2011 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题及答案详解

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1） 已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（　　）

（A）$k=1,c=4$　　（B）$k=1,c=-4$

（C）$k=3,c=4$　　（D）$k=3,c=-4$

【答案】应选（C）

【分析】由泰勒公式及无穷小阶的比较可得。

【详解一】$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),\sin 3x=3x-\frac{27x^3}{3!}+o(x^3)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}+\frac{9x^3}{2}+o(x^3)}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{cx^k}=1$$

所以 $c=4,k=3$

【详解二】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{ck}\frac{-2\sin 2x\sin(-x)}{x^{k-1}}$

$$=\frac{12}{ck}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k-1}}=1$$

所以 $k-1=2,ck=12$，即 $k=3,c=4$

（2） 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}$ 等于（　　）

（A）$-2f'(0)$　　（B）$-f'(0)$　　（C）$f'(0)$　　（D）0

【答案】应选（B）

【分析】根据导数在某点的定义求解。

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-x^2f(0)}{x^3}-\frac{2f(x^3)-2f(0)}{x^3}$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-x^2 f(0)}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{2f(x^3)-2f(0)}{x^3}$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$$

（3） 函数 $f(x)=\ln\left|(x-1)(x-2)(x-3)\right|$ 的驻点个数为（ ）

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3

【答案】应选（C）

【详解】令 $f'(x)=0$，解得驻点 $x=2\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

（4） 微分方程 $y''-\lambda^2 y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为（ ）

（A）$a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$ （B）$ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$

（C）$x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$ （D）$x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$

【答案】应选（C）

【详解】特征值为 $\pm\lambda$，非齐次项中 $\pm\lambda$ 分别与特征根相等，则特解可设为

$x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$

（5） 设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0,g(0)<0$，且 $f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（ ）

（A） $f''(0)<0,g''(0)>0$ （B） $f''(0)<0,g''(0)<0$

（C） $f''(0)>0,g''(0)>0$ （D） $f''(0)>0,g''(0)<0$

【答案】应选（A）

【详解】根据 $\begin{cases} z_x=f'(x)g(y)=0 \\ z_y=f(x)g'(y)=0 \end{cases}$，

$z_{xx}=f''(x)g(y),z_{yy}=f(x)g''(y),z_{xy}=f'(x)g'(y)$

对于 $(0,0)$，$z_{xx}(0,0)=f''(0)g(0)$，$z_{yy}=f(0)g''(0),z_{xy}=f'(0)g'(0)$

已知 $f(0)>0,g(0)<0$，$f'(0)=g'(0)=0$

根据题意可判断 $f''(0)<0, g''(0)>0$

（6）设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot xdx, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx$，则 I,J,K 的大小关系是

（A）$I<J<K$ （B）$I<K<J$ （C）$J<I<K$ （D）$K<J<I$

【答案】应选（B）

【详解】在区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上，$\sin x<\cos x<\cot x, \ln x$ 是增函数，所以

$\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x,$ 由定积分比较大小的性质可知，应选（B）

（7）设 A 为三阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得到矩阵 B，再交换 B 的第二行与第三行得到单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 A=（　　）

(A) P_1P_2； (B) $P_1^{-1}P_2$； (C) P_2P_1； (D) $P_2P_1^{-1}$.

【答案】应选(D).

【详解】由初等变换及初等矩阵的性质易知 $P_2AP_1=E$，从而 $A=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$，答案应选(D).

（8）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程 $AX=0$ 的一个基础解系，则 $A^*X=0$ 的基础解系可为（　　）

(A) α_1,α_2； (B) α_1,α_3； (C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$； (D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

【答案】应选(D).

【详解】由 $(1,0,1,0)^T$ 是方程 $AX=0$ 的一个基础解系，知 $r(A)=3$，从而 $r(A^*)=1, |A|=0$，于是 $A^*A=|A|E=0$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 $A^*X=0$ 的解.由 $\alpha_1+\alpha_3=0$，知 α_1,α_3 线性相关，由 $r(A)=3$，知 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，又 $r(A^*)=1$，从而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 $A^*X=0$ 的基础解系,故应选(D).

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim_{x\to 0}(\frac{1+2^x}{2})^{\frac{1}{x}}=$____

【答案】$\sqrt{2}$

【详解】$\lim_{x\to 0}(\frac{1+2^x}{2})^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+\frac{1+2^x}{2}-1)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{2^x-1}{2}}=\sqrt{2}$

（10）微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$______

【答案】$e^{-x}\sin x$

【详解】$y=e^{-\int 1dx}(C+\int e^{-x}\cos xe^{\int 1dx}dx)=e^{-x}(C+\sin x)$，由于 $y(0)=0$，所以 $y=e^{-x}\sin x$

（11）曲线 $y=\int_0^x \tan tdt(0\le x\le\frac{\pi}{4})$ 的弧长 $s=$______

【答案】$\ln(\sqrt{2}+1)$

【详解】$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\ln(\sqrt{2}+1)$

（12）设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\lambda>0,$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=$__________

【答案】$\frac{1}{\lambda}$

【详解】$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$

或者指数函数的数学期望。

（13）设平面区域 D 由直线 $y=x$ 圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所组成，则二重积分 $\iint\limits_D xyd\sigma=$

【答案】$\frac{7}{12}$

【详解】$\iint\limits_D xyd\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\sin\theta cox\theta dr=\frac{7}{12}$

（14）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则 f 的正惯性指数为______.

【答案】应填 2.

【详解 1】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 易经过配方法化为 $y_1^2+4y_2^2$， 从而正惯性指数为 2.

【详解 2】本题亦可通过求二次型矩阵的特征值进一步得到正惯性指数为 2.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说

明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^{3a}}$，设

$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to0^+} F(x)=0$，试求 a 的取值范围。

解：由 $\lim_{x\to+\infty} F(x)=0$，所以至少 $a>0$

由 $\lim_{x\to0^+} F(x)=0$，

所以 $\lim_{x\to0^+} F(x)=\lim_{x\to0^+} \dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^{3a}}=\lim_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x^2)}{3ax^{3a-1}}=\lim_{x\to0^+} \dfrac{x^2}{3ax^{3a-1}}=0$

故 $2>3a-1$，所以 $a<1$

由 $\lim_{x\to+\infty} F(x)=0$，所以

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^{3a}}=\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{3ax^{3a-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\frac{1}{3a(3a-1)x^{3a-2}}\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^{3-3a}}{1+x^2}\frac{1}{3a(3a-1)}=0$$

即 $3-3a<2$，所以 $a>\dfrac{1}{3}$

综上 $\dfrac{1}{3}<a<1$

（16）（本题满分 11 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 确定，求 $y=y(x)$ 的极值和凹凸区间及拐点。

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{4t}{\left(t^2+1\right)^3}$

当 $t=1$ 时，$x=\dfrac{5}{3}$，$y=-\dfrac{1}{3}$ 是极小值

当 $t=-1$ 时，$x=-1$，$y=1$ 是极大值

当 $t=0$ 时，$x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{1}{3}$ 是拐点

当 $t<0$ 时，是凸区间

当 $t>0$ 时，是凹区间

（17）（本题满分 10 分）设函数 $z=f(xy,g(x))$，函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$。

【详解】 $$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'y+f_2'g'(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+xyf_{11}''+xf_{21}''g'(x)$$

因为 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，所以 $g'(1)=0$

所以 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)$

（18）（本题满分 10 分）设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l:y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切与原点，记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 外切线的倾角，若 $\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$，求 $y(x)$ 的表达式。

【详解】由题意知 $y(0)=0,y'(0)=1$，因为 α 为曲线 l 在点 (x,y) 外切线的倾角，

所以 $\tan\alpha=\dfrac{dy}{dx}$ ，两边同时对 x 求导数，得 $\sec^2\alpha\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{d^2y}{dx^2}$

由题知 $\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$，并且 $\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha$ 所以得微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy}{dx}+(\dfrac{dy}{dx})^3,\\ y(0)=0,\\ y'(0)=1\end{cases}$$

此方程是不显含 x 的微分方程

令 $y'=p,则y''=p\dfrac{dp}{dy}$，代入方程得 $\dfrac{dp}{1+p^2}=dy$，解得 $y'=\tan(y+C_1)$

由 $y'(0)=1$ 解得 $C_1=\dfrac{\pi}{4}$，

微分方程 $y'=\tan(y+\dfrac{\pi}{4})$ 是可分离变量方程，解得 $\sin(y+\dfrac{\pi}{4})=Ce^x$

由 $y(0)=0$ 解得 $C=1$。

所以 $y(x)=\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^x\right)-\dfrac{\pi}{4}$

（19）（本题满分 10 分）①证明对任意正整数n，都有$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$成立

②设$a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n$，证明数列$\left\{a_n\right\}$收敛

证明：①先证明$0\le x\le 1$，有$\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$，可以利用导数得到函数单调性，结论是明显的，令$x=\frac{1}{n}$，就得到证明结论。

②先证明数列$\left\{a_n\right\}$单调递减，$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0$

再证明数列$\left\{a_n\right\}$有下界，

$$a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+...+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n=\ln(\frac{1}{n}\frac{2}{1}\frac{3}{2}...\frac{n+1}{n})=\ln\frac{n+1}{n}>0$$

所以数列$\left\{a_n\right\}$收敛

（20）（本题满分 11 分）一容器内侧是由图中曲线绕y旋转一周而成的曲面，该曲线是由$x^2+y^2=2y(y\ge\frac{1}{2})$与$x^2+y^2=1(y\le\frac{1}{2})$连接而成的。

（Ⅰ）容器的容积；

（Ⅱ）若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？（长度单位：m，重力加速度为gm/s^2，水的密度为$10kg/m^3$。

【详解】（Ⅰ）容积$V=V_1+V_2=2V_1=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)dy=\frac{9}{4}\pi$

（Ⅱ）$W=F\cdot S=\int_{-1}^{2}mgdy=\int_{-1}^{2}\frac{9}{4}\pi 10^3 gdy=\frac{27}{4}\pi 10^3 g$

（21）（本题满分 11 分）已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(1,y)=0,\ f(x,1)=0,$ $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a,$ 其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，

计算二重积分$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$

【详解】根据二重积分的计算$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy=\int_0^1 x\left(\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy\right)dx$

$$\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 ydf'_x(x,y)=\left(yf'_x(x,y)\right)_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)dy$$

$$=f'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)dy=-\int_0^1 f'_x(x,y)dy$$

则 原式$=\int_0^1 x\left(-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right)dx=-\int_0^1\left(\int_0^1 xf'_x(x,y)dx\right)dy$

$$=-\int_0^1\left(\int_0^1 xf_x'(x,y)dx\right)dy=-\int_0^1\left(\int_0^1 xdf(x,y)\right)dy=-\int_0^1\left(\left(xf(x,y)\right)_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy$$

$$=-\int_0^1\left(f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy=\iint_D f(x,y)dxdy=a$$

(22)（本小题满分 11 分）设向量组$\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$，不能由向量组$\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$线性表出.

(1)求a的值.

(2)将β_1，β_2，β_3由α_1，α_2，α_3线性表出.

【详解】(1)易知α_1，α_2，α_3线性无关，由其不能被β_1，β_2，β_3线性表出，得到β_1，β_2，β_3线性相关，从而$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<3$.

由
$$\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&a-5\end{pmatrix}$$

得$a=5$.

(2)由

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}$$

得
$$\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&5\\4&2&10\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$

(23)（本小题满分 11 分）A 为三阶实对称矩阵，$r(A)=2$且$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(1)求 A 的特征值与特征向量.

(2)求矩阵 A.

【详解】(1)易知特征值-1 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，特征值 1 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.由$r(A)=2$知 A 的另一个特征值为 0.因为实对称矩阵不同特征值得特征向量正交，从而特征值 0 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

(2)

由

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

得

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$