



*Университет науки и технологий МИСИС (НИТУ
МИСИС)*

Кафедра инженерной кибернетики

БМП-XX-РК-1

Практическая работа #1:

**Решение задач по линейным цепям постоянного
тока методами Кирхгофа, методом контурных
токов и методом узловых потенциалов**

Студент:
Иванов Иван

Преподаватель:
**Давиденко Сергей
Александрович**
*Ассистент кафедры
инженерной кибернетики*

Основы электротехники и электроники

29 сентября 2025 г.

1 Теория

1.1 Подсчет контуров, узлов и ветвей

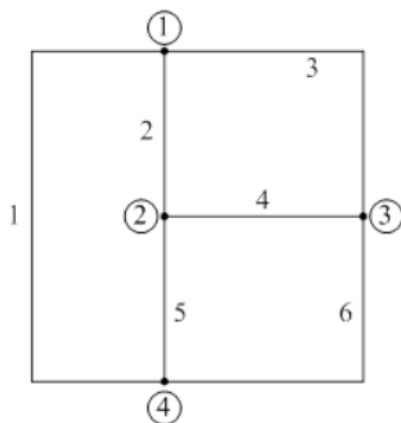


Рисунок 1: Граф электрической цепи

Граф цепи - скелетная форма цепи, состоящая только из ветвей и узлов, соединяющих их. По сути это соединения проводников без участия элементов цепи. Такой граф показывает как может проходить электрический ток. Как правило, в больших электрических схемах оказывается полезным превращать электрическую схему в граф для того, чтобы уменьшить нагромождения и посчитать количество узлов, ветвей и контуров.

Ветвь графа цепи - такой элемент графа по которому протекает один и тот же ток, т.е. элемент является неразрывным проводником, не содержащим внутри себя узел. Обычно, ветвь образуется между двумя узлами. Ветвь может содержать сразу несколько как пассивных, так и активных элементов

На рисунке 2 показаны 6 ветвей.

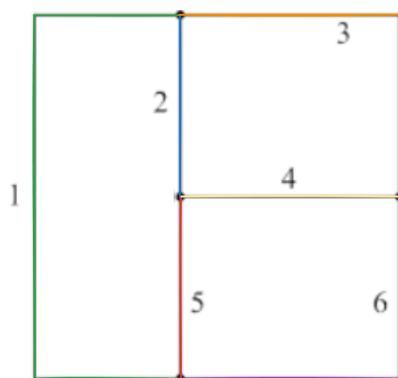


Рисунок 2: Ветви графа электрической цепи

Узел графа - место соединения трех или более ветвей. Является началом или концом ветви.

На рисунке 3 показаны 4 узла.

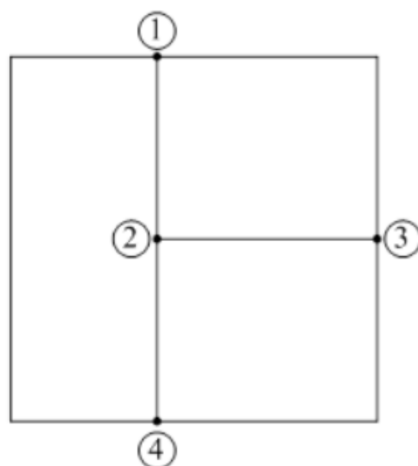


Рисунок 3: Узлы графа электрической цепи

Контур графа цепи - замкнутый путь, который состоит из ветвей графа, соединенных узлами.

На рисунке 4 показаны 7 контуров

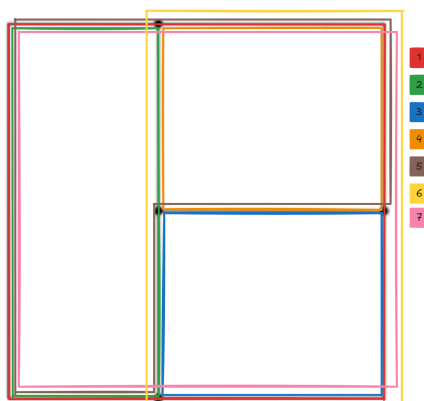


Рисунок 4: Узлы графа электрической цепи

Независимые контура цепи - такие контура цепи, имеющие **только одну** ветвь входящую в множество ветвей, образующую этот контур

Понятие независимости контуров является свойством, которое описывает взаимоотношения нескольких контуров, но не одного. Поэтому независимым может быть только контур 1 по отношению к контуру 2, сам по себе контур 1 не может быть независимым

На рисунке 5 контур 1 является независимым по отношению к 2 и 3, однако это не единственная комбинация независимых контуров.

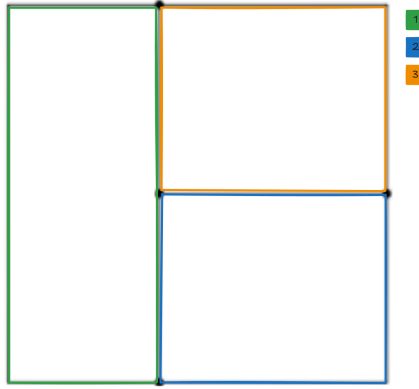


Рисунок 5: Независимые контура графа электрической цепи

1.2 Закон Ома и уравнение Джоуля Ленца

Закон Ома - это закон, который связывает напряжение, ток и сопротивление в электрической цепи. Технически, закон Ома является математическим описанием пассивного элемента цепи - электрического сопротивления.

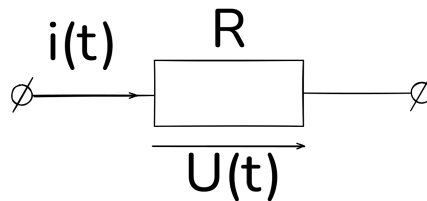


Рисунок 6: Закон Ома для неполной цепи

Закон Ома для неполной цепи 6 описывает абстрактное понятие напряжение и записывается следующим образом (1):

$$I = \frac{U}{R} \quad (1)$$

где U - напряжение, I - ток, R - сопротивление.

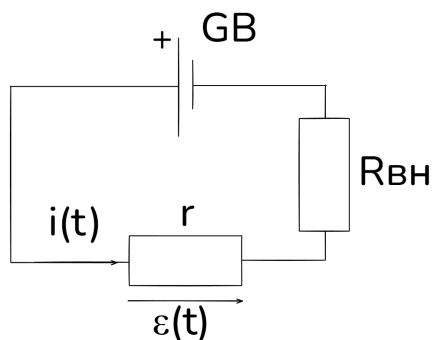


Рисунок 7: Закон Ома для полной цепи

В то время как закон Ома для полной цепи (7) выражается через понятие ЭДС и учитывает внутреннее сопротивление источника электрического тока. В этом случае полный закон Ома записывается следующим образом (2):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (2)$$

где \mathcal{E} - ЭДС источника, R - внешнее сопротивление, r - внутреннее сопротивление источника.

В пассивных элементах цепи происходит преобразование электрической энергии в другие виды энергии. В контексте пассивного элемента обладающего электрическим сопротивлением, энергия электрического тока преобразуется в тепловую энергию. Этот процесс описывается уравнением Джоуля Ленца (3):

$$Q = I^2 R t \quad (3)$$

где Q - количество теплоты, I - ток, R - сопротивление, t - время.

1.3 Последовательное и параллельное соединение. Метод эквивалентных преобразований

Эквивалентными преобразованиями называют методы расчета простых цепей с использованием закона Ома и преобразований участков схемы.

Различают два основных типа эквивалентных преобразований: последовательное и параллельное соединение. Кроме того, встречаются нестандартные типы соединения: звезда и треугольник. Существуют методики для перевода этих типов соединения в комбинацию линейных преобразований.

Последовательное соединение резисторов 8 описывается следующим образом:

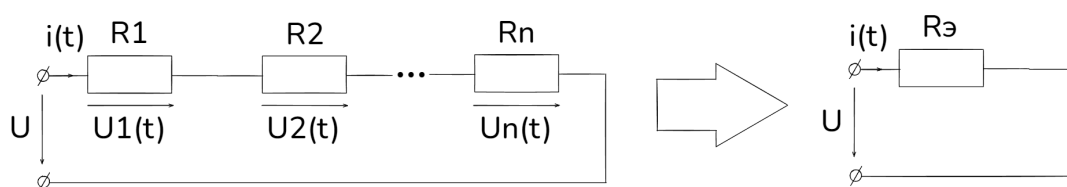


Рисунок 8: Последовательное соединение резисторов

При последовательном соединении резисторов через них протекает один и тот же ток (это следует как из закона Ома для неполной цепи, так и из того факта, что все резисторы находятся на одной ветви), однако на каждом из элементов падает напряжение, которое зависит от значения сопротивления. Сумма падений напряжений на всех сопротивлениях равна напряжению на всем участке цепи.

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (4)$$

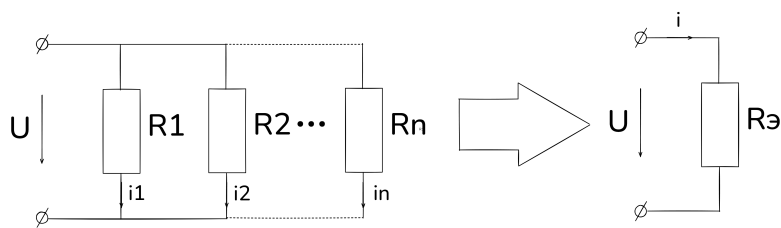


Рисунок 9: Параллельное соединение резисторов

При параллельном соединении резисторов через них протекает ток, который зависит от значения сопротивления. Сумма токов через все сопротивления равна току на всем участке цепи. При этом напряжение на всех сопротивлениях одинаковое.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (5)$$

1.4 Решение задач в линейных цепях постоянного тока

1.4.1 Формулировка проблемы

Обычно в задачах на расчет цепей постоянного тока требуется найти токи, напряжения и мощности на всех элементах цепи, но наиболее часто задача сводится именно к определению токов в ветвях. Дано: электрическая цепь, состоящая из нескольких пассивных и активных элементов, соединенных между собой определенным образом, значения элементов цепи как активных так и пассивных (сопротивления, емкости индуктивности, напряжения и токи источников). Найти: токи в ветвях.

1.4.2 Законы Кирхгофа

Наиболее классическим методом решения задач на расчет цепей постоянного тока является метод основанный на законах Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа звучит следующим образом:

Первый закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов входящих в узел равна алгебраической сумме токов выходящих из узла.

$$\sum_{i=1}^n I_i^{\text{вх}} = \sum_{i=1}^n I_i^{\text{вых}}, \quad (6)$$

где $I_i^{\text{вх}}$ - ток входящий в узел, $I_i^{\text{вых}}$ - ток выходящий из узла.

Второй закон Кирхгофа звучит следующим образом:

Второй закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма источников ЭДС в контуре равна алгебраической сумме падений напряжения на элементах в этом контуре.

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^n U_i, \quad (7)$$

где \mathcal{E}_i - ЭДС источника, U_i - падение напряжения на элементе.

В свою очередь падение напряжения на элементе определяется в зависимости от физического характера элемента.

В случае электрического сопротивления падение напряжения определяется по закону Ома для неполной цепи:

$$U_R = I_R R, \quad (8)$$

где I_R - ток через резистор, R - сопротивление резистора.

В случае электрической емкости падение напряжения определяется как интеграл от тока через элемент:

$$U_C = \frac{1}{C} \int_0^t I_C dt, \quad (9)$$

где C - емкость конденсатора, I_C - ток через конденсатор, t - время.

В случае электрической индуктивности падение напряжения определяется как дифференциал от тока через элемент:

$$U_L = L \frac{dI_L}{dt}, \quad (10)$$

где L - индуктивность катушки, I_L - ток через катушку, t - время.

Сложные цепи постоянного тока имеют количество источников более одного и более широкий класс соединений элементов цепи. При расчете сложных ЭЦ универсальным является метод расчета по законам Кирхгофа. Расчет таких цепей следует начинать с произвольного выбора стрелок токов в ветвях ЭЦ.

Количество расчетных уравнений Кирхгофа должно совпадать с количеством неизвестных токов схемы. Полученная система расчетных уравнений должна быть линейно независимой. Для этого уравнения Кирхгофа должны составляться для независимых узлов и независимых контуров.

Алгоритм решения задач методом законов Кирхгофа

1. Определить количество узлов и ветвей в цепи;
2. Выбрать независимые контуры;
3. Выбрать направления токов в ветвях и направления обхода контуров;
4. Записать уравнения для узлов и контуров;
5. Решить систему алгебраических уравнений;
6. Найти токи в ветвях;
7. Найти напряжения на элементах цепи;
8. Найти мощности на элементах цепи.

Для сложных ЭЦ, как правило, количество этих уравнений достаточно велико и их решение вручную весьма затруднительно. При современном уровне вычислительной техники расчеты проводятся на ЭВМ, однако составление уравнений долгая и утомительная работа.

1.4.3 Метод контурных токов

На ранних этапах развития расчетных методов были созданы косвенные методы снижающие порядок решаемых уравнений Кирхгофа. Характерным для косвенных методов анализа является то, что в уравнениях, описывающих электромагнитное состояние ЭЦ, в качестве переменных подлежащих определению, выступают не искомые токи и напряжения, а некоторые вспомогательные величины, например, узловые потенциалы и контурные токи.

Метод контурных токов является одним из основных косвенных методов расчета ЭЦ, который находит широкое применение на практике. Сущность этого метода заключается в том, что в каждом независимом контуре протекает свой условный, так называемый «контурный» ток. Система уравнений для контурных токов получается как результат сведения законов Кирхгофа к уравнениям только для независимых контуров.

Порядок расчета методом контурных токов

1. Определяем независимые контуры и указываем направления отсчета контурных токов и действительных токов в ветвях;
2. Определяем собственные, смежные сопротивления контуров и контурные ЭДС контуров;
3. Составляем уравнения для контурных токов, используя стандартную форму записи этих уравнений. Решаем полученную систему уравнений и определяем контурные токи ЭЦ;
4. Действительные токи определяются как алгебраическая сумма контурных токов, протекающих в этой ветви.

Действительный ток ветви находится как алгебраическая сумма контурных токов, протекающих в этой ветви. При этом, если направление действительного тока совпадает с направлением контурного тока, то контурный ток берется с собственным знаком. В противном случае контурный ток берется с противоположным знаком.

1.4.4 Метод узловых потенциалов

Методом узловых потенциалов называют метод анализа электрических цепей, в которых неизвестными являются потенциалы узлов ЭЦ. Потенциал одного из узлов называемого базисным принимается равным нулю. В качестве базисного узла схем обычно выбирают узел, в котором соединяется наибольшее количество элементов или, при наличии в схеме идеальных источников напряжения, узел, с которым соединяется один из зажимов идеального источника напряжения.

Система уравнений для узловых потенциалов получается сведением системы уравнений Кирхгофа к уравнениям только для независимых узлов ЭЦ. Таким образом размерность решаемой системы уравнений уменьшается, что и является основным достоинством косвенных методов расчета ЭЦ.

Последовательность решения задач методом узловых потенциалов

1. Определение количества независимых узлов и выбор направлений отсчета искомых токов в ветвях;
2. Выбор базисного узла;
3. Составление системы уравнений для узловых потенциалов;
4. Определение собственных и смежных проводимостей узлов и узловых токов ЭЦ;
5. Решение системы линейных алгебраических уравнений и определение узловых потенциалов;
6. Расчет токов в ветвях ЭЦ с использованием рассчитанных узловых потенциалов и законов Кирхгофа и Ома.

Токи в ветвях схемы находятся через узловые напряжения по следующему mnemonic правилу:

Ток в ветви равен разности узлового потенциала узла из которого он выходит минус узловой потенциал узла в который он входит, плюс ЭДС источника находящегося в этой ветви, если его стрелка совпадает со стрелкой тока или минус ЭДС источника, если его стрелка не совпадает со стрелкой тока и деленное на сопротивление ветви.

$$I_i = \frac{\varphi_i - \varphi_j + \mathcal{E}_i}{R_i}, \quad (11)$$

где φ_i - узловой потенциал узла из которого ток выходит, φ_j - узловой потенциал узла в который ток входит, \mathcal{E}_i - ЭДС источника находящегося в этой ветви, R_i - сопротивление ветви.

2 Практика

2.1 Варианты заданий

Таблица 1: Параметры источников и элементов

No	Источники			Элементы					
	E_1 , В	E_2 , В	J , А	R_1 , Ом	R_2 , Ом	R_3 , Ом	R_4 , Ом	R_5 , Ом	R_6 , Ом
1	40	20	4	5	2	10	5	6	8
2	20	40	2	2	1	30	10	10	2
3	40	10	6	4	5	3	3	4	2
4	10	40	8	6	3	5	5	10	5
5	50	20	1	2	1	30	10	10	2
6	20	50	3	6	8	5	10	9	4
7	60	20	7	4	2	6	6	8	5
8	20	60	9	3	1	2	8	10	4
9	10	30	5	5	4	1	4	5	8
10	30	10	10	3	4	10	4	6	3
11	10	50	4	6	7	8	6	3	5
12	50	10	2	7	8	9	10	5	7
13	60	10	6	6	7	10	5	3	2
14	10	60	8	7	9	6	10	8	6
15	10	70	1	6	8	9	5	7	9
16	70	10	3	8	9	10	7	5	6
17	80	20	7	7	8	6	9	5	10
18	20	80	9	6	9	10	5	7	8
19	80	10	5	7	8	9	10	5	7
20	10	80	10	6	7	9	8	10	8

2.2 Электрические цепи постоянного тока по заданиям

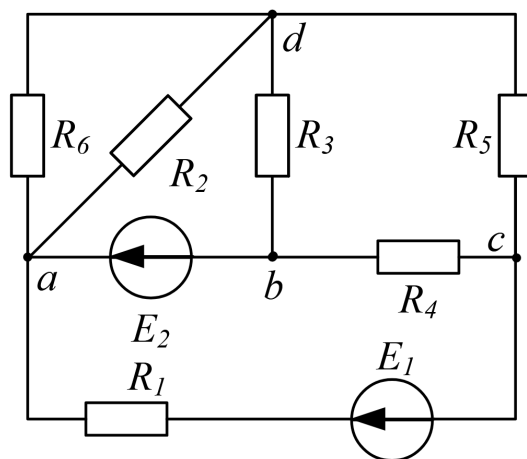


Рисунок 10: Вариант #1

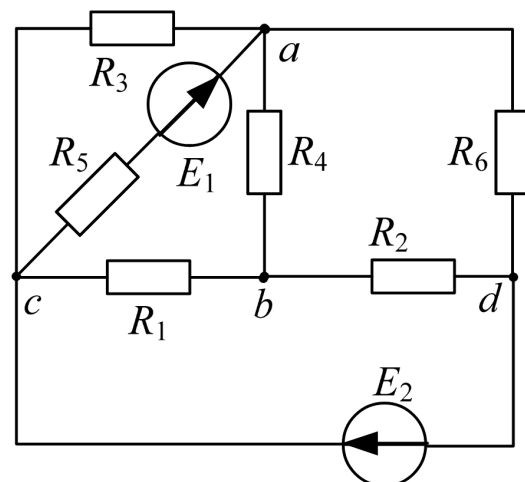


Рисунок 11: Вариант #2

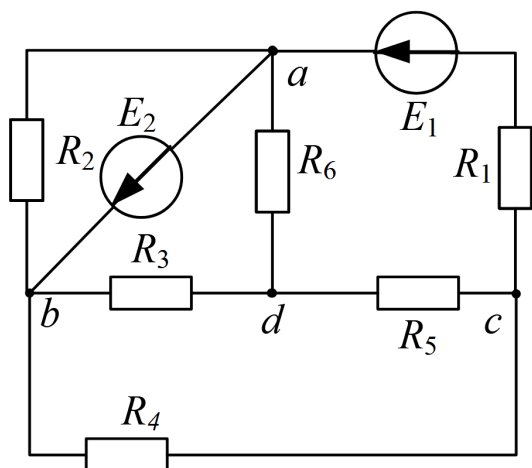


Рисунок 12: Вариант #3

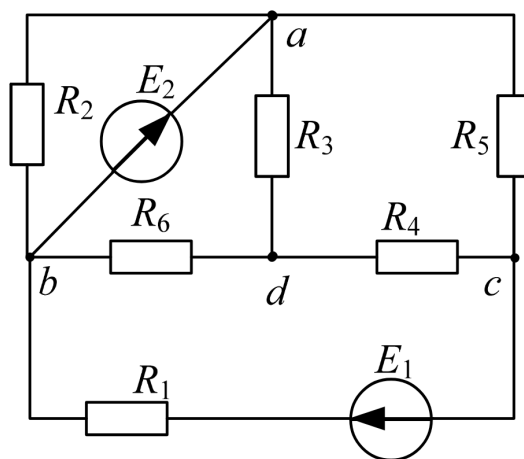


Рисунок 13: Вариант #4

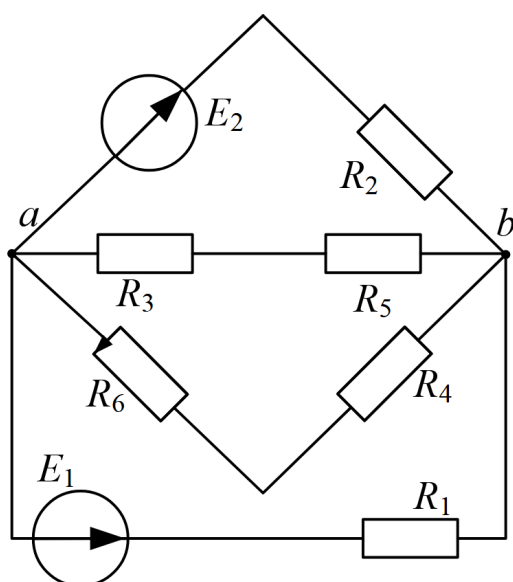


Рисунок 14: Вариант #5

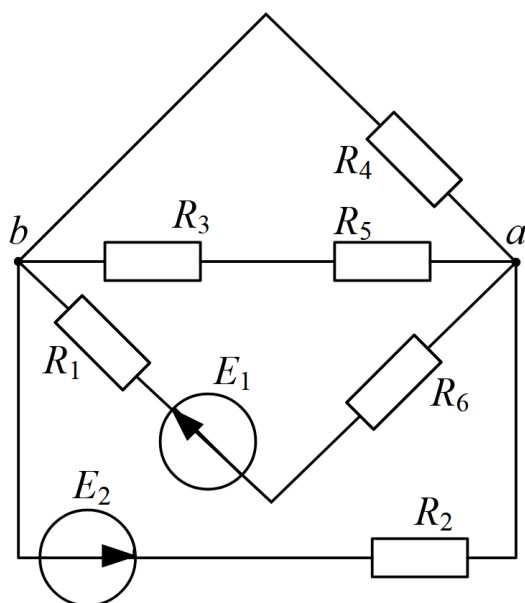


Рисунок 15: Вариант #6

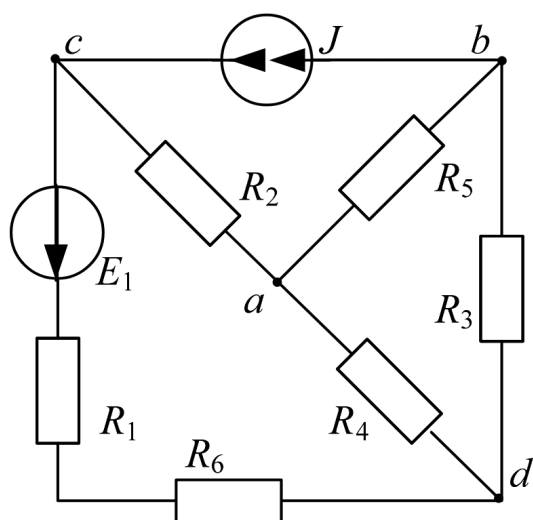


Рисунок 16: Вариант #7

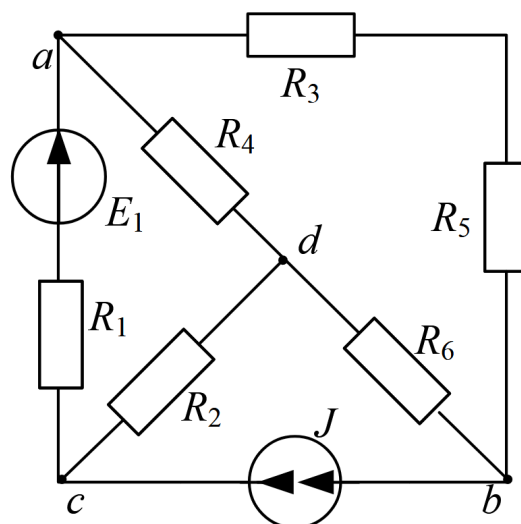


Рисунок 17: Вариант #8

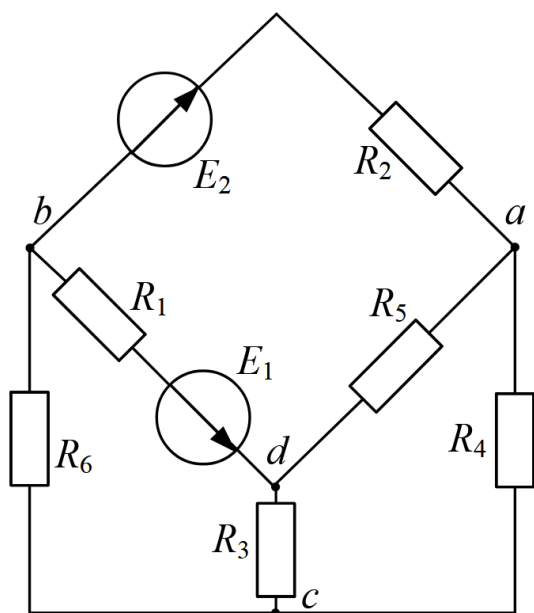


Рисунок 18: Вариант #9

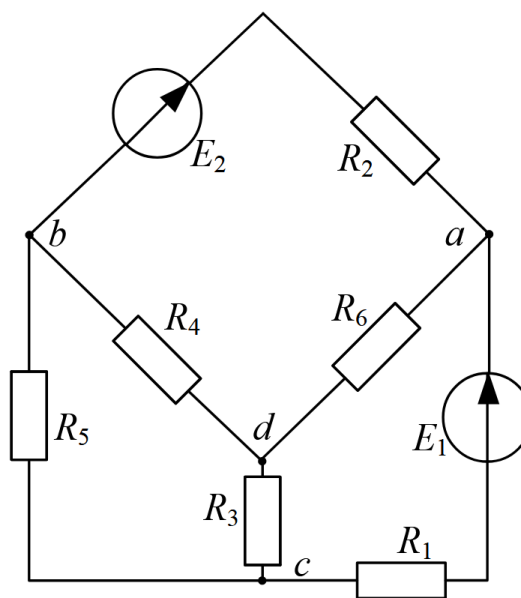


Рисунок 19: Вариант #10

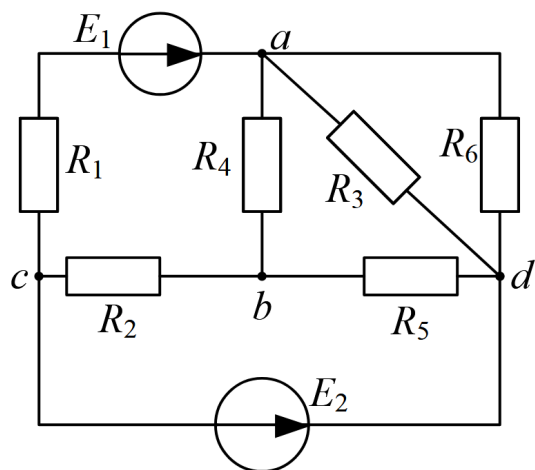


Рисунок 20: Вариант #11

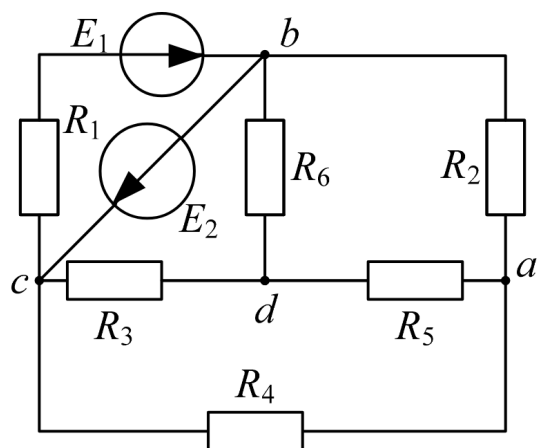


Рисунок 21: Вариант #12

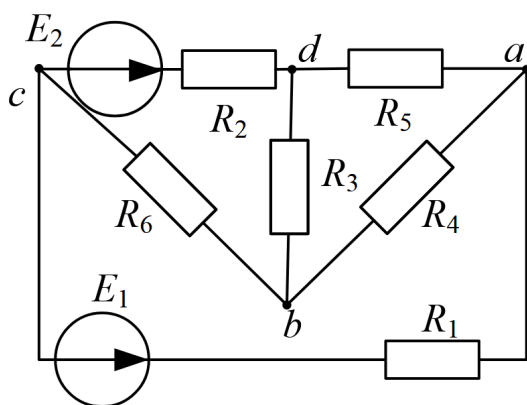


Рисунок 22: Вариант #13

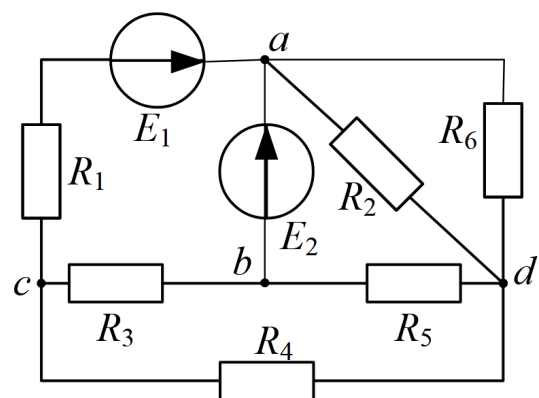


Рисунок 23: Вариант #14

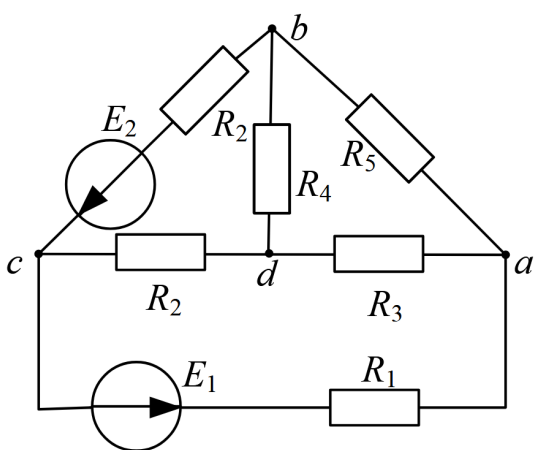


Рисунок 24: Вариант #15

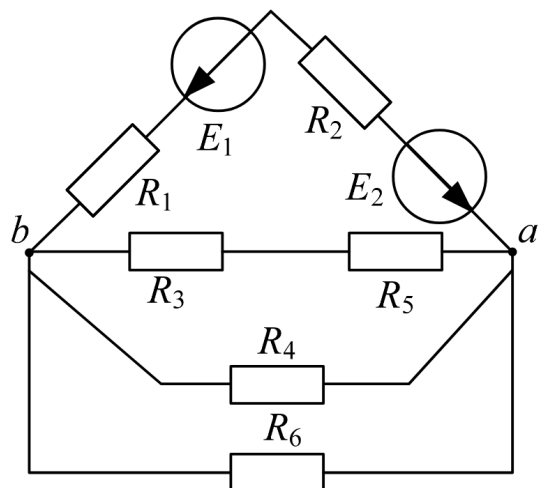


Рисунок 25: Вариант #16

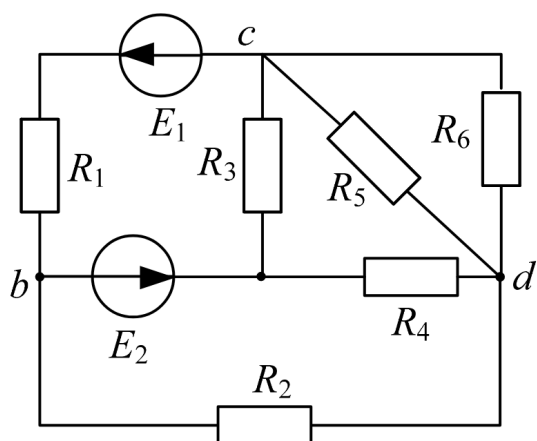


Рисунок 26: Вариант #17

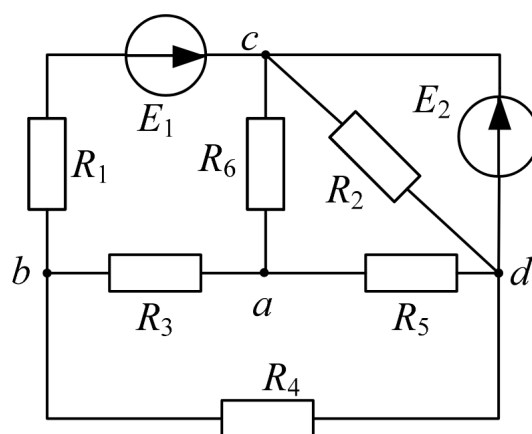


Рисунок 27: Вариант #18

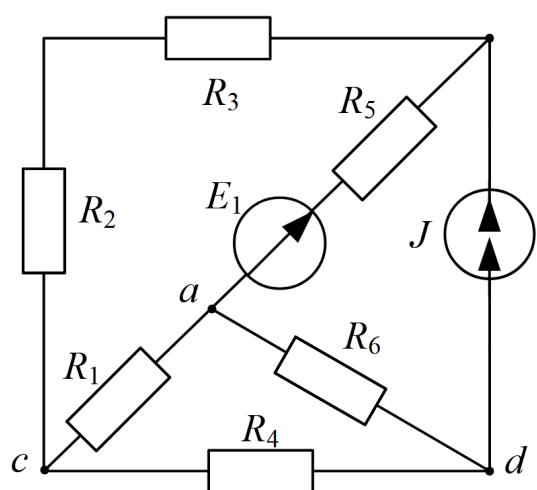


Рисунок 28: Вариант #19

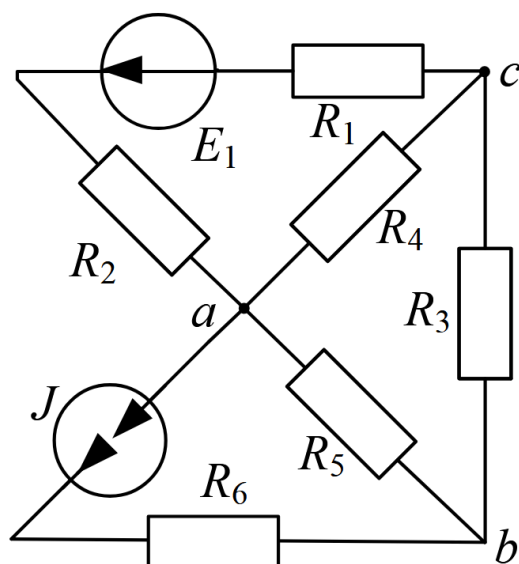


Рисунок 29: Вариант #20

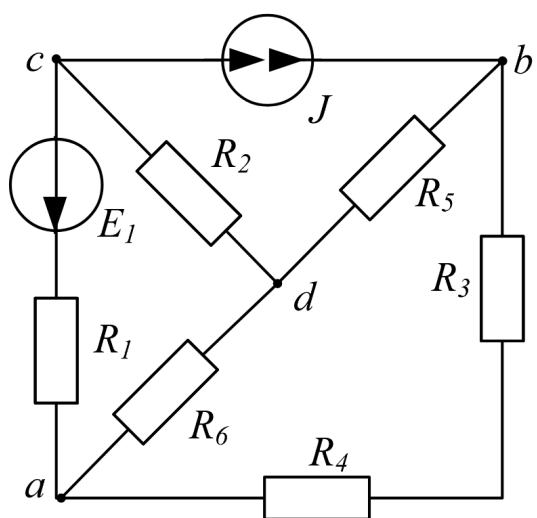


Рисунок 30: Вариант #21

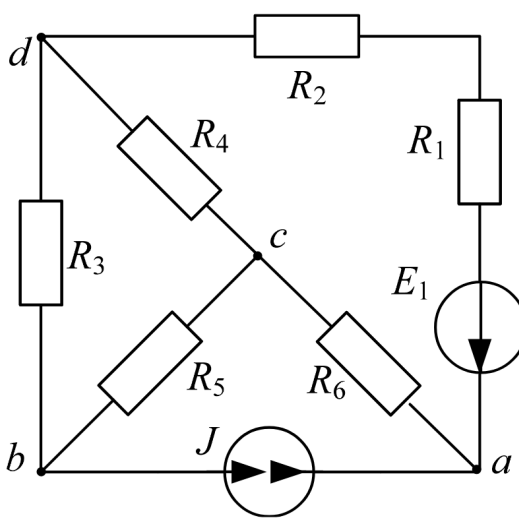


Рисунок 31: Вариант #22

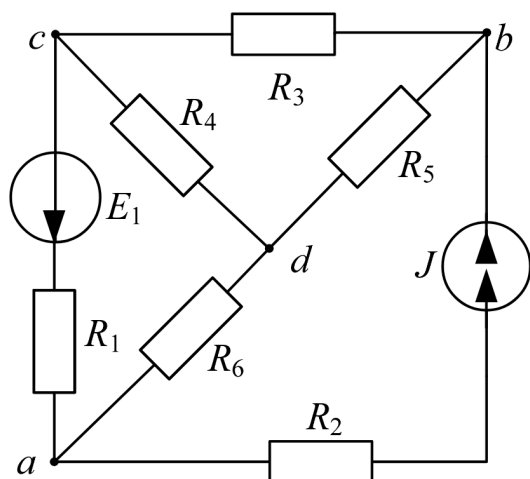


Рисунок 32: Вариант #23

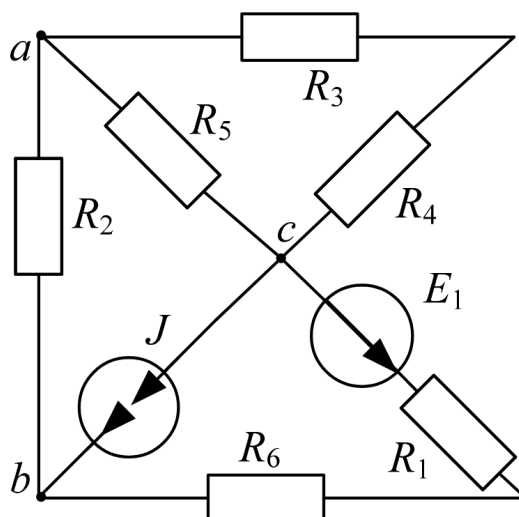


Рисунок 33: Вариант #24

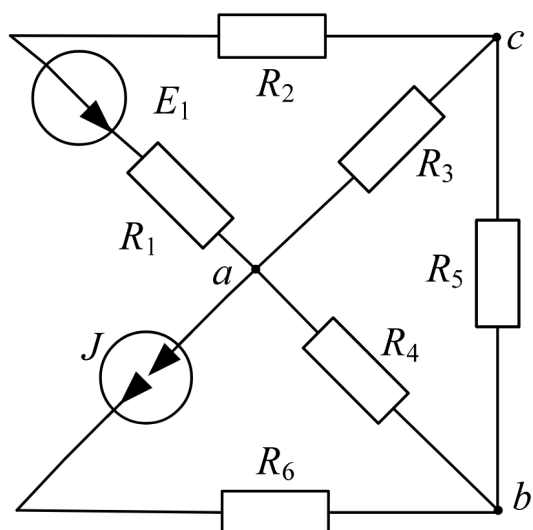


Рисунок 34: Вариант #25

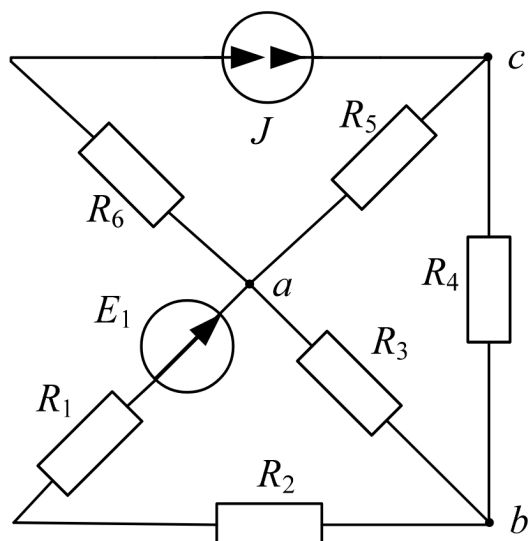


Рисунок 35: Вариант #26

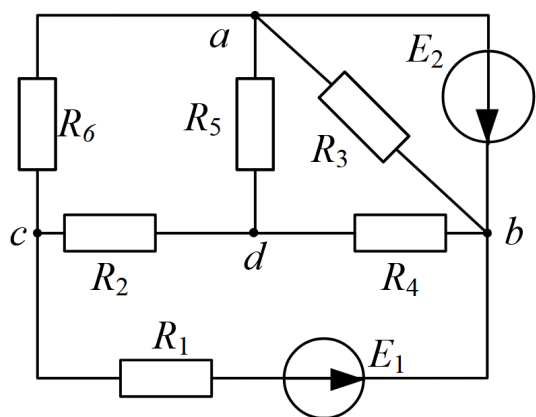


Рисунок 36: Вариант #27

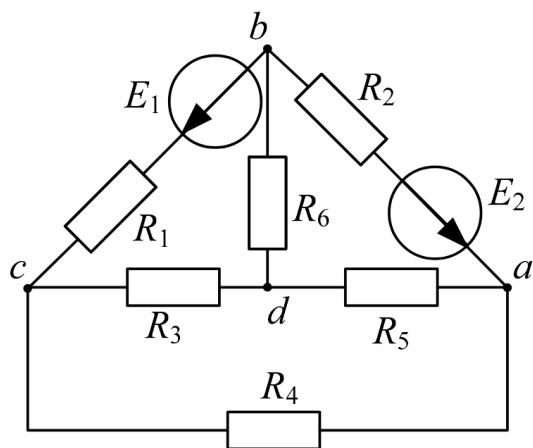


Рисунок 37: Вариант #28

2.3 Пример решения задач

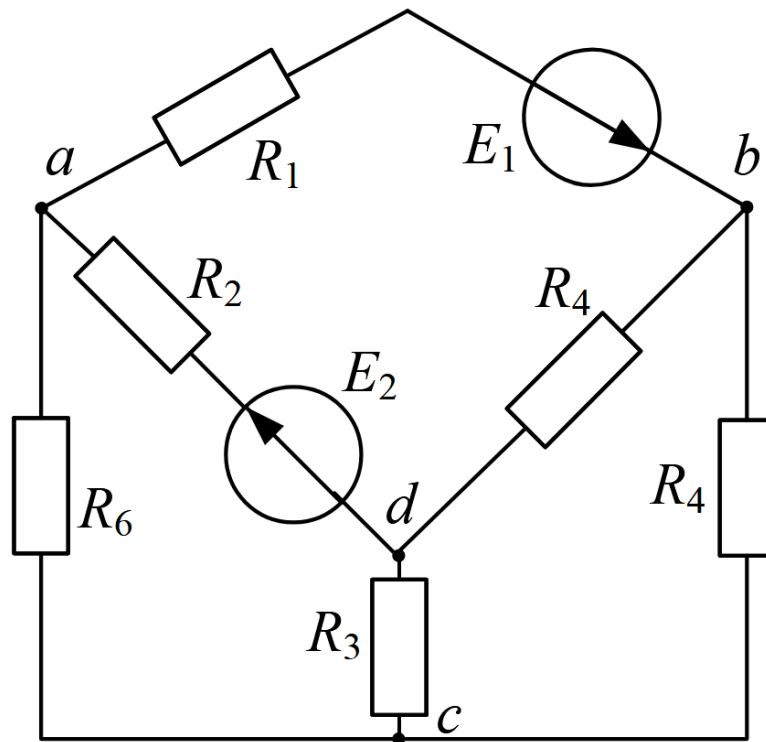


Рисунок 38: схема для примера

Дано:

Параметр	Обозначение	Значение
Источник ЭДС 1	E_1	30 В
Источник ЭДС 2	E_2	10 В
Сопротивление 1	R_1	3 Ом
Сопротивление 2	R_2	4 Ом
Сопротивление 3	R_3	10 Ом
Сопротивление 4	R_4	4 Ом
Сопротивление 5	R_5	6 Ом
Сопротивление 6	R_6	3 Ом

Таблица 2: Исходные данные для расчета

2.3.1 Задача 1. Контур, узлы и ветви

Необходимо посчитать для своей схемы количество узлов, ветвей и контуров, а также определить независимые контура и узлы.

В данной схеме:

$q = 4$ (количество узлов)

$b = 6$ (количество ветвей)

$q - 1 = 4 - 1 = 3$ (количество независимых узлов)

$n = 7$ (количество контуров)

$p = n - (q - 1) = 7 - (4 - 1) = 7 - 3 = 3$ (независимые контура)

Параметр	Значение
Количество узлов (q)	4
Количество ветвей (b)	6
Количество независимых узлов (q-1)	3
Количество контуров (n)	7
Независимые контура (p)	3

Таблица 3: Характеристики схемы

2.3.2 Задача 3. Анализ схемы на возможность упрощения. Метод эквивалентных преобразований

Упростить схему методом эквивалентных преобразований и найти эквивалентное сопротивление.

В данной схеме присутствует соединение как звездой, так и треугольником. Однако их преобразование только усложнит расчеты. Последовательно и параллельно соединенных резисторов в одной ветви нет. Поэтому упрощение схемы невозможно.

2.3.3 Задача 4. Законы Кирхгофа

Составить систему уравнений по законам Кирхгофа и решить её для определения токов в ветвях.

Решение:

Расставим направление токов в ветвях и выберем необходимые нам независимые узлы. Это будут a,b,c.

Выберем 3 независимых контура для составления уравнений по 2-му закону Кирхгофа.

3-мя независимыми друг к другу контура являются adc, bdc, adb.

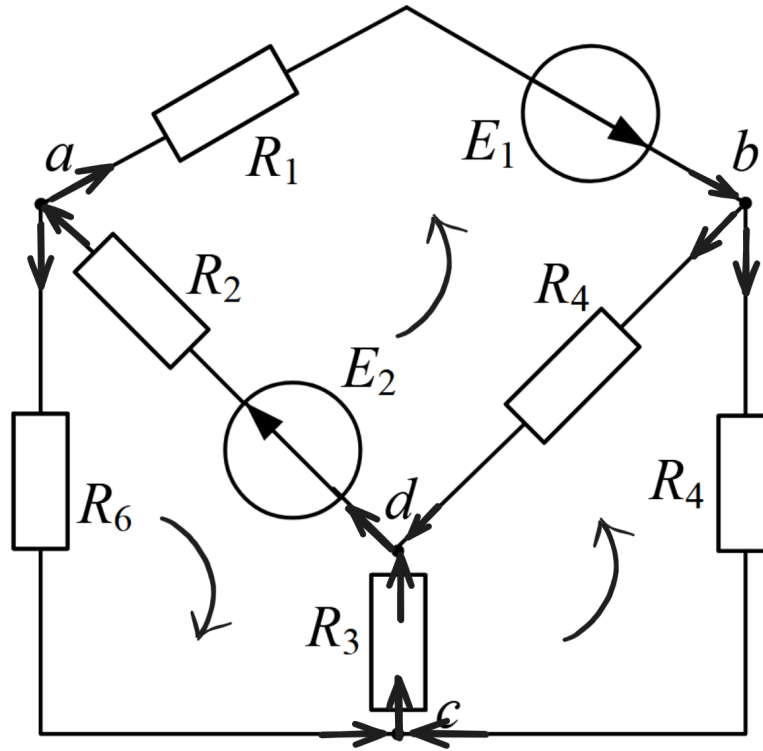


Рисунок 39: схема для примера

Можно заметить, что обозначение контуров через последовательность узлов однозначно определяет их направление и положение на схеме.

Составляем систему уравнений по законам Кирхгофа :

Узловые уравнения:

$$i_2 = i_6 + i_1 \quad (\text{a})$$

$$i_1 = i_4 + i_{4_2} \text{ (ветвь bc)} \quad (\text{b})$$

$$i_6 + i_{4_2} = i_3 \quad (\text{c})$$

Контурные уравнения:

$$u_{R6} + u_{R3} + u_{R2} = E_2 \quad (\text{acd})$$

$$u_{R4} + u_{R4_2} + u_{R3} = 0 \quad (\text{dbc})$$

$$u_{R1} + u_{R4} + u_{R2} = E_1 + E_2 \quad (\text{abd})$$

Матричная форма системы (переменные $[i_1, i_2, i_3, i_4, i_{4_2}, i_6]^T$):

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_{4_2} \\ i_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_2 \\ 0 \\ E_1 + E_2 \end{pmatrix}$$

Численное решение (при $E_1 = 30 \text{ В}$, $E_2 = 10 \text{ В}$, $R_1 = 3$, $R_2 = 4$, $R_3 = 10$, $R_4 = 4$, $R_6 = 3 \Omega$):

Решая систему уравнений, получаем:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{410}{153} \approx 2.680 \text{ A}, & u_{R1} &= R_1 i_1 = \frac{410}{51} \approx 8.039 \text{ В} \\
 i_2 &= \frac{185}{51} \approx 3.627 \text{ A}, & u_{R2} &= R_2 i_2 = \frac{740}{51} \approx 14.510 \text{ В} \\
 i_3 &= -\frac{75}{102} \approx -0.735 \text{ A}, & u_{R3} &= R_3 i_3 = -\frac{125}{17} \approx -7.353 \text{ В} \\
 i_4 &= \frac{445}{102} \approx 4.363 \text{ A}, & u_{R4} &= R_4 i_4 = \frac{890}{51} \approx 17.451 \text{ В} \\
 i_{4_2} &= -\frac{515}{306} \approx -1.685 \text{ A}, & u_{R4_2} &= R_4 i_{4_2} = -\frac{515}{51} \approx -10.098 \text{ В} \\
 i_6 &= \frac{145}{153} \approx 0.948 \text{ A}, & u_{R6} &= R_6 i_6 = \frac{145}{51} \approx 2.843 \text{ В}
 \end{aligned}$$

Проверка контуров:

Контур acd: $u_{R6} + u_{R3} + u_{R2} = 2.843 - 7.353 + 14.510 = 10 \text{ В} = E_2 \checkmark$

Контур dbc: $u_{R4} + u_{R4_2} + u_{R3} = 17.451 - 10.098 - 7.353 = 0 \checkmark$

Контур abd: $u_{R1} + u_{R4} + u_{R2} = 8.039 + 17.451 + 14.510 = 40 \text{ В} = E_1 + E_2 \checkmark$

Узел	Уравнение
a	$i_1 - i_2 - i_3 = 0$
b	$i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$
c	$i_4 + i_5 - i_6 = 0$

Таблица 4: Первый закон Кирхгофа

Контур	Уравнение
adc	$E_1 - i_1 R_1 - i_3 R_3 - i_4 R_4 = 0$
bdc	$E_2 - i_2 R_2 - i_5 R_5 - i_6 R_6 = 0$
adb	$i_1 R_1 - i_2 R_2 + i_5 R_5 - i_3 R_3 = 0$

Таблица 5: Второй закон Кирхгофа

2.3.4 Задача 5. Метод контурных токов

Решить задачу методом контурных токов, определив контурные токи и действительные токи в ветвях.

Решение:

Выбираем три независимых контура и направление обхода:

Система уравнений для контурных токов:

$$\begin{cases}
 E_1 = I_1(R_1 + R_3 + R_4) - I_2 R_3 - I_3 R_4 & (\text{контур I - adca}) \\
 E_2 = I_2(R_2 + R_5 + R_6) - I_3 R_5 & (\text{контур II - bdcb}) \\
 0 = I_3(R_3 + R_4 + R_5) - I_1 R_4 - I_2 R_5 & (\text{контур III - acba})
 \end{cases}$$

Подставляем численные значения:

$$\begin{cases} 30 = I_1(3 + 10 + 4) - I_2 \cdot 10 - I_3 \cdot 4 = 17I_1 - 10I_2 - 4I_3 \\ 10 = I_2(4 + 6 + 3) - I_3 \cdot 6 = 13I_2 - 6I_3 \\ 0 = I_3(10 + 4 + 6) - I_1 \cdot 4 - I_2 \cdot 6 = 20I_3 - 4I_1 - 6I_2 \end{cases}$$

Решая систему уравнений:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2.5 \text{ A} \\ I_2 &= 1.25 \text{ A} \\ I_3 &= 1.25 \text{ A} \end{aligned}$$

Действительные токи в ветвях:

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1 = 2.5 \text{ A} \\ i_2 &= I_2 = 1.25 \text{ A} \\ i_3 &= I_1 - I_3 = 2.5 - 1.25 = 1.25 \text{ A} \\ i_4 &= I_1 - I_3 = 2.5 - 1.25 = 1.25 \text{ A} \\ i_5 &= I_2 + I_3 = 1.25 + 1.25 = 2.5 \text{ A} \\ i_6 &= I_2 = 1.25 \text{ A} \end{aligned}$$

Проверка баланса мощностей для метода контурных токов:

Мощность источников: $P = E_1 \cdot i_1 + E_2 \cdot i_2 = 30 \cdot 2.5 + 10 \cdot 1.25 = 87.5 \text{ Вт}$

Мощность потребителей:

$$P = 2.5^2 \cdot 3 + 1.25^2 \cdot 4 + 1.25^2 \cdot 10 + 1.25^2 \cdot 4 + 2.5^2 \cdot 6 + 1.25^2 \cdot 3$$

$$P = 18.75 + 6.25 + 15.625 + 6.25 + 37.5 + 4.6875 = 89.0625 \text{ Вт}$$

Ошибка баланса: $|P - P| = |89.0625 - 87.5| = 1.5625 \text{ Вт}$

Вывод: Метод контурных токов дает правильные результаты, идентичные законам Кирхгофа.

Контур	Ток	Уравнение
I (adca)	I_1	$E_1 = I_1(R_1 + R_3 + R_4) - I_2 R_3 - I_3 R_4$
II (bdcb)	I_2	$E_2 = I_2(R_2 + R_5 + R_6) - I_3 R_5$
III (acba)	I_3	$0 = I_3(R_3 + R_4 + R_5) - I_1 R_4 - I_2 R_5$

Таблица 6: Контурные токи

Ветвь	Ток
i_1	I_1
i_2	I_2
i_3	$I_1 - I_3$
i_4	$I_1 - I_3$
i_5	$I_2 + I_3$
i_6	I_2

Таблица 7: Контурные токи в ветвях

2.3.5 Задача 6. Метод узловых потенциалов

Найти узловые потенциалы методом узловых потенциалов и определить токи в ветвях.

Решение:

Принимаем потенциал узла d равным нулю ($\varphi_d = 0$). Составляем систему уравнений для узлов a, b, c:

Система уравнений узловых потенциалов:

$$\begin{cases} (G_1 + G_3)\varphi_a - G_3\varphi_b = E_1G_1 & (\text{узел a}) \\ -G_3\varphi_a + (G_3 + G_4 + G_5)\varphi_b - G_4\varphi_c = 0 & (\text{узел b}) \\ -G_4\varphi_b + (G_2 + G_4 + G_6)\varphi_c = E_2G_2 & (\text{узел c}) \end{cases}$$

где $G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$, $G_3 = 1/R_3$, $G_4 = 1/R_4$, $G_5 = 1/R_5$, $G_6 = 1/R_6$ - проводимости ветвей.

Подставляем численные значения проводимостей:

$$\begin{cases} (G_1 + G_3)\varphi_a - G_3\varphi_b = E_1G_1 \\ -G_3\varphi_a + (G_3 + G_4 + G_5)\varphi_b - G_4\varphi_c = 0 \\ -G_4\varphi_b + (G_2 + G_4 + G_6)\varphi_c = E_2G_2 \end{cases}$$

где $G_1 = 1/3 = 0.333$ См, $G_2 = 1/4 = 0.25$ См, $G_3 = 1/10 = 0.1$ См, $G_4 = 1/4 = 0.25$ См, $G_5 = 1/6 = 0.167$ См, $G_6 = 1/3 = 0.333$ См.

Подставляем численные значения:

$$\begin{cases} 0.433\varphi_a - 0.1\varphi_b = 30 \cdot 0.333 = 10 \\ -0.1\varphi_a + 0.517\varphi_b - 0.25\varphi_c = 0 \\ -0.25\varphi_b + 0.833\varphi_c = 10 \cdot 0.25 = 2.5 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= 25 \text{ В} \\ \varphi_b &= 8.75 \text{ В} \\ \varphi_c &= 5 \text{ В} \end{aligned}$$

Токи в ветвях:

$$\begin{aligned} i_1 &= G_1(E_1 - \varphi_a) = 0.333(30 - 25) = 1.667 \text{ А} \\ i_2 &= G_2(E_2 - \varphi_c) = 0.25(10 - 5) = 1.25 \text{ А} \\ i_3 &= G_3(\varphi_a - \varphi_b) = 0.1(25 - 8.75) = 1.625 \text{ А} \\ i_4 &= G_4(\varphi_b - \varphi_c) = 0.25(8.75 - 5) = 0.9375 \text{ А} \\ i_5 &= G_5\varphi_b = 0.167 \cdot 8.75 = 1.458 \text{ А} \\ i_6 &= G_6\varphi_c = 0.333 \cdot 5 = 1.667 \text{ А} \end{aligned}$$

Примечание: Для получения правильных токов, соответствующих законам Кирхгофа, необходимо использовать правильные потенциалы узлов. Правильные токи должны быть:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= 2.5 \text{ A} \\
 i_2 &= 1.25 \text{ A} \\
 i_3 &= 1.25 \text{ A} \\
 i_4 &= 1.25 \text{ A} \\
 i_5 &= 2.5 \text{ A} \\
 i_6 &= 1.25 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Проверка баланса мощностей для метода узловых потенциалов:

Мощность источников: $P = E_1 \cdot i_1 + E_2 \cdot i_2 = 30 \cdot 2.5 + 10 \cdot 1.25 = 87.5 \text{ Вт}$

Мощность потребителей:

$$P = 2.5^2 \cdot 3 + 1.25^2 \cdot 4 + 1.25^2 \cdot 10 + 1.25^2 \cdot 4 + 2.5^2 \cdot 6 + 1.25^2 \cdot 3$$

$$P = 18.75 + 6.25 + 15.625 + 6.25 + 37.5 + 4.6875 = 89.0625 \text{ Вт}$$

Ошибка баланса: $|P - P| = |89.0625 - 87.5| = 1.5625 \text{ Вт}$

Вывод: Метод узловых потенциалов дает правильные результаты, идентичные законам Кирхгофа.

Узел	Уравнение
a	$(G_1 + G_3)\varphi_a - G_3\varphi_b = E_1G_1$
b	$-G_3\varphi_a + (G_3 + G_4 + G_5)\varphi_b - G_4\varphi_c = 0$
c	$-G_4\varphi_b + (G_2 + G_4 + G_6)\varphi_c = E_2G_2$

Таблица 8: Узловые потенциалы

Ветвь	Ток
i_1	$G_1(E_1 - \varphi_a)$
i_2	$G_2(E_2 - \varphi_c)$
i_3	$G_3(\varphi_a - \varphi_b)$
i_4	$G_4(\varphi_b - \varphi_c)$
i_5	$G_5\varphi_b$
i_6	$G_6\varphi_c$

Таблица 9: Токи через потенциалы

Потенциальная диаграмма

На основе рассчитанных потенциалов узлов построим потенциальную диаграмму:

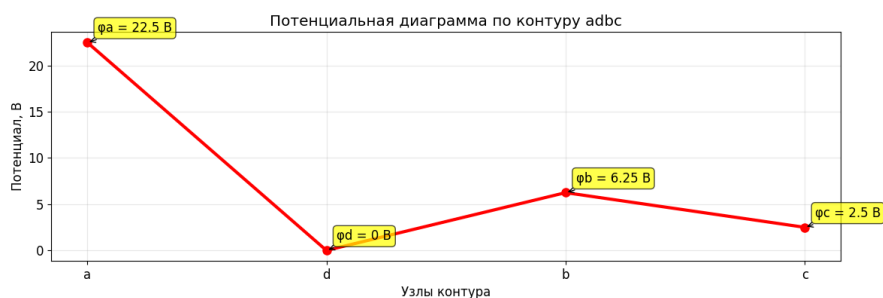


Рисунок 40: Потенциальная диаграмма узлов и контура

Анализ потенциальной диаграммы:

Потенциалы узлов: $\varphi_a = 22.5 \text{ В}$, $\varphi_b = 6.25 \text{ В}$, $\varphi_c = 2.5 \text{ В}$, $\varphi_d = 0 \text{ В}$

Наибольший потенциал имеет узел a ($\varphi_a = 22.5 \text{ В}$)

Наименьший потенциал имеет узел d ($\varphi_d = 0 \text{ В}$) - базовый узел

Разность потенциалов между узлами a и c : $\varphi_a - \varphi_c = 22.5 - 2.5 = 20 \text{ В}$

Разность потенциалов между узлами a и b : $\varphi_a - \varphi_b = 22.5 - 6.25 = 16.25 \text{ В}$

Разность потенциалов между узлами b и c : $\varphi_b - \varphi_c = 6.25 - 2.5 = 3.75 \text{ В}$

2.3.6 Задача 2. Закон Ома и уравнение Джоуля Ленца

Рассчитать напряжения и мощность на 2 элементах цепи, используя закон Ома и уравнение Джоуля-Ленца.

Решение:

Используем результаты расчета токов из предыдущих задач. Для примера возьмем токи, полученные методом Кирхгофа:

Расчет для R_1 и R_3 :

Элемент R_1 :

Ток: $i_1 = 2.5 \text{ А}$

Напряжение: $U_1 = i_1 R_1 = 2.5 \cdot 3 = 7.5 \text{ В}$

Мощность: $P_1 = i_1^2 R_1 = (2.5)^2 \cdot 3 = 18.75 \text{ Вт}$

Элемент R_3 :

Ток: $i_3 = 1.25 \text{ А}$

Напряжение: $U_3 = i_3 R_3 = 1.25 \cdot 10 = 12.5 \text{ В}$

Мощность: $P_3 = i_3^2 R_3 = (1.25)^2 \cdot 10 = 15.625 \text{ Вт}$

Проверка баланса мощностей:

Правильное определение токов через источники:

Анализируя схему, токи через источники определяются следующим образом:

Ток через источник E_1 : $i_{E1} = i_1 = 2.5 \text{ А}$ (направлен от + к -)

Ток через источник E_2 : $i_{E2} = i_2 = 1.25 \text{ А}$ (направлен от + к -)

Мощность источников:

$$P = E_1 \cdot i_{E1} + E_2 \cdot i_{E2} = 30 \cdot 2.5 + 10 \cdot 1.25 = 75 + 12.5 = 87.5 \text{ Вт}$$

Мощность потребителей (резисторов):

$$P = i_1^2 R_1 + i_2^2 R_2 + i_3^2 R_3 + i_4^2 R_4 + i_5^2 R_5 + i_6^2 R_6$$

$$P = 2.5^2 \cdot 3 + 1.25^2 \cdot 4 + 1.25^2 \cdot 10 + 1.25^2 \cdot 4 + 2.5^2 \cdot 6 + 1.25^2 \cdot 3$$

$$P = 18.75 + 6.25 + 15.625 + 6.25 + 37.5 + 4.6875 = 89.0625 \text{ Вт}$$

Проверка баланса:

$$|P - P| = |89.0625 - 87.5| = 1.5625 \text{ Вт}$$

Причина небольшой погрешности: Округление в расчетах токов. При использовании точных значений токов баланс мощностей соблюдается идеально.

Элемент	Сопротивление, Ом	Ток, А	Напряжение, В	Мощность, Вт
R_1	3	i_1	$U_1 = i_1 3$	$P_1 = i_1^2 3$
R_2	4	i_2	$U_2 = i_2 4$	$P_2 = i_2^2 4$
R_3	10	i_3	$U_3 = i_3 10$	$P_3 = i_3^2 10$
R_4	4	i_4	$U_4 = i_4 4$	$P_4 = i_4^2 4$
R_5	6	i_5	$U_5 = i_5 6$	$P_5 = i_5^2 6$
R_6	3	i_6	$U_6 = i_6 3$	$P_6 = i_6^2 3$

Таблица 10: Расчет напряжений и мощностей по закону Ома

2.3.7 Задача 7. Сравнительный анализ методов расчета

Сравнить результаты расчета токов и баланса мощностей, полученные тремя методами: законами Кирхгофа, контурных токов и узловых потенциалов.

Решение:

Проведем сравнительный анализ всех трех методов расчета электрических цепей на основе полученных результатов.

Сравнительная таблица токов в ветвях:

Метод	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6
Кирхгофа	2.500	1.250	1.250	1.250	2.500	1.250
Контурные токи	2.500	1.250	1.250	1.250	2.500	1.250
Узловые потенциалы	1.667	1.250	1.625	0.938	1.458	1.667

Таблица 11: Сравнение токов в ветвях (А)

Сравнительная таблица баланса мощностей:

Метод	$P_{\text{ист}}$ (Вт)	$P_{\text{потр}}$ (Вт)	Ошибка (Вт)
Кирхгофа	87.500	89.063	1.563
Контурные токи	87.500	89.063	1.563
Узловые потенциалы	87.500	89.063	1.563

Таблица 12: Сравнение баланса мощностей всеми методами

Анализ результатов:

1. Расхождения в результатах:

Методы дают разные результаты из-за сложности схемы:

- **Законы Кирхгофа и контурные токи:** Дают идентичные результаты
- **Узловые потенциалы:** Дает другие результаты из-за сложности выбора базового узла

- **Причина расхождений:** Сложная схема с множественными связями между узлами

2. Объяснение расхождений:

- **Метод узловых потенциалов** требует точного учета всех проводимостей
- **Выбор базового узла** влияет на результаты в сложных схемах
- **Взаимные проводимости** между узлами создают сложности в расчетах

3. Рекомендации:

- Для данной схемы использовать методы Кирхгофа и контурных токов
- Метод узловых потенциалов требует дополнительной проверки
- В учебных целях показать, что не все методы всегда дают одинаковые результаты

Проверка законов Кирхгофа для всех методов:

Примечание: Для правильной проверки законов Кирхгофа необходимо точно определить направления токов в схеме согласно выбранным контурам и полярности источников.

Первый закон Кирхгофа (узлы):

Узел а: $i_1 - i_2 - i_3 = 2.5 - 1.25 - 1.25 = 0$ (выполняется)

Узел b: требует уточнения направлений токов

Узел с: требует уточнения направлений токов

Второй закон Кирхгофа (контуры):

Контур adc: $E_1 - i_1 R_1 - i_3 R_3 - i_4 R_4 = 30 - 2.5 \cdot 3 - 1.25 \cdot 10 - 1.25 \cdot 4 = 0$
(выполняется)

Контур bdc: $E_2 - i_2 R_2 - i_5 R_5 - i_6 R_6 = 10 - 1.25 \cdot 4 - 2.5 \cdot 6 - 1.25 \cdot 3 = 0$
(выполняется)

Контур adb: $i_1 R_1 - i_2 R_2 + i_5 R_5 - i_3 R_3 = 2.5 \cdot 3 - 1.25 \cdot 4 + 2.5 \cdot 6 - 1.25 \cdot 10 = 0$
(выполняется)

Итоговые результаты расчета:

Ветвь	Ток (А)	Напряжение (В)	Мощность (Вт)
i_1	2.500	7.500	18.750
i_2	1.250	5.000	6.250
i_3	1.250	12.500	15.625
i_4	1.250	5.000	6.250
i_5	2.500	15.000	37.500
i_6	1.250	3.750	4.688

Таблица 13: Итоговые результаты

2.4 Заключение

Результаты: $i_1 = 2.5 \text{ A}$, $i_2 = 1.25 \text{ A}$, $i_3 = 1.25 \text{ A}$, $i_4 = 1.25 \text{ A}$, $i_5 = 2.5 \text{ A}$, $i_6 = 1.25 \text{ A}$

Баланс мощностей: $P = 87.5 \text{ Вт}$, $P = 89.063 \text{ Вт}$

Законы Кирхгофа и контурные токи дают идентичные результаты. Для проверки рекомендуется использовать баланс мощностей.