

## Avaliação 05 - Árvores Rubro-Negras

Universidade Federal do Ceará - Campus Quixadá  
Ciência da Computação - 3º Semestre  
Estrutura de Dados Avançada 2023.1  
Antonio Deivid Santos Costa - 538555

### 1 Maior e menor número de nós internos em uma árvore rubro-negra com altura negra $k$

#### Maior número

Primeiramente, a altura negra de um nó  $v$  qualquer é definida como o número de nós pretos no caminho de  $v$  até as folhas da árvore. A altura negra de um nó é tida por  $bh(v)$ .

A propriedade 5 das árvores rubro-negras garante que  $bh(v)$  sirva para todo nó  $v$ . Assim sendo, a altura negra de uma árvore rubro-negra é obtida por  $bh(root)$ .

Haja vista que, se há um nó vermelho, seus filhos serão pretos, pode-se dizer que uma árvore com altura negra  $k$  tem sua altura mínima igual a  $2k$ . Dessa forma, o número máximo de nós será igual a:

$$2^{(2k+1)} - 1$$

Logo, também sabendo que metade dos nós são folhas,

$$2^{(2k+1)} - 1 \implies (2^{2k-1}) * 2 + 1 \implies \frac{(2^{2k} - 1) * 2 + 1}{2} \implies 2^{2k} - 1$$

Portanto, o maior número de nós internos em uma árvore rubro-negra de altura negra  $k$  é  $2^{2k} - 1$ , provando a veracidade da fórmula.

#### Menor Número

Para qualquer árvore - ou subárvore - com um nó  $v$ , a quantidade de nós é, no mínimo:

$$2^k - 1$$

Se  $h(v) = 0$ ,  $v$  é uma folha e a subárvore com essa raiz possui:

$$2^k - 1 = 2^0 - 1 = 0$$

Agora, suponha um nó  $v$ , tal que  $h(v) \geq 0$ , e que este nó possua dois filhos, sendo que cada filho pode ter  $bh(x) = k$ , caso seja vermelho, ou  $bh(x) = k - 1$ , caso seja preto. Dito isso, haja vista que, logicamente, a altura de um filho será menor que a altura do pai, se pode aplicar a hipótese indutiva da seguinte maneira:

$$(2^k - 1 - 1) + (2^k - 1 - 1) + 1 \implies 2^k - 1$$

e, portanto, o menor número de nós internos em uma árvore rubro-negra de altura negra  $k$  é  $2^k - 1$ , provando a veracidade da fórmula.

## 2 Graus e profundidades ao absorver nó vermelho no pai preto

Para esta questão, é necessário que haja análise de 3 casos principais, sendo estes:

### Caso 1

...onde o nó preto não possui filho vermelho. Neste cenário, não há o que absorver. Logo, não há alteração de grau e profundidade, permanecendo 0.

### Caso 2

...onde o nó preto possui apenas um filho vermelho. Neste cenário, grau e profundidade irão sofrer alteração. Se antes, por exemplo, o grau da raiz era 2, agora será até 3. Quanto a profundidade dos filhos, já que o nó pai (vermelho) foi absorvido, ela diminui. Se era 3, agora será 2.

### Caso 3

...onde o nó preto possui dois filhos vermelhos. Neste cenário, grau e profundidade irão sofrer alteração. Se antes, por exemplo, o grau da raiz era 2, agora será até 4. A profundidade diminui da mesma forma que no caso 2.

Vale ressaltar que o enunciado da questão indica que deve-se desconsiderar o que acontece com as chaves.

## 3 Colorir árvore AVL para rubro-negra

Sendo  $T$  uma árvore AVL, segue uma proposta de código que irá colorir essa árvore, afim de transformá-la em uma árvore rubro-negra.

```
1  avlT0redBlack(T)
2      faça a raiz ser preta
3
4      for para cada node em T:
5
6          se node.altura < nodeIrmão.altura:
7              node.cor = preto
8
9          senao se node.altura > nodeIrmão.altura:
10             se node.altura for impar:
11                 node.cor = preto
12             senao:
13                 node.cor = vermelho
14
15         senao:
16             node.cor = vermelho
```