

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

（Ⅱ）任取 $x\in(0,\delta)$，则函数 $f(x)$ 满足：

在闭区间 $[0,x]$ 上连续，开区间（$(0,x_0)$）内可导，由拉格朗日中值定理可得：

$\exists\xi\in(0,x)\subset(0,\delta)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$，

两边取 $x\to0^+$ 时的极限，注意到 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，可得

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\xi\to0^+}f(\xi)=A$$

于是 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$。

导数定义与拉格朗日微分中值定理是水木艾迪辅导的星级考点，尤其是拉格朗日微分中值定理本身的证明方法，及其在处理问题中的桥梁功能与逐点控制功能（连锁控制功能）是我们教学中一再强调的概念与方法，相关例题参见水木艾迪《考研数学通用教材-----微积分》（清华大学出版社）。

（22）（本题满分 11 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求满足 $A\xi_2=\xi_1,A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3；

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任一向量 ξ_2,ξ_3，证明：ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关。

【解析】（Ⅰ）解方程 $A\xi_2=\xi_1$，

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

故 $\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1 为任意常数。

解方程 $A^2\xi_3=\xi_1$，$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

故 $\xi_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k_2,k_3 为任意常数。

（Ⅱ）证明：由于

$$\begin{vmatrix}-1&-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k_1&-\frac{1}{2}-k_2\\1&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k_1&k_2\\-2&k_1&k_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k_1&k_2\\-2&k_1&k_3\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\left(k_1+1-k_1\right)=-\frac{1}{2}\neq 0。$$

故 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关。

【讲评】本题考查的知识点有：矩阵的运算，非齐次线性方程组求解，解的结构，线性无关的概念，三个三维向量线性无关的充要条件是行列式不为零，行列式的计算等。

（23）（本题满分 11 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值;（Ⅱ）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值。

【解析】（Ⅰ）$A=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$。

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-a&0&-1\\0&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a&\lambda-a&0\\0&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a&0&0\\0&\lambda-a&1\\-1&2&\lambda-a+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)\left((\lambda-a)^2+(\lambda-a)-2\right)=(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2)。$$

所以二次型的矩阵 A 的特征值为 $a-2,a,a+1$。

（Ⅱ）若规范形为 $y_1^2+y_2^2$，说明有两个特征值为正，一个为 0，

当 $a=2$ 时，三个特征值为 0，2，3，这时，二次型的规范形为 $y_1^2+y_2^2$。

【讲评】本题考查的知识点有：二次型的矩阵，求矩阵的特征值，二次型的规范形，惯性定理等。