树堆与平衡二叉排序树

张路

采用教材：张铭，王腾蛟，赵海燕 编写
高等教育出版社，2008. 6 （“十一五”国家级规划教材)

树堆的引言

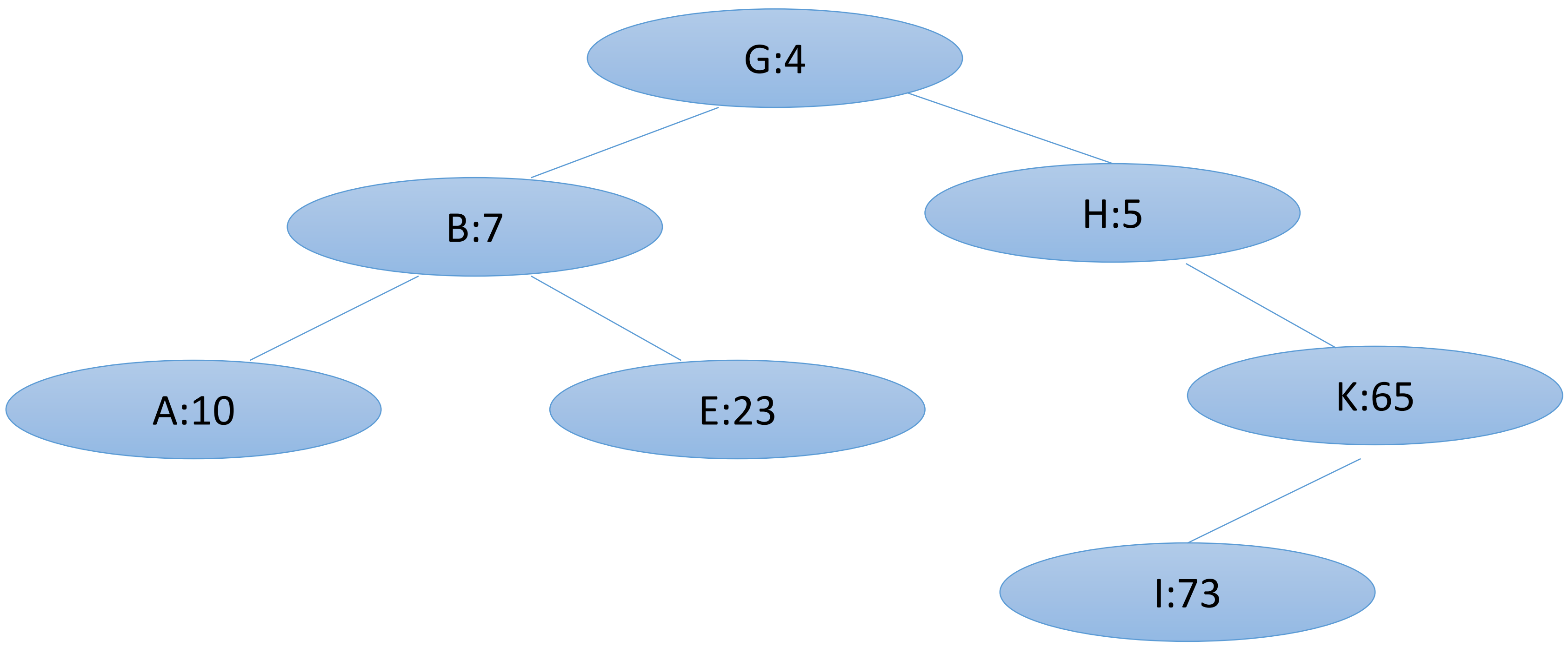
- 将n个元素的集合插入到一棵二叉检索树，得到的树可能不平衡，因而导致查找时间长
- 已知随机构造的二叉检索树，往往是平衡的。因此，先随机排列元素，然后按照排列顺序将其插入到树中
- 如果无法同时得到所有元素，即：每次收到一个元素，如何随机建立二叉检索树呢？

树堆

- 树堆（treap）：修改了结点顺序的二叉搜索树
- 每个结点x的两个字段：
  - 关键字key[x]
  - 优先级priority[x]：独立选取的随机数
  - 假设所有的关键字不同、所有的优先级也不同

- Treap的结点排列使关键字遵循二叉搜索树性质，且优先级遵循最小堆性质：
  - 如果v是u的左儿子，那么key[v]<key[u]
  - 如果v是u的右儿子，那么key[v]>key[u]
  - 如果v是u的儿子，那么priority[v]>priority[u]

树堆示例



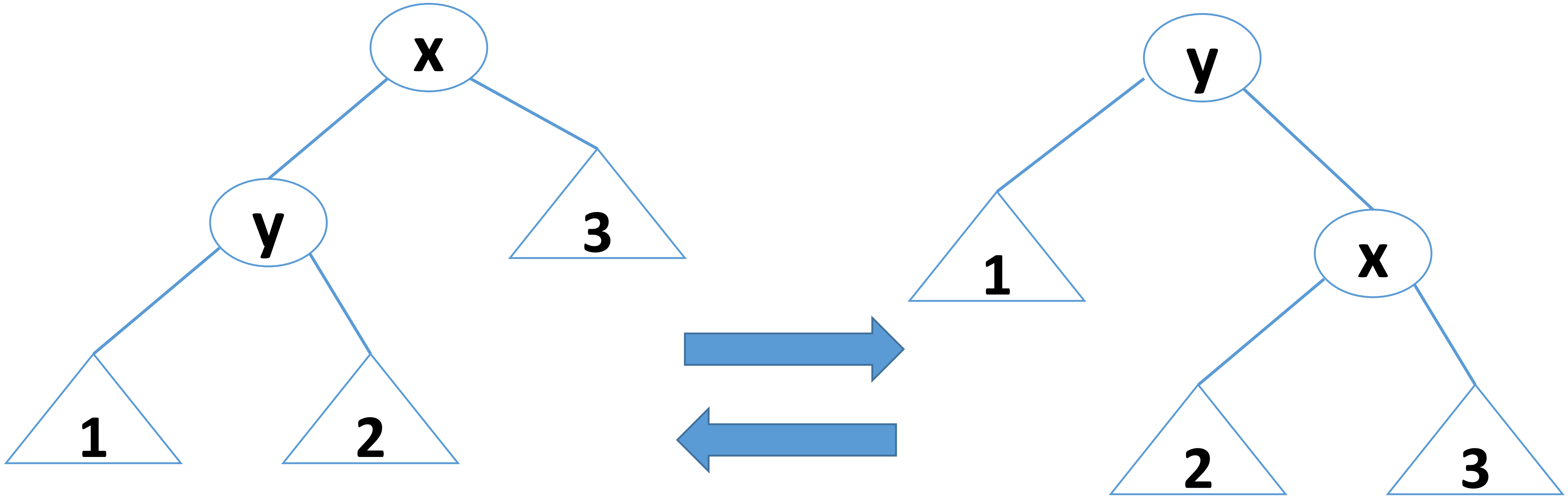
- 每个结点x标记了key[x]和priority[x]
- treap既具有二叉检索树（tree）的性质，又具有堆（heap）的性质。

树堆的基本操作

- 一般二叉搜索树的操作
  - 插入
  - 查询
  - 删除
- Treap特殊的额外操作
  - 旋转

两种旋转

- 左旋转和右旋转

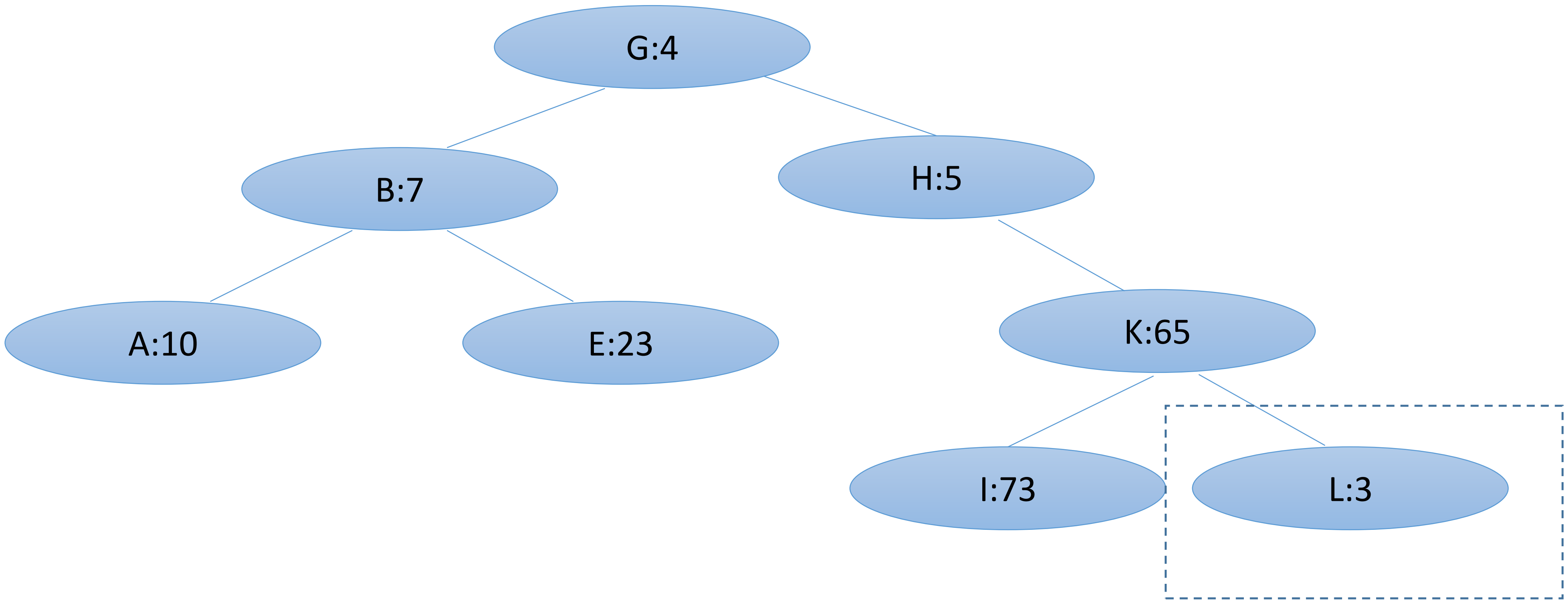


树堆的插入

- 给结点随机分配优先级，与二叉搜索树相同，先把要插入的结点插入到叶结点，然后跟维护堆一样。
- 若当前结点是根的左儿子就右旋；如果当前结点是根的右儿子就左旋
- 时间复杂度O(log N)，N是结点个数

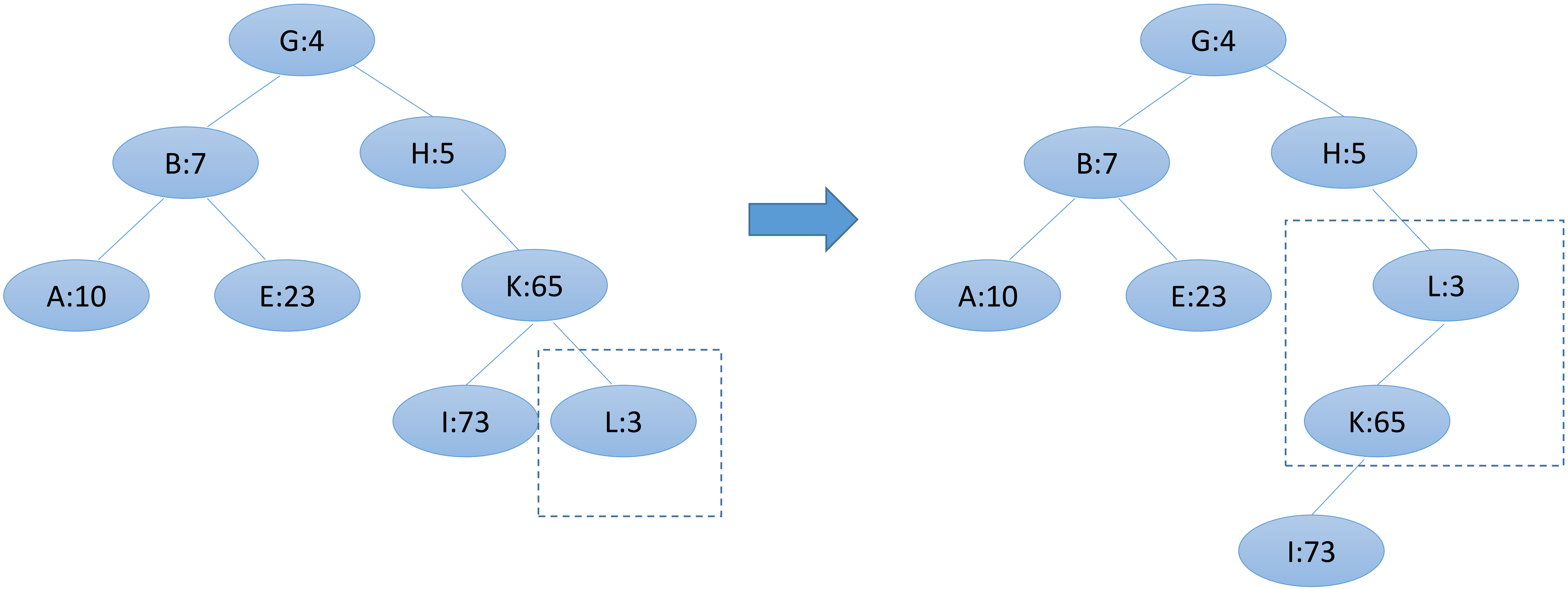
插入示例(1)

- 插入L:3



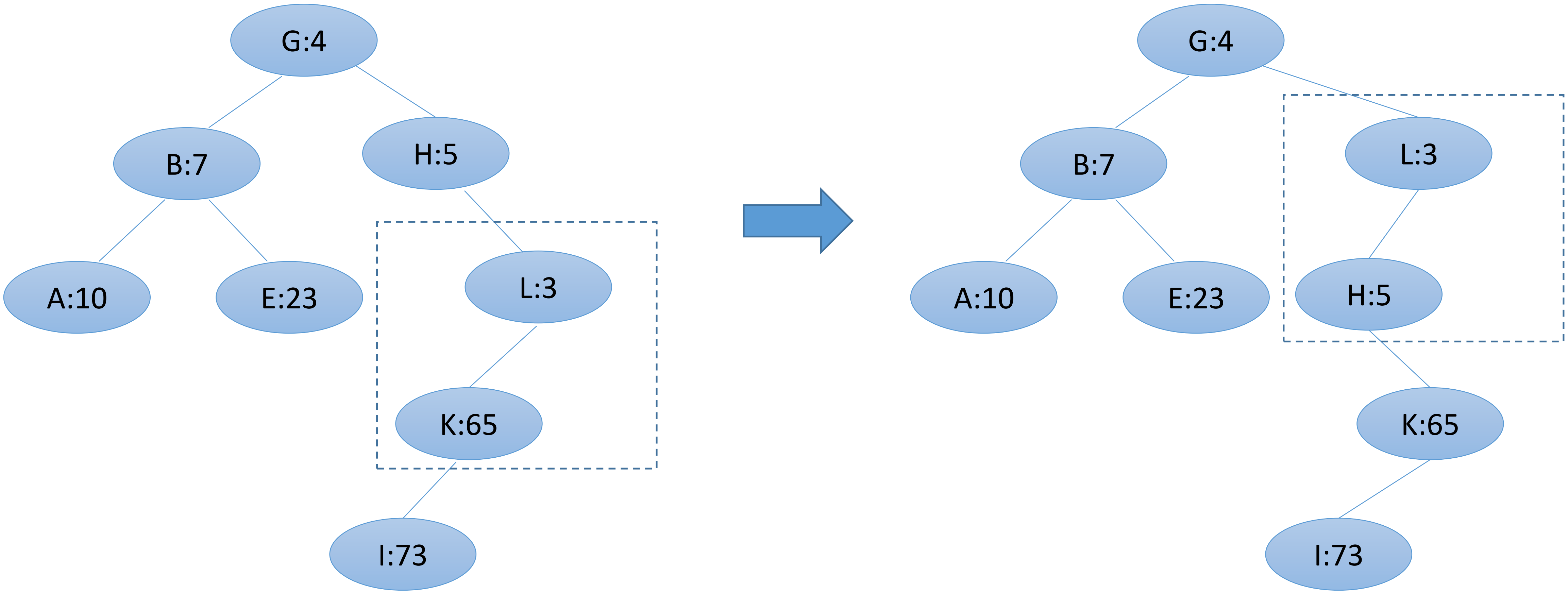
插入示例(2)

- 第一次调整



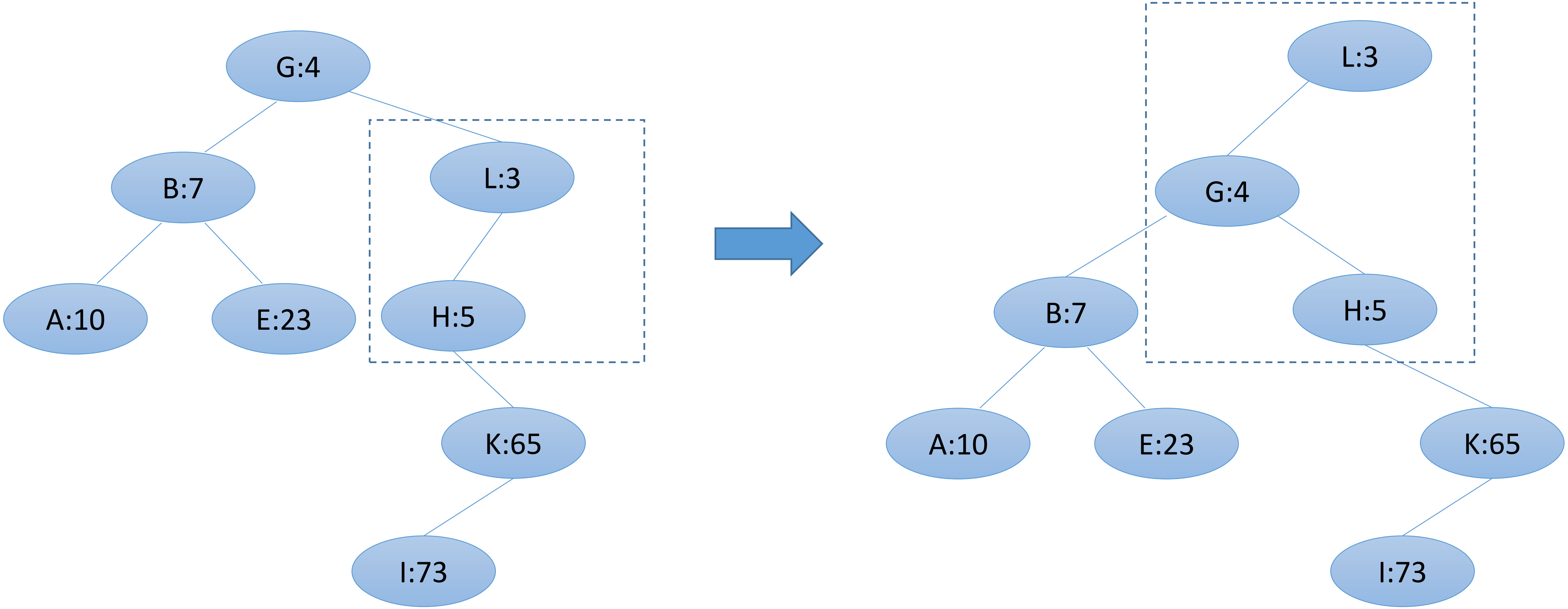
插入示例(3)

- 第二次调整



插入示例(4)

- 第三次调整



树堆的查询

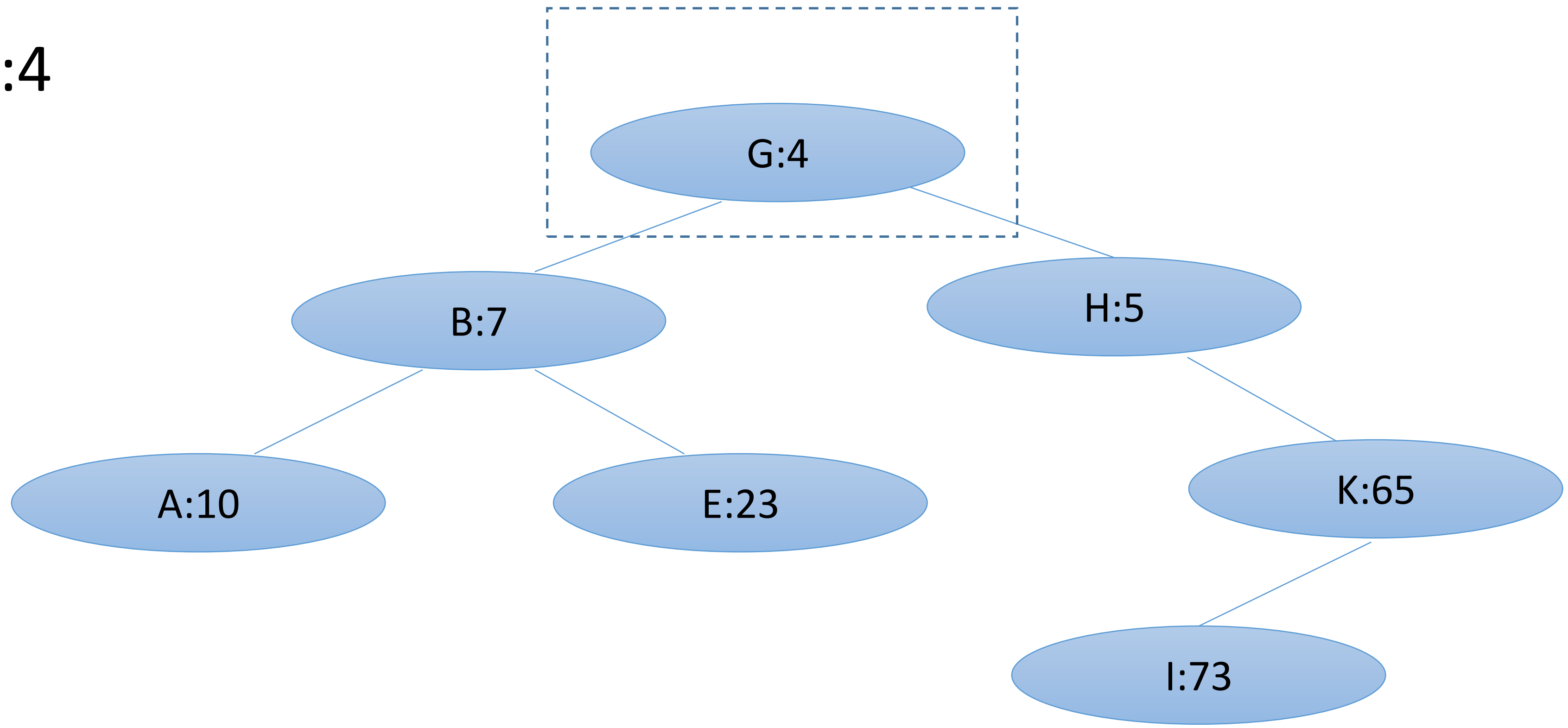
- 查询与普通的二叉搜索树相同，时间复杂度是O(log N)

树堆的删除

- 目标：将要删除的结点旋转到叶结点
- 方法：每次找到优先级最大的儿子，向与其相反的方向旋转，直到结点被旋转到叶结点，然后直接删除
- 时间复杂度O(log N)

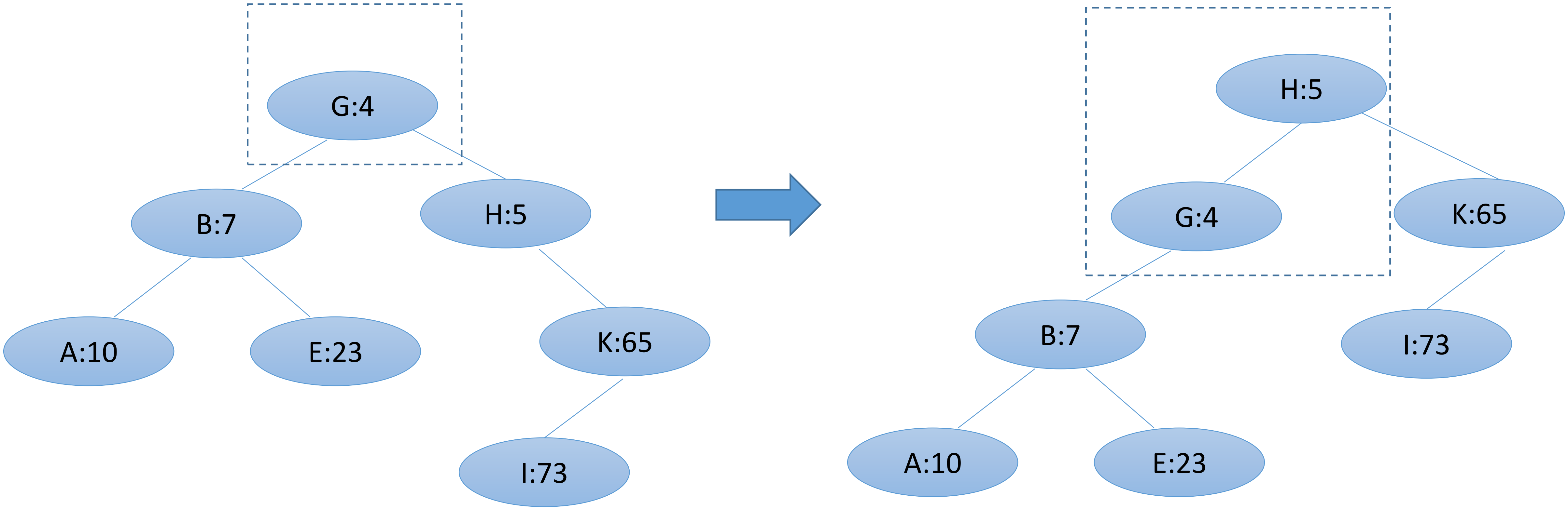
删除示例(1)

- 删除G:4



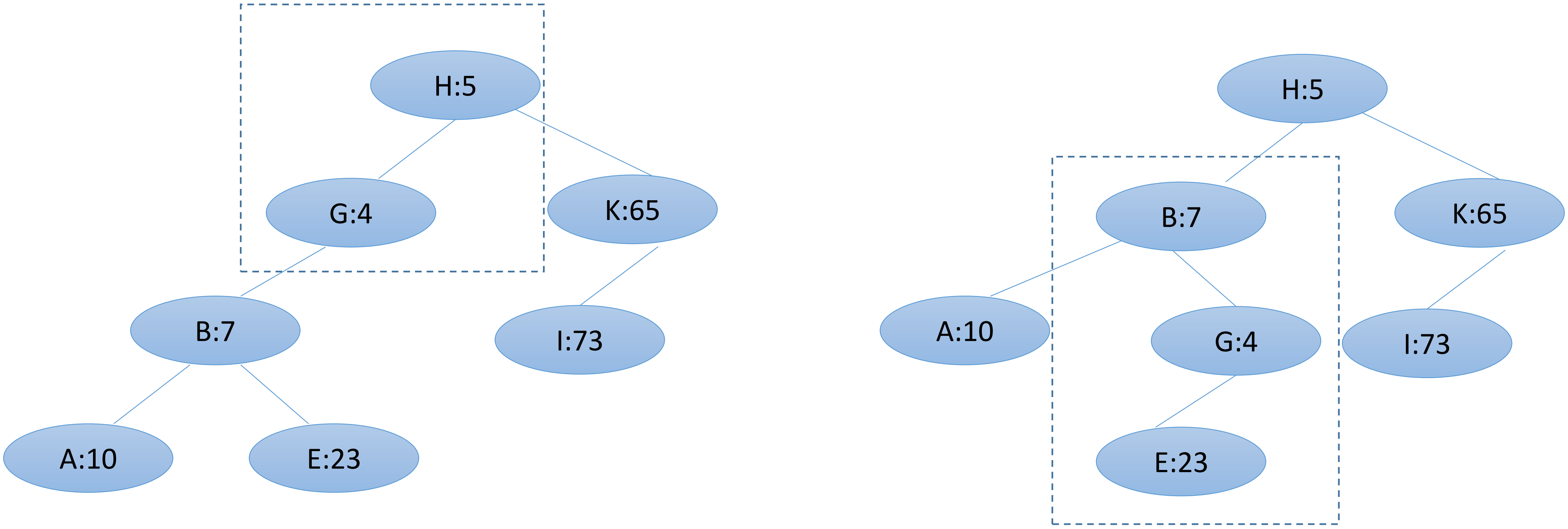
删除示例(2)

- 第一次旋转



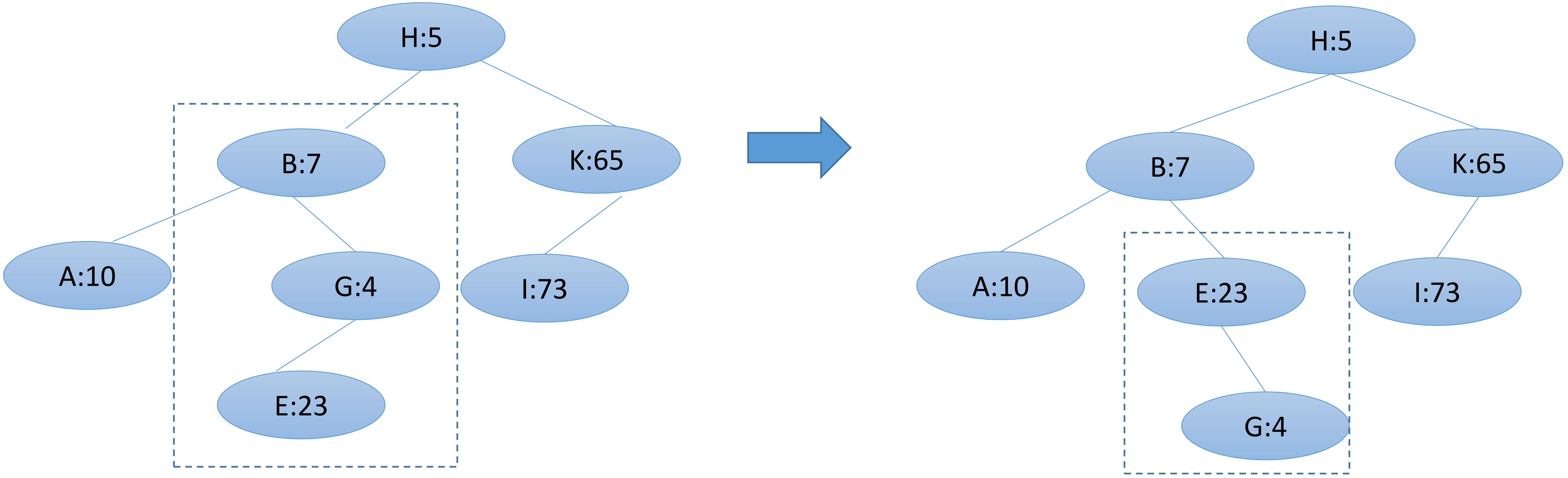
删除示例(3)

- 第二次旋转



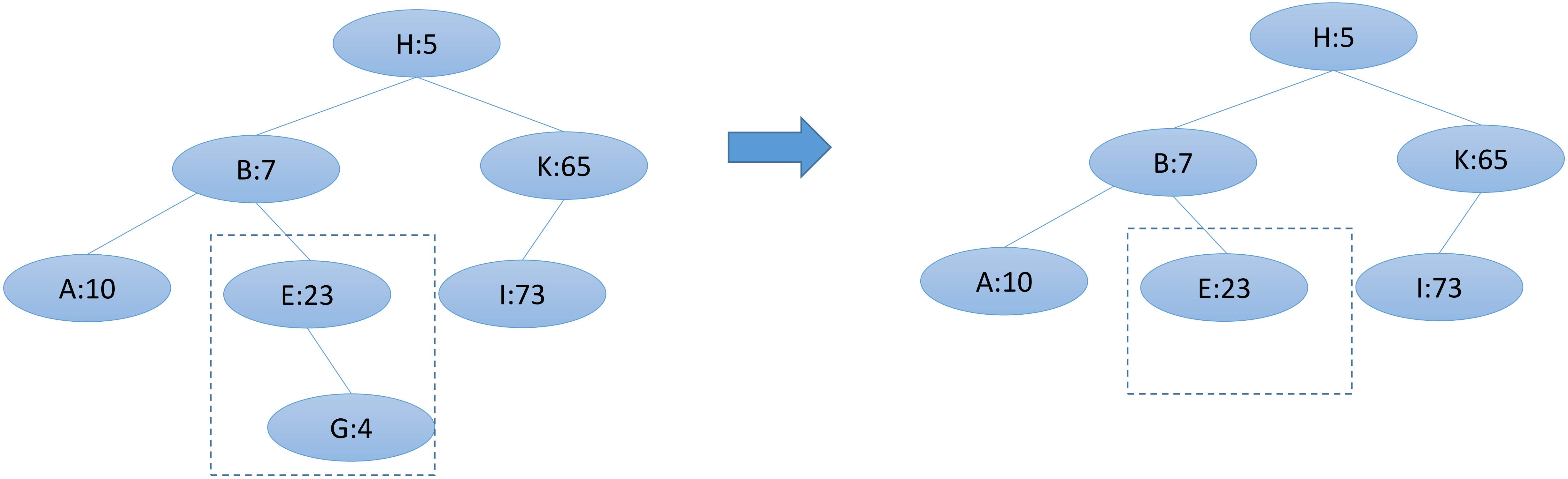
删除示例(4)

- 第三次旋转



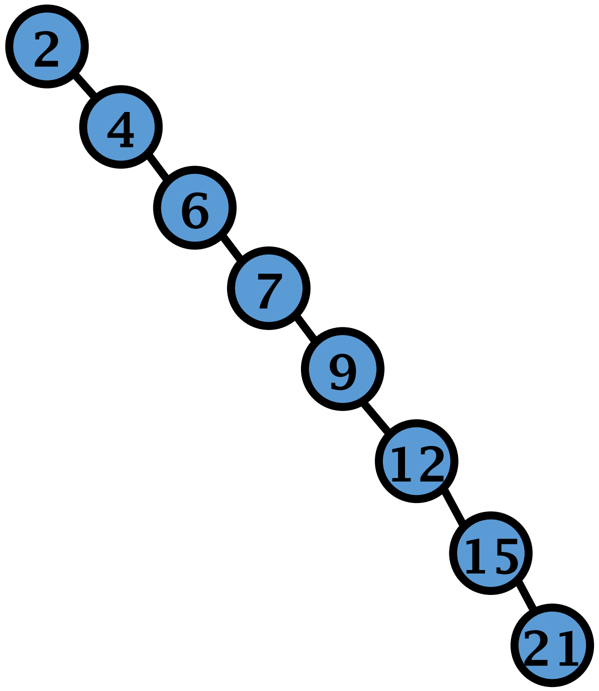
删除示例(5)

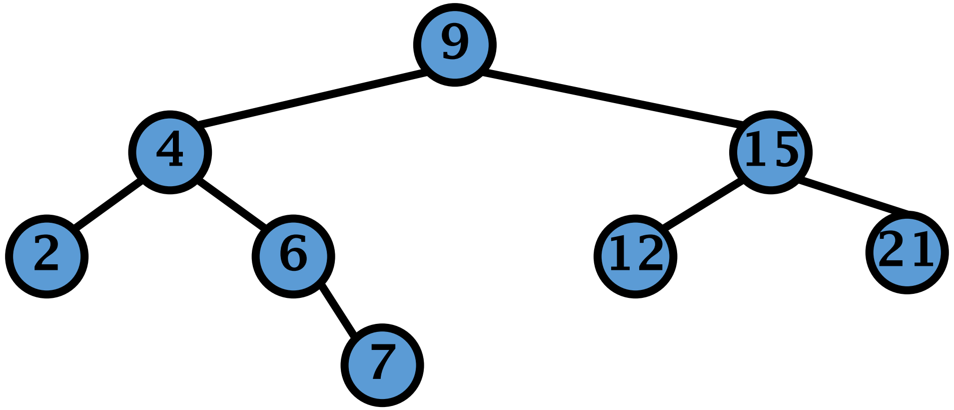
- 删除



平衡的二叉搜索树 (AVL)

- BST受输入顺序影响
  - 最好O (log n)
  - 最坏O (n)
- Adelson-Velskii 和 Landis
  - AVL 树，平衡的二叉搜索树
  - 始终保持O (log n) 量级

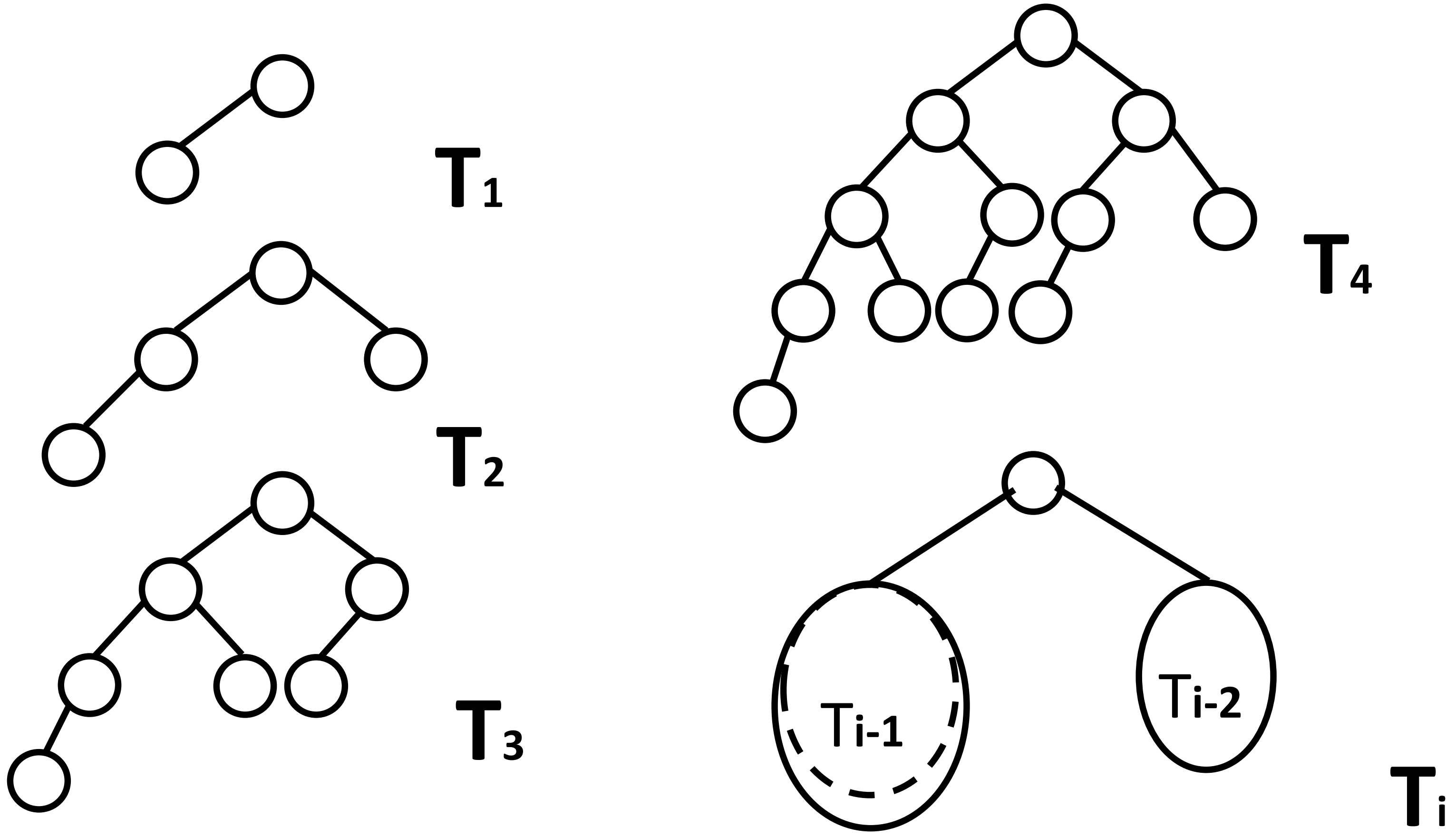




AVL 树的性质

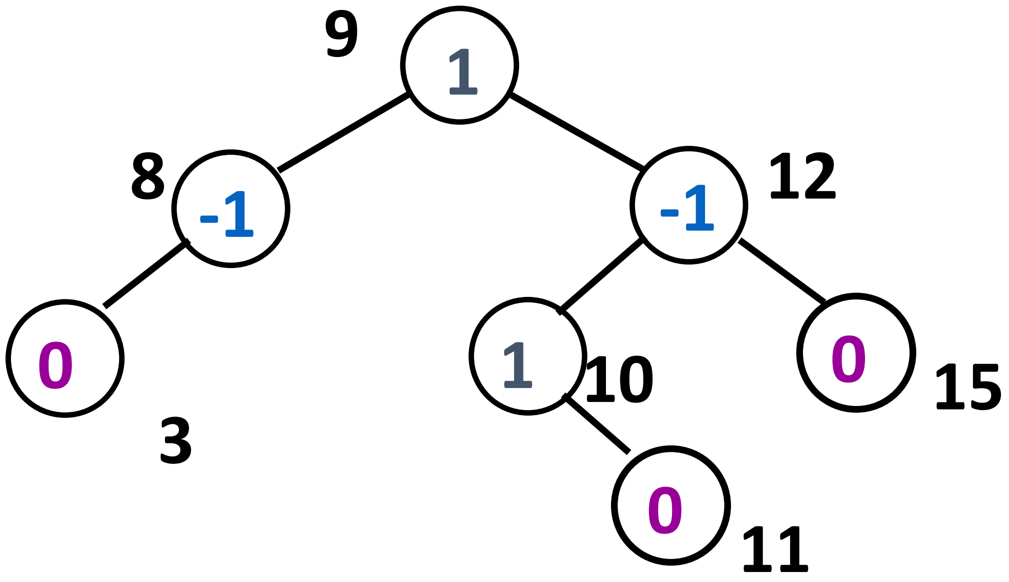
- 可以为空
- 具有 n 个结点的 AVL 树，高度为 O (log n)
- 如果 T 是一棵 AVL 树
  - 那么它的左右子树 T_L、T_R 也是 AVL 树
  - 并且 $|h_L - h_R| \le 1$
    - h_L、h_R 是它的左右子树的高度

AVL 树举例



平衡因子

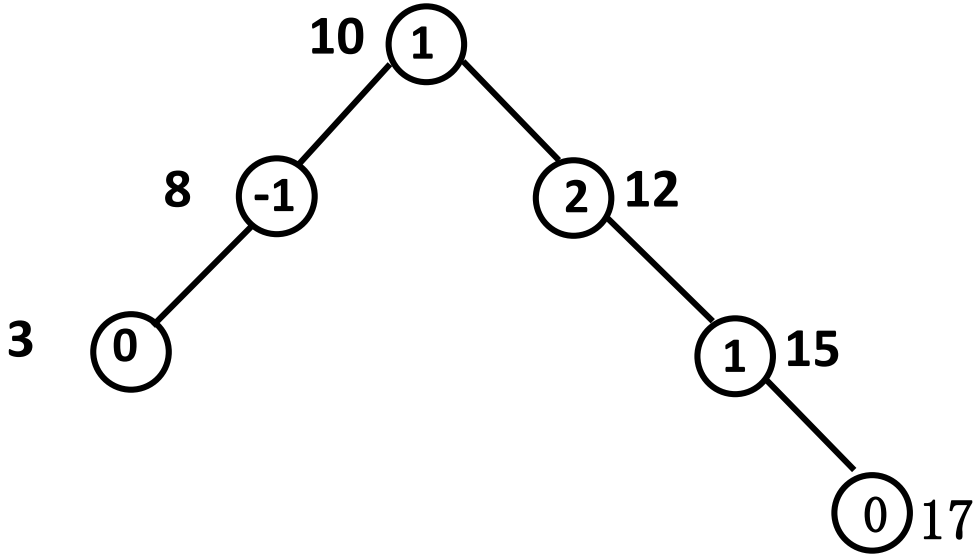
- 平衡因子，bf（x）：
  - Bf（x）= $height(x_{lchild}) - height(x_{rchild})$
- 结点平衡因子可能取值为 0，1 和 -1



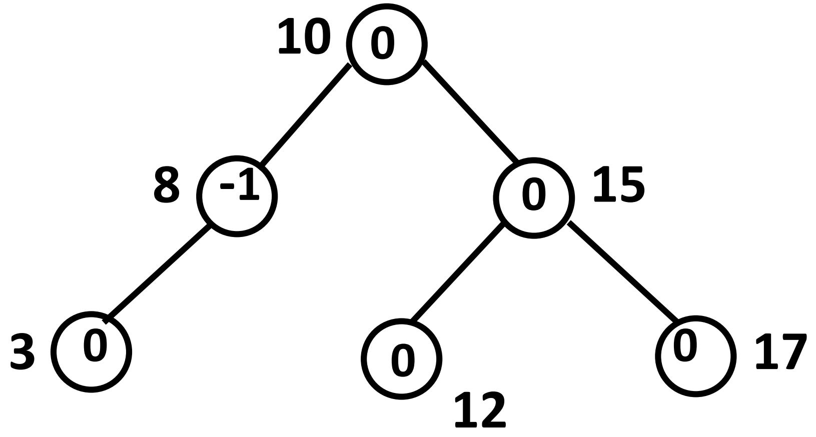
AVL 树结点的插入

- 插入与 BST 一样：新结点作叶结点
- 调整后的状态
  - 结点原来是平衡的，现在成为左重或右重的
    - 修改相应前驱结点的平衡因子
  - 结点原来是某一边重的，而现在成为平衡的了
    - 树的高度未变，不修改
  - 结点原来就是左重或右重的，又加到重的一边
    - 不平衡
    - “危急结点”

恢复平衡



插入17后导致不平衡



重新调整为平衡结构

- 不平衡情况发生在插入新结点后
- BST 把新结点插入到叶结点
- 假设 a 是离插入结点最近，且平衡因子绝对值不等于0的结点
  - 新插入的关键码为 key 的结点 s 要么在它的左子树中，要么在其右子树中
  - 假设插入在右边，原平衡因子
    - (1) a->bf = -1
    - (2) a->bf = 0
    - (3) a->bf = +1

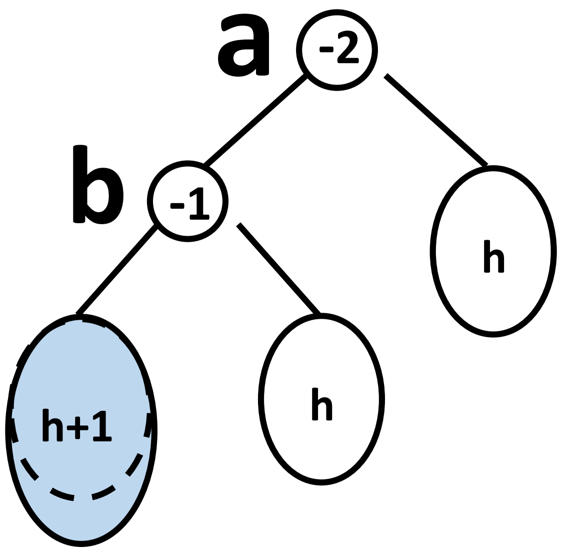
- 假设 a 离新结点 s 最近，且平衡因子绝对值不等于0
  - s (关键码为key) 要么在 a 的左子树，要么在其右子树中

- 假设在右边，因为从 s 到 a 的路径上（除 s 和 a 以外）结点都要从原 bf=0 变为 |bf|=+1，对于结点 a
  - 1. a->bf = -1，则 a->bf = 0， a 子树高度不变
  - 2. a->bf = 0， 则 a->bf = +1，a 子树树高改变
    - 由a的定义 (a->bf $\neq$ 0) ，可知 a 是根
  - 3. a->bf = +1，则 a->bf = +2，需要调整

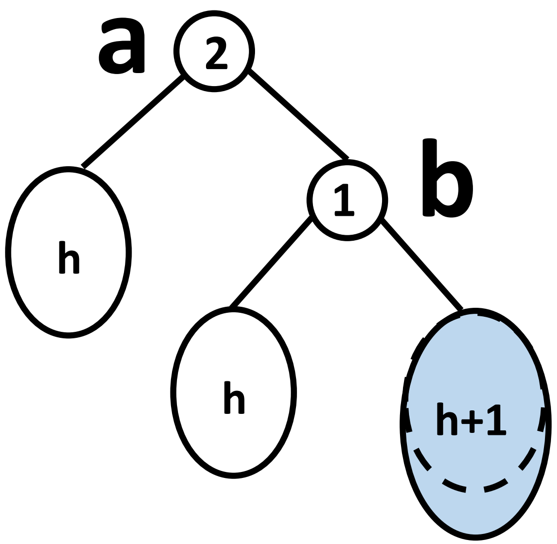
不平衡的情况

- AVL 树任意结点 a 的平衡因子只能是0，1，-1
- a 本来左重，a.bf==-1，插入一个结点导致 a.bf 变为-2
  - LL 型：插入到 a 的左子树的左子树
    - 左重+左重，a.bf 变为-2
  - LR 型： 插入到 a 的左子树的右子树
    - 左重+右重，a.bf 变为-2
- 类似地， a.bf==1，插入新结点使得 a.bf 变为2
  - RR 型：导致不平衡的结点为 a 的右子树的右结点
  - RL 型：导致不平衡的结点为 a 的右子树的左结点

不平衡的图示



LL型

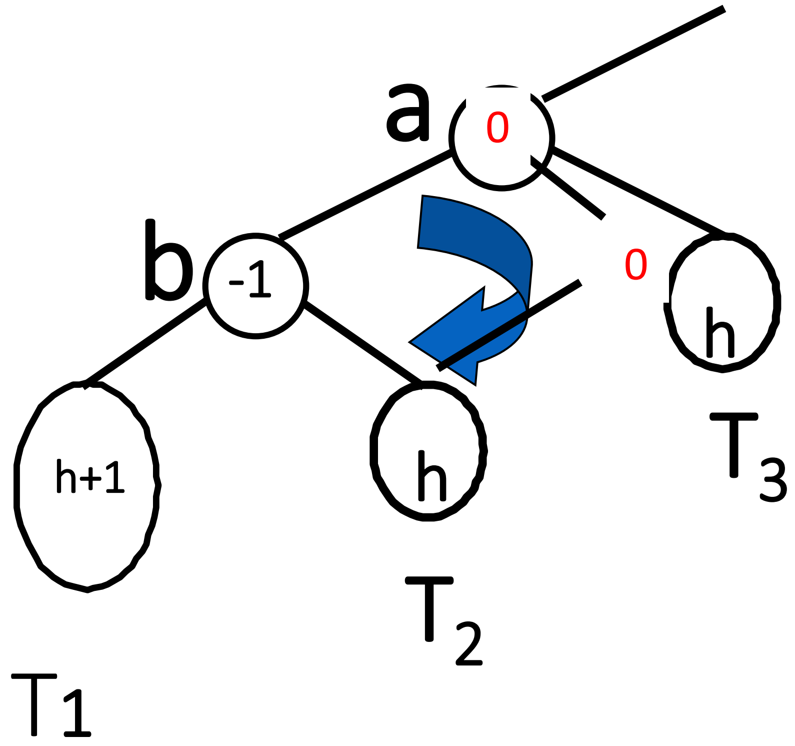


RR型

不平衡情况总结

- LL 型和 RR 型是对称的，
  LR 型和 RL 型是对称的
- 不平衡的结点一定在根结点与新加入结点之间的路径上
- 它的平衡因子只能是 2 或者 -2
  - 如果是 2， 它在插入前的平衡因子是1
  - 如果是 -2，它在插入前的平衡因子是 -1

LL单旋转



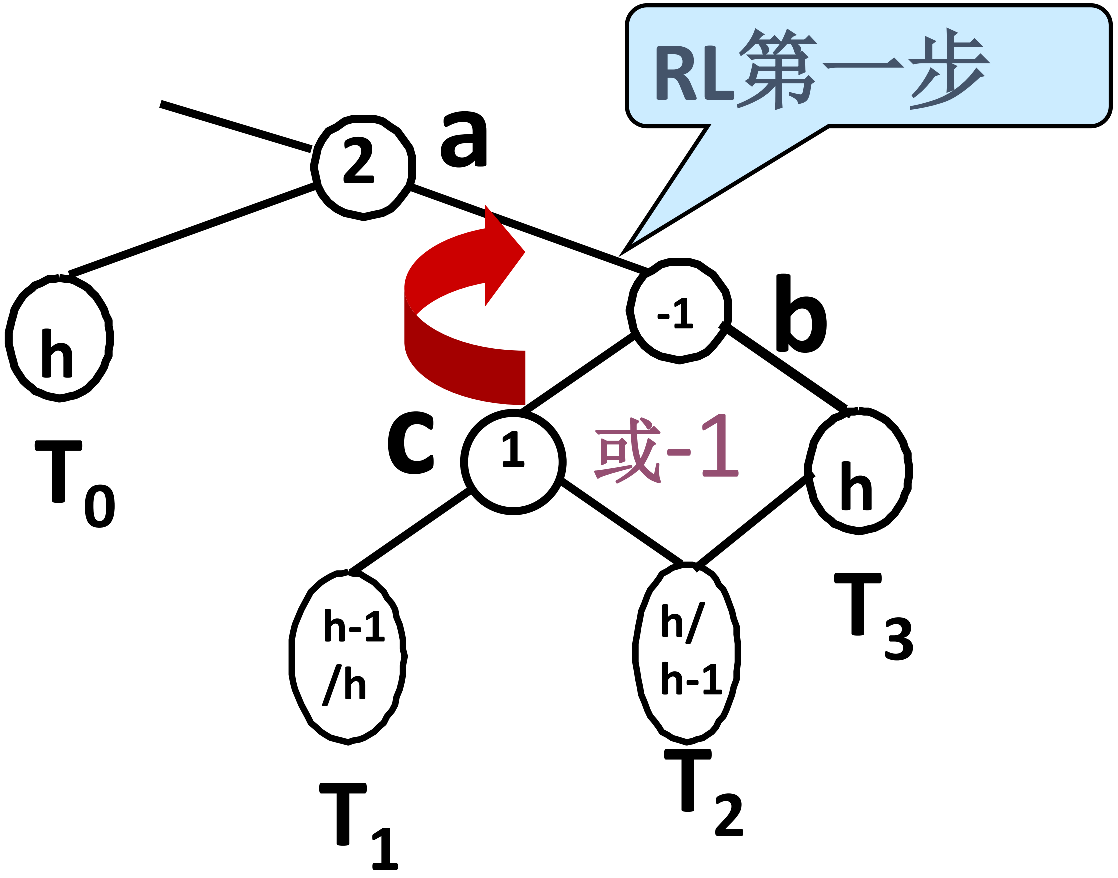
旋转运算的实质

- 以RR型图示为例，总共有7个部分
  - 三个结点：a、b、c
  - 四棵子树 T_0、 T_1、 T_2、 T_3
    - 加重 c 为根的子树，但是其结构其实没有变化
    - T_2、c、T_3 可以整体地看作 b 的右子树
- 目的：重新组成一个新的 AVL 结构
  - 平衡
  - 保留了中序周游的性质
    - T_0 a T_1 b T_2 c T_3

双旋转

- RL 或者 LR 需要进行双旋转
  - 这两种情况是对称的
- 我们只讨论 RL 的情况
  - LR 是一样的

RL型双旋转第一步



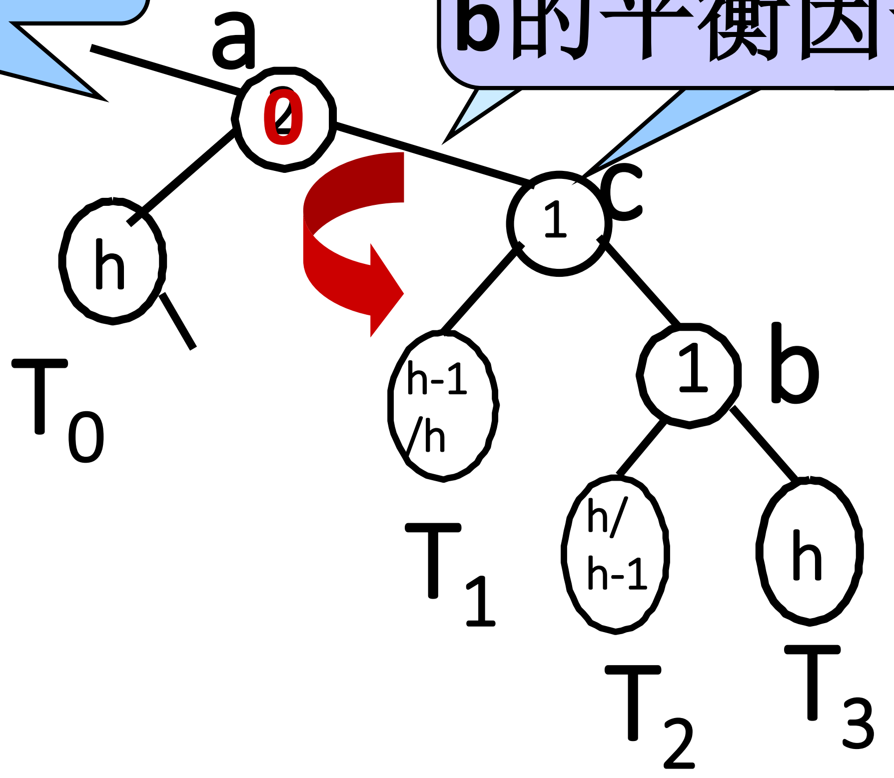
插入前
a子树高h+2

插入后
a子树高h+3

RL型双旋转第二步

中间状态
平衡因子无意义

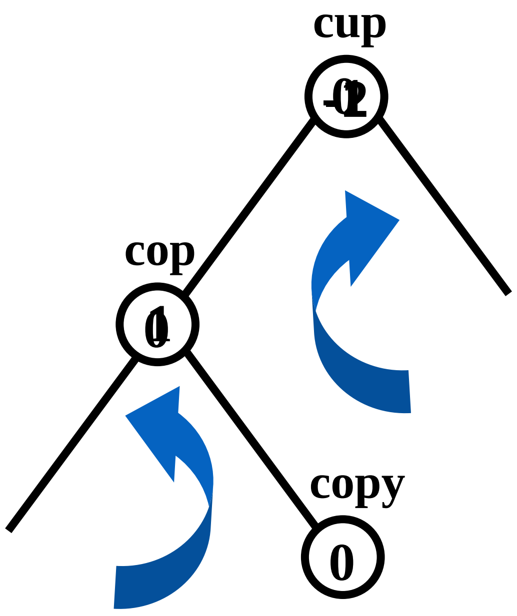
a的平衡因子为-1或0
b的平衡因子为0或1



旋转运算的实质（续）

- 把树做任何一种旋转 (RR、RL、LL、LR)
- 新树保持了原来的中序周游顺序
- 旋转处理中仅需改变少数指针
- 而且新的子树高度为 h+2，保持插入前子树的高度不变
- 原来二叉树在 a 结点上面的其余部分 (若还有的话) 总是保持平衡的

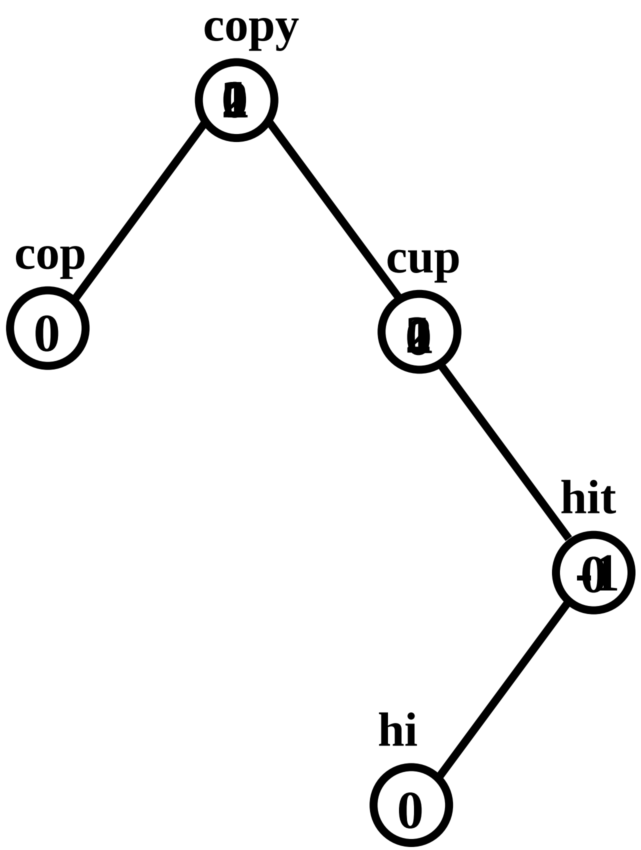
插入单词：cup ，cop， copy， hit， hi， his和 hia后得到的AVL树



插入copy后不平衡

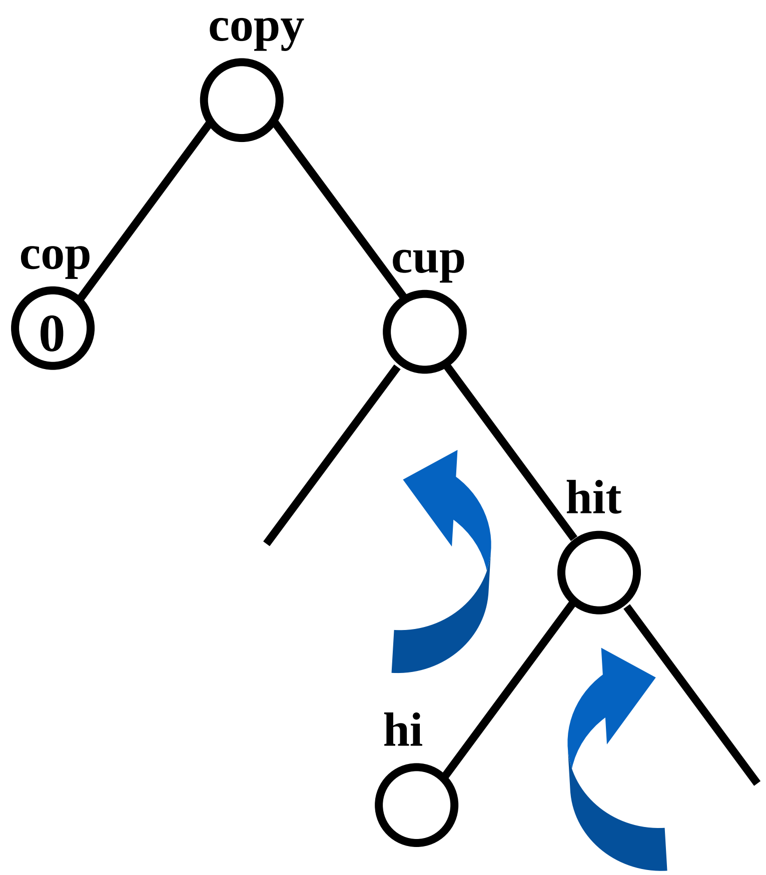
LR双旋转

插入单词：cup ，cop， copy， hit， hi， his和 hia后得到的AVL树

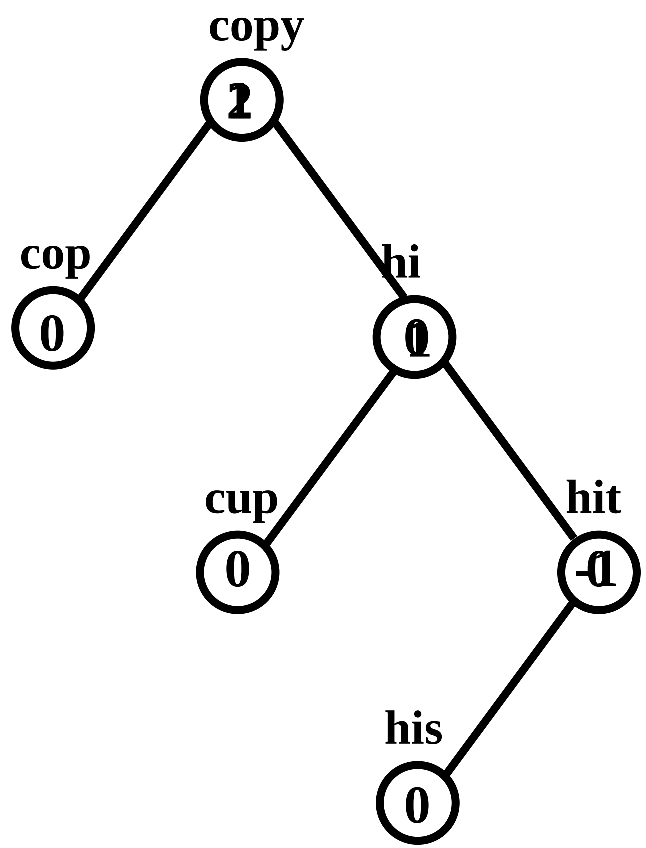


插入单词：cup ，cop， copy， hit， hi， his和 hia后得到的AVL树

RL双旋转

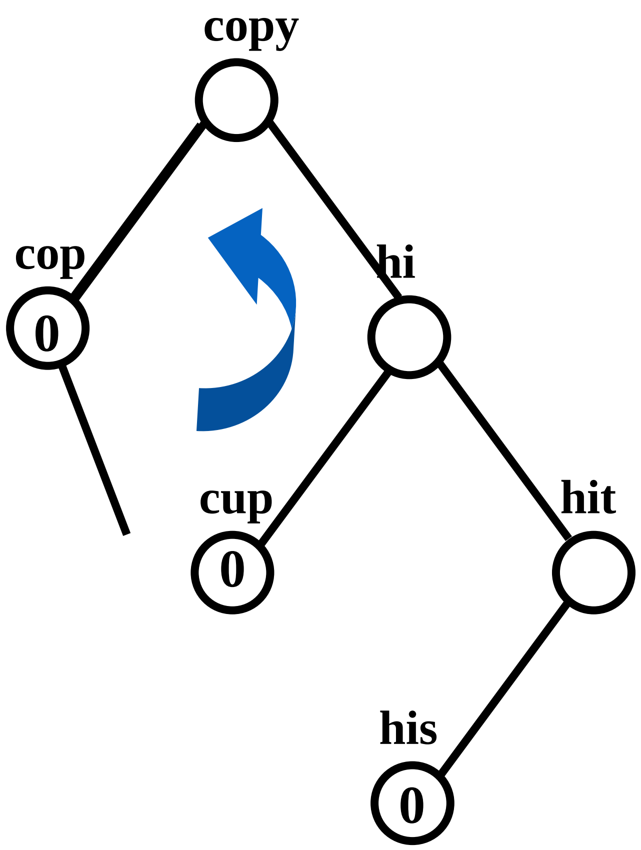


插入单词：cup ，cop， copy， hit， hi， his和 hia后得到的AVL树

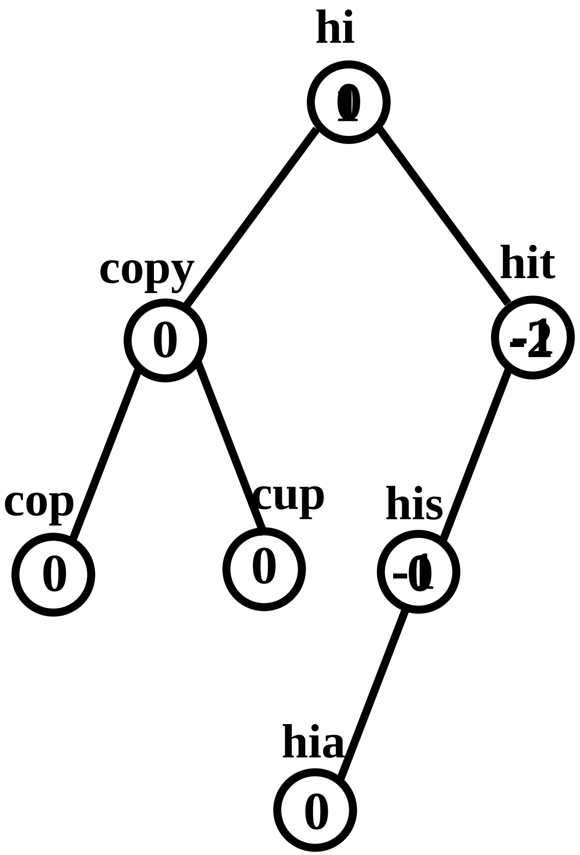


插入单词：cup ，cop， copy， hit， hi， his和 hia后得到的AVL树

RR单旋转

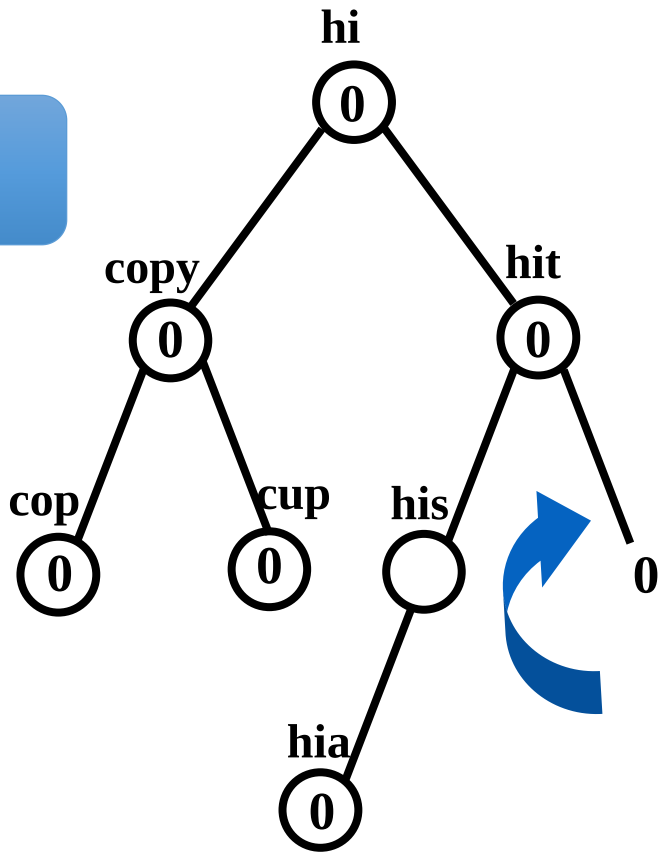


插入单词：cup ，cop， copy， hit， hi， his和 hia后得到的AVL树



插入单词：cup ，cop， copy， hit， hi， his和 hia后得到的AVL树

LL单旋转



AVL 树结点的删除

- 删除是插入的逆操作。从删除结点的意义上来说，AVL 树的删除操作与 BST 一样
- AVL 树的删除是比较复杂过程，下面具体讨论一下删除的过程
- 由于情况较多，所以图示每种情况只列举了一种例子，其他都是类似的

AVL 树结点的删除

- 具体删除过程请参考 BST 结点的删除
- 如果被删除结点 a 没有子结点→直接删除 a
- 如果 a 有一个子结点
  - 用子结点的内容代替 a 的内容，然后删除子结点
- 如果 a 有两个子结点
  - 那么则要找到 a 在中序周游下的前驱结点 b (b 的右子树必定为空)
  - 用 b 的内容代替 a，并且删除结点 b (如果 b 的左子树不空，则该左子树代替代替原来 b 的位置)。

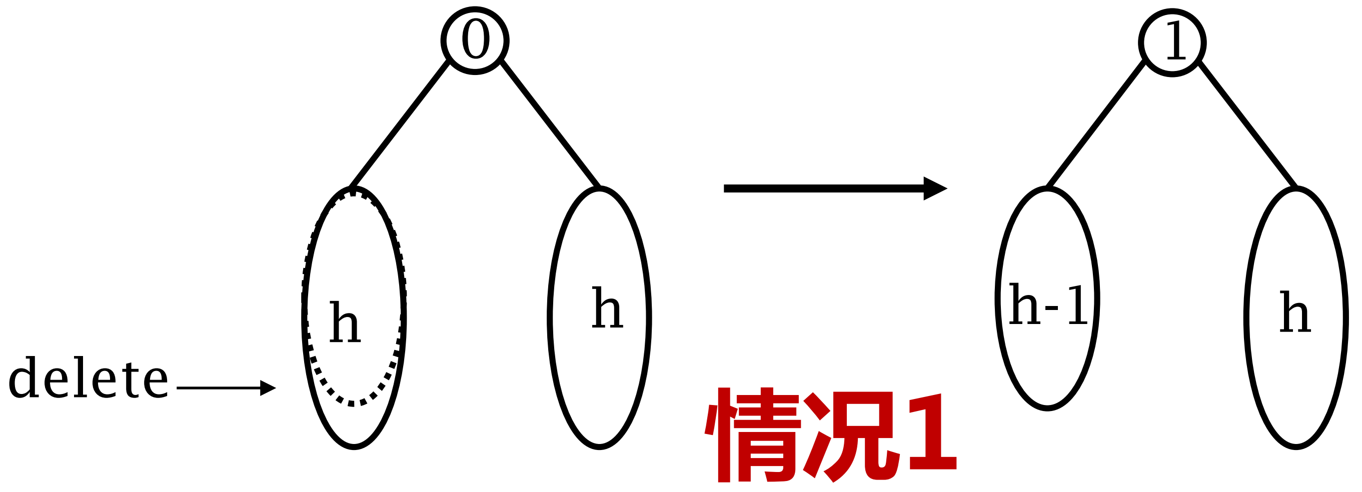
AVL结点删除后的调整

- AVL 树调整的需要
  - 删除结点后可能导致子树的高度以及平衡因子的变化
  - 沿着被删除结点到根结点的路径来调整这种变化
- 需要改动平衡因子
  - 则修改之
- 如果发现不需要修改则不必继续向上回溯
  - 布尔变量 modified 来标记，其初值为 TRUE
  - 当 modified=FALSE 时，回溯停止

有以下三种情况

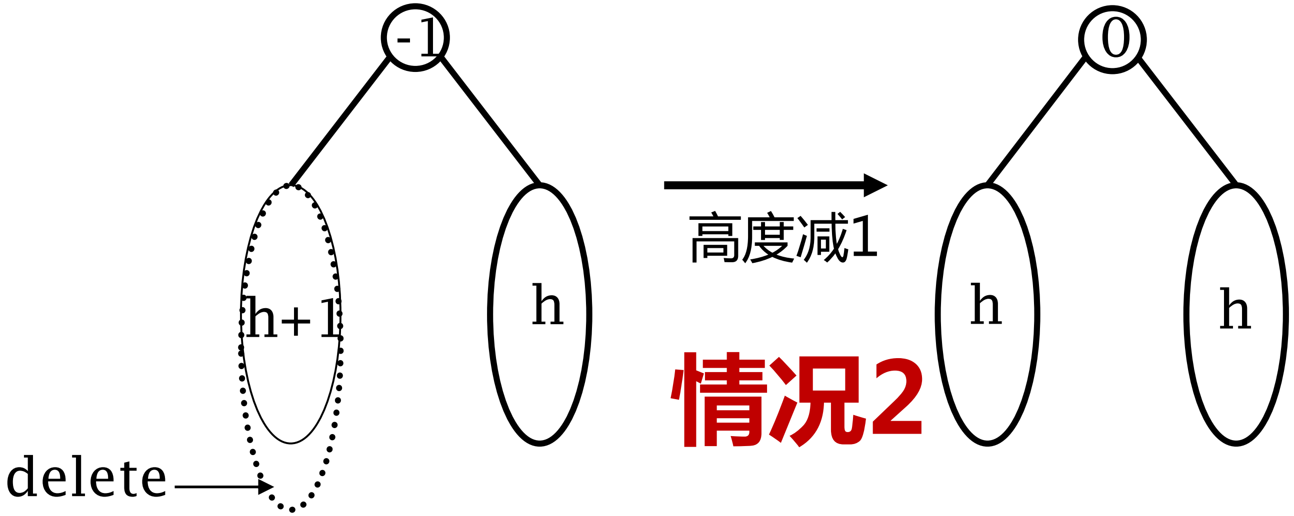
AVL 树结点的删除过程（续）

- 第一种情况当前结点a平衡因子为0
  - 其左或右子树被缩短，则平衡因子该为1或者-1
  - modified=FALSE
  - 变化不会影响到上面的结点，调整可以结束



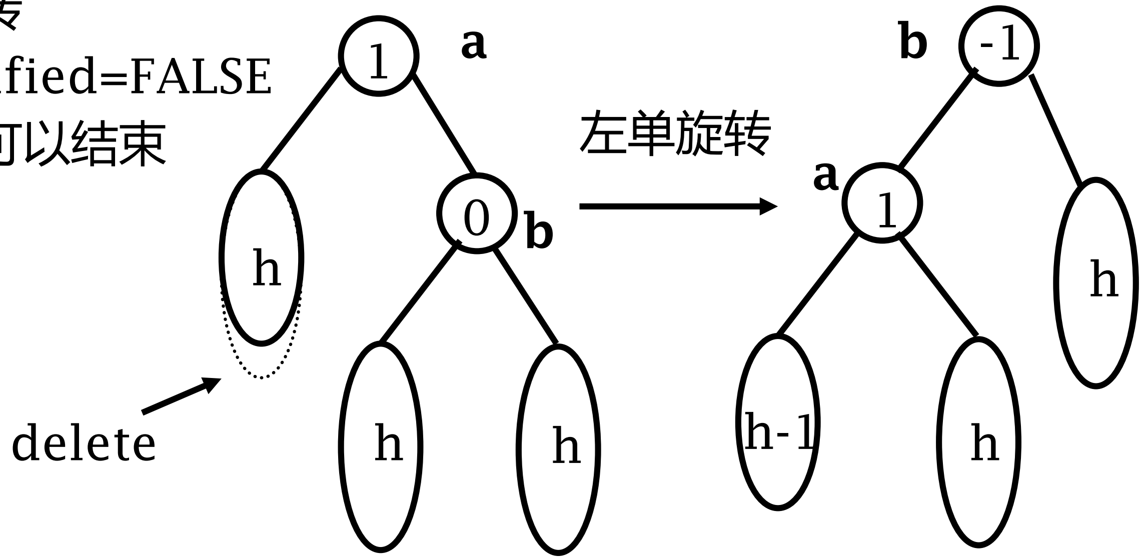
AVL 树结点的删除过程（续）

- 第二种情况是当前结点a平衡因子不为 0，但是其较高的子树被缩短
  - 则其平衡因子修改为 0
  - Modified = TRUE
  - 需要继续向上调整



AVL 树结点的删除过程（续）

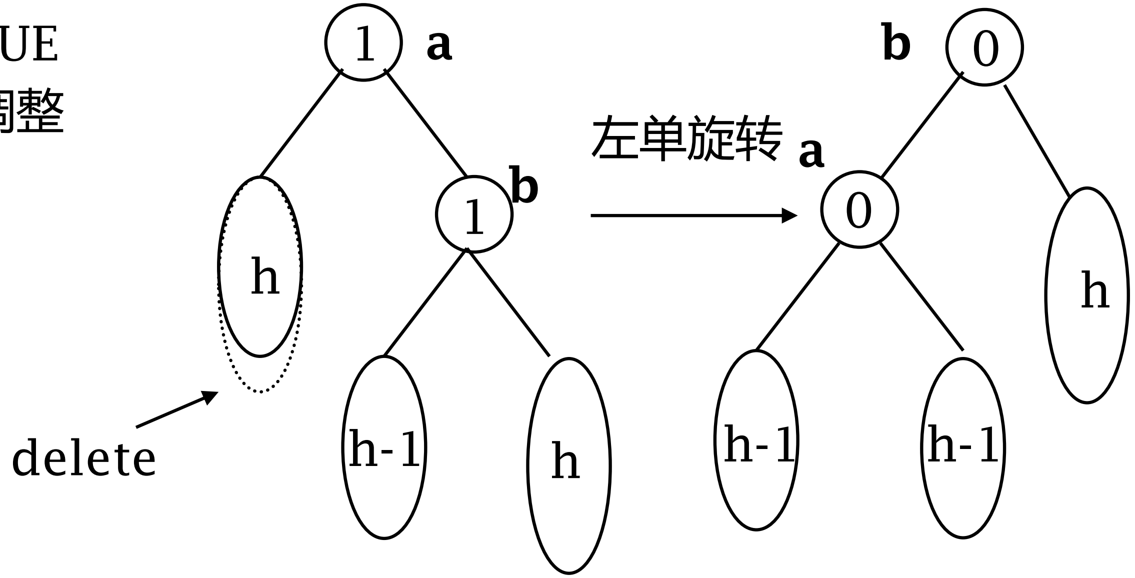
- 第三种情况是当前结点 a 平衡因子不为 0，且它的较低的子树被缩短，结点 a 必然不再平衡
- 假设其较高子树的根结点为 b，出现下面三种情况
  - 情况 3.1： b 的平衡因子为 0
    - 单旋转
    - modified=FALSE
    - 调整可以结束



情况3.1

AVL 树结点的删除过程（续）

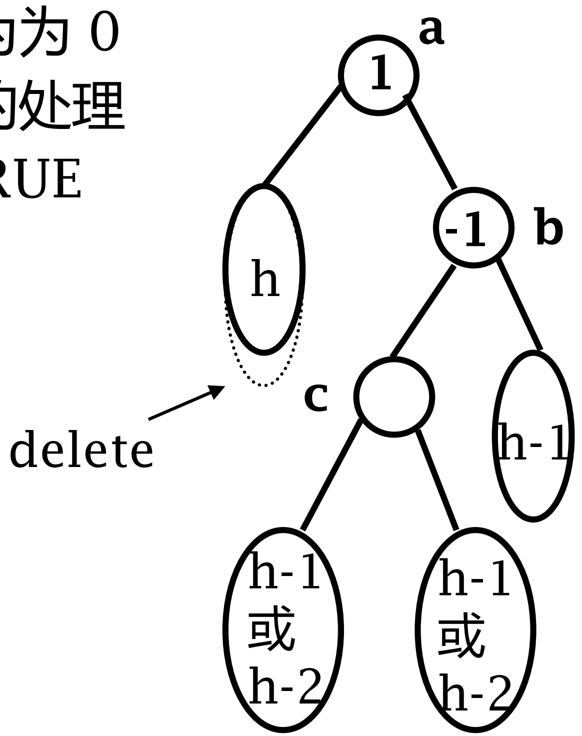
- 第三种情况是当前结点 a 平衡因子不为 0，且它的较低的子树被缩短，结点 a 必然不再平衡
  - 情况3.2：b 的平衡因子与 a 的平衡因子相同
    - 单旋转
    - 结点 a、b 平衡因子都变为0
    - modified=TRUE
    - 需要继续向上调整



情况3.2

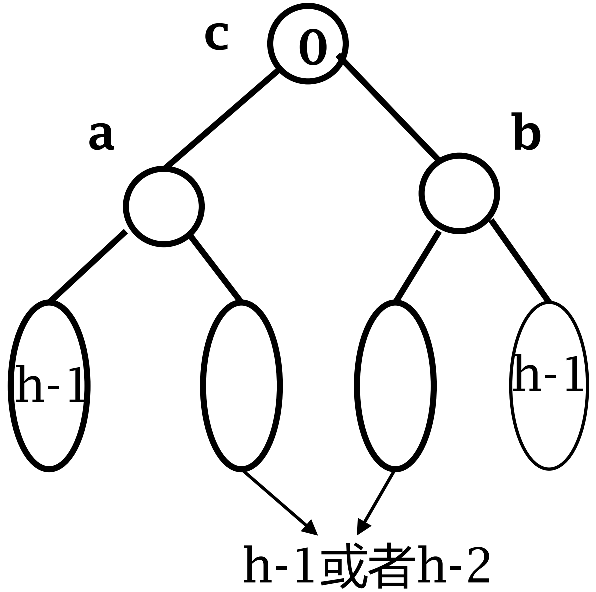
AVL 树结点的删除过程（续）

- 情况3.3：b 和 a 的平衡因子相反
  - 双旋转，先围绕 b 旋转，再围绕 a 旋转
  - 新的根结点平衡因为为 0
  - 其他结点应做相应的处理
  - 并且 modified=TRUE
  - 需要继续向上调整



右双旋转

高度减1

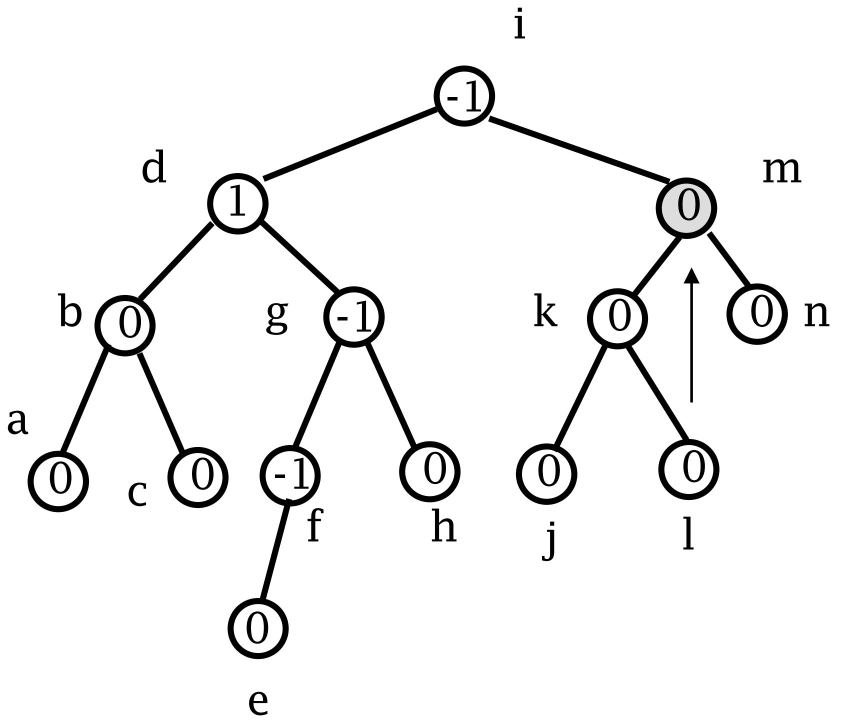


情况3.3

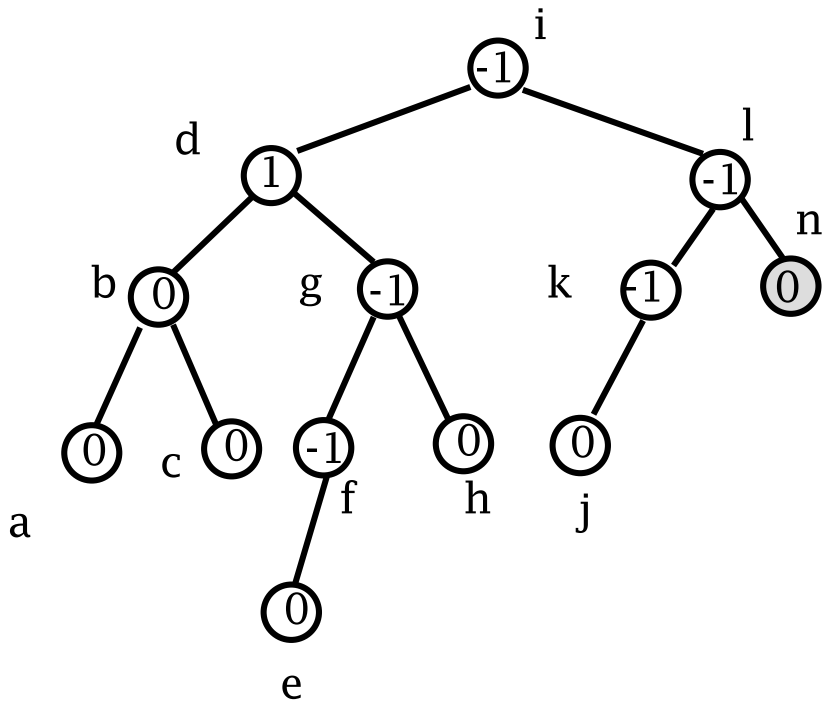
删除后的连续调整

- 从被删除的结点向上查找到其祖父结点
  - 然后开始单旋转或者双旋转操作
  - 旋转次数为 O (log n)
- 连续调整
  - 调整可能导致祖先结点发生新的不平衡
  - 这样的调整操作要一直进行下去，可能传递到根结点为止

AVL 树删除的例子

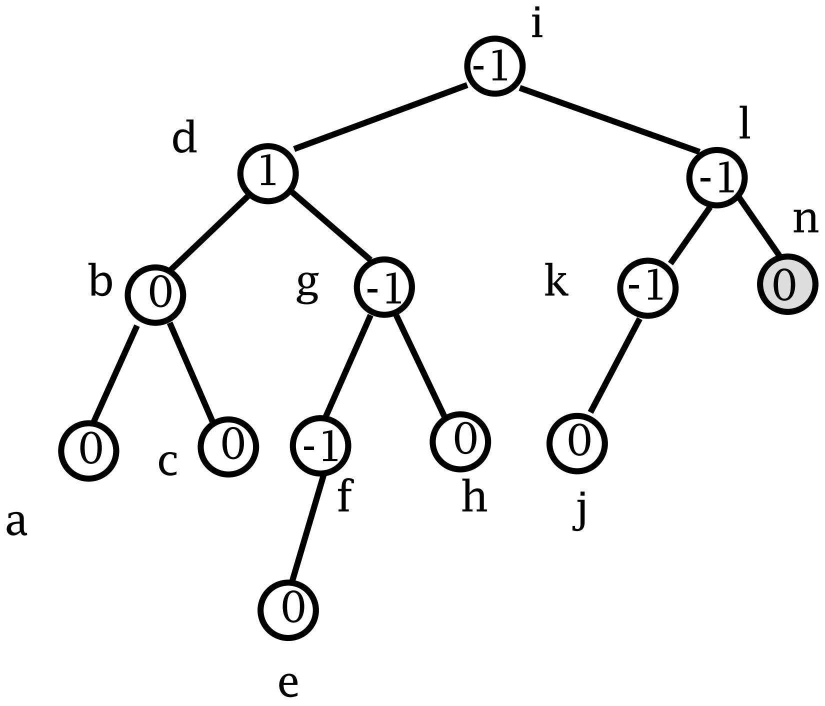


(a) 删除结点m，则需要使用其中序前驱l代替
（情况1）

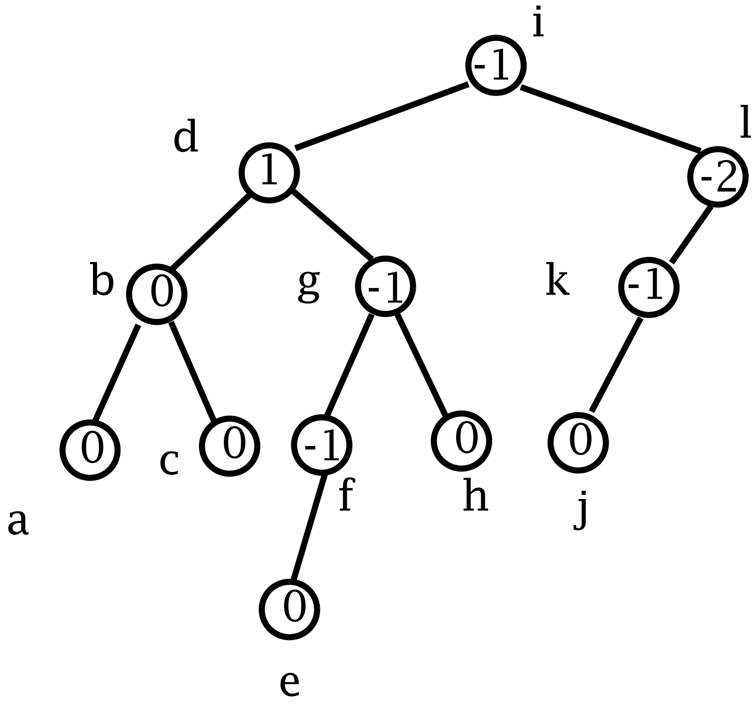


(b) 删除结点n
（情况3.2）

AVL 树删除的例子

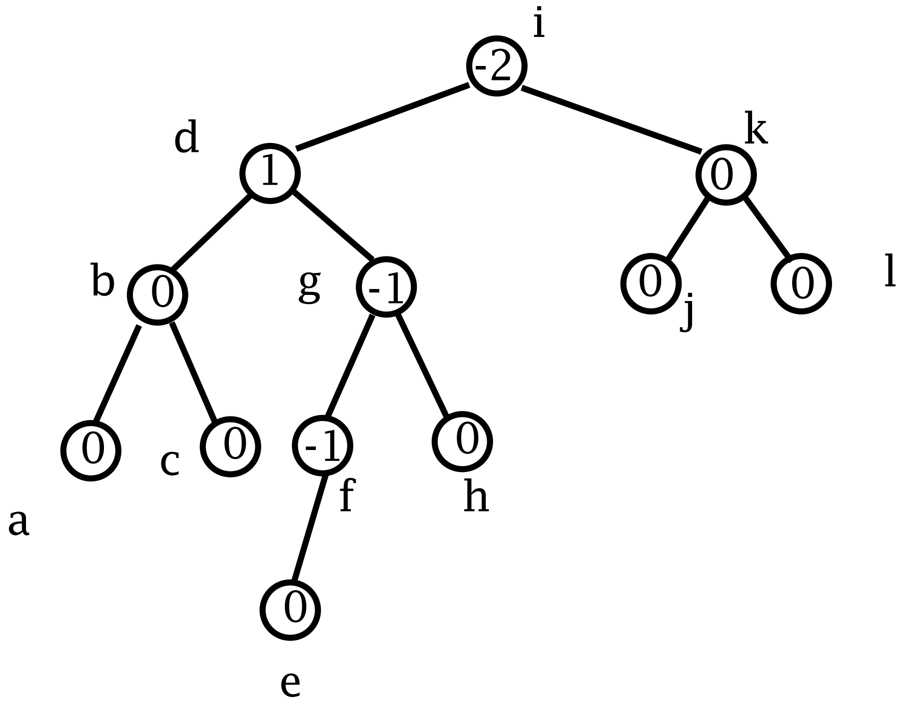


(b) 删除结点n
（情况3.2）

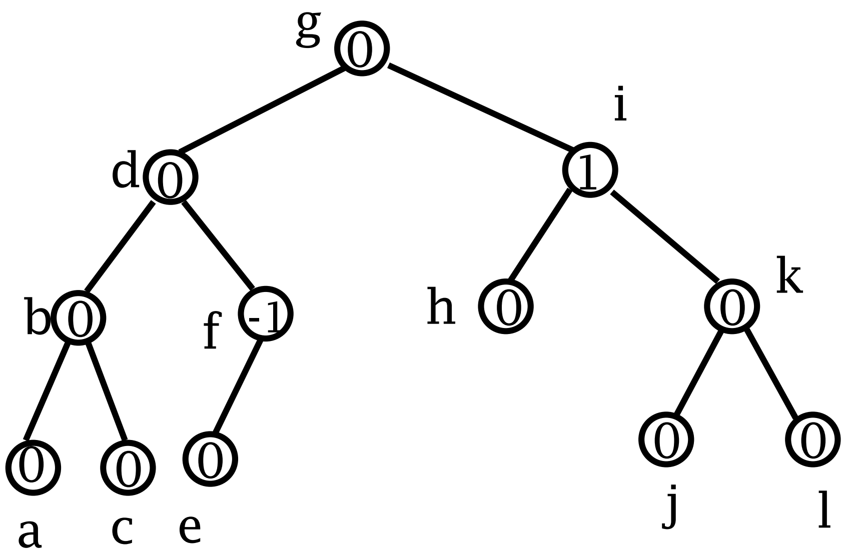


(c) 需要以l为根进行LL单旋转
（情况3.2）

AVL 树删除的例子



(d) LL单旋转完毕，回溯调整父节点i，需要以i为根的LL单旋转（情况3.3）

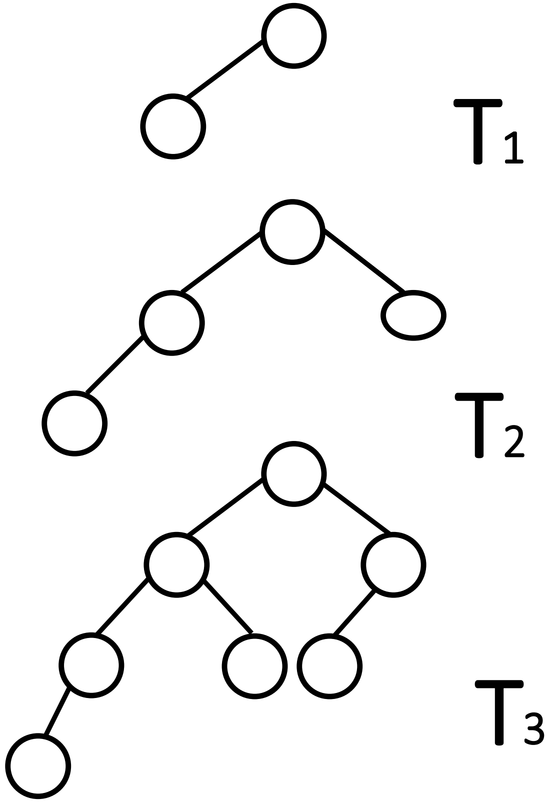


(e) 调整完毕，AVL树重新平衡

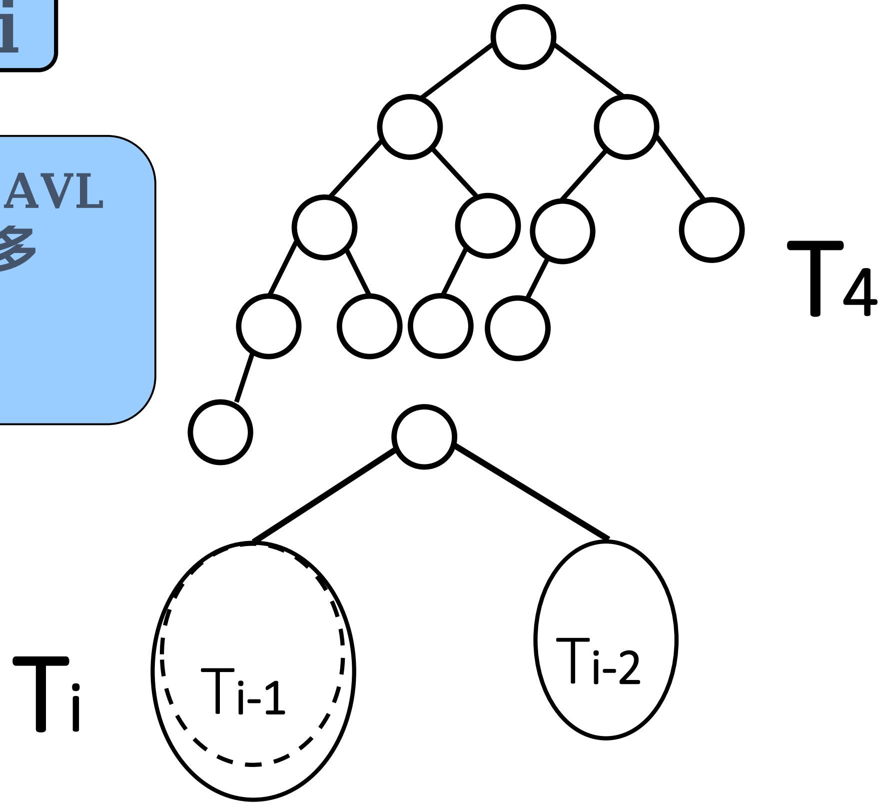
AVL 树的高度

- 具有 n 个结点的 AVL 树
  高度一定是 O (log n)
- n 个结点的 AVL 树的最大高度不超过
  K$\log_2 n$
    - 这里 K 是一个小的常数
- 最接近于不平衡的 AVL 树
  - 构造一系列 AVL 树 T_1 , T_2 , T_3 , … 。

Ti的高度是i



每棵具有高度i的其它AVL树都比Ti的结点个数多



或者说，T_i是具有同样的结点数目的所有AVL 树中最接近不平衡状态的，删除一个结点都会不平衡

高度的证明（推理）

- 可看出有下列关系成立：

$$t(1) = 2$$

$$t(2) = 4$$

$$t(i) = t(i-1) + t(i-2) + 1$$

- 对于 i>2此关系很类似于定义 Fibonacci 数的那些关系：

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 1$$

$$F(i) = F(i-1) + F(i-2)$$

高度的证明（推理续）

- 对于 i>l 仅检查序列的前几项就可有

$$t(i) = F(i+3) - 1$$

- Fibonacci 数满足渐近公式

$$F(i) = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{i}, \text{这里} \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- 由此可得近似公式

$$t(i) \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{i+3} - 1$$

高度的证明（结果）

- 解出高度 i 与结点个数 t (i) 的关系

$$\phi^{i+3} \approx \sqrt{5}(t(i)+1)$$

$$i+3 \approx \log_{\phi}\sqrt{5} + \log_{\phi}(t(i)+1)$$

- 由换底公式 $\log_{\varphi}X=\log_2 X/\log_2\varphi$ 和 $\log_2\varphi \approx 0.694$ ，求出近似上限

$$i < \frac{3}{2}\log_2(t(i)+1) - 1$$

  - t (i) =n
  - 所以 n 个结点的 AVL 树的高度一定是 O (log *n*)

AVL 树的效率

- 检索、插入和删除效率都是 $O(\log_2 n)$
  - 具有 n 个结点的 AVL 树的高度一定是 $O(\log n)$
- AVL 树适用于组织较小的、内存中的目录
- 存放在外存储器上的较大的文件
  - B 树/B+ 树，尤其是 B+ 树

思考

- 是否可以修改 AVL 树平衡因子的定义，例如允许高度差为 2？
- 对比红黑树、AVL 树的平衡策略，哪个更好？
  - 最差情况下的树高
  - 统计意义下的操作效率
  - 代码的易写、易维护