MICROSTRUCTURE DES PRIX FINANCIERS

MODAL - MAP474D

Juin 2018

Antoine Grosnit et Yassin Hamaoui

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

1
UNE MODÉLISATION SIMPLIFIÉE

1.1 Prix négatifs

1.1.1 • Simulation par un Monte-Carlo naïf

$inf P < 0$ On commence par un modèle simple où on simule M processus de Poisson associés à notre modèle. On détermine ensuite $P_{est} = \mathbb{P}(\inf_{t \leq T} P_t < 0)$ par un Monte-Carlo naïf qui consiste à utiliser l'estimateur : $P_{est} = \frac{1}{M} \sum 1_{\inf_{t \leq T} P_t < 0}$

Pour obtenir un intervalle de confiance, on utilise le résultat qui affirme que : $\sqrt{M}(\frac{1}{M} \sum 1_{\inf_{t \leq T} P_t < 0} - \mathbb{P}(\inf_{t \leq T} P_t < 0)) \Rightarrow N(0, \mathbb{P}(\inf_{t \leq T} P_t < 0)(1 - \mathbb{P}(\inf_{t \leq T} P_t < 0))$

Alors un intervalle de confiance à 0.95 est donné par : $[P_{est} - 2 * P_{est}(1 - P_{est}); P_{est} + 2 * P_{est}(1 - P_{est})$

On regroupe les résultats pour différents paramètres dans le tableau suivant :
Tableau : $P0; i = 0ou3; M = 10^6; Pest; Intervalledeconf$

1.1.2 • Simulation par changement de loi

Il s'agit maintenant d'utiliser une méthode qui permet d'évaluer correctement la probabilité quand l'évènement est rare et que le résultat donné par un Monte-Carlo naïf n'est plus pertinent (ce qui est ici le cas pour $P_0 = 35$. On va alors procéder à un changement de loi via la transformation d'Esscher. L'idée de cette technique est de modifier les probabilités de manière à rendre l'évènement étudiée moins rare. Dans ce cas, on veut que le prix diminue. Il faut donc que les sauts négatifs soient privilégiés.

DESCRIPTION DE LA TRANSFORMATION DESSCHER

On choisit θ qui minimise la variance de l'estimation de la probabilité. Pour cela, on commence par tracer P_{est} en fonction de θ. On obtient le graphique suivant :

INSERER GRAPHIQUE.

On note alors un plateau dans la région A COMPLETER. On cherche dans un deuxième temps le θ de cette région qui minimise la variance de l'estimation. On obtient $\theta = ACOMPLETER$

TABLEAU DE RESULTAT $M1 = 86 * 10^6$ $M3 = 50 * 10^6$ $i = 1, i = 3$ $theta = opt, P0 = 10$ $theta = valopt, P0 = 35$

1.1.3 • Méthode de Splitting via MCMC

Pour estimer la probabilité que le prix devienne négatif pour des grandes valeurs de P_0 (ici, $P_0 = 35$), nous mettons également en oeuvre la méthode de splitting et chaînes de Markov avec rejet qui est adaptée à la modélisation simplifiée des prix par un processus de Poisson composé caractéristique (λ, ν) (où ν est la loi de J_n).

On a $N = (N_t)_{t >= 0}$ processus de Poisson homogène de paramètre λ et (J_n) v.a. i.i.d. On a alors un processus de Poisson composé de paramètre (λ, ν) où ν est la loi de J_1. On procède donc comme pour l'exercice 3 du $TP4$:

— on se donne des seuils $-1 = p_K < ... < p_1 < p_0 = P_0$.

— pour $k = 1, ...K$, on approche $\mathbb{P}(\inf_{t\leq T} P_t \leq p_k | \inf_{t\leq T} P_t \leq p_{k-1})$ par un estimateur $\widehat{\pi}_k$

— estimer $\mathbb{P}(\inf_{t\leq T} P_t < 0))$ par $\prod_1^K \widehat{\pi}_k$.

On applique l'algorithme MCMC pour loi conditionnelle (construction de la chaîne de Markov de M processus ponctuels par *coloriage* de paramètre p - on garde chaque saut de prix avec une probabilité $p \in]0,1[$ et on construit de manière indépendante un processus de Poisson composé de paramètres $(p\lambda, \nu)$ que l'on agrège à la première si et seulement si le résultat obtenu vérifie $\inf_{t\leq T} P_t^m < 0)$ pour obtenir (théorème ergodique) une estimation :

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M} \mathbf{1}_{\inf\limits_{t\leq T} P_t^{(m)} \leq p_{k+1}} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(\inf_{t\leq T} P_t \leq p_k | \inf_{t\leq T} P_t \leq p_{k-1})$$

En se fixant un ratio r (souvent de l'ordre de 0.1) et un nombre n (souvent de l'ordre de 1000), on détermine les seuils (p_k) :

— Initialisation : on fixe $p_0 = P_0$ puis on simule n trajectoires de prix indépendantes. On choisit alors p_1 comme le plus petit entier s tel que $\mathbb{P}(\inf\limits_{t\leq T} P_t \leq s) \geq r$ que l'on approxime en prenant le $\lfloor nr \rfloor^{\text{ième}}$ plus grand terme de l'ensemble des $(\inf\limits_{t\leq T} P_t^{(m)})$ que l'on a calculé à partir des $(P_t^{m)})_{1\leq m\leq n}$ simulés. On garde alors au hasard une des simulations qui vérifient $\inf\limits_{t\leq T} P_t^{(m)} \leq p_1$

— Pour $k \geq 1$, tant que $p_k \geq 0$ étant donné une évolution de prix qui vérifie $\inf\limits_{t\leq T} P_t^{(0)} \leq p_1$. A partir de ce processus, on génère une chaîne de n processus selon l'algorithme MCMC pour loi conditionnelle décrit *supra* et on prend p_{k+1} le plus petit entier s tel que $\mathbb{P}(\inf\limits_{t\leq T} P_t \leq s | \inf\limits_{t\leq T} P_t \leq p_k) \geq r$ que l'on approxime en prenant le $\lfloor nr \rfloor^{\text{ième}}$ plus grand terme de l'ensemble des $(\inf\limits_{t\leq T} P_t^{(m)})_{1\leq m\leq n}$ obtenus à partir de nos simulations.

On observe que les probabilités conditionnelles associées aux premiers niveaux ont bien des valeurs légèrement supérieures au ratio $(r = 0.1)$ qui a servi à déterminer les seuils (ici $[24, 18.0, 13.0, 10.0, 7.0, 4.0, 0.0, -1]$).

Il reste alors à déterminer le paramètre p du *coloriage*. Pour ce faire, on effectue plusieurs réalisations indépendantes de cet estimateur pour différentes valeurs de p. On trace pour chaque p une boîte à moustache des valeurs de la probabilité de ruine estimée, ainsi que l'erreur relative (ratio de l'écart type et de la valeur moyenne) de ces réalisations indépendantes. On choisit alors à la main la valeur de p en cherchant à minimiser l'erreur relative et la dispersion. Cette valeur servira à réaliser les estimations de la probabilité de la ruine du joueur.

Nous prendrons $p = 0.7$ pour l'estimation de la probabilité de la ruine. Nous donnerons les résultats avec un intervalle de confiance asymptotique au niveau 0.95 en effectuant plusieurs réalisations indépendantes (on applique le TCL ainsi que le théorème de Slutsky qui nous permet de remplacer la variance théorique de l'estimateur par sa variance empirique).

Figure 1 – Simulation de l'algorithme MCMC pour $P0 = 35$, $r = 0.1$, J_n à valeurs dans $\{-1, 1\}$

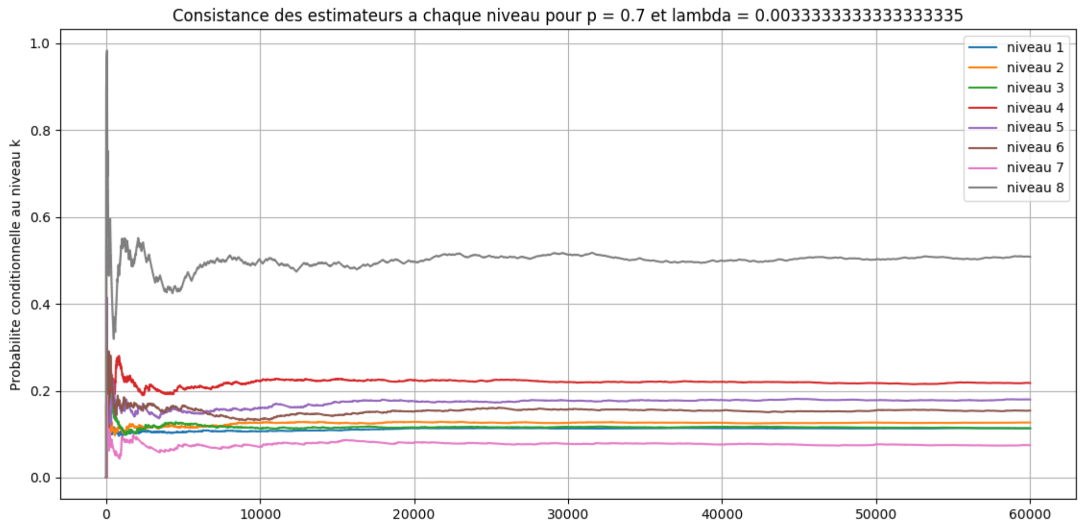


Figure 2 – Dispersion et erreur relative de l'estimateur en fonction de p, pour $P0 = 35$, J_n à valeurs dans $\{-1, 1\}$ (haut) et dans $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ (bas).

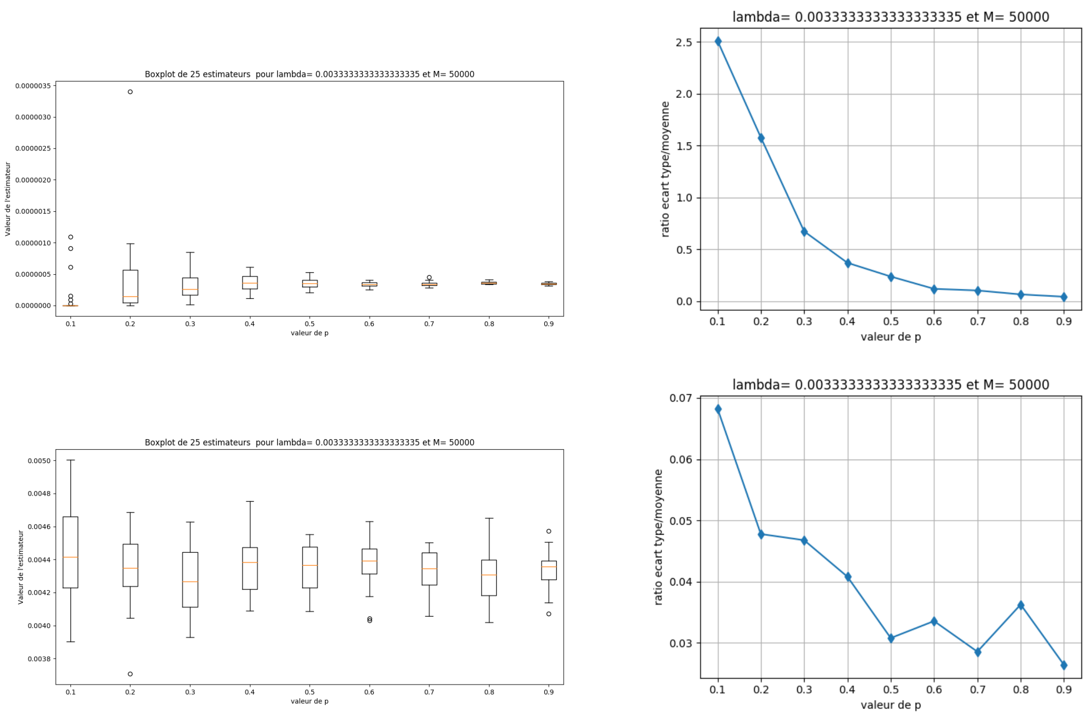


FIGURE 3 – Estimation de la probabilité d'avoir des prix négatifs pour $P_0 = 35$, $p = 0.7$, $N = 60000$ (longueur de la chaîne de processus pour chaque niveau)

m (Distrib.)	P_0	Seuils	Nb de réalisation	P_{est}	Borne inf (IC)	Borne sup (IC)
1	35	$[24, 17, 12, 9, 6, 3, 0, -1]$	50	3.5486e-07	3.5118e-07	3.5855e-07
1	35	$[24, 17, 12, 9, 6, 3, 0, -1]$	15	3.6177e-07	3.5347e-07	3.7007e-07
3	35	$[15, 4, -1]$	15	0.004307	0.004286	0.004328

1.2 Calcul du quantile

1.2.1 • Simulation par un Monte-Carlo naïf

Dans cette partie on veut estimer des quantiles du prix final p_T à différents niveaux. Une première approche consiste à utiliser l'estimateur des quantiles empiriques. Il s'agit donc de simuler différentes M processus de Poisson et de réordonner les prix finaux obtenus par ordre croissant : $p_T^1, p_T^2..., p_T^M$. Le quantile empirique au niveau α est alors : $p_T^{\lceil M\alpha \rceil}$

On obtient les résultats suivants pour différents paramètres : $i = 1ou3, P0 = 35, alpha = 10^-4, 5, 6$ box plot + histogramme

1.2.2 • Simulation par changement de loi

Dans cette partie, on veut estimer le quantile à des niveaux plus extrêmes (10^{-5} ou 10^{-6}) ce qui nécessite d'avoir recours à un changement de loi car la méthode naïve n'aboutit pas un résultat exploitable. L'idée est de nouveau utiliser la transformation d'Esscher, déterminer le paramètre θ qui minimise la variance puis effectuer le quantile en utilisant le résultat suivant du cours : Pour $X_1, ..., X_n$ simulés sous $\mathbb{Q}$: $Q(\alpha) = \inf_x \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{p(X_i)}{q(X_i)} 1_{X_i \geq x} \geq \alpha \right\}$

On implémente cela en triant les prix puis en leur affectant leur poids (correspondant à la normalisation calculée précédemment).

On obtient les résultats suivants pour différents paramètres : $i = 1ou3, P0 = 35, alpha = 10^-4, 5, 6$

box plot + histogramme

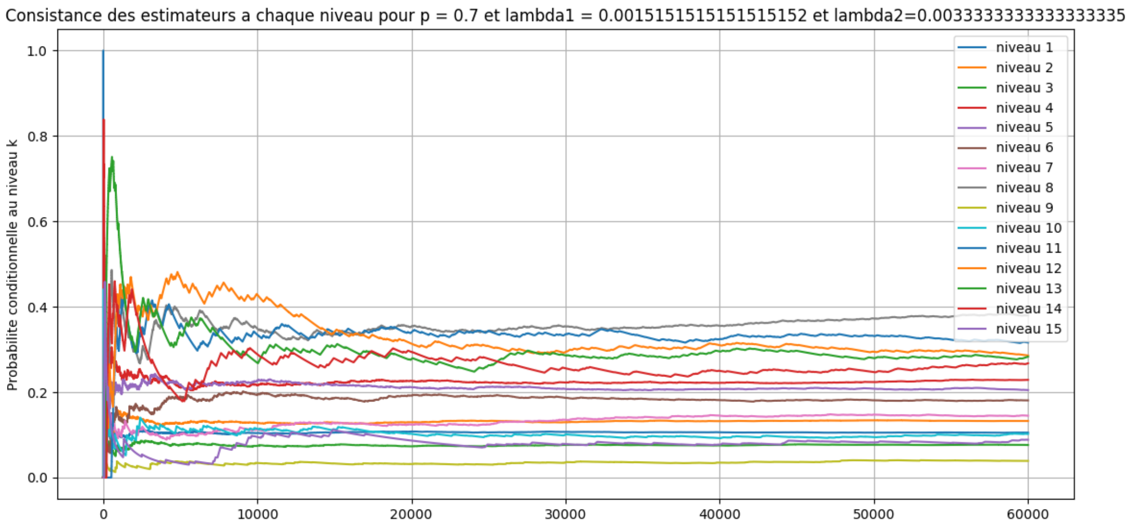
2
SUPERPOSITION DE PROCESSUS

2.1 Prix négatifs

2.1.1 • Simulation par un Monte-Carlo naïf

On procède de la même manière qu'à la section précédente en simulant M fois l'évolution du prix qui est la somme d'un processus de Poisson et d'un processus déterministe (mis à part sa première valeur) qui alterne entre saut positif et saut négatif.

FIGURE 4 – Simulation de l'algorithme MCMC pour $P0 = 35$, $r = 0.1$, J_n à valeurs dans $\{-1, 1\}$



On obtient les résultats suivants : Tableau : $P0; i = 0ou3; M = 10^6; Pest; Intervalledeconf$

2.1.2 • MÉTHODE DE SPLITTING VIA MCMC

On donne, comme à la question 1, un estimateur de la probabilité d'avoir un prix négatif par une méthode de splitting via MCMC. Seulement contrairement à la première modélisation de la micro-structure du prix, nous avons deux processus indépendants : $P_t^{(1)}$, processus de Poisson composé de paramètres (λ, ν) où ν est la loi de $J_n^{(1)}$, et $P_t^{(2)}$ qui n'est pas un processus de Poisson composé (les sauts n'étant pas indépendants). On peut néanmoins appliquer l'algorithme MCMC en appliquant une transformation réversible au couple $(P_t^{(1)}, P_t^{(2)})$ en faisant subir un coloriage de paramètre p à $P_t^{(1)}$ et en générant une nouveau processus $\widetilde{P_t^{(2)}}$ indépendant de $P_t^{(2)}$.

On détermine donc les seuils et le paramètre p du coloriage de la même manière que dans la partie précédente.

Nous prendrons $p = 0.7$ pour l'estimation de la probabilité d'avoir des prix négatifs. Nous donnerons là encore les résultats avec un intervalle de confiance asymptotique au niveau 0.95 en effectuant plusieurs réalisations indépendantes (on applique le TCL ainsi que le théorème de Slutsky qui nous permet de remplacer la variance théorique de l'estimateur par sa variance empirique).

2.2 CALCUL DU QUANTILE

Figure 5 – Estimation de la probabilité d'avoir des prix négatifs pour $P_0 = 35$, $p = 0.7$, $N = 60000$ (longueur de la chaîne de processus pour chaque niveau)

m (Distrib.)	P_0	Nb de réalisation	P_{est}	Borne inf (IC)	Borne sup (IC)
1	35	15	1.73e-e-12	1.62e-12	1.85e-07
3	35	15	5.36e-5	5.26e-5	5.46e-5

2.2.1 • Simulation par un Monte-Carlo naïf

De la même qu'au calcul de quantile avec le processus précédent, on obtient les résultats suivants :

2.2.2 • Simulation par MCMC

3 MODÉLISATION MARKOVIENNE

3.1 Quelques propriétés

— Signe de α_+ et α_-
Dans le cadre de cette modélisation on considère que $\hat{J}_n$ est une chaîne de Markov de matrice de transition : $\hat{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha_+}{2} & \frac{1-\alpha_+}{2} \\ \frac{1-\alpha_-}{2} & \frac{1+\alpha_-}{2} \end{pmatrix}$ Cela s'interprete en termes probabilistes par : $\mathbb{P}(\hat{J}_{n+1} = 1 \mid \hat{J}_n = 1) = \frac{1+\alpha_+}{2}$ et on veut que cette probabilité soit inférieure à $\frac{1}{2}$ pour modéliser le retour à la moyenne. On a donc : $\alpha_+ < 0$. Par le même argument : $\alpha_- < 0$ A partir de maintenant (et sauf mention contraire) $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha$.

— $\mathbb{P}(\hat{J}_n\hat{J}_{n+1} = 1) \simeq \frac{1+\alpha}{2}$
On considère dans la suite que $\alpha = -0.875$ (donné par l'article de référence). On simule simplement la suite des signes $hatJ_n$ en respectant la loi de transition donnée par la matrice. En utilisant la loi des grands nombres, on obtient bien : $\mathbb{P}(\hat{J}_n\hat{J}_{n+1} = 1) \simeq 0.0625 \simeq \frac{1+\alpha}{2}$

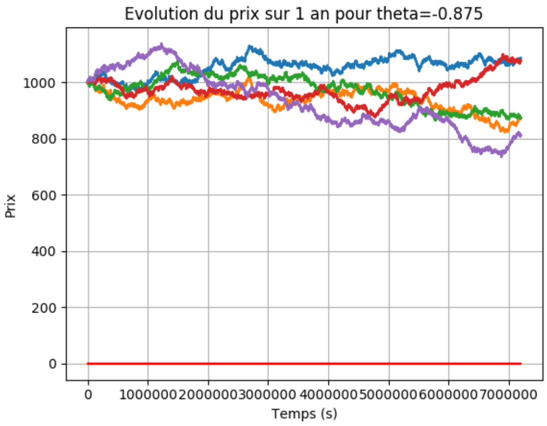
3.2 Prix négatifs

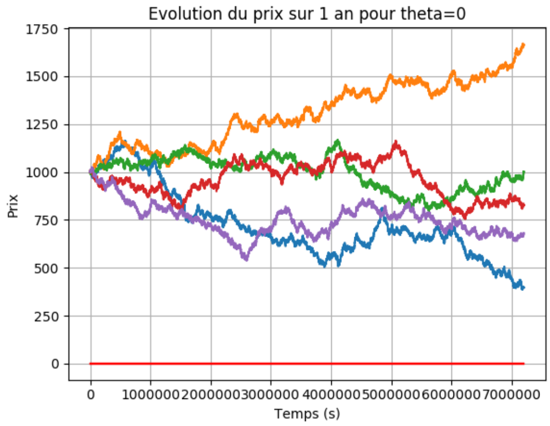
3.2.1 • Simulation par un Monte-Carlo naïf

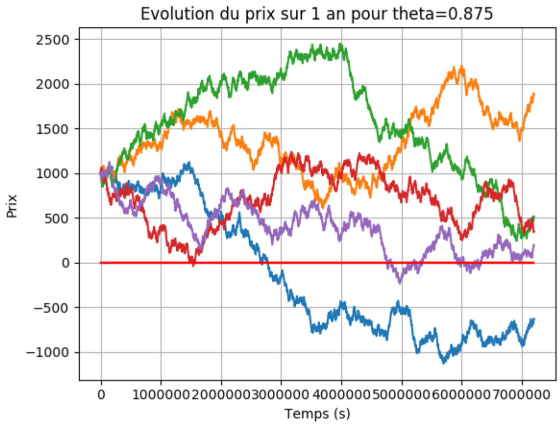
On va simuler la suite des prix et utiliser la loi des grands nombres pour estimer la probabilité que le prix devienne négatif. On obtient les résultats suivants :

3.2.2 • Simulation par changement de loi

3.3 Calcul du quantile







3.3.1 • Simulation par un Monte-Carlo naïf

On utilise la simulation obtenue précédemment pour déterminer le quantile grâce au quantile empirique.

3.3.2 • Simulation par changement de loi

4 LIMITE MACROSCOPIQUE

Nous avons là encore tenter d'appliquer un changement de loi pour simuler l'évolution du prix sur une année en favorisant la probabilité d'obtenir de longue série de hausses ou de baisses. On trace l'évolution du prix pour différentes valeurs du paramètre θ de la matrice de transition :