

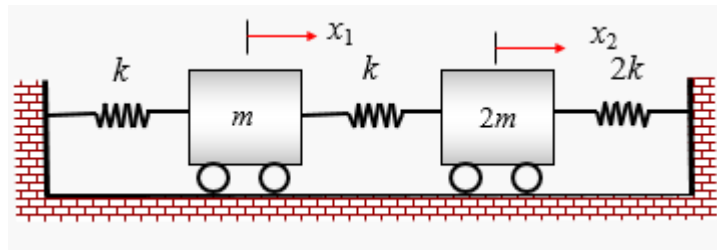
《振动力学》上机实验教学内容

教学软件：Matlab，或 Mathematica

教学目的：通过 Matlab/Mathematica 编程，用标准化的程序解决《振动力学》课程中计算量较大的题目，验证部分概念，并以图像形式给出计算结果并进行讨论。

1. 热身内容：

用解析法计算图示两自由度质量弹簧系统的固有频率和模态，作出振型图；并用模态叠加法分析系统的自由振动响应，自行给出初始条件。



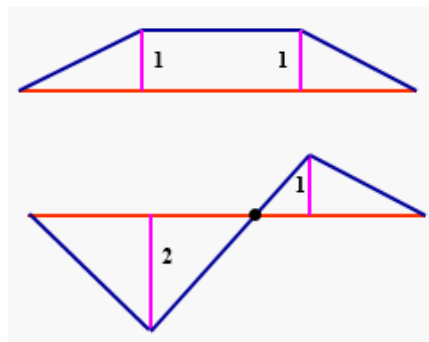
动力学方程：

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

固有频率与模态：

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 1.581\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \phi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

振型图：



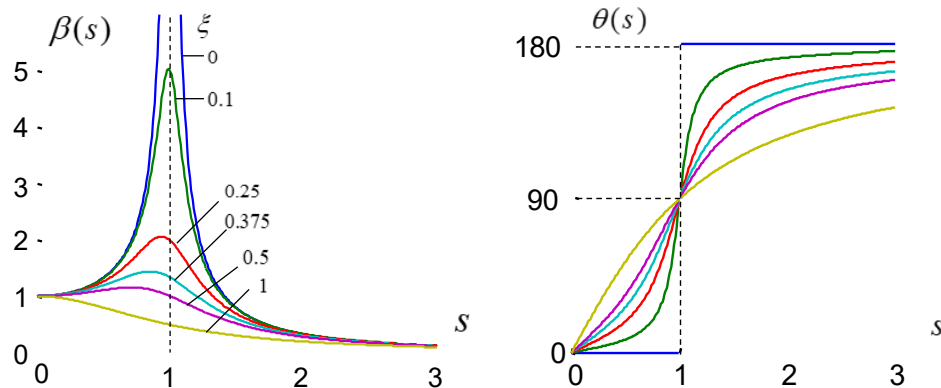
$$\Phi = \{\phi^{(1)}, \phi^{(2)}\} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_p = \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \begin{bmatrix} 3k & 0 \\ 0 & 15k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_p = \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 6m \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{K}_p = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

2. 热身内容 2

单自由度系统受到简谐激励作用时的幅频特性曲线、相频特性曲线，阻尼比从 0 到 2 变化，至少包含图例中的 6 个数值。

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)^2 + (2\xi s)^2}}, \quad \theta(s) = \tan^{-1} \frac{2\xi s}{1-s^2}$$



3. 实验内容 1

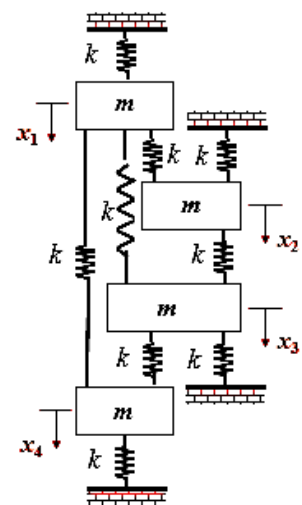
四自由度质量弹簧系统，试计算：

- (1) 用解析法求系统的固有频率和模态，并作出振型图；
- (2) 用矩阵迭代法求系统的固有频率和模态，精度控制在 10^{-5} ；讨论不同假设模态对收敛速度的影响（如，用第 1 阶假设模态作为第 2、3、4 阶假设模态，选择不满足该阶模态节点数的模态）；
- (3) 用子空间迭代法求系统的固有频率和模态，分别取 $r=2$ 、3、4，讨论收敛速度或分析误差。

$$M = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = k \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

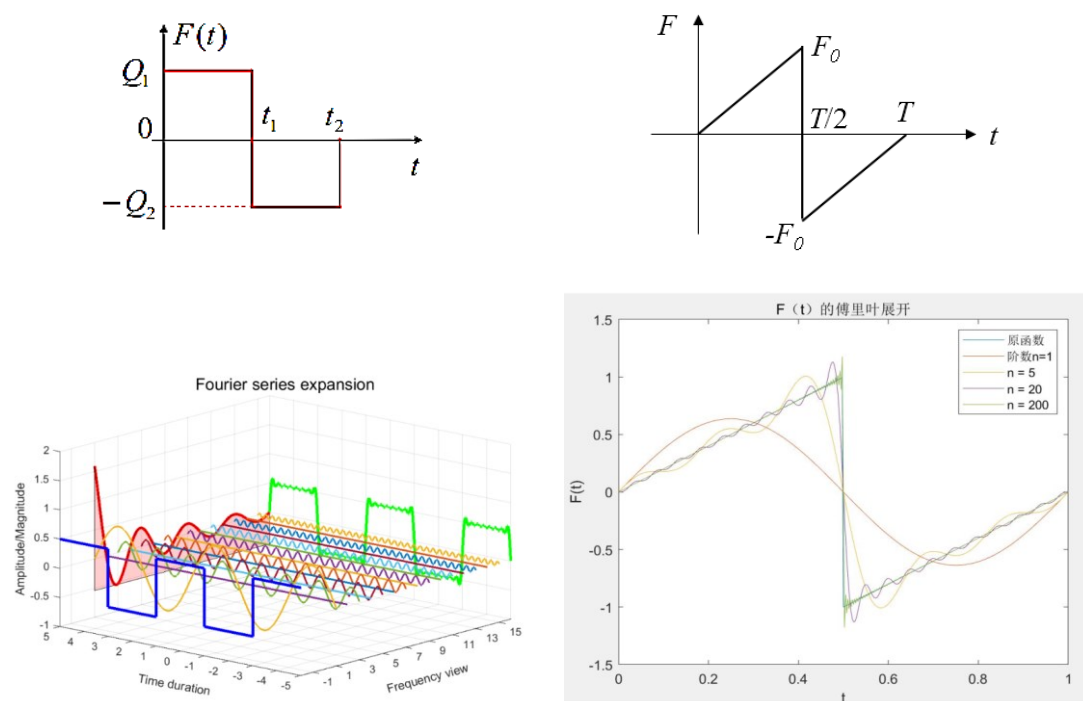
$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 3\frac{k}{m}, \quad \omega_3^2 = \omega_4^2 = 5\frac{k}{m}$$

$$\Phi = [\phi^{(1)} \quad \phi^{(2)} \quad \phi^{(3)} \quad \phi^{(4)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4. 实验内容 2

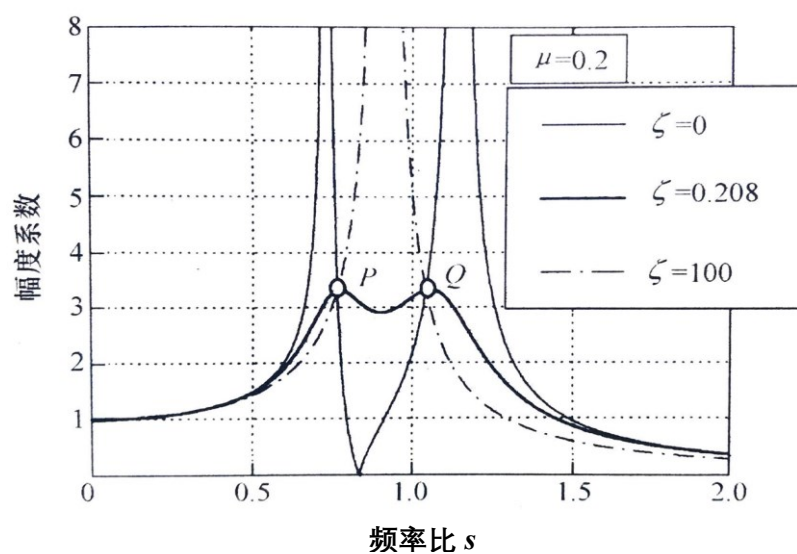
用图形表示方波和线性波的傅里叶级数展开。



5. 实验内容 3

动力吸振器的最优设计：调整 α ，让 S 、 T 等高；调整 ξ ，让 S 、 T 均为极值。

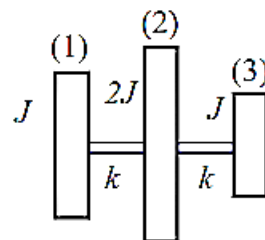
$$\bar{x}_1 = \frac{\sqrt{(s^2 - \alpha^2)^2 + (2\xi s)^2}}{\sqrt{[\mu s^2 \alpha^2 - (s^2 - 1)(s^2 - \alpha^2)]^2 + (2\xi s)^2 (s^2 - 1 + \mu s^2)^2}}$$



6. 实验内容 4

用移频法计算图示三自由度扭振圆盘系统的固有频率和模态，并作出振型图。自行选取 α 值。

$$M = J \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



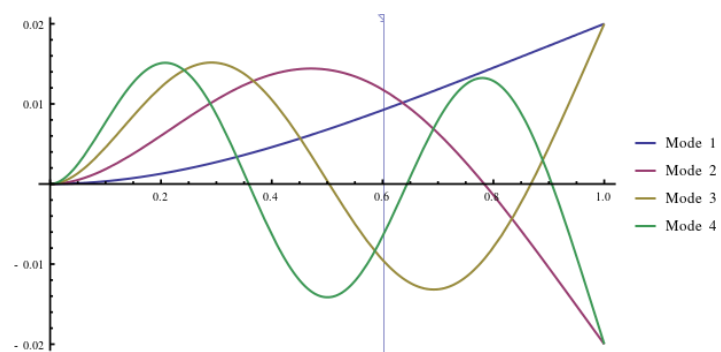
7. 实验内容 5

计算简单梁的前 6 阶固有频率和模态，作出振型图（以动画形式表现更佳）。

类型	频率方程	低阶固有频率 ¹	振型示意图	振型函数
双端简支	$\sin \mu l = 0$ 显式解： $\mu_i l = i\pi$	$\mu_i l = i\pi$		$\phi_i(x) = \sin \mu_i x$ $= \sin \frac{i\pi}{l} x$
悬臂梁	$\cos \mu l \cosh \mu l + 1 = 0$ 近似根： $\mu_i l \approx \left(i - \frac{1}{2}\right)\pi$ ($i \geq 5$)	$\mu_1 l = 0.5969\pi$ $\mu_2 l = 1.4942\pi$ $\mu_3 l = 2.5002\pi$ $\mu_4 l = 3.5000\pi$		$\phi_i(x) = \cosh \mu_i x - \cos \mu_i x -$ $\frac{\sinh \mu_i l - \sin \mu_i l}{\cosh \mu_i l + \cos \mu_i l} \times$ $(\sinh \mu_i x - \sin \mu_i x)$ 注：左端固定
双端固定	$\cos \mu l \cosh \mu l - 1 = 0$ 近似根： $\mu_i l \approx \left(i + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($i \geq 1$)	$\mu_1 l = 1.5056\pi$ $\mu_2 l = 2.4998\pi$ $\mu_3 l = 3.5000\pi$ $\mu_4 l = 4.5000\pi$		$\phi_i(x) = \cosh \mu_i x - \cos \mu_i x -$ $\frac{\cosh \mu_i l - \cos \mu_i l}{\sinh \mu_i l - \sin \mu_i l} \times$ $(\sinh \mu_i x - \sin \mu_i x)$
双端自由	$\cos \mu l \cosh \mu l - 1 = 0$ 近似根： $\mu_i l \approx \left(i + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($i \geq 1$)	两个 0 频除外 $\mu_1 l = 1.5056\pi$ $\mu_2 l = 2.4998\pi$ $\mu_3 l = 3.5000\pi$ $\mu_4 l = 4.5000\pi$		非刚体： $\phi_i(x) = \cosh \mu_i x + \cos \mu_i x -$ $\frac{\cosh \mu_i l - \cos \mu_i l}{\sinh \mu_i l - \sin \mu_i l} \times$ $(\sinh \mu_i x + \sin \mu_i x)$
固定简支	$\tanh \mu l - \tan \mu l = 0$ 近似根： $\mu_i l \approx \left(i + \frac{1}{4}\right)\pi$ ($i \geq 1$)	$\mu_1 l = 1.2499\pi$ $\mu_2 l = 2.2500\pi$ $\mu_3 l = 3.2500\pi$ $\mu_4 l = 4.2500\pi$		$\phi_i(x) = \sin \mu_i x - \sinh \mu_i x -$ $\frac{\sin \mu_i l + \sinh \mu_i l}{\cos \mu_i l + \cosh \mu_i l} \times$ $(\cos \mu_i x - \cosh \mu_i x)$ 注：左固定右简支
简支自由	$\tanh \mu l - \tan \mu l = 0$ 近似根： $\mu_i l \approx \left(i + \frac{1}{4}\right)\pi$ ($i \geq 1$)	$\mu_1 l = 1.2499\pi$ $\mu_2 l = 2.2500\pi$ $\mu_3 l = 3.2500\pi$ $\mu_4 l = 4.2500\pi$		非刚体： $\phi_i(x) = \sin \mu_i x + \frac{\sin \mu_i l}{\sinh \mu_i l} \times$ $\sinh \mu_i x$ 注：左简支右自由

$$\omega_i = \mu_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

悬臂梁的前 4 阶振型



自由梁的前 4 阶振型

