

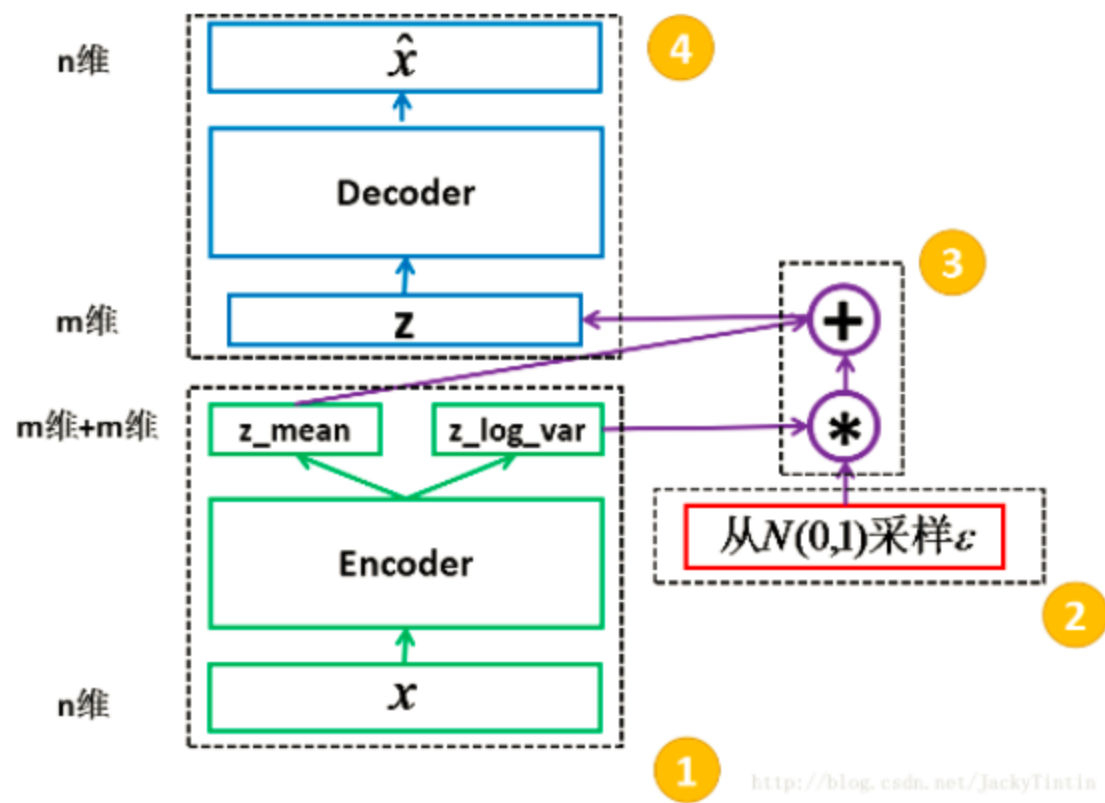
The Note of Variational Auto-Encoder Reading

chenrui li

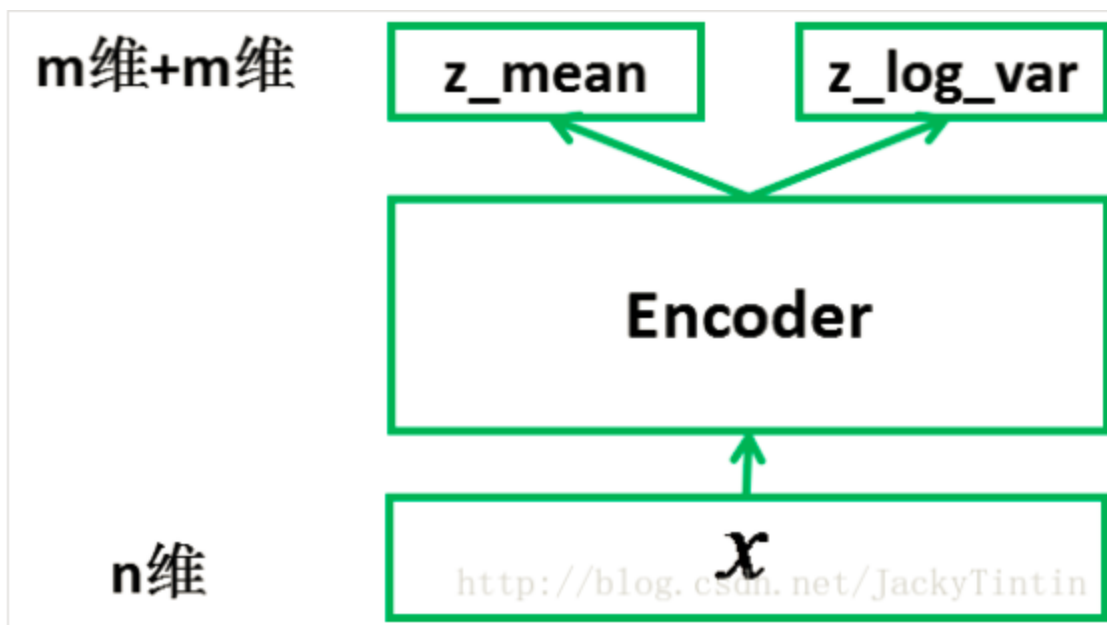
VAE

与一般自编码器不同的是，VAE的encoder输出是概率分布，即均值和方差。并且引入了概率分布的约束，使得encoder产生的 $P(z|x)$ 尽可能的满足标准正态分布。这样的话，生成器就具有的的实际的意义了，我们可以通过标准正态分布采样作为输入，扔到VAE中，从而产生具有实际意义的输出。

框架

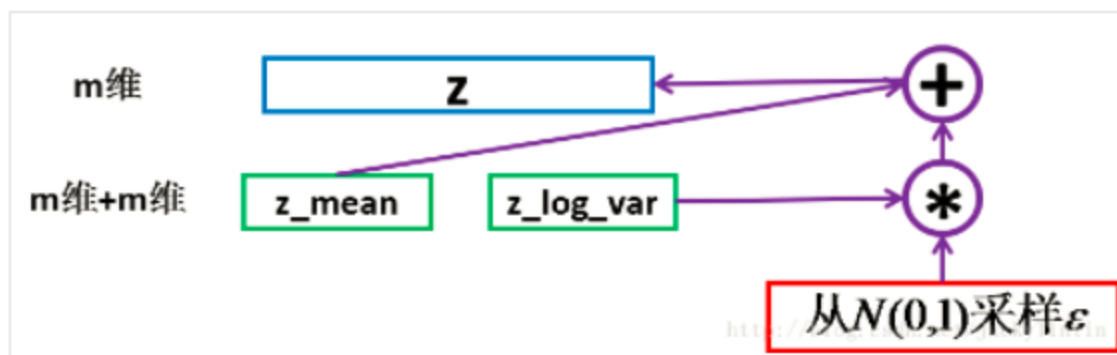


Encoder



输入 X 为 n 维，经过Encoder编码得到2个 m 维的输出，均值和方差。

Sampling



经过encoder产生m个高斯分布的均值和对数方差。我们可以根据这m个高斯分布生成相应的高斯部分随机数。这里运用到了重新参数化的技巧，由于 $z \sim N(\mu, \sigma)$ ，本应该从 $N(\mu, \sigma)$ 中进行采样，但这样对 μ 和 σ 无法求导，因此选择在 $N(0, 1)$ 上采样 ϵ ，然后 $z = \sigma \odot \epsilon + \mu$ 。这样， $z \sim N(\mu, \sigma)$ ，而且可以对 μ 和 σ 进行求导。

优化目标

$$\begin{aligned} L &= \log(p(x)) \\ &= \sum_z q(z|x) \log(p(x)) \\ &= \sum_z q(z|x) \log\left(\frac{p(z, x)}{p(z|x)}\right) \\ &= \sum_z q(z|x) \log\left(\frac{p(z, x)}{q(z|x)} \frac{q(z|x)}{p(z|x)}\right) \\ &= \sum_z q(z|x) \log\left(\frac{p(z, x)}{q(z|x)}\right) + \sum_z q(z|x) \log\left(\frac{q(z|x)}{p(z|x)}\right) \\ &= L^v + D_{\text{KL}}(q(z|x) \| p(z|x)) \\ &\geq L^v \end{aligned}$$

优化目标2

$$\begin{aligned} L^v &= \sum_z q(z|x) \log \left(\frac{p(z, x)}{q(z|x)} \right) \\ &= \sum_z q(z|x) \log \left(\frac{p(x|z)p(z)}{q(z|x)} \right) \\ &= \sum_z q(z|x) \log \left(\frac{p(z)}{q(z|x)} \right) + \sum_z q(z|x) \log (p(x|z)) \\ &= -D_{\text{KL}}(q(z|x) \| p(z)) + \mathbb{E}_{q(z|x)} (\log (p(x|z))) \\ &= -D_{\text{KL}}(q(z|x^{(i)}) \| p(z)) + \mathbb{E}_{q(z|x^{(i)})} (\log (p(x^{(i)}|z))) \end{aligned}$$

这里，先验 $p(z)$ 通常设为标准正态分布。

计算

目标要使得后验 $p(z|x)$ 与先验 $p(z)$ 越逼近越好，计算为：

$$-D_{\text{KL}}(q(z|x^{(i)})||p(z)) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \left(1 + \log(\sigma_{z_j}^{(i)^2}) - \mu_{z_j}^{(i)^2} - \sigma_{z_j}^{(i)^2} \right)$$

目标要使得生成 x 似然最大化，这里通过采用近似：

$$L^v = -D_{\text{KL}}(q(z|x^{(i)})||p(z)) + \mathbb{E}_{q(z|x^{(i)})}(\log(p(x^{(i)}|z)))$$

$$L^v \approx -D_{\text{KL}}(q(z|x^{(i)})||p(z)) + \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \log(p(x^{(i)}|z^{(i,l)}))$$

用途

由于我们指定 $p(z)$ 为标准正态分布，结合已经训练好的 $\text{decoder}(p(x|z))$ ，就可以进行采样，生成类似训练样本但不同的新样本。

