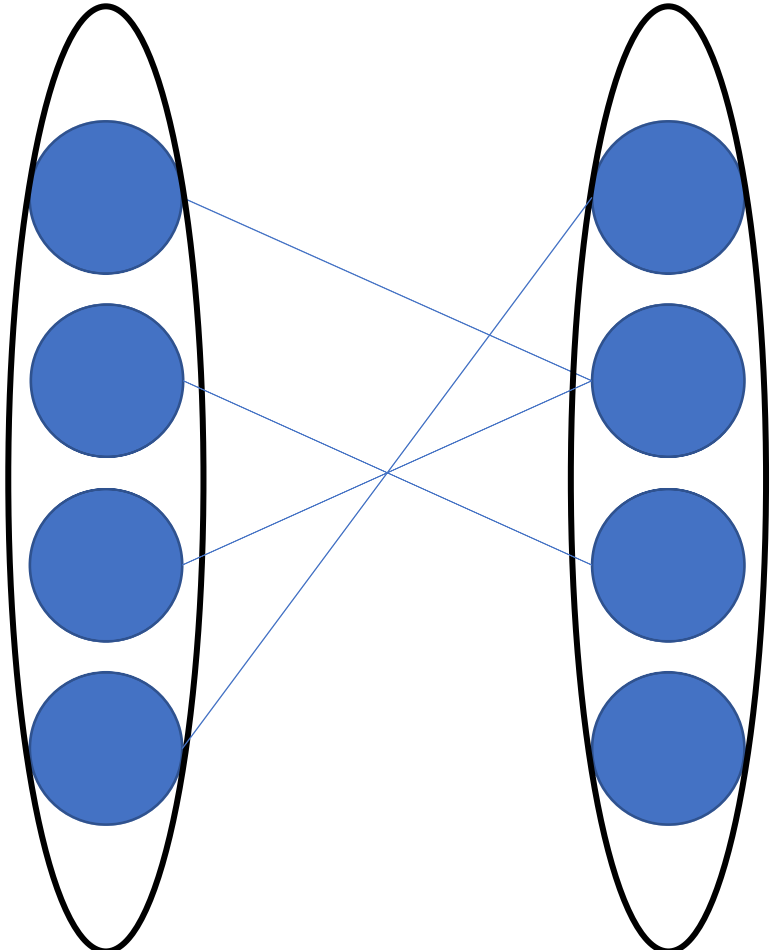
二分图汇总

二分图的定义

二分图，又称二部图，英文名叫 Bipartite graph。
二分图是什么？节点由两个集合组成，且两个集合内部没有边的图。
换言之，存在一种方案，将节点划分成满足以上性质的两个集合。

形式化的定义

若对于图 G = (V, E) 存在一个 V 的划分 (A, B) 使得任意一条边的两个端点不不属于同一个集合，则 G 是一个二分图

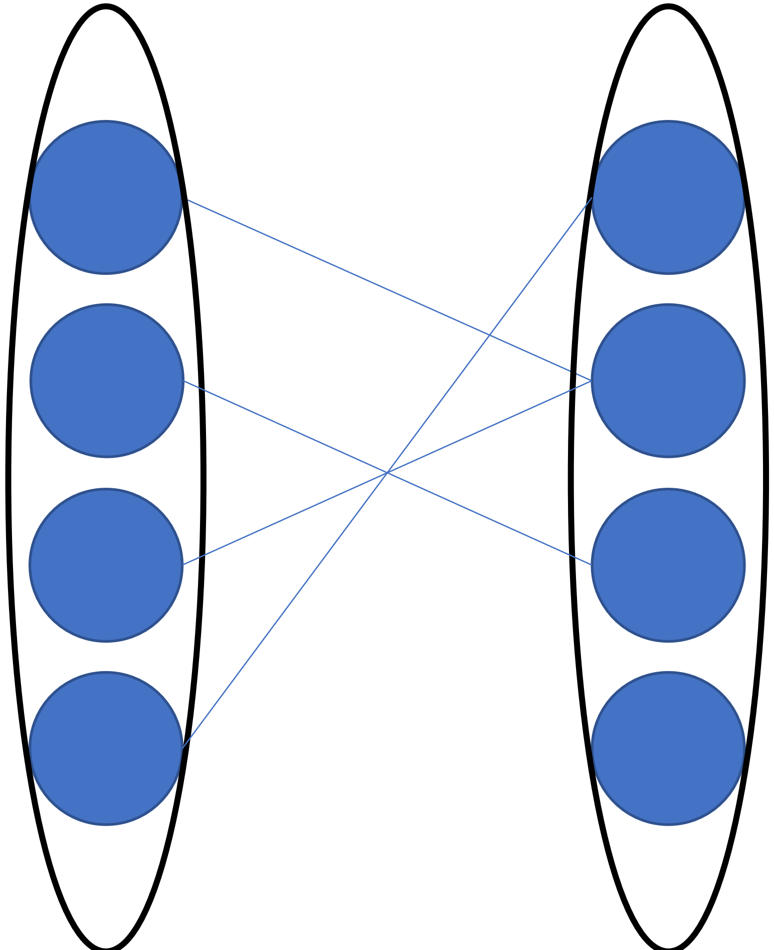


由定义可知，二分图中一定没有奇环

二分图的判定

由定义可知，二分图中一定没有奇环

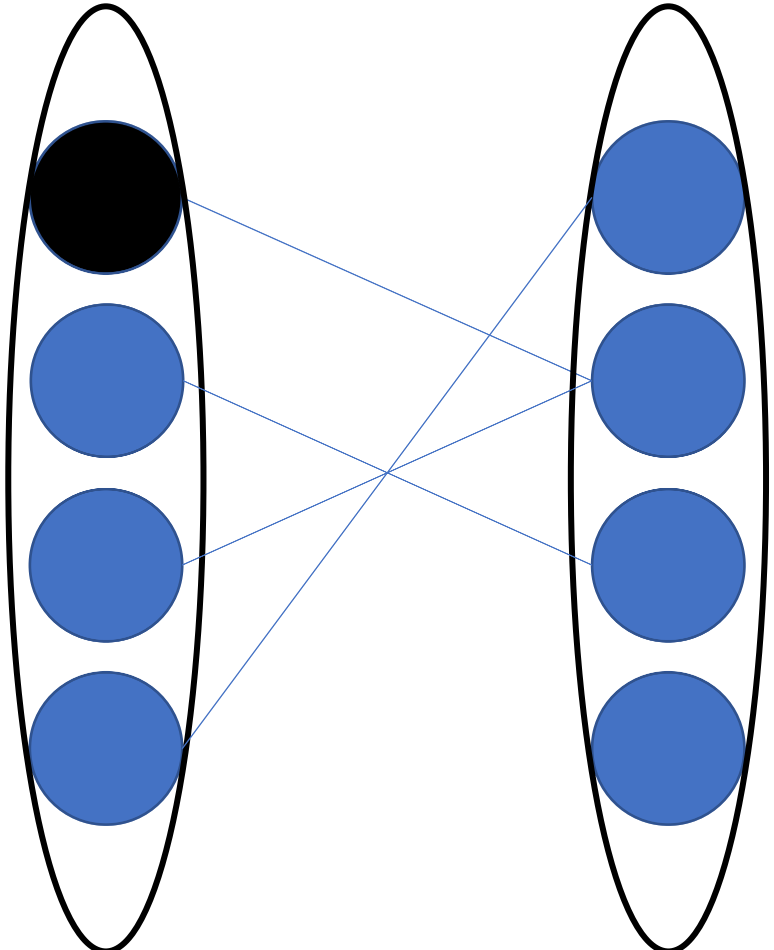
因此，我们可以采用黑白染色的方法去判定一个图是不是二分图



二分图的判定

由定义可知，二分图中一定没有奇环

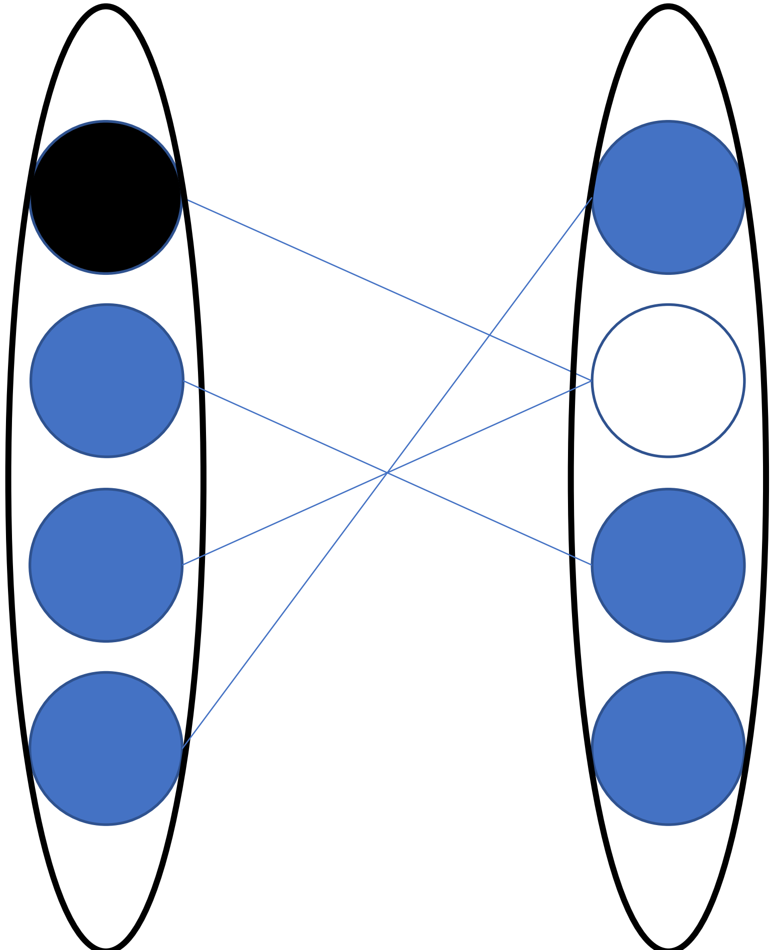
因此，我们可以采用黑白染色的方法去判定一个图是不是二分图



二分图的判定

由定义可知，二分图中一定没有奇环

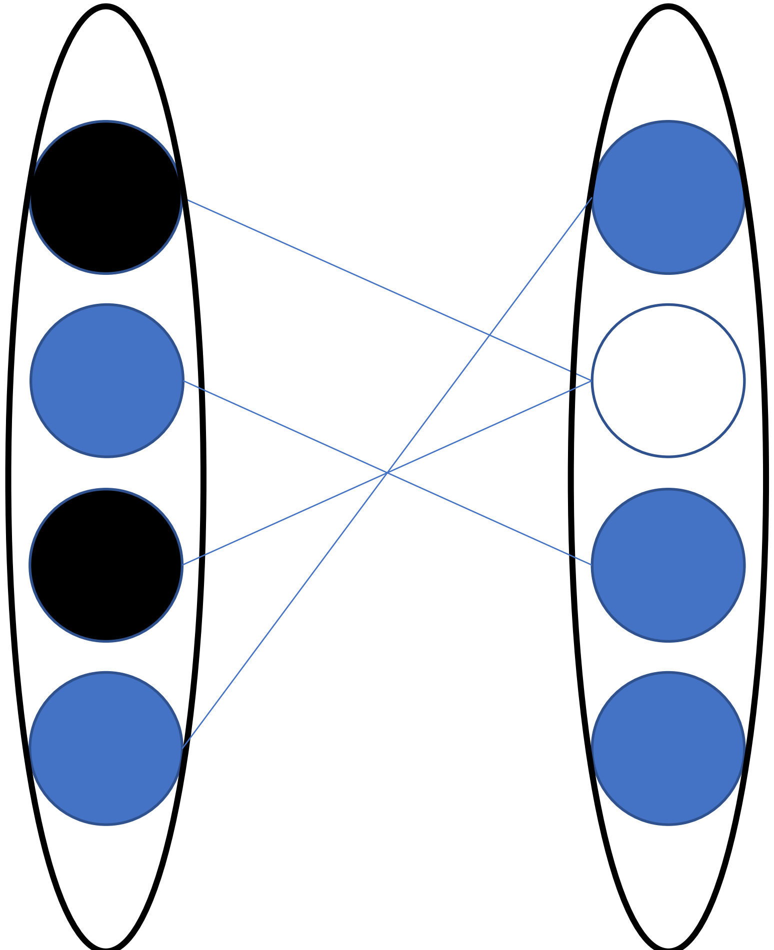
因此，我们可以采用黑白染色的方法去判定一个图是不是二分图



二分图的判定

由定义可知，二分图中一定没有奇环

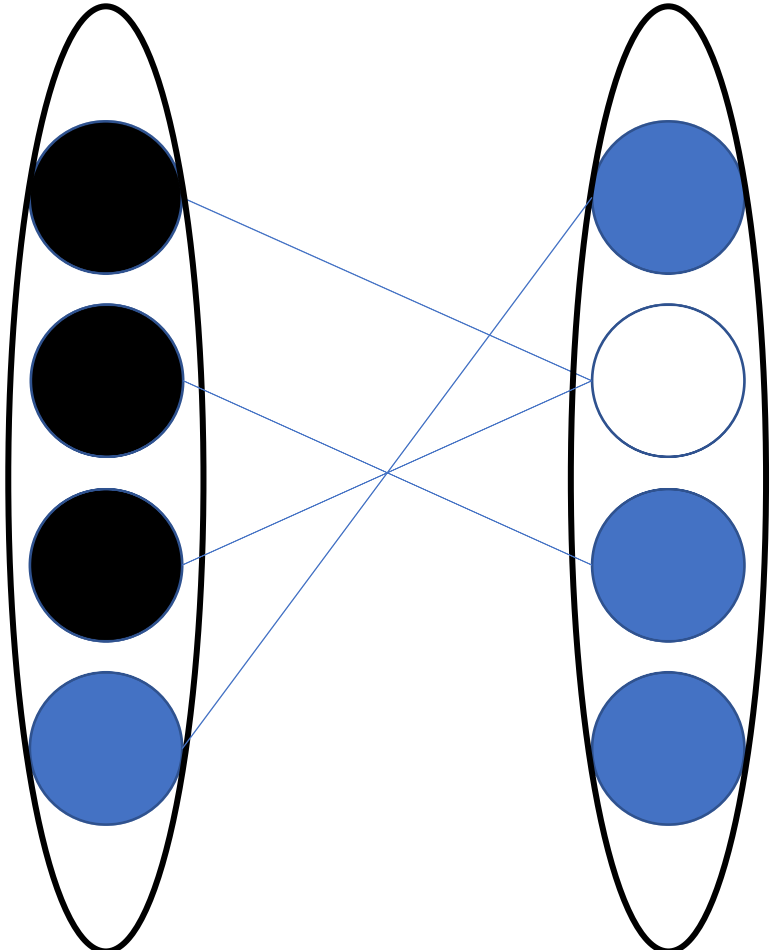
因此，我们可以采用黑白染色的方法去判定一个图是不是二分图



二分图的判定

由定义可知，二分图中一定没有奇环

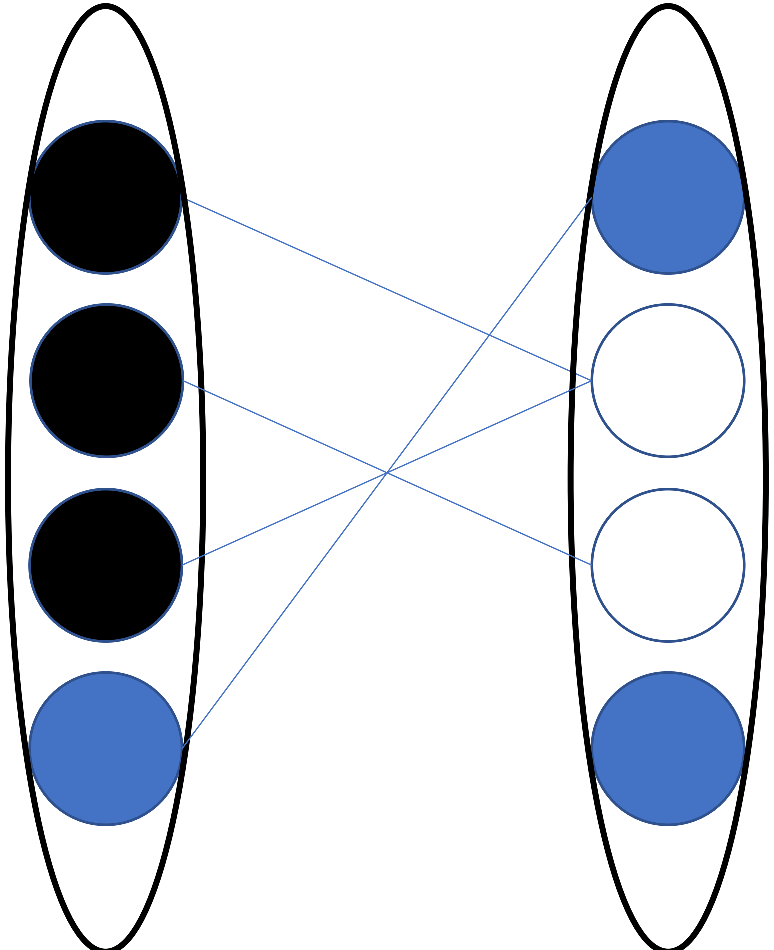
因此，我们可以采用黑白染色的方法去判定一个图是不是二分图



二分图的判定

由定义可知，二分图中一定没有奇环

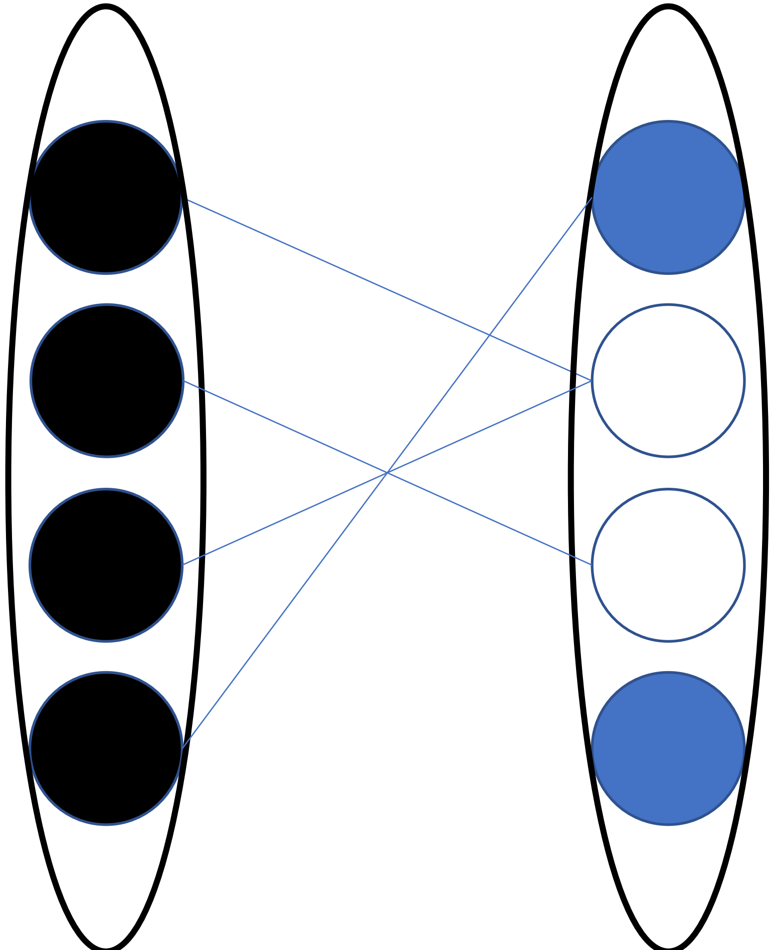
因此，我们可以采用黑白染色的方法去判定一个图是不是二分图



二分图的判定

由定义可知，二分图中一定没有奇环

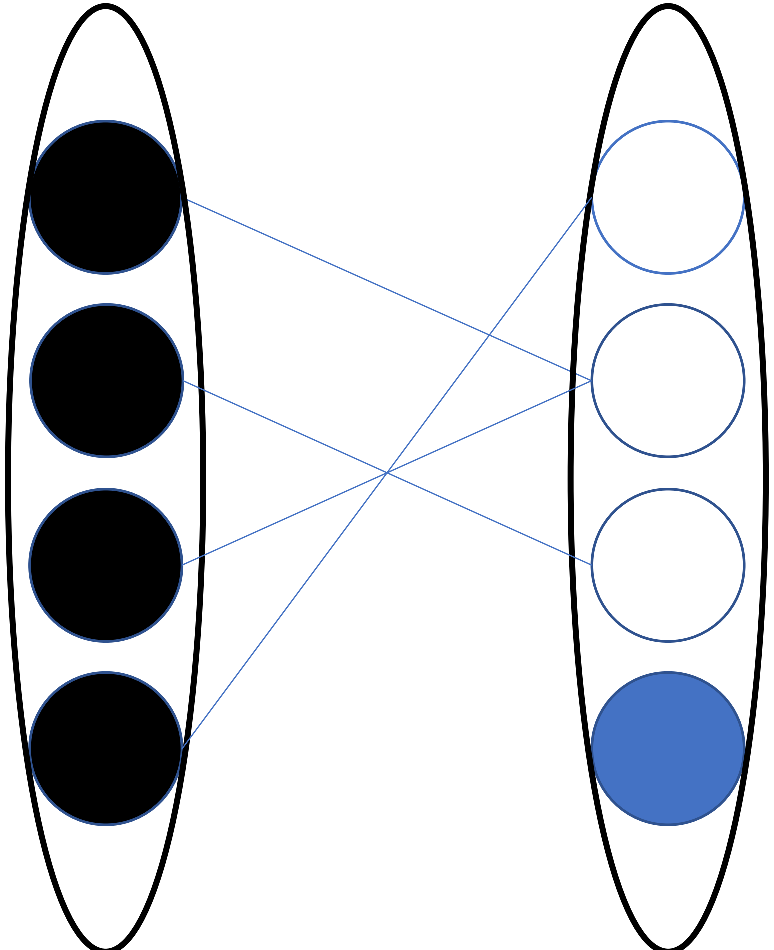
因此，我们可以采用黑白染色的方法去判定一个图是不是二分图



二分图的判定

由定义可知，二分图中一定没有奇环

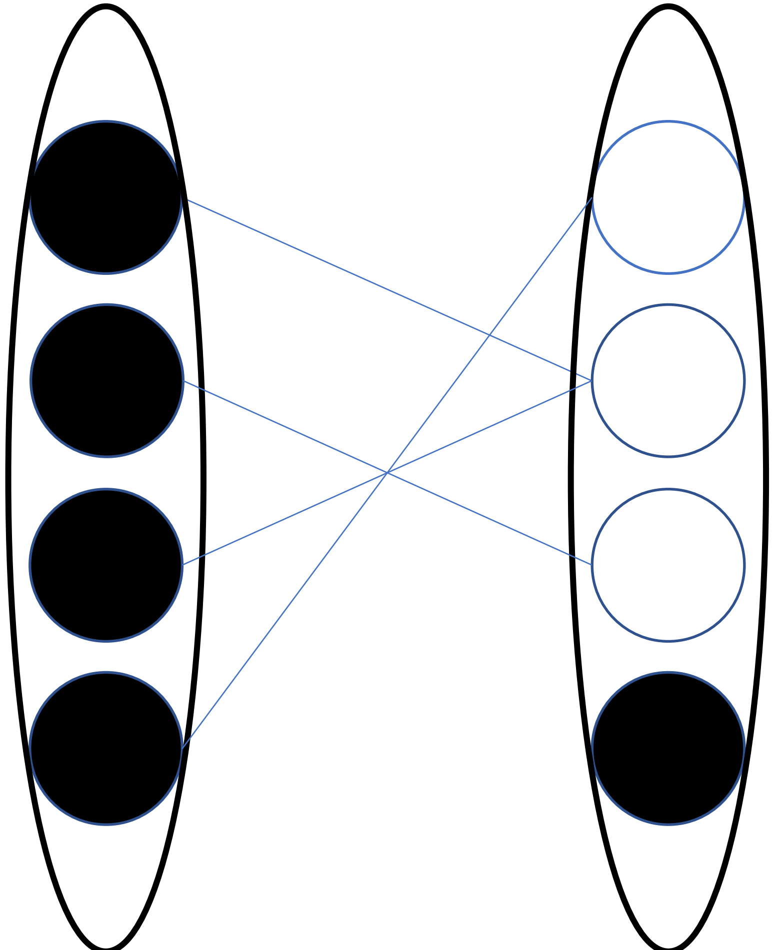
因此，我们可以采用黑白染色的方法去判定一个图是不是二分图



二分图的判定

由定义可知，二分图中一定没有奇环

因此，我们可以采用黑白染色的方法去判定一个图是不是二分图

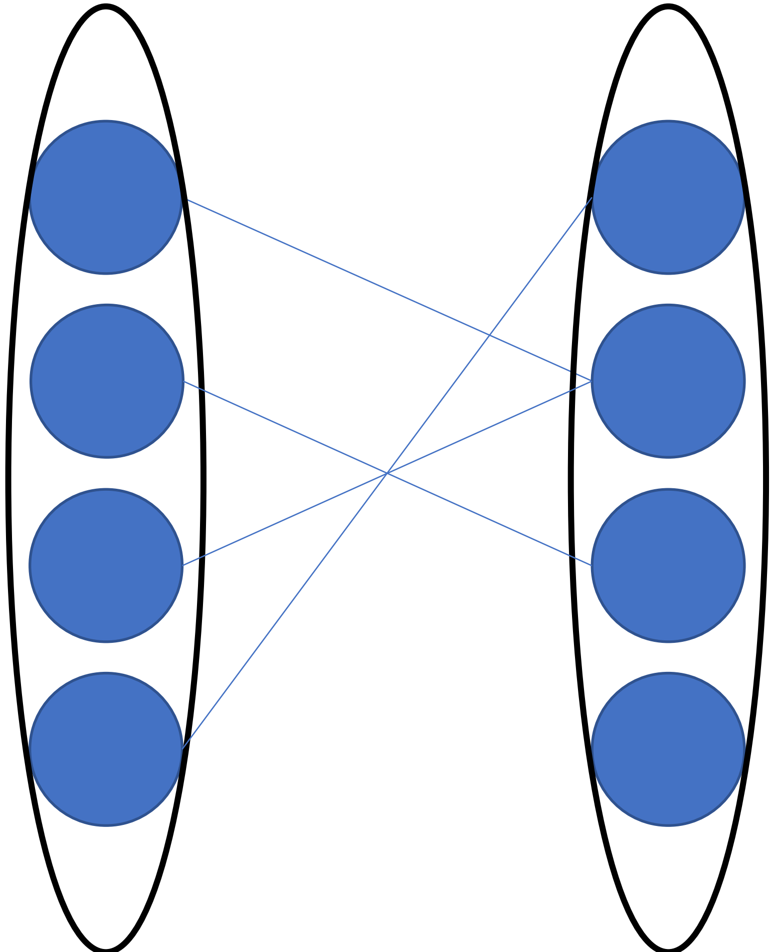


二分图的匹配

给定一个二分图G，M为G边集的一个子集，如果M满足当中的任意两条边都不依附于同一个顶点，则称M是一个匹配。

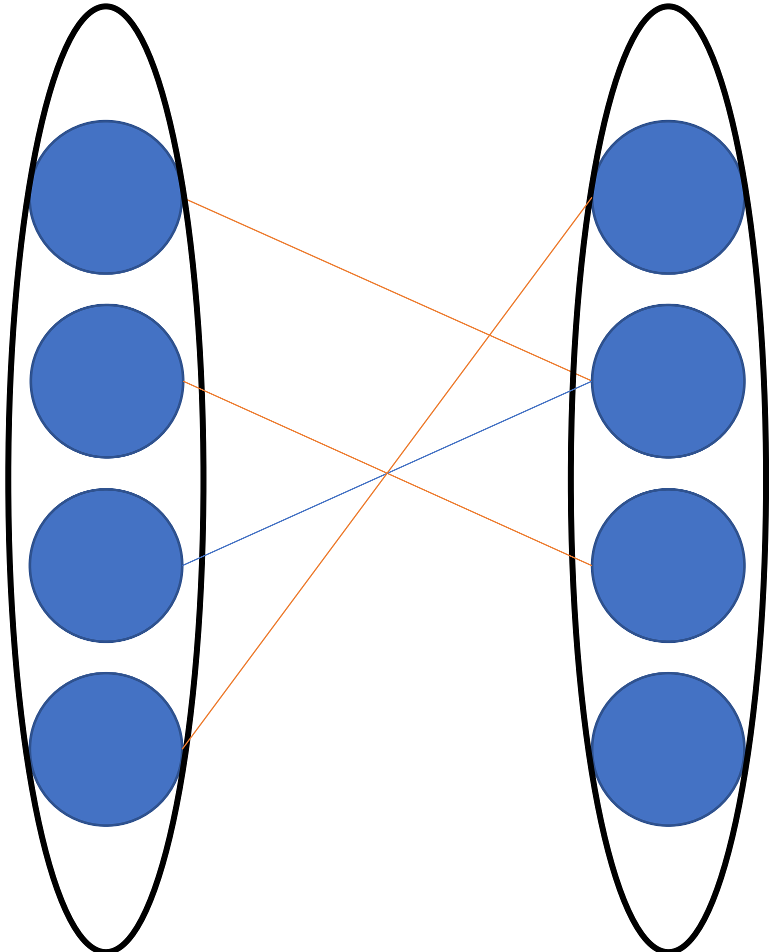
形式化的定义

在图 G = (V, E) 中，边集 E′ ⊆ E 被称为 G 的一个匹配当 且仅当对 于 V 中的每个点，E′ 中与其关联的边不超过一条



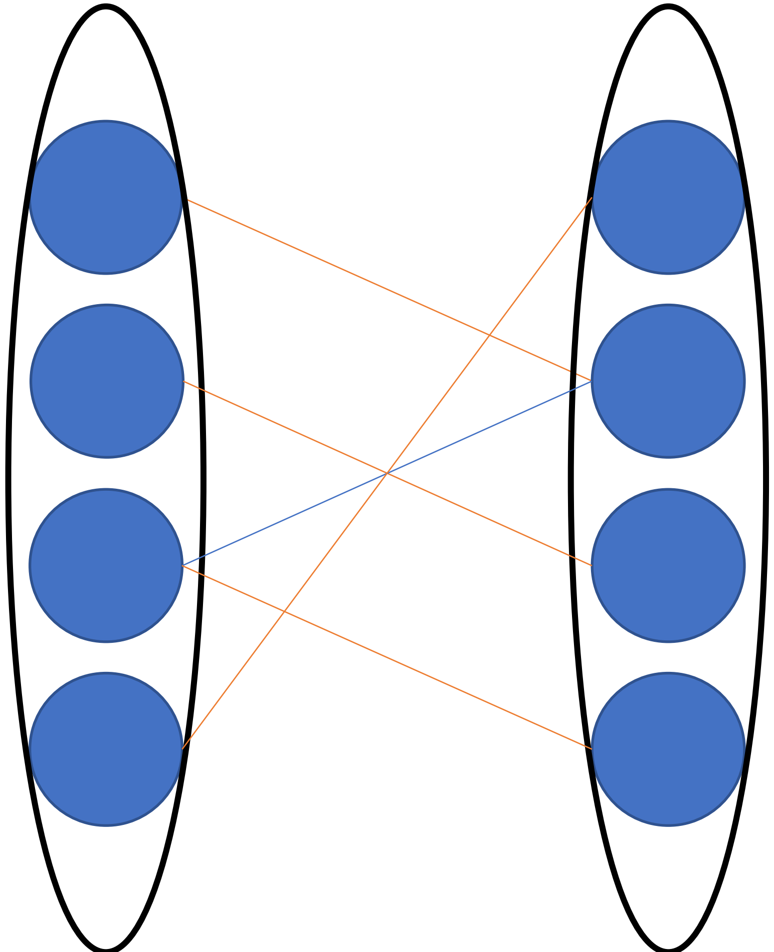
二分图的最大匹配

图中包含边数最多的匹配称为图的最大匹配。

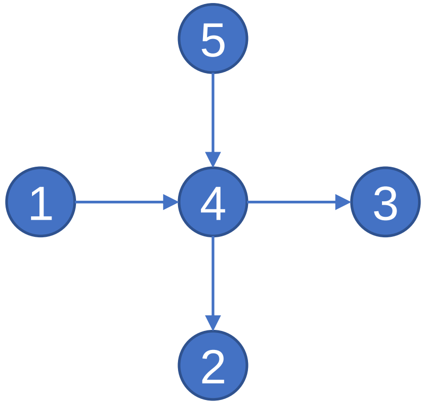


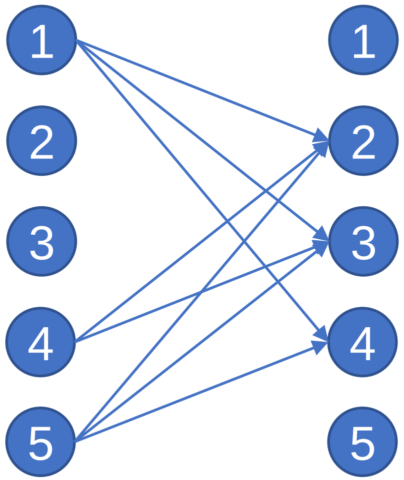
二分图的完美匹配

如果所有点都在匹配边上，称这个最大匹配是完美匹配。
显然，完美匹配一定是最大匹配



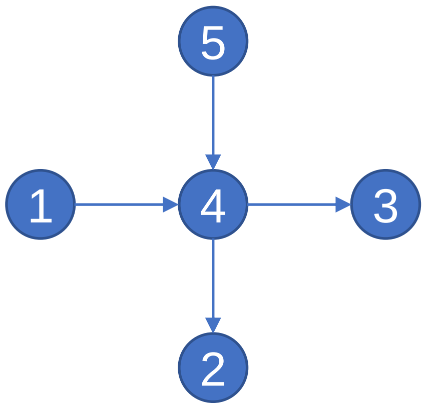
	1	2	3	4	5
1		1	1	1	
2					
3					
4		1	1		
5		1	1	1	

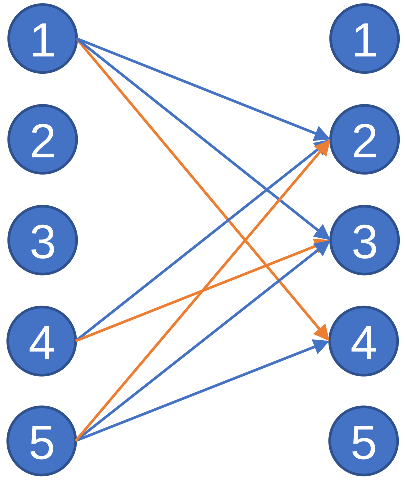




根据给出的数据画出二分图

	1	2	3	4	5
1		1	1	1	
2					
3					
4		1	1		
5		1	1	1	



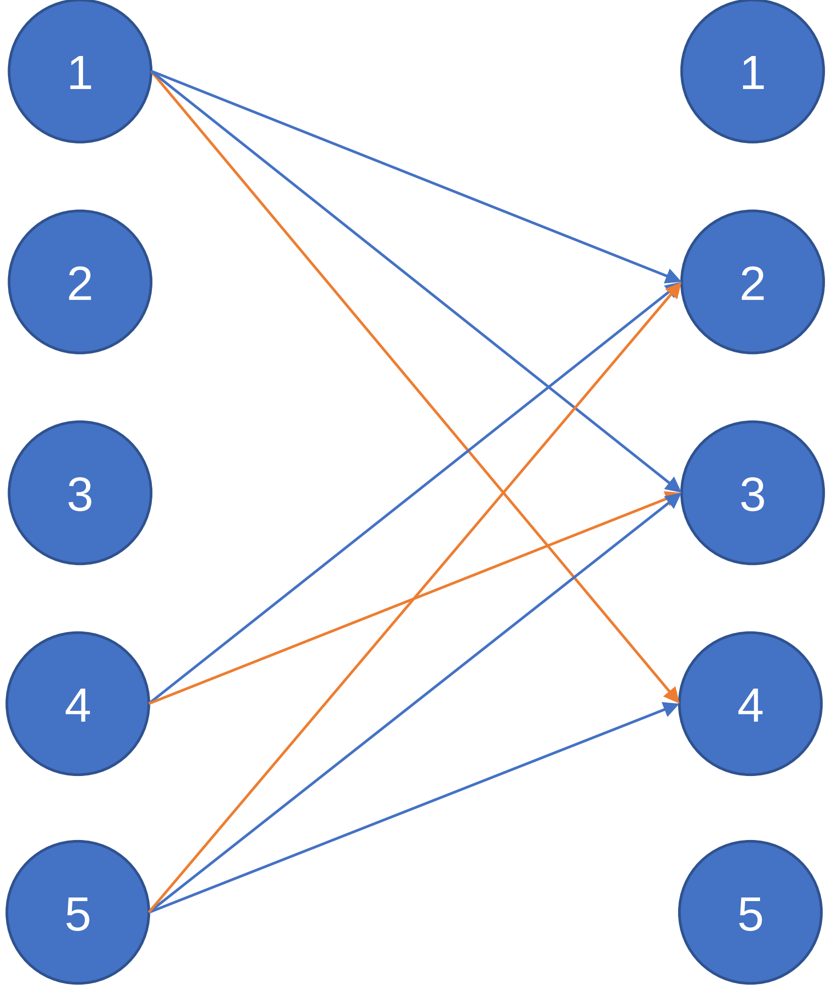


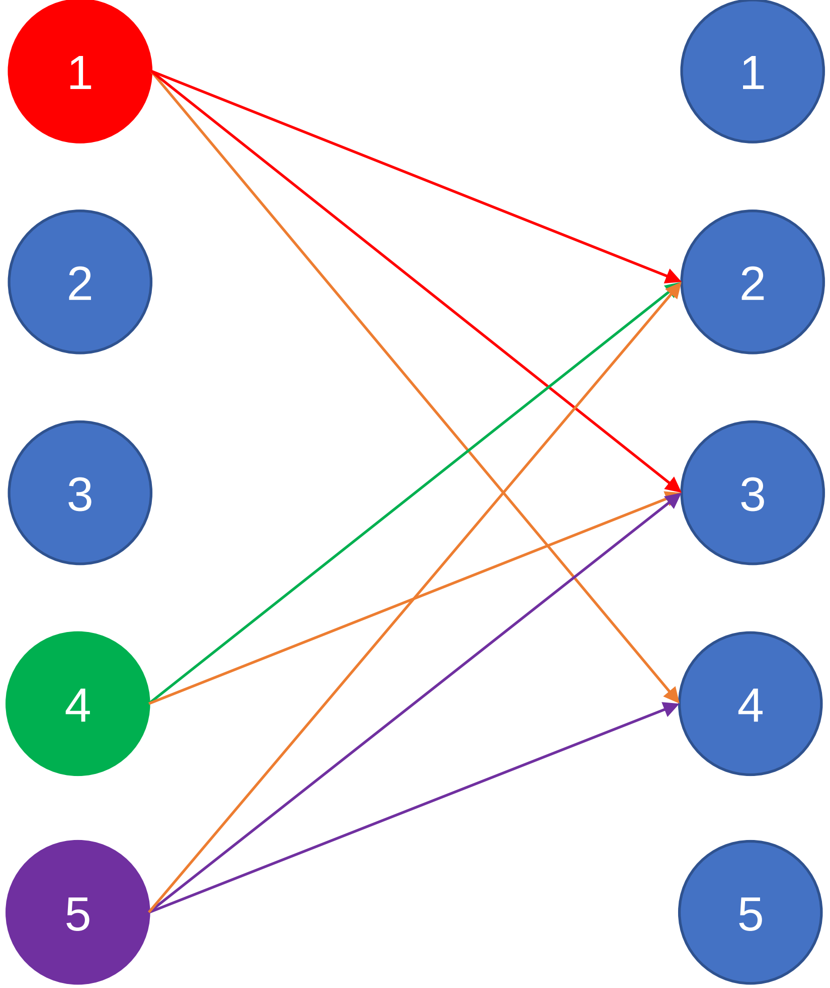
预先处理图中任意两点是否能够到达，只用关心起点　终点
使用 Floyd 算法

```
for(int k=1;k<=n;k++)
    for(int i=1;i<=n;i++)
        for(int j=1;j<=n;j++)
            if(e[i][j]>e[i][k]+e[k][j])
                e[i][j]=e[i][k]+e[k][j];
```

传递闭包

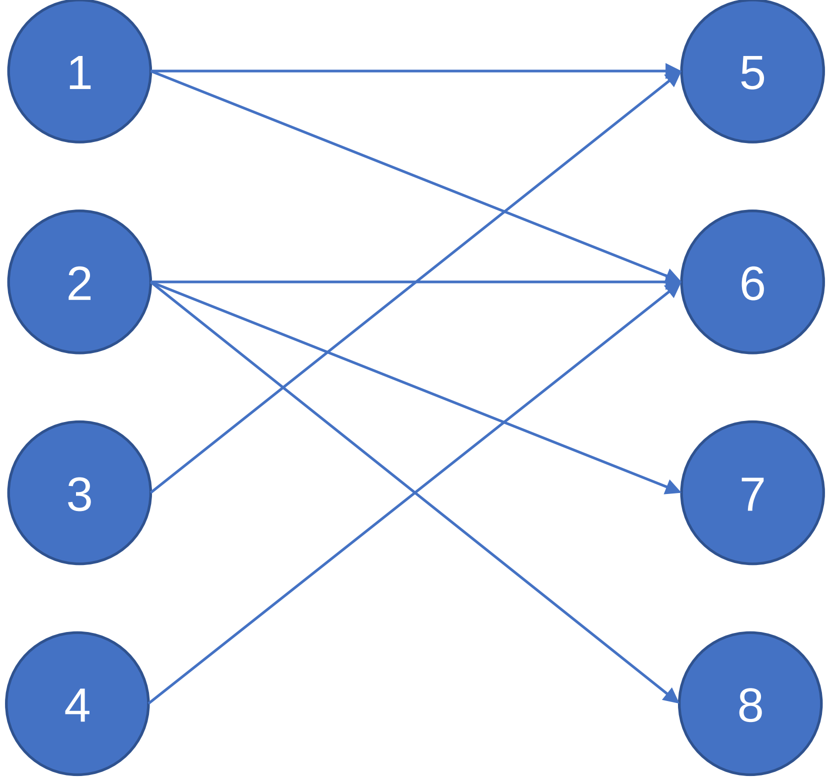
```
for(int k=1;k<=n;k++)
    for(int i=1;i<=n;i++)
        for(int j=1;j<=n;j++)
            if(e[i][k]&&e[k][j])
                e[i][j]=1;
```


1
2
3
4
5
1
2
3
4
5

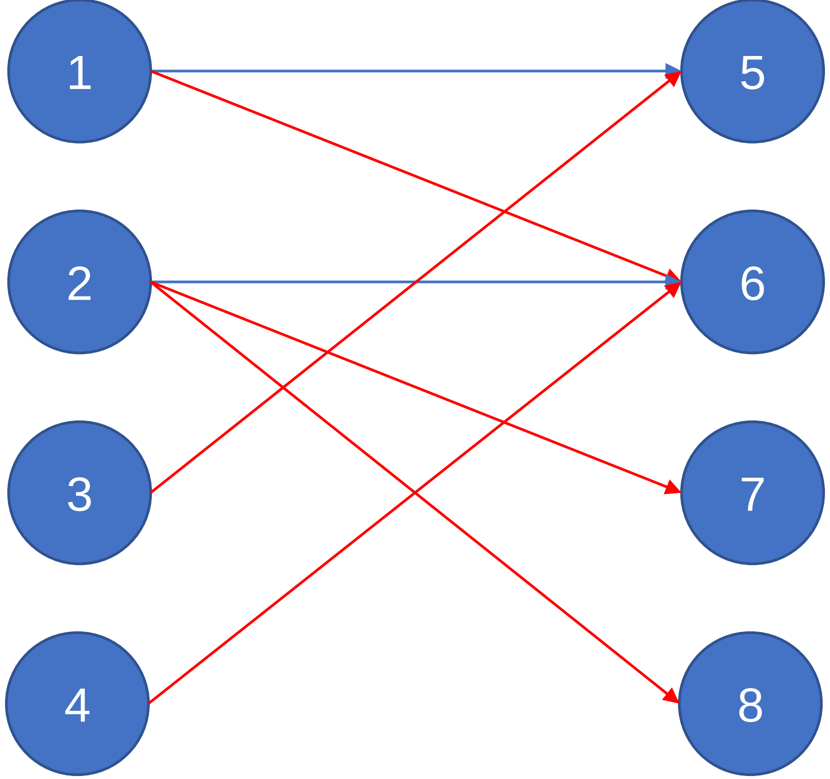


发现：不在最大匹配的边，总是被一个最大匹配的节点所控制
每个匹配只用选一个点即可

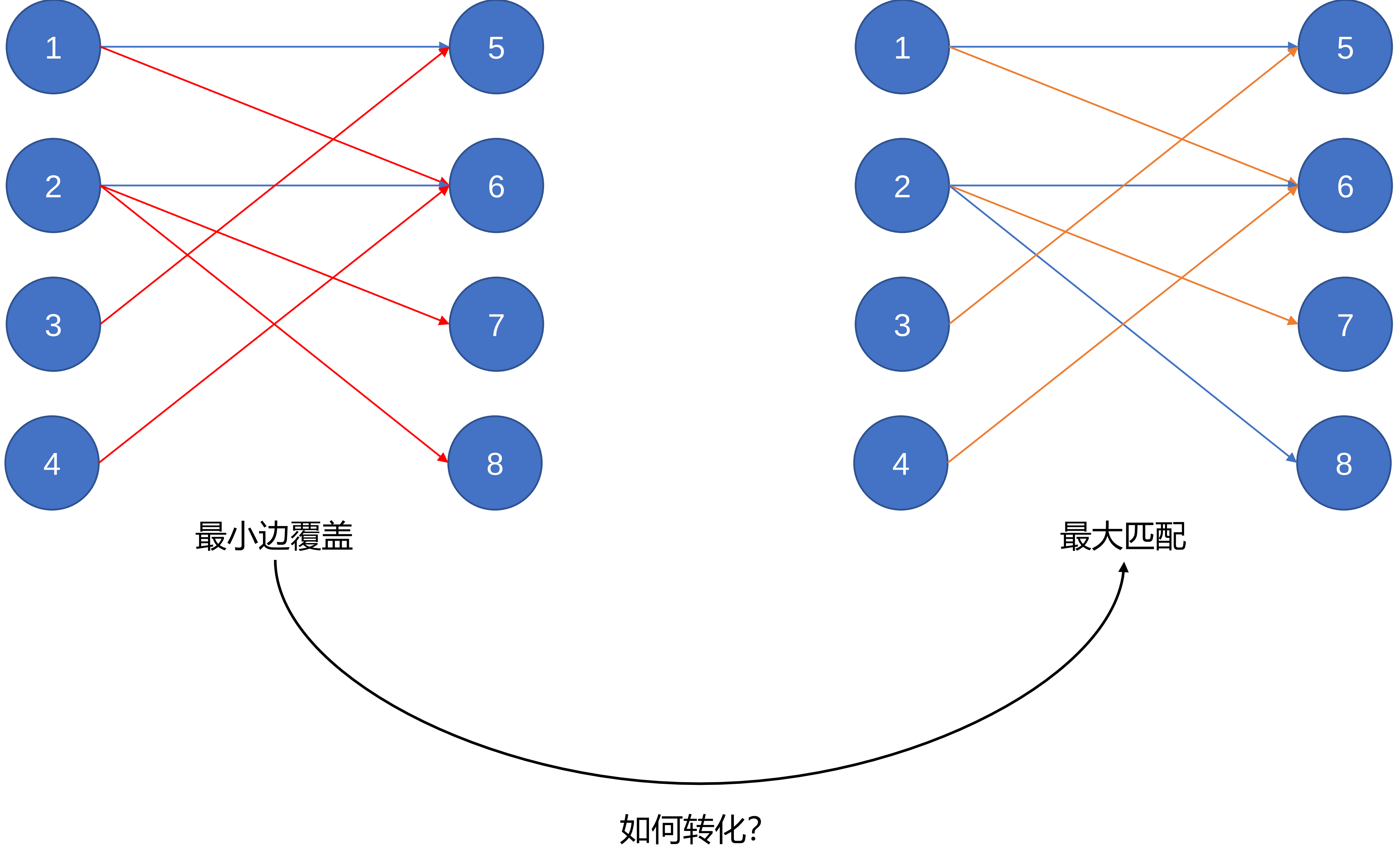
最小点覆盖=最大匹配



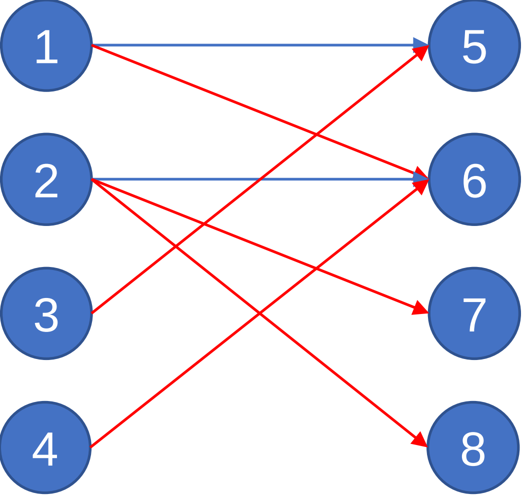
现在我们来研究一下最小边覆盖



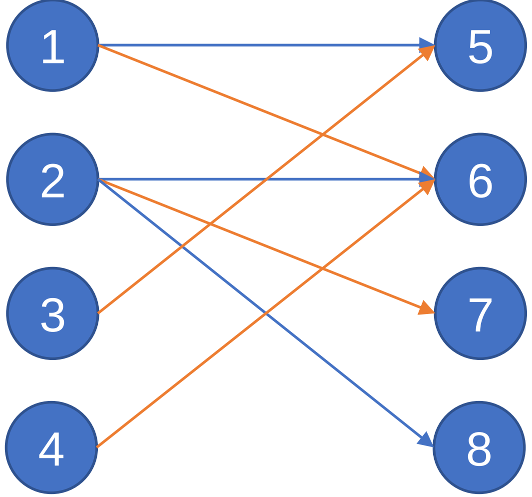
显然，最小边覆盖为5



1
2
3
4
5
6
7
8
最小边覆盖
1
2
3
4
5
6
7
8
最大匹配
如何转化?



最小边覆盖



最大匹配

最大匹配与最小边覆盖

对于任意无孤立点的图而言

$$|M_{max}| + |F_{min}| = |V|$$

用中文描述就是「最大匹配数 + 最小边覆盖数 = 顶点数」

证明

公式：最小边覆盖=总点数-最大匹配数

设最大匹配为 M_{max}，最小边覆盖为 F_{min}。

根据定义，最大匹配 M 中所有的边共覆盖了 $2 \times |M_{max}|$ 个顶点。

既然已经覆盖了 $2 \times |M_{max}|$ 个顶点。

那么还有 $|V| - 2 \times |M_{max}|$ 个顶点未被覆盖。

我们在最大匹配的基础上加边，每加一条边最多可以扩展 1 个顶点（如果能扩展 2 个说明不是最大匹配），则最少要加 $|V| - 2 \times |M_{max}|$ 条边。

所以 $|F_{min}| = |V| - 2 \times |M_{max}| + |M_{max}| = |V| - |M_{max}|$。

得到 $|M_{max}| + |F_{min}| = |V|$

证毕。

证明来自[sengxian 的blog]

代码 二分图的判定

```
bool dfs(int u,int c) {
    vis[u]=c;
    for(int i=first[u];i;i=nxt[i]) {
        if(vis[v[i]]==c) return 0;
        if(!vis[v[i]]&&!dfs(v[i],3-c)) return 0;
    }
    return 1;
}
```

代码 二分图最大匹配

```
int dfs(int u) {
    for(int i=1;i<=m;i++) {
        if(e[u][i]==1&&!book[i]) {
            book[i]=1;
            if(match[i]==0||dfs(match[i])) {
                //没有匹配或者匹配的点可以增广
                match[i]=u;
                return 1;
            }
        }
    }
    return 0;
}
```

总结（总点数n，最大匹配数m）

1.最大匹配　最大边独立集（m）

2.最大点独立集（n-m）总点数-最小点覆盖

3.最小点覆盖（m）

4.最小边覆盖（n-m）

5.DAG最小路径覆盖（n-m）

6.DAG最小路径覆盖（可相交）（Floyd）（n-m）

练习题

CF-gym-101755D. Transfer Window

n 个球员，有 m 个关系，表示某个球员可以换成另外一个球员。现在有某 K 个球员，想要 K 个其它球员（可能已经有了可能没有），问是否有交换方案。

n <= 300, m <= 90000

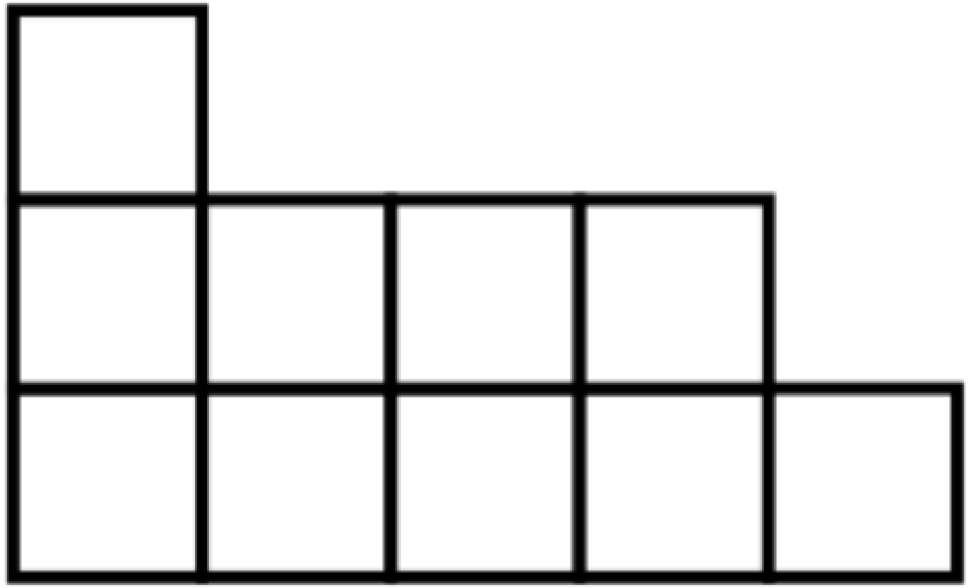
CF-gym-101755D. Transfer Window

Floyd 预处理闭包，建立二分图，左部是不想要的球员，右部是还没获得的球员，看是否能够满匹配。

CF1268B. Domino for Young

- 有 n 列格子，排在一起，第 i 列的高度是 ai，要在这个图上放 1x2
- 的多米诺骨牌，问最多可以放多少张骨牌?

- n <= 300000, ai <= 300000 且单调递减



Young diagram for $a = [3, 2, 2, 2, 1]$.

CF1268B. Domino for Young

对格子进行黑白染色，答案是两种格子数量的较小值

考虑建二分图，容易证明匹配一定可以配满，因为任意一个白格到任意一个黑格之间都能找一个增广路

CF623A.Graph and String

n 个结点的无向图，每个结点标号”abc” 三个字母其中一个。

将标号为相同字母的结点连边，将所有标号为 b 的结点与其它标号的结点连边。

给出图的 m 个连边，求一种合法的标号方案，不存在输出’NO’。

$1 \le n \le 500, 1 \le m \le 200000$

CF623A.Graph and String

如果有一个点和其它点都有连边，将其标号 b。 然后图剩下两个 团，一个标号 a，一个标号 c。

CF1093D. Beautiful Graph

n 个点 m 条边的无向图，可以给每个点赋权值 1, 2 或 3。

要求赋值之后，每条边的两个端点权值和是奇数，问有多少种赋值可能，答案对 1000000007 取模。

$1 \leq n, m \leq 100000$

CF1093D. Beautiful Graph

不同的连通块可以乘法原理算答案。

单点有 3 种可能赋值。

一个连通块是二分图是才有解，如果左部有 p 个点，右部有 q 个点，这个连通块有 2^p + 2^q 种方案数。

CF741C. Arpa’s overnight party and Mehrdad’s silent entering

有 n 对情侣坐成一个圈，有两种食物，要给每个人分其中一种，要求每对情侣的食物不同，任意连续的三个人必须要有两人食物不同。

求分配方案，无解输出-1

$1 \leq n \leq 100000$

CF741C. Arpa’s overnight party and Mehrdad’s silent entering

改变限制，要求 $2i$ 和 $2i-1$ 食物类型不同

发现这张图上没有奇环

二分图染色