

## 8 Microstructure des prix financiers

Les propriétés des séries temporelles du prix d'un actif coté sur un marché boursier dépendent fortement de la fréquence d'observation. Si pour des observations à basse fréquences (échelle de temps : jour, mois) les trajectoires sont bien décrites par des processus de diffusion<sup>15</sup>, Figure 3 (a), pour des fréquences plus élevées (échelle de temps : heure, minute, ou en dessous), le prix manifeste sa nature discrète et est représenté par des trajectoires discontinues, constantes par morceaux et qui varient sur une grille, Figure 3 (b). L'amplitude minimale de variation du prix à chaque sauts (0.01 dans la Figure 3) est appelée le *tick*. Cette nature discrète est intrinsèquement liée à l'existence d'un carnet d'ordre, Figure 4. A chaque instant, un certain nombre d'unités de l'actif (le *volume*) est disponible sur le marché à des prix de vente (ask) ou d'achat (bid) fixés : lorsque l'exécution d'une ordre consomme tout le volume disponible au meilleur ask (ou meilleur bid), le meilleur prix à disposition se déplace sur la valeur à coté.

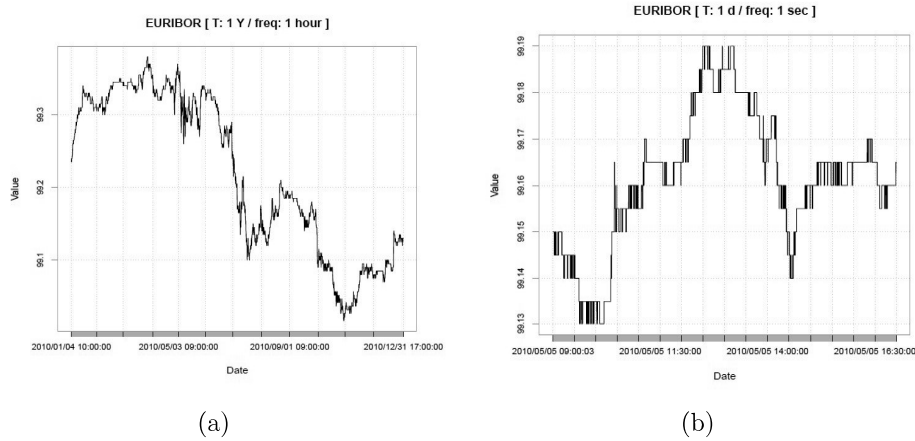


FIGURE 3 – Trajectoires du prix de l'Euribor future pour différentes fréquences d'observation. Pham (2013), présentation au NUS-UTokyo Workshop on Quantitative Finance.

Suivant une approche de modélisation typique, on décrit ce prix qui varie sur grille discrète par le biais d'un processus ponctuel  $(T_n, J_n)_{n \geq 1}$ . La suite croissante  $(T_n)_n$  représente les instants de variations (sauts d'un ou plusieurs ticks) du prix. Les v.a.  $J_n$  sont à valeurs dans l'ensemble fini

$$E = \{+1, -1, \dots, +m, -m\} \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

15. Par exemple, un mouvement Brownien : mouvement continu d'une particule soumise à des chocs aléatoires gaussiens.

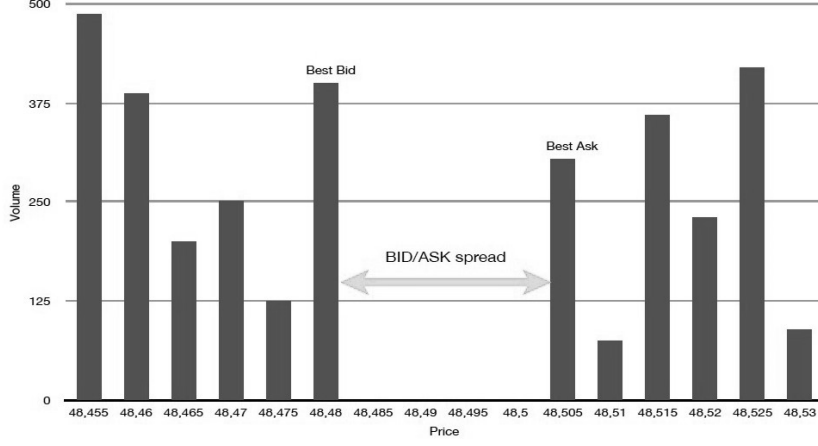


FIGURE 4 – Instantané d'un carnet d'ordre limite (*limit order book*).

et représentent les incréments (positifs ou négatifs) du prix. Le prix de l'actif est donné par le processus

$$P_t = P_0 + \sum_{k=1}^{N_t} J_n \quad (2)$$

où  $N_t$  est le nombre d'événements avant  $t$ ,

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t}$$

La valeur courante  $P_t$  représente la dernière cotation du prix *mid*, soit la moyenne entre le meilleur ask et le meilleur bid.

**Une modélisation simplifiée.** Dans le cadre d'une première modélisation simplifiée, on suppose que la suite des incréments  $(J_n)_n$  est i.i.d. (absence de dépendance entre les incréments du prix). On suppose de plus que les instants de sauts  $(T_n)_n$  sont indépendants des  $(J_n)_n$ , et que la suite des intervalles entre sauts  $S_n = T_{n+1} - T_n$  est i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Q1. On souhaite estimer la probabilité que dans le modèle ainsi défini les trajectoires du prix prennent des valeurs négatives,

$$\mathbb{P} \left( \inf_{t \leq T} P_t < 0 \right)$$

pour  $P_0 = 35$  et  $T = 4h$ . On prendra une valeur de  $\lambda$  telle que l'attente moyenne entre un saut et le suivant soit autour de 300s. On

considérera les cas  $m = 1$  et  $m = 3$  avec loi des sauts symétrique :  $\mathbb{P}(J_n = 1) = \mathbb{P}(J_n = -1) = 1/2$  pour  $m = 1$  et  $\mathbb{P}(J_n = i) = \frac{1}{2}p_{|i|}$  pour  $i \in E$  et  $m = 3$ , où  $p_1 = 1/2$ ,  $p_2 = 1/3$ ,  $p_3 = 1/6$ .

Pour ces mêmes valeurs des paramètres, on veut estimer les quantiles à  $10^{-4}$ , à gauche et à droite, pour la distribution de  $P_T$  – ensuite les quantiles plus extrêmes, à  $10^{-5}$  ou  $10^{-6}$ .

### Prise en compte d'autres propriétés des données haute fréquence.

On souhaite qu'un modèle de prix à haute fréquence soit capable de reproduire, en plus de la nature discrète des prix, les faits stylisés suivants :

- *Retour vers la moyenne* : les variations du prix sur des courts intervalles de temps sont fortement anti-corrélées. Cela détermine un effet appelé retour vers la moyenne : le prix a tendance à osciller autour d'une valeur intermédiaire.
- *Clusters de volatilité* : on observe une alternance de périodes avec activité de trading intense (volatilité du prix plus élevée) et de périodes plus calmes (volatilité plus faible).

► Afin de rajouter une plus forte composante de retour vers la moyenne, on peut modéliser le prix mid par une superposition de processus

$$P_t = P_t^{(1)} + P_t^{(2)},$$

où  $P_t^{(i)} = P_0/2 + \sum_{n=1}^{N_t^{(i)}} J_n^{(i)}$  pour  $i = 1, 2$ , toutes les variables aléatoires indexées par  $i = 1$  et  $i = 2$  étant indépendantes. On considérera :

(1) les mêmes hypothèses qu'avant sur les distributions de  $(N_t^{(1)})_{t \geq 0}$  et  $(J_n^{(1)})_{n \geq 1}$ , en changeant la durée moyenne  $1/\lambda_1$  entre les sauts de 300s à 660s.

(2) une suite de sauts  $J_{n+1}^{(2)} = -J_n^{(2)}$ , à partir de  $J_1^{(2)}$  avec  $\mathbb{P}(J_1^{(2)} = 1) = \mathbb{P}(J_1^{(2)} = -1) = 1/2$ . Ce choix modélise la composante du prix soumise à oscillation. On prendra pour  $N_t^{(2)}$  un processus de Poisson simple, de durée moyenne entre sauts  $1/\lambda_2 = 110s$ .

Q2. Reprendre la question précédente, afin d'estimer l'impact d'une telle modélisation.

► Une autre approche à la modélisation du phénomène de retour vers la moyenne consiste à s'affranchir de l'hypothèse d'indépendance entre les sauts. On décompose à ce fin la variation du prix à chaque saut en

$$J_n = \hat{J}_n \xi_n$$

où  $\hat{J}_n = \text{sign}(J_n)$  et  $\xi_n = |J_n|$ . On supposera maintenant que

- Les variations du prix ne sont pas indépendantes entre elles, mais on suppose que ce n'est que le signe d'un incrément de prix (et non sa valeur absolue) qui influence les incréments futures ; de plus, le signe de l'incrément à l'instant  $T_n$  ne dépend que de celui en  $T_{n-1}$ , et pas des précédents. Mathématiquement, cela se traduit en prenant pour  $\hat{J}_n$  une chaîne de Markov, de matrice de transition

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha_+}{2} & \frac{1-\alpha_+}{2} \\ \frac{1-\alpha_-}{2} & \frac{1+\alpha_-}{2} \end{pmatrix}$$

où  $\alpha_+, \alpha_- \in [-1, 1)$ .

- Les  $(\xi_n)_n$  sont i.i.d. à valeurs dans  $\{1, \dots, m\}$ , indépendants des  $(\hat{J}_n)_n$ , de loi  $\mathbb{P}(\xi_n = i) = p_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . On modélise de cette manière des amplitudes de saut qui sont indépendantes entre elles, et indépendantes de la direction du saut (à la hausse ou à la baisse). Cette propriété traduit une indépendance des volumes échangés dans le carnet d'ordre à chaque événement de trading, et leur indépendance par rapport au type de transaction (vente ou achat).

Q. Quel signe faudra-t-il choisir pour les paramètres  $\alpha_{\pm}$  afin de modéliser le phénomène de retour vers la moyenne ?

Pour les  $(J_n)_n$  ainsi définis, on modélise le prix  $P_t$  toujours par l'équation (2), sous une hypothèse d'indépendance entre les suites  $(J_n)_n$  et  $(T_n)_n$ .

Q3. Des estimations à partir des données sur l'Euribor future [?] ont montré qu'il est réaliste de considérer le cas symétrique  $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha$ . On fixera pour  $\alpha$  la valeur estimée dans l'article [?], Section 2.

Simuler des trajectoires du prix  $P_t$ , observer empiriquement sur les simulations que l'on a  $\mathbb{P}(\hat{J}_n \hat{J}_{n+1} = 1) \approx (1 + \alpha)/2$ . Estimer dans ce cas également la probabilité que le prix  $P_t$  prenne des valeurs négatives au cours de  $N = 100$  variations, ainsi que les quantiles à  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$  de la valeur finale du prix.

**Limite macroscopique.** On souhaite étudier le comportement des prix engendré par le modèle considéré dans la question précédente sur des échelles de temps plus longues.

En supposant une durée de  $8h$  pour chaque jour et 250 jours de trading par an, horizon  $T = 1$  an, estimer la probabilité que le prix  $P_t$  prenne des valeurs négatives, ainsi que les quantiles à  $10^{-6}$  de la valeur finale du prix, à partir de la valeur  $P_0 = 1000$  (typique pour un indice boursier) et à un horizon  $T = 1$  an.

- **Références bibliographiques**

[FP15]