Analysis 1+2 D-ITET
HS24/FS25 F. Ziltener

1. Logik und Mengenlehre

Kontraposition: "$A \Rightarrow B$" $\Leftrightarrow$ "$\neg B \Rightarrow \neg A$"

Negationsregeln

$\neg(\forall x, A(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg A(x)$
$\neg(\exists x, A(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg A(x)$
$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge (\neg B)$

Kardinalität

$\mathrm{Card}(X) = \#$ Elemente in X

Bem: $\mathrm{Card}(X \times Y) = \mathrm{Card}(X) \cdot \mathrm{Card}(Y)$

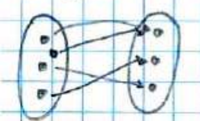
Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

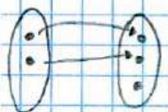
Surjektivität/Injektivität

surjektiv: "min. 1" x zu $f^{-1}(y)$



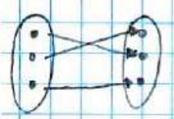
$\forall y \in Y\ \exists x \in X: f(x) = y$

injektiv: "höchstens 1" x für alle y



$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

bijektiv: surjektiv + injektiv



$\forall y \in Y\ \exists!\, x \in X: f(x) = y$

Bem: g und f surjektiv bzw. injektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv bzw. injektiv

$g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv
$g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv
$g \circ f = id \Rightarrow f$ injektiv, g surjektiv
(Es muss nicht gelten $f \circ g = id$)

Induktion

1) Induktionsverankerung
$\rightarrow$ Beweis für $A(n_0)$
2) Induktionsannahme
$\rightarrow A(n)$ gilt für $n \geq n_0$
3) Induktionsschritt
$\rightarrow$ Beweis für $A(n+1)$

$\Rightarrow A(n)$ ist wahr $\forall n \geq n_0$

Vollständigkeitsaxiom

$\mathbb{R}$ ist ordnungsvollständig, d.h.
$\forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbb{R}: a < c < b$

Archimedisches Prinzip

$\forall 0 < b \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $b < n$
$\Rightarrow \infty$ und $-\infty \notin \mathbb{R}$

Dedekind-Schnitt

$x \in \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge $x \subset \mathbb{Q}$:
(a) $x \neq \mathbb{Q}$ (c) $\forall r \in x\ \forall s \in \mathbb{Q}: s > r \Rightarrow s \in x$
(b) $x \neq \emptyset$ (d) $\forall r \in x\ \exists s_0 \in x: s_0 < x$

Bem: $r \in \mathbb{Q}: \underline{r} := \{s \in \mathbb{Q} \mid s > r\} \in \mathbb{R}$
($r \rightarrow \underline{r}$ injektiv $\Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$)
$x \in \mathbb{R}: x = \{r \in \mathbb{Q} \mid \underline{r} > x\}$

Operatoren: $x \leq y \Leftrightarrow y \subseteq x$
$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$

$x + y = \{r + s \mid r \in x, s \in y\}$
$-x : x + (-x) = 0$

$$x \cdot y = \begin{cases} \{rs \mid r \in x, s \in y\} & x, y \geq 0 \\ -((-x) \cdot y) & x < 0, y \geq 0 \\ -(x \cdot (-y)) & x \geq 0, y < 0 \\ (-x) \cdot (-y) & x, y < 0 \end{cases}$$

Supremum und Infimum

$A \subset \mathbb{R}$ ist nach oben/unten beschränkt falls:
$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A: a \leq b \,/\, a \geq b$
↳ "Schranke"

kl. obere Schranke = Supremum
falls $\in A$, heisst Maximum
gr. untere Schranke = Infimum
falls $\in A$, heisst Minimum

2. Folgen

Grenzwert einer Folge

a_n konvergiert für $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow$
$(\exists A \in \mathbb{R})\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0\ \forall n \in \mathbb{N}_0:$
$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$

und divergiert $\Leftrightarrow$
$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0\ \exists n \in \mathbb{N}_0:$
$n \geq n_0 \wedge |a_n - A| > \varepsilon$

Bem: $\exists \lim_{n \to \infty} a_n \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konv.

Häufungspunkt

$a \in \mathbb{R}$ heisst Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ falls die Folge gegen a eine konvergente Teilfolge besitzt. $\lim_{l \to \infty} a_{l(n)} = a$

$\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists l \geq n: |a - a_{l(n)}| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ jede beschränkte Folge besitzt eine konv. Teilfolge und somit ein Häufungspunkt.

Cauchy Folge und Kriterium

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall m, n \geq n_0:$
$|a_m - a_n| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow a_n$ ist Cauchy
$\Leftrightarrow a_n$ konvergiert

Monotonie

monoton fallend: $a_{n+1} \leq a_n$
$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \inf(a_n)$

monoton steigend: $a_{n+1} \geq a_n$
$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \sup(a_n)$

Trick: finde $c_1(n) < a_n$ und $c_2(n) > a_n$ mit $c_1 = c_2 = c$ für $n \to \infty$
$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = c$

3. Reihen

Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \text{ für } |a| < 1$$

Potenzreihen $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right)$
$\rightarrow$ Konvergieren gleichmässig
$\rightarrow$ stetig im Konvergenzradius
$\rightarrow$ diffbar und integrierbar

binomische Reihen

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha - k} y^k$$

$\rightarrow$ konv. falls $x > 0 \wedge \left|\frac{y}{x}\right| < 1$

Cauchy-Produkt

Falls beide Reihen einen Konvergenzradius besitzen (ρ_1, ρ_2)

$\Rightarrow \forall |x| < \min(\rho_1, \rho_2)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a_m b_{n-m}) x^n$$

Konvergenzkriterien

1) Nullfolge: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert

2) Leibnitz: a_n Nullfolge + monoton fallend $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert

3) Majoranten: $a_n, b_n > 0$, $a_n \geq b_n$ $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konv. $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ konv.

4) Minoranten: $a_n, b_n > 0$, $a_n < b_n$ $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ div. $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ div.

5) Quotienten:

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv.

6) Wurzel:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv.

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)$

$$R = \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}\right)^{-1} \text{ oder } R = \left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|\right)^{-1} \quad \begin{cases} > |z| & \text{konv.} \\ = |z| & \text{k.A.} \\ < |z| & \text{div.} \end{cases}$$

7) von Raabe: Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

aber $\exists \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha$

$\Rightarrow$ div. $\alpha < 1$ / konv. $\alpha > 1$

8) absolut:

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konv. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv.

9) Taylor erkennen

10) Vergleich: $a_n, b_n > 0$ und $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0 \Rightarrow$ Beide Reihen haben das gleiche Konvergenzverhalten.

11) $a \geq 0 \wedge$ monoton fallend

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv. $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konv.

12) $a(n) \geq 0 \wedge$ monoton fallend

$\sum_{n_0}^{\infty} a(n)$ konv. $\Leftrightarrow \int_{n_0}^{\infty} a(n)\,dn$ konv.

Umordnung

Falls $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar ist $\Rightarrow \forall \varphi: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die zu Folge $(a_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Reihe konvergiert und

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{\varphi(j)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

4. Funktionen

Grenzwertberechnung

1)
- $\log(n) < n^k < \frac{1}{a^n} < \frac{1}{n^k} < \frac{1}{\log(n)}$
- $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{n!} < a^n < n! < n^n$

für $\alpha > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$

- $x \to \infty$ $\ldots < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < e^x$ $(\alpha > 1)$

2) Bernoulli de l'Hôpital

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\Rightarrow$ falls $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$

3) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$

oder allg. $\lim_{x\to x_0} \left(1 + \frac{a}{\theta(x)}\right)^{\theta(x)}$

wobei $\theta(x) \to \infty$ $(x \to x_0)$

4) Taylorpolynome

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$$

Hyperbolische F. ohne $(-1)^n$

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^{2n+1}}{4^n (n!)^2 (2n+1)}$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

5) Substitution

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{u\to u_0} f(u)$

mit $u_0 = \lim_{x\to x_0} u(x)$

Punktweise Konvergenz

$\forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d: \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$

Gleichmässige Konvergenz

$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \| f_k(x) - f(x) \| = 0$

gleichmässige Konv. $\Rightarrow$ punktweise Konv.

Stetigkeit

- ε-δ-Kriterium

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- Lipschitz-Stetigkeit ($\Rightarrow$ gl. stetig $\Rightarrow$ stetig)

$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ $L \geq 0$ $\forall x, y$

- Gleichmässige Stetigkeit

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ s.d. $\forall x, y \in \Omega$ mit $|x - y| < \delta: |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Zwischenwertsatz

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow \exists c \in [a,b]\ \forall u\ [f(a), f(b)]: f(c) = u$

Topologisches Kriterium

Sei $x_0 \in \Omega$ und U die Umgebung von x_0 relativ zu Ω

Sei $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig

$\Leftrightarrow U = f^{-1}(V)$ ist relativ offen für jede offene Menge V

$\Leftrightarrow A = f^{-1}(B)$ ist relativ abgeschlossen für jede abgeschl. Menge B.

5. Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

f heisst diffbar in x_0 falls

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Kettenregel: $(f\circ g)' = f'(g(x))g'(x)$

Linearisierung

Tangente an x_0: $y(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

Mittelwertsatz

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diffbar:

$\exists x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Konvexität

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\in C^2$ mit $f''\geq 0$

$\forall x_0, x_1 \in [a,b]$ $\forall t\in[0,1]$:

$f(t\cdot x_1 + (1-t)x_0) \leq t\cdot f(x_1) + (1-t) f(x_0)$

$\Rightarrow$ f heisst konvex

$\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$

Klasse C^k

$f: \Omega\to\mathbb{R}$ heisst $\in C^k(\Omega,\mathbb{R})$ falls f k mal diffbar und die k-te Ableitung stetig ist

$C^\infty \Leftrightarrow$ glatt

Taylorentwicklung

$$T_N f(x;x_0) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_N$$

$$R_N(x;x_0) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}$$

wobei $\xi \in [x_0, x]$

Taylorreihe

$$T_f(x;x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Näherung

$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0$ s.d. $|f(x) - T_N| \leq \varepsilon|x|^N$

$\forall x\in[-\delta,\delta] \Rightarrow T_N$ nähert $f(x)$ in N-ter Ordnung um x_0

6. Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

(totale) Differenzierbarkeit

$f: U\in\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. f total diffbar

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x)-f(x_0) - J_f(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}$$

Richtungsableitung

$$D_{\vec v} f(\vec x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec x + h\vec v) - f(\vec x)}{h}$$

Gradient

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix}\partial_1 f\\ \vdots \\ \partial_n f\end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix

$$J_f = \begin{bmatrix}\partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m\end{bmatrix}$$

Hesse-Matrix

$$H_f = \begin{bmatrix}\partial_1^2 f & \cdots & \partial_1\partial_n f\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_n\partial_1 f & \cdots & \partial_n^2 f\end{bmatrix}$$ quadratisch und symmetrisch

Tangentialebene

Sei $f\in\mathbb{R}^2$

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Berührungspunkt

$F_1(x_0,y_0) = F_2(x_0,y_0) \Rightarrow \nabla F_1(x_0,y_0) = \lambda F_2(x_0,y_0)$

Implizites Funktionentheorem

Sei $F\in C^1(\Omega\subset\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Ω offen und $F(x_0, f(x)=y_0) = 0$

Falls DF_y invertierbar ($\det F_y(x_0,y_0)$) bei $(x_0,y_0) \Rightarrow \exists$ Umgebungen U von x_0 und V von y_0 und $f: U\to V$

$\Rightarrow$ die Nullstellenmenge (gebildet von allen (x_0,y_0)) in $U\times V$ ist der Graph von f.

$F^{-1}(0)\cap U\times V = \{(x,f(x)) \mid x\in U\} = gr$

und

$$Df(x) = -\frac{1}{\partial_y F}\sum_{i=1}^{n-1}\partial_{x_i} F$$

Allgemeine Kettenregel

$D(g\circ f)_{(p)} = Dg(f(p))\circ Df_{(p)}$

$J_{g\circ f}(p) = J_g(f(p))\cdot J_f(p)$

Taylorentwicklung ($\mathbb{R}^n$)

$|\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i \quad \beta! = \prod_{i=1}^n \beta_i!$

$x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\beta_n}$

$D_\beta = D_1^{\beta_1}\cdots D_n^{\beta_n}$

$$T_n^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^n}\frac{1}{\beta!}D_\beta f(0)x^\beta$$

$$R^m f(x;x_0) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ |\alpha|=m+1}}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(\xi)(x-x_0)^\alpha$$

$$T_n^2 f(x;x_0) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^T\cdot H_f\cdot(x-x_0)$$

$f(\|x\|^2)$ in $\mathbb{R}^n$ sieht gleich aus wie in $\mathbb{R}$ aber: $x^{2n} \to \left(\sum_{i=1} x_i^2\right)^n$

Begriffe:

f stetig diffbar $\Rightarrow f$ diffbar $\Rightarrow f$ partiell diffbar $\Rightarrow f$ stetig

- partiell diffbar + part. Abl. stetig $\Rightarrow f$ diffbar
- partiell diffbar in x_0 + part. Abl. in Umgebung von x_0 stetig $\Rightarrow$ stetig diffbar in x_0

C^k-Diffeomorphismus

$\Leftrightarrow f$ injektiv, C^k und $f^{<-1>}$ auch C^k

$\Leftrightarrow$ injektiv und $\det(Df)\neq 0$

Umkehrsatz

Sei $\varphi\in C^1(U\subset\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $\det(D\varphi(a))\neq 0$ $a\in U$

$\Rightarrow \exists$ offene Umgebung $U_0\subset U$ von a und $V_0 = \varphi(U_0)$ von $b=\varphi(a)$ und $\varphi: U_0\to V_0$ ist ein lokaler Diffeo.

$\Rightarrow D(\varphi^{<-1>}(b)) = (D\varphi(a))^{-1}$

7. GDG

Separierbare DG

$\frac{dy}{dx} = p(y)q(x) \Rightarrow \int\frac{1}{p(y)}dy = \int q\,dx$

Lineare DG

$a_0 + a_1 y + a_2 y'' \ldots + a_n y^{(n)} = q(y)$

$\hookrightarrow q\neq 0 \to$ inhomogen

$\hookrightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Variation der Konstanten

$y'(x)+a(x)y(x)=b(x) \to$

$y_h'(x)+a(x)y_h(x)=0 \to y_h$ finden

Ansatz $y=c(x)y_h(x) \to$

$b(x)=c'(x)y_h(x) \to c(x)=\int \frac{b(x)}{y_h(x)}dx$

Ansatztabelle

$b(x)=e^{\alpha x}\cos(\beta x)(b_0+b_1x+\dots+b_nx^n)$

oder

$b(x)=e^{\alpha x}\sin(\beta x)(b_0+b_1x+\dots+b_nx^n)$

$\Rightarrow y_p = x^k e^{\alpha x}[\cos(\beta x)(A_0+\dots+A_nx^n)+\sin(\beta x)(B_0+\dots+B_nx^n)]$

mit $A_i, B_i \in \mathbb{R}$

$\to$ Vereinfachen mit $\beta=0$ ($\cos(0)=1$) oder $\alpha=0$ $\exp(0)=1$

Für $b(x)=b_1+b_2 \Rightarrow$ zwei Ansätze

lokaler Existenzsatz

AWP: $x'(t)=f(t,x(t))$, $x(t_0)=x_0$ und $f(t,x)$ Lipschitz-stetig im zweiten Argument. Die Folge $x^{(0)}(t)=x_0,\dots,x^{(l+1)}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x^{(l)}(s))ds$ mit $t\in[t_0,t_0+\varepsilon]$ konvergiert für $\varepsilon>0$ (klein genug) gegen $x(t) \Rightarrow$ AWP besitzt lokal eine Lösung

8. Extremwertberechnung

in $\mathbb{R}$: 1) Kandidaten: - Intervallgrenzen
- $f'(x)=0$

2) $f''(x_0)<0 \to$ Max.
$f''(x_0)>0 \to$ Min.
$f''(x_0)=0 \to$ Sattelpunkt

3) Vergleichen

in ganz $\mathbb{R}^n$ 1) $\nabla f(x_0)=0$

2) $H_f(x_0)$ neg. definit $\to$ Max
$H_f(x_0)$ pos. definit $\to$ Min
$H_f(x_0)$ pos. semidefinit $\to$ Min/Sattel
$H_f(x_0)$ neg. semidefinit $\to$ Max/Sattel
sonst Sattelpunkt

in $U\subset\mathbb{R}^n$:

Lagrange-Funktion

$$L(x,y)=f(x,y)-\sum\lambda_i\varphi_i$$

Kandidaten: $\nabla L(x_0)=0$

Kochrezept:

1) U ist abgeschlossen und beschränkt (kompakt) + f stetig $\Rightarrow \exists$ Min/Max
2) Gradient berechnen
3) i) innere Punkte $\nabla f(x_0)=0$, $x_0\in\mathring{U}=U\setminus\partial U$
ii) Randpunkte $\to \nabla L=0$; $x_0\in\partial U \to$ Parametrisierung $\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)=0$
4) Gleichungssystem
5) Einsetzen und vergleichen

Extremwertsatz

$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ stetig und Ω kompakt $\Rightarrow f$ nimmt in Ω sein Max. und Min. an

9 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

Hauptsätze der Integralrechnung

1) $f: I\to\mathbb{R}$ R-integrierbar $\Rightarrow F:I\to\mathbb{R}$ $F(x)=\int_c^x f$, $c\in I$
Sei f stetig bei $x \Rightarrow F$ diffbar in x mit $F'(x)=f(x)$

2) Sei $F: I\to\mathbb{R}$ diffbar, mit R-integrierbare Ableitung
$$\int_a^b F' = F(b)-F(a)$$

Partielle Integration

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Substitution

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\upsilon(a)}^{\upsilon(b)} \frac{f(\upsilon)}{\upsilon'(x)}du$$

Uneigentliche Integrale

Allg. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to a}\int_\alpha^c f(x)dx + \lim_{\beta\to b}\int_c^\beta f(x)dx$, $a<c<b$

Falls $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ konvergiert $\Rightarrow I=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$

Rotationskörper

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2dx$$

Ansätze

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$

trigonomische/hyperbolische F.

Polynomdivision

elementarer Integral

$\varphi(x)=A\cdot\chi_{]a,b[}+B\cdot\chi_{[c,d]}$

$S\varphi(x)=A|]a,b[|+B|[c,d]| = A(b-a)+B(d-c)$

Approximation mit Treppenf.

obere: $\psi(x)=\sum_{i=1}^{k} f(\frac{i}{k})\chi_{]x_{i-1},x_i]}$

untere: $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{k} f(\frac{i-1}{k})\chi_{]x_{i-1},x_i]}$

$x_i=\frac{i}{k}$ $|]x_{i-1},x_i]|=\frac{1}{k}$

Rieman Integral

$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup_{\varphi\le f}\int_a^b\varphi(x)dx$

$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf_{\psi\ge f}\int_a^b\psi(x)$

$\underline{\int}=\overline{\int}\Rightarrow\int$ existiert

$\Rightarrow$ Integrierbar sind: - stetige F.
- Treppenfunktionen
- Funktion mit endlich viele Unstetigkeiten

$\Rightarrow$ müssen beschränkt sein

(lokal) konstante Funktionen

$C^X_{loc}=\{$lokal konst. F. $X\to\mathbb{R}\}\ni c$

$C^X=\{$konst. F. $X\to\mathbb{R}\}\ni c$

$\Rightarrow$ "Löcher" z.B. $\mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow c$ kann sich ändern

10 Untermannigfaltigkeiten

Definition:

Sei $x_0 \in M$. M ist um x_0 eine d-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ <=> $\exists$ offene Umgebung $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ $\exists$ eine Permutation σ von $\{1, \dots, n\}$ $\exists$ offene $V \subseteq \mathbb{R}^d$ $\exists f \in C^k(V, \mathbb{R}^{n-d})$: $\{(x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(n)}) \mid x \in M \cap U\} = gr(f)$ $= \{(y, f(y)) \mid y \in V\}$

falls $\sigma = id \Rightarrow M \cap U = gr(f)$

falls $d = 1$: C^k-Kurve in $\mathbb{R}^n$

Einbettungssatz

Ψ C^k-Einbettung $\Rightarrow im(\Psi(V))$ ist eine C^k-Unterm. des $\mathbb{R}^n$ mit $\dim = d$

lokale Parametrisierung

$\exists V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen $\exists$ offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 $\exists \Psi: V \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Einbettung s.d. $M \cap U = \Psi(V)$

$\Rightarrow M$ ist eine C^k-Unterm $\dim = d$ um x_0

lokale Submersion

$\exists$ offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 $\exists g: U \to \mathbb{R}^{n-d}$ C^k-Submersion s.d. $M \cap U = g^{-1}(g(x_0))$

$\Rightarrow M$ ist eine C^k-Unterm. $\dim = d$ um x_0

Satz vom regulären Wert

Das Urbild jedes regulären Wertes für g ist eine C^k-Unterm der $\dim = n-p$

Regulärer Wert

z_0 ist ein regulärer Wert für g <=> g ist eine Submersion in jedem Punkt von $g^{-1}(z_0) = \{x \in U_0 \mid g(x) = z_0\}$. Sonst ist z_0 ein singulärer Wert.

Tangentialraum

Definition: $T_{x_0}M$ (Tangentialraum an M im Punkt x_0) $= \{\dot{x}(0) \mid W \subseteq \mathbb{R}$ offen, $x: W \to \mathbb{R}^n$, $0 \in W$, $x(0) = x_0$, $x(t) \in M$ $\forall t \in W$, x diffbar in $0\}$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von x_0, $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen:

1) $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-d})$ s.d. $M \cap U = gr(f)$ $= \{(y, f(y)) \mid y \in V\}$. y_0 erste Komponente von $x_0 \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$

$$T_{x_0}M = gr(Df(y_0))$$

2) $y_0 \in V$, $\Psi: V \to \mathbb{R}^d$ s.d. $\Psi(y_0) = x_0$, $\Psi(V) = M \cap U$ und Ψ in y_0 eine Immersion $\Rightarrow T_{x_0}M = im(D\Psi(y_0))$

3) $g: U \to \mathbb{R}^{n-d}$ s.d. $M \cap U = g^{-1}(g(x_0))$ und g in x_0 eine Submersion

$\Rightarrow T_{x_0}M = \ker(Dg(x_0))$
$= (Dg(x_0))^{-1}(0)$

Bem: $\dim(T_{x_0}M) = \dim(M)$

z regulär, $M = g^{-1}(z)$

$T_xM = \ker(Dg(x)) = \nabla g(x)^\perp$
$= \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g(x), v \rangle = 0\}$

Orientierung von C:

$T(x) \in T_xC$, $\|T(x)\| = 1$ $\forall x \in C$

Koorientierung von M:

$n(x) \in T_xM^\perp$, $\|n(x)\| = 1$ $\forall x \in M$

C^k-Gebiet

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen s.d. $\forall x_0 \in \partial U$ $\exists$ Umgebung U' von x_0 und eine C^k-Submersion $g: U' \to \mathbb{R}$, $g(x_0) = 0$, $U \cap U' = g^{-1}((-\infty, 0))$
$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) < 0\}$

$\partial U \cap U' = g^{-1}(0)$

Untermannigfaltigkeit mit Rand

<=> $\forall x_0 \in M$ $\exists$ lokale C^k-Paramet. (V, Ψ) mit $x_0 \in \Psi(V)$

$\partial M = \bigcup \{\Psi(V \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}) \mid (V, \Psi)\}$
$= \Psi(\partial V)$ (falls Ψ globale Pa.)

positive Orientierung

T ist eine positive Or. <=> $(\nabla g, T)$ positive Basis von $\mathbb{R}^2$ <=> $\det[\nabla g(x_0) \; T(x_0)] > 0$ + Spalten der Matrix linear unabhängig

induzierte Orientierung

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ eine C^1-Fläche mit Rand. Die durch n induzierte Orientierung von $\partial\Sigma$:

(V, Ψ) lokale Randpara. von Σ, $y = \Psi^{-1}(x) \in V \in \mathbb{R}^2_{\geq 0}$

$$T(x) := \frac{D_1\Psi(y)}{\|D_1\Psi(y)\|}$$

falls Ψ eine globale Para. ist

$$T = \left(\frac{D\Psi \cdot \tilde{T}}{\|D\Psi \cdot \tilde{T}\|}\right) \circ \Psi^{-1}$$

$\tilde{T}: \partial V \to \mathbb{R}^2$ pos. Orient. von ∂V

globale Parametrisierung

$\exists (V, \Psi)$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offenes C^k-Gebiet und $\Psi: \bar{V} \to \mathbb{R}^n$ C^k-Einbettung $\Rightarrow M$ ist eine global parametrisierbare C^k-Untermannigfaltigkeit $\dim = d$ mit Rand

11 Integralrechnung in $\mathbb{R}^n$

Divergenz: $div(V) = \nabla \cdot \vec{V}$
$= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}$

Rotation:

$\mathbb{R}^3$: $rot(V) = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \partial_2 V_3 - \partial_3 V_2 \\ \partial_3 V_1 - \partial_1 V_3 \\ \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^2$: $rot(V) = \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1$

Identitäten

$\nabla \times (\nabla f) = 0 \qquad \nabla \times \nabla \times X = \nabla(\nabla \cdot X) - \Delta X$

$\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$

$\nabla \cdot \nabla \times X = 0$

Satz von Fubini

Falls f stetig auf die Integrationsintervale $\Rightarrow$ Integrale vertauschbar

Rieman Integration in $\mathbb{R}^2$

Quader: $Q_{j,k}^N = \left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right] \times \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]$

Für $f: [0,a] \times [0,b] \Rightarrow c = \frac{b}{a}$

$$\varphi^N = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{cN} f\left(\frac{j-1}{N}, \frac{k-1}{N}\right) \chi_{Q_{j,k}^N}$$

$$\psi^N = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{cN} f\left(\frac{j}{N}, \frac{k}{N}\right) \chi_{Q_{j,k}^N}$$

$|\chi_{Q_{j,k}^N}| = \frac{1}{N^2}$ $\Rightarrow$ sonst genau gleich

Drehinvariante Funktion

Sei $f: \bar{B}_{r_0}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x) = \tilde{f}(\|x\|)$

$$\int_{\bar{B}_{r_0}^2} f(x)\,dx = 2\pi \int_0^{r_0} \tilde{f}(r)\, r\, dr$$

$$\int_{\bar{B}_{r_0}^3} f(x)\,dx = 4\pi \int_0^{r_0} \tilde{f}(r)\, r^2\, dr$$

Jordan Messbarkeit

Jordan messbar $\Leftrightarrow$ integrierbar

$$\mu(\Omega) = \int \chi_\Omega \, d\mu$$

$$\chi_\Omega = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichte

Schwerpunkt: $S_{x_i} = \frac{1}{vol(K)} \int_K \rho(x)\, dV$

Integration über Normbereiche

$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$

sei ein Normbereich

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x,y)\,d\mu = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Transformation / Substitution

Φ Diffeomorphismus und integrierbar

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(y)\,dy = \int_\Omega f(\Phi(x))\,|\det D\Phi|\,dx$$

12. Topologie

Immersion / Submersion / Einbettung

Sei f diffbar in x. f ist eine ...

Immersion $\Leftrightarrow$ $Df(x)$ injektiv $\forall x$ (Rang $Df = m$)

Submersion $\Leftrightarrow$ $Df(x)$ surjektiv $\forall x$ (Rang $Df = n$)

C^k-Einbettung $\Leftrightarrow$ f injektiv, C^k, Immersion und $f^{(-1)}: f(U) \to U$ stetig

Wegzusammenhängend

$\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in S\ \exists \gamma: [0,1] \to S\quad \gamma(0) = x_0,\ \gamma(1) = x_1$

einfach zusammenhängend

$\Leftrightarrow$ S wegzusammenhängend und $\forall \gamma: S_1 \to S$

$\exists$ stetige Abbildung $h: [0,1] \times S_1 \to S$ s.d.

$h(0,y) = \gamma(y)\ \forall y \in S_1$ und $h(1,y): S_1 \to S$

$= \gamma' + x \in \partial S$ | h heisst Homotopie

$h(\cdot, x) = \gamma(x)$ | $S_1 :=$ Sphäre mit $r = 1$

Nicht einfach zusammenhängend

$\Leftrightarrow \exists X \in C^1$ s.d. $D_i X^j = D_j X^i\ \forall i,j$

$+ \exists \gamma$ (geschlossen und stetig diffbar) mit $\int_\gamma X\,dx \neq 0$

Satz von Stokes

$$\iint_{\Omega, n} \nabla \times \vec{V}\,d\mu = \int_{\partial\Omega, T} V\,ds$$

Flussintegral über Oberfläche — Wegintegral

Satz von Gauss

2D: $\oint_{\partial\Omega, n} \vec{V}\,ds = \iint_\Omega \operatorname{div}(\vec{V})\,d\mu$

3D: $\oiint_{\partial\Omega, n} V\,ds = \iiint_\Omega \nabla \cdot \vec{V}\,d\mu$

Flussintegral über ein Weg/Oberfläche — Oberflächen-/Volumenintegral

Überblick

Wegintegrale

① Über Skalarfeld

$$\int_\gamma f(x)\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma\|\,dt$$

② Über Vektorfeld

$$\int_\gamma \vec{V}(\vec{x})\,d\vec{s} = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t))\,\dot\gamma\,dt$$

③ Flussintegral über ein Weg

$$\int_{\gamma, n} \vec{V}\,d\mu = \int_a^b \vec{V}(\vec{\gamma}(t))\,\vec{n}\,\|\dot\gamma\|\,dt$$

④ " " geschlossener Weg

$\to$ gleich wie ③

$\to$ Gauss anwenden

Stokes

Gauss 2D

Oberflächenintegrale

① Skalarfeld $\quad \Phi: B \to S$

$$\iint_S f(\vec{x})\,d\mu = \iint_B f(\Phi)\,\underbrace{\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right\|}_{\|\det D\Phi\| \text{ mit } d=2,\ n=3}\,du\,d\vartheta$$

$n = 3: n(x) = \frac{D_1\psi \times D_2\psi}{\|D_1\psi \times D_2\psi\|}(\psi^{-1}(x))$

② Vektorfeld

$$\iint_S \vec{V}(\vec{x})\,ds = \overset{\text{rein/raus}}{\pm} \iint_B V(\Phi)\,\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\,du\,d\vartheta$$

$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{\det(D\psi^T D\psi)}$

③ VF über eine geschlossene Fläche

$\to$ gleich wie ②

$\to$ Gauss anwenden

Gauss 3D

Volumenintegral

$$\int_V f(\vec{x})\,dV = \iiint f(\Phi) \det D\Phi\,d\mu\,du\,d\varphi$$

Topologische Räume

Sei X eine beliebige Menge. Eine Topologie auf X ist eine Kollektion T von Teilmengen von X mit:

① ∅ und X sind Elemente von T

② Der Durchschnitt einer endlichen * Elemente von T ist in T.

③ Die Vereinigung einer beliebigen * Elemente von T ist in T.

Innerer-, Äusserer-, Randpunkt

$X \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

- x_0 innerer P. <=> $\exists r>0$ mit $B_r(x_0) \subset X$
- x_0 äusserer P. <=> x_0 innerer P. von X^c
- x_0 Randpunkt <=> kein innerer oder äusserer Punkt

Offene & Abgeschlossene Mengen

- X offen <=> alle $x \in X$ sind innere P.
- X abgeschlossen <=> X^c offen

<=> $\forall$ konv. Folgen $(x_k) \in X$ => $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \in X$

Innere, Abschluss, Rand

$X \subseteq \mathbb{R}^n$:

- Innere von X $:= \mathring{X} := \{x \in X : x$ innerer Punkt von $X\}$
- Abschluss von X $:= \bar{X} = \mathring{X} \cup \partial X$
- Rand von X $:= \partial X : \{x \in X : x$ Randpunkt von $X\}$

Bsp: • $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ offen und abg.

- X_1, X_2 offen => $X_1 \cup X_2$ offen
- X_1, X_2 abg. => $X_1 \cup X_2$ abg. } endlich
- $\forall_{i\in I}$: X_i offen => $\bigcup_{i\in I} X_i$ offen
- $\forall_{i\in I}$: X_i abg => $\bigcap_{i\in I}$ abg. } unendlich

Ball

offener Ball: $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-x_0\| < r\}$

Innere des Balls: Beweis für $\bar{B}_r(x_0)$

$\|x'-x_0\| \leq r$ wobei $x \in B_r^n(x_0)$

$(\|x\| = r)$ und $x' \in B_\varepsilon^n(x)$

Umgebung

$U \subseteq X$ ist eine Umgebung von x_0 relativ zu X <=> $\exists r > 0 : B_r^n(x_0) \cap X \subseteq U$

Kompaktheit

X abg. und beschränkt => X kompakt

Heine-Borel:

- X kompakt <=> abg. + beschränkt
- $X = f^{(-1)}\{U\}$ abg <=> U abg. & f stetig

" "offen <=> "offen" "

- $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ ↳ auch für kompakt

Wichtige Mengen

$\emptyset$: $\bar{\emptyset} = \mathring{\emptyset} = \partial\emptyset = \emptyset$

$\mathbb{R}$: $\bar{\mathbb{R}} = \mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{R} = \emptyset$

$\mathbb{Q}$: $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\mathbb{N}$: $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$, $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$

Punkt: $\overline{\{a\}} = \{a\}$, $\mathring{\{a\}} = \emptyset$, $\partial\{a\} = \{a\}$

$\Omega := [0,\infty)$: $\bar{\Omega} = [0,\infty)$, $\mathring{\Omega} = (0,\infty)$, $\partial\Omega = \{0\}$

$B := \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$: $\bar{B} = B \cup \{0\}$, $\mathring{B} = \emptyset$

$\partial B = B \cup \{0\}$

relativ offen/abgeschlossen

- $A \subseteq X$ relativ offen in X <=> $\exists B \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $A = B \cap X$
- $A \subseteq X$ relativ abg. in X <=> $\exists B \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. mit $A = B \cap X$

Potenziale

$\forall_X : X \to Y$ $x_0 \in X, x \in Y$ $f(x) = \int_\gamma X\,dx$

Falls f diffbar und $\nabla f = X$ => f ist ein Potenzial von X

=> Konservativität

$X \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

X hat ein Potenzial Φ

<=> X ist konservativ

<=> rot(V) = 0 + einfach zusammenhäng.

<=> J_X symmetrisch + einfach zus.

<=> $\int_\gamma X\,ds = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(2))$

<=> $\forall$ geschlossene Wege $\int_\gamma X\,ds = 0$

13. Anhang

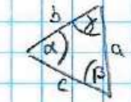
φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

$\text{artan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$

$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ $\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$

$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ $\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})$

$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$\sec^2(x) = 1 + \tan(x)$ $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

$\sin(2x) = \begin{cases} 2\sin x\cos x \\ \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \end{cases}$ $\cos 2x = \begin{cases} 2\cos^2 x - 1 \\ \cos^2 - \sin^2 \\ 1 - 2\sin^2 x \\ \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \end{cases}$

$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^3 x}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$

$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$

$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a\tan b}$

$\sin(a) \pm \sin b = 2\sin\frac{a\pm b}{2}\cos\frac{a\mp b}{2}$

$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\cos a - \cos b = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$

$\tan a \pm \tan b = \frac{\sin(a\pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$

$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

$\tan^2 x = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\tan(\arcsin(x)) = \frac{1}{\tan(\arccos x)} = x(1-x)^{-1/4}$

$\text{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$\text{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

$\text{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}), |x| < 1$

$\|x + y\| \leq \|x + \|y\|$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Definitheit Matrix $(n \times n)$

$\det(A - \lambda_i I) = 0$

- $\lambda_i > 0\ \forall i$: positiv def.
- $\lambda_i < 0\ \forall i$: negativ def
- $\lambda_i \geq 0\ \forall i$: positiv semidef.
- $\lambda_i \leq 0\ \forall i$: negativ semidef.
- sonst indefinit • Nullmatrix h.A

Matrixexponential: $e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n x^n}{n!}$

Reduktion Ordnung GDG:

$f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_0 f = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f' \\ \vdots \\ \vdots \\ f^{(n)} \end{bmatrix}}_{\dot{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} f \\ \vdots \\ \vdots \\ f^{n-1} \end{bmatrix}}_{F}$$

$$\Rightarrow F = C \cdot e^{Ax} = C\, T e^{Dx} T^{-1}$$

$$\xleftarrow{\int dx} \quad \xrightarrow{d/dx}$$

$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$	$x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$	$\arctan x$
$x\ln\lvert x\rvert - x$	$\ln\lvert x\rvert$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x/\ln(a)$	a^x	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{x}{\ln(a)}\ln(\lvert x\rvert - 1)$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\arctan x$	$\frac{1}{x^2+1}$
$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$\operatorname{arcsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\tan x$	$\operatorname{arccosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\operatorname{arctanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$	$\ln\left\lvert\frac{\cos x}{1-\sin x}\right\rvert$	$\frac{1}{\cos x}$
$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos x$		
$\ln\left\lvert\frac{\sin x}{\cos x + 1}\right\rvert$	$\frac{1}{\sin x}$		
$-\frac{1}{\tan x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$		

$\frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a}$	$\sin^n(ax)\cos(ax)$
$-\frac{\cos^{n+1}(ax)}{(n+1)a}$	$\sin(ax)\cos^n(ax)$

Rechenregel: $\left\lvert \int f(x)\,dx \right\rvert \le \int \lvert f(x)\rvert\,dx$

Substitution:

$\rightarrow$ Tabelle benutzen

$\int f(g(x))\, g'(x)\,dx \rightarrow u(x) = g(x)$

$\int f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \rightarrow u(x) = \sqrt{x^2-1}$

$\int f(\cos(x), \sin(x)) \rightarrow u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

mit $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Weiteres:

$\int \sin^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx - \frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x)$

$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx + \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\sin(x)$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)\dots 1}{n(n-2)(n-4)\dots 2}\frac{\pi}{2} & n \text{ even} \\ \frac{(n-1)(n-3)\dots 2}{n(n-2)(n-4)\dots 1} & n \text{ odd} \end{cases}$$

$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$

	$\int_0^{\pi/4}$	$\int_0^{\pi/2}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
sin	$1-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0
$\sin^2$	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin^3$	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0
$\sin^4$	$\frac{3\pi-8}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
cos	$1/\sqrt{2}$	1	0	0	2	0
$\cos^2$	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\pi/2$	π
$\cos^3$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0
$\cos^4$	$\frac{8+3\pi}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\sin\cdot\cos$	$1/4$	$1/2$	0	0	0	0
$\sin^2\cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$2/3$	0
$\sin\cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0

Parametrisierungen und Koordinatentransformation

Polarkoordinaten

$\Phi: (0,\infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \cdot a \\ r\sin\varphi \cdot b \end{pmatrix}$ (positiver Sinn)

$\det D\Phi = r \cdot ab$ Für Ellipse

- $r = \sqrt{x^2+y^2}$ • $r = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}$
- $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ • $\varphi = \arctan\left(\frac{y\,a}{x\,b}\right)$

Zylinderkoordinaten

$\Phi: (0,\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\Phi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

$\det D\Phi = r$

- $z = z$ • $r = \sqrt{x^2+y^2}$
- $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{z}\right)$

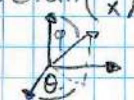
Kugelkoordinaten

$\Phi: (0,\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \cdot a \\ r\sin\varphi\sin\theta \cdot b \\ r\cos\theta \cdot c \end{pmatrix}$

$\det(D\Phi) = r^2\sin\theta \cdot abc$ Ellipsoid

- $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ • $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
- $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$



Reguläre Flächen

2D-Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$

falls $z := f(x,y)$ $f: I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\Phi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$

$\sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)} = \left\lVert \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\rVert$

Spirale

$\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\Phi = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$

$\Phi^{-1}(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$