



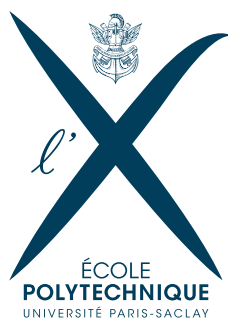
# MICROSTRUCTURE DES PRIX FINANCIERS

MODAL - MAP474D

Juin 2018

---

Antoine GROSINIT et Yassin Hamaoui



# 1

## UNE MODÉLISATION SIMPLIFIÉE

### 1.1 SIMULATION PAR UN MONTE-CARLO NAÏF

On commence par un modèle simple où on simule  $M$  processus de Poisson associés à notre modèle. On détermine ensuite  $P_{est} = \mathbb{P}(\inf_{t \leq T} P_t < 0)$  par un Monte-Carlo naïf qui consiste à utiliser l'estimateur :  $P_{est} = \frac{1}{M} \sum 1_{\inf_{t \leq T} P_t < 0}$

Pour obtenir un intervalle de confiance, on utilise le résultat qui affirme que :  $\sqrt{M}(\frac{1}{M} \sum 1_{\inf_{t \leq T} P_t < 0} - \mathbb{P}(\inf_{t \leq T} P_t < 0)) \Rightarrow N(0, \mathbb{P}(\inf_{t \leq T} P_t < 0)(1 - \mathbb{P}(\inf_{t \leq T} P_t < 0)))$

Alors un intervalle de confiance à 95 On regroupe les résultats pour différents paramètres dans le tableau suivant

Tableau :  $P_0; i = 0 \text{ ou } 3; M = 10^6; P_{est}; \text{Intervalle de conf}$

### 1.2 CRÉATION DES CLASSIFIEURS FAIBLES

Q2. Nous n'avons considéré ici que des caractéristiques « carré » (ayant le même nombre de pixels en longueur et en largeur). On obtient alors, pour une zone de  $92 \times 112$ , un côté minimal de 8 pixels et un incrément de position et de taille de 4 pixels, 4466 caractéristiques (et de manière générale il y en a  $O(n^3)$  où  $n$  est la longueur de l'image) :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=2}^{22} (28-i)(23-i) &= \sum_{i=1}^{21} (5+i)i \\
 &= 5 \sum_{i=1}^{21} i + \sum_{i=1}^{21} i^2 \\
 &= 5 \times \frac{21 \times 22}{2} + \frac{21 \times 22 \times 43}{6} \\
 &= 4466
 \end{aligned}$$

### 1.3 SIMULATION PAR CHANGEMENT DE LOI

Il s'agit maintenant d'utiliser une méthode qui permet d'évaluer correctement la probabilité quand l'évènement est rare et que le résultat donné par un Monte-Carlo naïf n'est plus pertinent (ce qui est ici le cas pour  $P_0 = 35$ ). On va alors procéder à un changement de loi via la transformation d'Esscher. L'idée de cette technique est de modifier les probabilités de manière à rendre l'évènement étudiée moins rare. Dans ce cas, on veut que le prix diminue. Il faut donc que les sauts négatifs soient privilégiés.

DESCRIPTION DE LA TRANSFORMATION DESSCHER

On choisit  $\theta$  qui minimise la variance de l'estimation de la probabilité. Pour cela, on commence par tracer  $P_{est}$  en fonction de  $\theta$ . On obtient le graphique suivant :

INSERER GRAPHIQUE.

On note alors un plateau dans la région A COMPLETE. On cherche dans un deuxième temps le  $\theta$  de cette région qui minimise la variance de l'estimation. On obtient  $\theta = ACOMPLETE$

TABLEAU DE RESULTAT  $M1 = 86 * 10^6$   $M3 = 50 * 10^6$   $i = 1, i = 3$   $theta = opt$ ,  $P0 = 10$   $theta = valopt$ ,  $P0 = 35$

## 1.4 CALCUL NAÏF DU QUANTILE

Dans cette partie on veut estimer des quantiles du prix final  $p_T$  à différents niveaux. Une première approche consiste à utiliser l'estimateur des quantiles empiriques. Il s'agit donc de simuler différentes  $M$  processus de Poisson et de réordonner les prix finaux obtenus par ordre croissant :  $p_T^1, p_T^2, \dots, p_T^M$ . Le quantile empirique au niveau  $\alpha$  est alors :  $p_T^{[M\alpha]}$

On obtient les résultats suivants pour différents paramètres :  $i = 1$  ou  $3$ ,  $P0 = 35$ ,  $alpha = 10^{-4}, 5, 6$   
box plot + histogramme

## 1.5 CALCUL DU QUANTILE AVEC CHANGEMENT DE LOI

On obtient les résultats suivants pour différents paramètres :  $i = 1$  ou  $3$ ,  $P0 = 35$ ,  $alpha = 10^{-4}, 5, 6$   
box plot + histogramme

# 2

## SUPERPOSITION DE PROCESSUS

k

### 2.1 SIMULATION PAR UN MONTE-CARLO NAÏF

Tableau :  $P0$ ;  $i = 0$  ou  $3$ ;  $M = 10^6$ ;  $Pest$ ; Intervalle de conf

### 2.2 QUANTILE

### 2.3 CHANGEMENT DE LOI

Le calcul des caractéristiques se fait de façon parallèle avec MPI :

- Chaque processus calcule entièrement l'image intégrale pour pouvoir calculer des caractéristiques en temps constant.
- Chaque processus calcule, en fonction de son rang, certaines caractéristiques de l'image, de sorte que toutes les caractéristiques de l'image soient calculées par un unique processus.
- Le processus racine reçoit (*MPI\_Recv*) de la part de tous les processus dans l'ordre de leur rang, un tableau des caractéristiques qu'ils ont calculées, et les agrège dans cet ordre dans un vecteur d'entier.
- Ledit vecteur est retourné (on notera que quel que soit le processus racine, les caractéristiques retournées sont bien toujours dans le même ordre).

## 3 CRÉATION D'UN CLASSIFIEUR

### 3.1 CRÉATION DES CLASSIFIEURS FAIBLES

Q3. Dans le but d'entraîner nos classifieurs faibles de manière parallèle, nous avons procédé de la façon suivante avec MPI (avec  $p$  processus) :

- Nous récoltons tout d'abord les titres des images présentes dans la base d'apprentissage, et nous les stockons dans un vecteur de *string* pour pouvoir tirer consécutivement  $K$  images au sort.
- $w_1$  et  $w_2$ , vecteurs contenant les  $w_{i1}$  et  $w_{i2}$ , sont initialisés.
- Pour  $k$  variant de 1 à  $K$ , nous tirons une image au sort (la même pour chaque processus grâce à l'initialisation commune de la *seed*).
- Au bout de chaque série de  $p$  passages dans la boucle, les  $p$  processus ont appliqué une et une seule fois l'algorithme décrit dans la question précédente en tant que processus racine. Chaque processus dispose donc d'un vecteur complet de caractéristiques correspondant à une image distincte qui lui permet de calculer (suivant la logique décrite dans l'énoncé) la variation incrémentale de  $w_1$  et  $w_2$ . On met alors à jour les valeurs de  $w_1$  et  $w_2$  pour tous les processus à l'aide d'un *MPI\_Allreduce*. Il faut noter que, contrairement à l'implémentation séquentielle pour laquelle les valeurs de  $w_1$  et  $w_2$  auraient été mises à jour à chaque boucle, ici nous ne procédons à cette mise à jour que tous les  $p$  passages en agrégeant en une fois les  $p$  modifications calculées en parallèles.
- Les valeurs stockées dans  $w_1$  et  $w_2$ , obtenues à l'issue des  $K$  tirages au sort, déterminent nos classifieurs  $h_i$ .

Convergence des paramètres en fonction de  $K$  et  $\epsilon$  :

Nous avons considéré l'évolution des quantités  $\frac{\|(w_1^{k+1}-w_1^k)\|}{\|w_1^k\|}$  et  $\frac{\|(w_2^{k+1}-w_2^k)\|}{\|w_2^k\|}$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne et  $w_i^k$  désigne le vecteur  $w_i$  à la boucle  $k$ . On mesure ainsi l'évolution relative des paramètres au cours de leur  $K \bmod p$  mises à jour.

- Choix de  $K$  : en traçant l'évolution de  $\frac{\|(w_2^{k+1}-w_2^k)\|}{\|w_2^k\|}$  pour  $K = 200, 2000$  et  $10000$ , on constate que cette quantité converge pour différentes valeurs de  $\epsilon$  et que le comportement de  $\frac{\|(w_1^{k+1}-w_1^k)\|}{\|w_1^k\|}$  est non convergent pour ces trois valeurs de  $K$ . Il semble donc judicieux de prendre  $K$  de l'ordre de  $2000$ .

includegraphics[width=15cm]"Fig1 Cv K=200"  
 includegraphics[width=15cm]"Fig2 Cv K=2000"  
 includegraphics[width=15cm]"Fig3 Cv K=10000"

- Choix de  $\epsilon$  : En raisonnant sur les ordres de grandeurs des paramètres (et notamment de  $X_{ki} \sim 10000$ ) nous avons distingué deux régimes distincts :
  - Pour  $\epsilon \gg \frac{1}{10000}$  :  $w_{i2}$  est de l'ordre de  $\epsilon$  et  $w_{i1}$  est de l'ordre de  $\epsilon \times X_i \sim 10000 \times \epsilon$ . Ainsi,  $w_{2i}$  ne joue globalement pas de rôle dans la classification qui est déterminée uniquement par le signe de  $w_{i1} \gg w_{i2}$ . De ce fait, la valeur particulière de  $\epsilon$  dans ce régime a très peu d'impact sur le résultat. Etant donnée la variation des valeurs des  $X_{ki}$  et de la catégorie de l'image tirée au sort à chaque boucle, la quantité  $\frac{\|(w_1^{k+1}-w_1^k)\|}{\|w_1^k\|}$  reste de l'ordre de l'unité quel que soit  $K$ , et on n'observe pas de convergence.
  - Pour  $\epsilon \ll \frac{1}{10000}$  :  $w_{i2}$  reste de l'ordre de  $\epsilon$  et  $w_{i1}$  est de l'ordre de l'unité (son initialisation). Là encore,  $w_{2i}$  ne joue globalement pas de rôle dans la classification qui est déterminée uniquement par le signe de  $w_{i1} \gg w_{i2}$  (car  $1 \gg \epsilon$ ). De ce fait, la valeur particulière de  $\epsilon$  dans ce régime a très peu d'impact sur le résultat (le classifieur est déterminé par la valeur de  $w_{i1}$  qui varie très faiblement autour de sa valeur initiale, indépendante de  $\epsilon$  - ce qui tend d'ailleurs à rendre l'entraînement superflu). On observe donc une relative stabilité de  $w_1$  dans ce régime ( $\frac{\|(w_1^{k+1}-w_1^k)\|}{\|w_1^k\|} \ll 1$ ).

includegraphics[width=15cm]"Fig4 Cv w1 2 regimes"

Nous essayons donc dans la suite de nous placer à la frontière entre ces deux régimes.

### 3.2 BOOSTING DES CLASSIFIEURS FAIBLES

Q4. Dans cette partie, nous cherchons une combinaison linéaire des classifieurs faibles entraînés dans la première partie.

Pour cela nous itérons à chaque étape sur toutes les images et tous nos classifieurs afin de déterminer le classifieur avec la plus faible erreur pondérée. Nous avons, à ce titre, utilisé *MPI\_MINLOC* pour

déterminer l'indice du meilleur classifieur. A chaque étape, nous avons ensuite mis à jour les poids des images pour rendre moins efficace notre classifieur (on a baissé le poids des images qu'il classait déjà correctement) afin de sélectionner d'autres classifieurs par la suite.

L'idée est de finalement obtenir une combinaison de classifieurs qui sont efficaces sur l'ensemble des images.

Pour mettre en oeuvre cette méthode, nous avons utilisé la fonction  $\frac{1}{2} \log(\frac{1-x}{x})$  qui nous permet d'obtenir une nouvelle pondération en fonction de l'erreur pondérée du meilleur classifieur.

includegraphics[width=10cm]"Fig5 alpha"

Nous voyons que cette fonction change de signe autour d'une erreur de 0.5 et cela a conduit à la limitation du nombre de classifieurs faibles sélectionnés par notre algorithme. En effet, un classifieur avec une erreur un peu plus faible que cette valeur était sélectionné puis, à cause de la modification des poids, il devenait moins efficace et passait à une erreur supérieure à 0.5 et donc, lorsqu'il était repris, on améliorait cette fois ses performances, le faisant à nouveau passer sous la barre de 0.5 d'erreur pondérée. Cette apparition de cycle nous a empêché d'obtenir une combinaison riche de classifieurs puisqu'en général nous avons obtenu moins d'une dizaine de classifieurs, indépendamment de la valeur de  $N$ .

## 4

### TEST DU CLASSIFIEUR FINAL

Q5. Notre classifieur final était très peu sensible à  $\theta$ . Les paramètres  $K = 2000$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $n = 200$ ,  $N = 20$ ,  $\theta = 0$  et une normalisation de 0.001 nous ont néanmoins permis d'obtenir un  $F - score$  de 0.444 sur toutes les images du dossier test.

Nous avons cependant été limités dans l'apprentissage par le nombre d'images disponibles, et notamment le fait qu'elles soient identiques dans les 3 dossiers (app, test et dev). Nous aurions peut-être dû passer à des caractéristiques rectangulaires pour obtenir davantage d'informations. Enfin, nous pourrions envisager de diviser la valeur de chaque caractéristique par sa taille afin de normaliser toutes les valeurs et de pouvoir ainsi les comparer entre elles et qu'elles soient toutes de l'ordre de l'unité.