

Komplexe Zahlen

Normalform

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a + bi$ wobei $i = \sqrt{-1}$, $a = \operatorname{Re}\{z\}$ und $b = \operatorname{Im}\{z\}$:

Komplexe Konjugierte	$\bar{z} = a - bi$
Dreiecksungleichung	$ z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $
Absolutbetrag	$ z = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\operatorname{Re}\{z\}^2 + \operatorname{Im}\{z\}^2}$
Phase	$\varphi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}}\right)$

Eulersche Formel und Identitäten

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$	
$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$	$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$	$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

Polarform

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Die Exponentialfunktion ist $2\pi i$ -periodisch, deswegen wird definiert:

Argument	$\arg(z) = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Hauptwert des Arguments	$\operatorname{Arg}(z) = \varphi \in (-\pi, \pi]$

Rechenregel in der Polarform

Realteil	$\operatorname{Re}\{z\} = \cos(\varphi)$
Imaginärteil	$\operatorname{Im}\{z\} = \sin(\varphi)$
Komplexe Konjugierte	$\bar{z} = z \cdot e^{-i\varphi}$
Potenzieren	$(z e^{i\varphi})^n = z ^n \cdot e^{i n \varphi}$
n-te Wurzel	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{ z } \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$ $k = 0, \dots, n-1$
Logarithmus	$\log(z) = \log z + i(\varphi + 2\pi k)$
Hauptwert des Log.	$\operatorname{Log}(z) = \log z + i\varphi$
Potenzen mit $z, \omega \in \mathbb{C}$	$z^\omega = e^{\omega \cdot \log(z)}$
Hauptwert der Potenz	$p.v.(z^\omega) = e^{\omega \cdot \operatorname{Log}(z)}$

Logarithmusgesetze gelten nicht beim komplexwertigen Logarithmus!

Wertetabelle für Trigonometrische Funktionen

deg/rad	0°/0	30°/ $\frac{\pi}{6}$	45°/ $\frac{\pi}{4}$	60°/ $\frac{\pi}{3}$	90°/ $\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Komplexe Folgen und Reihen

Sei eine komplexe Folge $z_n = x_n + iy_n$. Der Grenzwert existiert, wenn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \implies \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

Absolute Konvergenz gilt auch (mit komplexem Absolutbetrag).

Offen und abgeschlossen

Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heisst **offen**, wenn zu jedem $z \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $B(z, \epsilon) \subseteq U$ gilt.

Eine Teilmenge U heisst **abgeschlossen**, falls das Komplement U^c offen ist.

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad g hat genau g Nullstellen. Falls ein Polynom eine komplexe Nullstelle z_0 besitzt, ist auch \bar{z}_0 eine Nullstelle.

Grenzwert einer Funktion

Sei $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, wobei $U \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in U$. Der Grenzwert von $f(z_0)$ ist $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ s. d. } \forall z \in U : |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - a| < \epsilon$$

Bemerkung: Sei $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \iff \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}\{f(z)\} = a_1 \right) \wedge \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}\{f(z)\} = a_2 \right)$$

Stetigkeit

Sei eine offene Menge $U \in \mathbb{C}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. $f(z)$ ist stetig im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, genau dann, wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

$f(z)$ ist auf U stetig, falls $f(z)$ an jeder Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ stetig ist.

i.	Summe, Differenz und Produkt stetiger Funktionen sind stetig.
ii.	Komposition von stetigen Funktionen ist stetig.
iii.	Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn sowohl Realteil als auch Imaginärteil stetig sind.

Zeigen von Stetigkeit

Falls f an der Stelle z_0 stetig ist, gilt $\forall \omega \in \mathbb{C} : \lim_{t \rightarrow 0} f(z_0 + t\omega) = f(z_0)$.

Beweis mit Kontraposition:

- Richtung finden, in der f nicht stetig ist.
- Zwei Richtungen finden, auf denen der Grenzwert ungleich sind.

Beweis mit Polarkoordinaten ($z = r e^{it}$):

Falls $\lim_{r \rightarrow r_0}$ unabhängig von t existiert ist f stetig in z_0 .

ℂ-Differenzierbarkeit und Holomorph

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ℂ-Differenzierbarkeit

Sei eine offene Menge $U \in \mathbb{C}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. f ist \mathbb{C} -differenzierbar in $z_0 \in U$ falls der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Bemerkung: \mathbb{C} -differenzierbar $\implies \mathbb{R}$ -differenzierbar

Satz

$f(z)$ ist \mathbb{C} -Differenzierbar $\implies f(z)$ ist stetig.

Holomorph

Sei eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.

f heisst holomorph ... :	
i.	auf U , falls sie auf U \mathbb{C} -differenzierbar ist.
ii.	in z_0 , falls f holomorph in einer offenen Menge $U_1 \ni z_0$ ist.

iii.	falls sie beliebig oft \mathbb{C} -differenzierbar ist.
------	---

Bemerkungen:

- Holomorphe Funktionen sind **analytische Funktionen** (Funktionen die sich als Potenzreihen darstellen lassen) mit $R = \infty$
- Ganze Funktionen sind auf ganz \mathbb{C} holomorph.
- Falls eine Funktion \bar{z} enthält ist die Funktion **nie** holomorph.

Cauchy-Riemann Gleichungen (CRG)

$f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph \implies Die partielle Ableitungen existieren und f erfüllt die CRG:

$$\partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0) \quad \partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0)$$

Kriterium für ℂ-Differenzierbarkeit

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und sei $z_0 \in U$. f ist \mathbb{C} -differenzierbar, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\partial_x u, \partial_x v, \partial_y u, \partial_y v$ existieren in einer offenen Menge von z_0 .
- $\partial_x u, \partial_x v, \partial_y u, \partial_y v$ sind stetig in z_0 und erfüllen die CRG in z_0 .

Konsequenzen der CRG

Sei $f, g : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph:

- $\operatorname{Re}\{f\}$ ist konstant $\implies f$ ist konstant
- $\operatorname{Re}\{f\} = \operatorname{Re}\{g\} \implies f = g + ic$ wobei $c \in \mathbb{R}$
- $\bar{f} : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph $\implies f$ ist konstant
- $|f|$ ist konstant $\implies f$ ist konstant

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph \implies

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Harmonische Funktionen

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heisst harmonisch auf U , wenn $U \subset \mathbb{R}^2$ und

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

Kurvenintegrale

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. So gilt $\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re}\{f(t)\} dt + i \int_a^b \operatorname{Im}\{f(t)\} dt$

Pfade

Ein Pfad ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften:

- Ein Pfad ist **einfach**, falls aus $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ folgt, dass $t_1 = t_2$ oder $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$. (Pfad ohne Selbstschnittpunkte)
- Falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ heisst der Pfad **geschlossen**.
- Der Pfad ist differenzierbar auf (a, b) , wenn $\gamma'(t)$ für jedes $t \in (a, b)$ existiert. $\gamma'(t_0)$ heisst Tangentialvektor.

Parametrisierung

Gerade von a nach b: $\gamma(t) = (1 - t) \cdot a + t \cdot b, t \in [0, 1]$

Kreis mit Zentrum z_0 und Radius r im positiven Sinne:

$$\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{2\pi i t}, \quad t \in [0, 1]$$

Kurvenintegrale

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Pfad. Das Kurvenintegral von f entlang γ ist:

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Homotopie

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma, \delta : [a, b] \rightarrow U$ zwei Pfade mit $\gamma(a) = \delta(a) = \alpha \in \mathbb{C}$ und $\gamma(b) = \delta(b) = \beta \in \mathbb{C}$. Man sagt γ ist homotop zu δ , falls

- $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$ stückweise stetig.
- $\forall t \in [a, b] : \begin{cases} H(0, t) = \gamma(t) \\ H(1, t) = \delta(t) \end{cases}$
- $\forall s \in [a, b] : \begin{cases} H(s, a) = \alpha \\ H(s, b) = \beta \end{cases}$

Die Funktion H ist die sogenannte **Homotopie** von γ und δ .
 Parametrisierung durch $s : H(s, t) = (1 - s) \cdot \gamma(t) + s \cdot \delta(t)$

Wegzusammenhängend

Eine Menge U heisst wegzusammenhängend, falls es für jedes Paar $z_1, z_2 \in U$ einen Pfad $\gamma(t)$ gibt, der die zwei Punkte verbindet.

Einfach zusammenhängend

Eine Teilmenge U heisst einfach zusammenhängend, falls sie wegzusammenhängend ist und für alle $\alpha, \beta \in U$ alles Pfade von α nach β homotop zueinander sind.

Hauptsatz der komplexen Integralrechnung

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene wegzusammenhängend Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- Für jede geschlossene Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.
 - \Leftrightarrow Das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(z) dz$ ist unabhängig vom Pfad.
 - \Leftrightarrow Es gibt eine \mathbb{C} -differenzierbare Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$
 - $\Leftrightarrow F$ ist eine Stammfunktion von f und
- $$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

Integralsatz von Cauchy

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine einfach zusammenhängende offene Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion

$\Rightarrow f$ besitzt eine Stammfunktion F und die dazu äquivalente Eigenschaften.

Eigenschaften des Kurvenintegrals

Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Pfad, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $U \subset \mathbb{C}$ eine offene wegzusammenhängende Menge.

Linearität: Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\int_{\gamma} [\alpha f(z) + \beta g(z)] dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Umkehrrichtung: Sei $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\delta(t) := \gamma(1 - t)$:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\delta} f(z) dz$$

Man schreibt $\delta = \gamma^{-1}$ oder $\delta = -\gamma$

Verkettung: Sei $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Pfad mit $\gamma(1) = \delta(0)$:

$$(\gamma * \delta)(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \delta(2t - 1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Und $\int_{\gamma * \delta} f(z) dz = \int_{\delta} f(z) dz + \int_{\gamma} f(z) dz$

Unabhängigkeit der Parametrisierung: Sei $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine andere Parametrisierung des Bildes von γ :

$$\int_{\delta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

Cauchy Schwarz:

$$\left| \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)| dt$$

Standardabschätzung: Sei $L(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt$ die Länge des Pfads und $|f(z)| \leq M$ für jedes $z \in U$ bzw. $M = \max_{t \in [0, 1]} |f(z)| < \infty$:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L$$

Seien γ und $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ einfach geschlossene, gleich orientierte Kurven, wobei γ alle anderen Kurven umschliesst, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sich nicht schneiden und U die Menge ist, die die äussere Kurve umschliesst, ohne die von $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ umschlossenen Bereiche:

$$f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph} \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

Sei $\delta \subseteq U$ eine geschlossene Kurve, die in ihrem Inneren nur Punkte enthält, wo f holomorph ist:

$$\int_{\delta} f(z) dz = 0$$

Vektorfelder und Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ist definiert als

$$\operatorname{div} F := \partial_x F_1(x, y) + \partial_y F_2(x, y)$$

Satz von Gauss in \mathbb{R}^2

Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \in \mathbb{R}^2$, sei $V \subset U$ eine kompakte Menge mit stückweise glattem Rand ∂V mit Parametrisierung $\gamma(t)$ und:

$$\int_V \operatorname{div} F(x, y) dx dy = \int_{\partial V} F(s) \cdot n_s ds$$

Mit $n_s = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2 \\ -\dot{\gamma}_1 \end{pmatrix} / \left\| \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2 \\ -\dot{\gamma}_1 \end{pmatrix} \right\|$ der Einheitsnormalvektor an der Stelle $s \in \partial V$.

Allgemeine Cauchy Integralformel

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine einfach zusammenhängende offene Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \setminus \{z_0\}$ ein Pfad, der z_0 einmal im positiven Sinne (Gegenuhrzeigersinn) umläuft:

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = g^{(n)}(z_0)$$

Wobei z_0 eine Singularität der Menge U ist.

Der Mittelwertsatz

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $r > 0$ s.d. $\bar{B}(z_0, r) \subseteq U$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(z_0 + re^{2\pi i t})}_{= \partial B(z_0, r)} dt$$

Jeder Punkt z ist ein Mittelwert der umgebenden Kreisscheibe.

Lemma

Sei $f : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Falls für jedes $z \in B(z_0, r)$ gilt

$$|f(z)| \leq \underbrace{|f(z_0)|}_{\text{Mittelwert}} \Rightarrow f(z) = f(z_0) = \text{konst.}$$

Maximum Modulus Prinzip

Sei U eine wegzusammenhängende Menge. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant

$\Rightarrow |f(z)|$ besitzt kein Maximum auf U .

\Leftrightarrow Es gibt keinen Punkt $z_0 \in U$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$

Korollar

Sei f eine nicht konstante und stetige Funktion auf einer kompakten Menge K , die holomorph auf dem Inneren ($K \setminus \partial K$) von K ist.

$$\Rightarrow \max_{z \in K} |f(z)| \text{ wird auf } \partial K \text{ erreicht}$$

Tipp: $z = re^{it}$ und Ableiten nach $t = 0$ setzen.

Satz von Liouville

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt und eine ganze Funktion $\Rightarrow f$ ist konstant

Reihenentwicklung

Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Konvergenzradius

$$R := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}} \text{ oder } := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} \begin{cases} |z| < R \text{ konvergiert absolut} \\ |z| > R \text{ divergiert} \\ R = \infty \text{ konvergiert } \forall z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Wichtige Reihen

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

sinh und cosh jeweils gleich wie sin und cos, aber ohne $(-1)^n$

Taylorreihe

Sei $f : B(z_0, R_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $R_0 > 0 \Rightarrow f(z)$ besitzt für jedes $z \in B(z_0, R_0)$ eine Taylorreihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$$

Die Reihe konvergiert $\forall z \in B(z_0, R_0)$

Bemerkung: MacLaurin-Reihe = Taylorreihe bei $z_0 = 0$

Laurent-Reihe

Sei **holomorph** auf dem Kreisring $r < |z - z_0| < R$ und γ eine geschlossene Kurve im Kreisring und z_0 im **positiven** Sinne umläuft:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

mit $a_n = c_n = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ und $b_n = a_{-n}$

Tipp: Partialbruchzerlegung → Aufteilen von \mathbb{C} in Kreisringe → umformen und geometrischen Reihe benutzen

Singularitäten

Falls f in z_0 nicht holomorph ist, aber in **mindestens einem** $z \in B(z_0, \epsilon)$ mit $\epsilon > 0$ holomorph ist, heisst z_0 eine Singularität.

Isolierte Singularität

Falls f in z_0 nicht holomorph ist, aber in **allen** $z \in B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$ mit $\epsilon > 0$ holomorph ist, heisst z_0 eine isolierte Singularität.

Weitere Klassifizierung

Falls $f(z)$ eine Laurent-Reihe besitzt gilt:

Falls $c_k = 0$ für alle $k < n$ und $c_n \neq 0$...

- i.

$n > 0 \Rightarrow z_0$ ist eine Nullstelle

n-ter Ordnung
- ii.

$n = 0 \Rightarrow z_0$ ist eine

hebbare Singularität
- iii.

$n < 0 \Rightarrow z_0$ ist ein

Pol n-ter Ordnung
- iv.

Falls für alle $c_k = 0$ ein $c_m \neq 0$ mit $m < k$ existiert, dann ist z_0 eine

wesentliche Singularität.

Hebbarkeitsatz von Riemann

Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Es ist äquivalent:

- z_0 ist eine hebbare Singularität von f .

$\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert in \mathbb{C}

$\Leftrightarrow f$ ist auf einer punktierten Scheibe $B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$ beschränkt.

Meromorph

Eine holomorphe Funktion auf $U \setminus \{z_0\}$ heisst meromorph auf U , falls z_0, \dots, z_N Pole oder hebbare Singularitäten sind.

Satz von Picard

Sei z_0 eine wesentliche Singularität von $f(z)$. In jeder noch so kleinen punktierten Scheibe $B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$ nimmt $f(z)$ jeden Wert in \mathbb{C} , bis auf höchstens eine Ausnahme, unendlich oft an.

Der Residuensatz

Das Residuum

Sei z_0 eine isolierte Singularität von f .

$$Res(f, z_0) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) d\xi$$

Der Residuensatz

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene wegzusammenhängende Menge, $\gamma \subset \mathbb{C}$ eine positiv orientierte geschlossen Kurve, die $z_1, \dots, z_n \in U$ mit der Windungszahl W umschliesst, und $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n W(\gamma, z_k) \cdot Res(f, z_k)$$

Polstellen

Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f(z)$. z_0 ist ein Pol m-ter Ordnung \Leftrightarrow Es gibt in der Umgebung von z_0 eine Funktion $\phi(z)$, mit

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z) \qquad \phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$$

Falls $\phi(z_0) = 0 \rightarrow$ Laurent-Reihe benutzen!

Korollar

Falls z_0 ein Pol m-ter Ordnung ist:

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi(z)}{(m - 1)!}$$

Nullstellen

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph bei $z_0 \in U$. f hat in z_0 eine Nullstelle m-ter Ordnung \Leftrightarrow Es gibt ein $g : U \rightarrow \mathbb{C}$, mit

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \qquad g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \neq 0$$

Anwendungen: $f(z) \equiv 0$

Lemma

Sei $f : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f(z_0) = 0$. Dann ist entweder $f(z) \equiv 0 \forall z \in B(z_0, r)$ oder z_0 ist eine isolierte Nullstelle von f .

Satz

Sei U wegzusammenhängend und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Falls $f(z) \equiv 0$ auf einer offenen Menge oder Geradenstrecke, dann ist $f(z) = 0$ auf U .

Identitätsprinzip für holomorphe Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Falls $f(z) = g(z)$ auf einer offenen Menge oder Geradenstrecke, dann gilt $f(z) \equiv g(z)$.

Anwendungen: Integrale mit Sinus und Cosinus

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(t), \sin(t)) dt = \int_{\gamma} f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

Mit $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Anwendungen: Uneigentliche Integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^a f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx \qquad x \in \mathbb{R}$$

Falls es konvergiert, gilt: $I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Trick: Eine Parametrisierung γ_R wählen mit Anfangspunkt R und Endpunkt $-R$ sodass $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$

Mit dem Residuensatz folgt dann:

$$2\pi i \sum_{k=1}^n W \cdot Res(f, z_k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx \right) = I$$

Lemma

Falls $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)} h(z)$ mit den Polynomen p und q . $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$ mit $\gamma_R = R e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ bzw. $t \in [2\pi, \pi]$ falls:

1.

$deg(p) + 2 \leq deg(q)$
2.

$q(z)$ hat keine Nullstellen auf der reellen Achse.
3.

$|h(z)|$ ist auf $Im(z) \geq 0$ bzw. $Im(z) \leq 0$ beschränkt.

Achtung: für $Im(z) \leq 0$ ist γ_R in negative Richtung definiert $\rightarrow -\sum Res$

Uneigentliche Integrale mit Sinus und Cosinus

Gleiches Prinzip wie im Lemma. Exponentialfunktion benutzen und in Reel- und Imaginärteil aufteilen. (e^{iax} beschränkt auf $Im(z) \geq 0$ mit $\alpha < 0$ bzw. $Im(z) \leq 0$ mit $\alpha > 0$)

Fourier Analysis

Periodische Funktionen

Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. h ist periodisch, falls es ein $T \in \mathbb{R}$ (Periode) gibt, sodass $h(t + T) = h(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Fourierreihe

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi}{T} nt}$$

$a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$

Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \exp\left(-i \frac{2\pi}{T} nt\right) dt$$

n-te Harmonische / n – 1-te Oberschwingung / Grundschiwingung (n = 0):
 $a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)$

Symmetrieeigenschaften

$f(t)$ gerade: $a_n = " 2 \cdot a_n|_{t_0}^{t_0+T/2} "$ $b_n = 0$

$f(t)$ ungerade: $a_n = 0.$ $b_n = " 2 \cdot b_n|_{t_0}^{t_0+T/2} "$

Koeffizientenumrechnung

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + i b_n)$$
$$c_0 = a_0$$
$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n)$$

$$a_0 = c_0$$
$$a_n = c_n + c_{-n}$$
$$b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Satz von Dirichet

Bei Sprungstellen einer periodischen, stückweise stetigen Funktion mit linker und rechter Ableitung an jedem Punkt nimmt die Fourierreihe bei der Sprungstelle den mittleren Wert an: $f(t_0) = \frac{1}{2} (f(t_0^-) + f(t_0^+))$

Trigonometrisches Polynom

Ein trig. Polynom hat die gleiche Form wie eine Fourierreihe aber $N \in \mathbb{N}_0$, statt $N \rightarrow \infty$. Das trig. Polynom ist nur eine Approximation einer Funktion f .

Gibbsches Phänomen

Vor und nach Sprungstellen entstehen Überschwingungen von ca. 18%

sup|f(t) - s_N(t)| ≈ 0.18 · 1/2 · (f(t_0^-) + f(t_0^+)) t ∈ [-L, L]

Beste Approximation

E_N(f) := 1/(2π) ∫ |f(t)|^2 dt - 1/2 (a_0^2 + ∑_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2) := 1/(2π) ∫ |f(t)|^2 dt - 1/2 (∑_{n=1}^N |c_n|^2)

E*_N nimmt monoton ab mit zunehmendem N. Für N → ∞ also E*_N = 0 kriegt man den Satz von Parseval.

Ergänzung: Orthonormalitätsrelationen

∫_{-T}^T e^{i m π t / T} e^{-i n π t / T} dt = { 0 n ≠ m, 2T n = m

∫_{-T}^T sin(m π t / T) sin(n π t / T) dt = { 0 n ≠ m, n = m ≠ 0, T n = m = 0

Fourier-Transformation

Absolut integrierbar

f := ℝ → ℂ heisst absolut integrierbar falls

∫_{-∞}^∞ |f(t)| dt < ∞ (⇒ lim_{t→±∞} f(t) = 0)

Fourier Transformation

Sei f := ℝ → ℂ absolut integrierbar. Die Fourier Transformation f-hat ist

f-hat(ω) = F{f(t)}(ω) = 1/√(2π) ∫ f(t) e^{-iωt} dt

Inverse Fourier-Transformation

Sei f-hat absolut integrierbar.

f(t) = F^{-1}{f-hat(ω)}(t) = 1/√(2π) ∫ f-hat(ω) e^{iωt} dω

Satz von Dirichet für die Fouriertransformation

Sei f := ℝ → ℂ absolut integrierbar und stückweise stetig mit linker und rechter Ableitung an jedem Punkt. Für ein Punkt t_0 ∈ ℝ gilt abhängig von der Stetigkeit:

f(t_0) = { F^{-1}{F{f(t)}} stetig, 1/2 (lim_{t→t_0^-} f(t) + lim_{t→t_0^+} f(t)) nicht stetig

Satz von Plancherel

Seien f und f-hat absolut integrierbar:

∫_{-∞}^∞ |f(t)|^2 dt = ∫_{-∞}^∞ |F{f(t)}(ω)|^2 dω

Eigenschaften der Fourier-Transformation

- 1. F{αf + βg}(ω) = α F{f}(ω) + β F{g}(ω)
- 2. F{f(t - a)}(ω) = e^{-iωa} · F{f(t)}(ω)
- 3. F{e^{iat} · f(t)}(ω) = F{f(t)}(ω - a)
- 4. F{f(at)}(ω) = 1/|a| · F{f(t)}(ω/a)
- 5. F{F{f(t)}} = f(-t)
- 6. F{f^{(n)}(t)}(ω) = (iω)^n · F{f(t)}(ω)
- 7. F{t^n f(t)} = i^n d/dω^n F{t^n f(t)}(ω)

Faltung

Seien f und g absolut integrierbar. Das Faltungsprodukt von f und g ist

(f * g)(x) := ∫_{-∞}^∞ f(x - t) g(t) dt = ∫_{-∞}^∞ f(t) (x - t) dt

Bemerkungen

- i. ∀ t < 0 : f(t) = 0 und g(t) = 0 ⇒ (f * g)(x) = ∫_0^x f(x - t) g(t) dt
- ii. f * g ist mindestens so glatt, wie die glatteste der beiden Funktionen
- iii. Die Faltung ist wie ein gewichteter Mittelwert

Eigenschaften der Faltung

f * g = g * f, F{f * g} = √(2π) F{f} F{g}, (f * g) * h = f * (g * h), F^{-1}{f * g} = 1/√(2π) F^{-1}{f} F^{-1}{g}, (f + g) * h = f * h + g * h, F{f · g} = √(2π) F{f} * F{g}, f(x - a) * g = (f * g)(x - a), F^{-1}{f · g} = 1/√(2π) F^{-1}{f} * F^{-1}{g}

Laplace-Transformation

Man kann mit der Laplace-Transformation auch wachsende d.h. nicht absolut integrierbare Funktionen betrachten

Sei s ∈ ℂ und f := ℝ → ℂ. Die Laplace Transformation ist

L{f(t)} := ∫_0^∞ e^{-st} f(t) dt

Sei ℰ der Originalraum der Originalfunktionen f mit folgenden Eigenschaften:

- 1) f(t) = 0 für jedes t < 0
- 2) ∃ σ ∈ ℝ ∃ M > 0 ∀ t > 0 : |f(t)| ≤ M e^{σt}
- 3) f ist stückweise stetig
- 4) lim_{t→t_0^-} f(t), lim_{t→t_0^+} f(t) existieren ∀ t ∈ ℝ insbesondere t = 0

Das Wachstumkoeffizient ist das kleinste σ_f, sodass |f(t)| ≤ M e^{σt} für jedes σ gilt σ ≥ σ_f.

Heaviside Funktion

Falls f ≠ 0 für t < 0, kann man die Funktion zwingen die Bedingung zu erfüllen mit einer Multiplikation der Heaviside Funktion.

H(t) := { 0 t < 0, 1 t ≥ 0

Eigenschaften der Laplace-Transformation

- 1. L{αf + βg}(s) = α L{f}(s) + β L{g}(s)
- 2. L{f(t - a)}(s) = e^{-as} · L{f(t)}(s)
- 3. L{e^{at} · f(t)}(s) = L{f(t)}(s - a)
- 4. L{f(at)}(s) = 1/a · L{f(t)}(s/a)
- 5. L{f^{(n)}(t)}(s) = s^n L{f(t)}(s) - ∑_{k=1}^n s^{n-k} lim_{t→0^+} f^{(k-1)}(t)
- 6. d/ds^n L{f(t)}(s) = (-1)^n L{t^n f(t)}(s)
- 7. L{∫_0^t f(τ) dτ}(s) = 1/s L{f(t)}(s)
- 8. L{f(t)/t}(x + iy) = ∫_{x+iy}^{∞+iy} L{f(t)}(τ) dτ
- 9. L{f(t)}(s) = 1/(1 - e^{-sT}) ∫_0^T e^{-st} f(t) dt für eine T-periodische f
- 10. L{f * g} = L{f(t)}(s) · L{g(t)}(s)
- 11. L{δ(t - a)}(s) = e^{-as}

Dirac-Delta Funktion

δ := lim_{ε→0} 1/(2ε) χ_{(-ε,ε)}

∫_{-∞}^∞ δ(t) dt = 1, ∫_{-∞}^∞ δ(t - t_0) f(t) dt = f(t_0), H(t) = ∫_{-∞}^t δ(s) ds

Satz von Lerch

Seien f_1, f_2 ∈ ℰ mit σ_1, σ_2. L{f_1(t)} = L{f_2(t)} für alle s mit Re{s} > max{σ_1, σ_2} ⇒ f_1(t) = f_2(t) ∀ t an denen f_1 und f_2 stetig sind.

Inverse Laplace-Transformation

Sei f ∈ ℰ mit σ_f. Sei β_c(y) := c + iy für y ∈ (-∞, ∞) und c > σ_f beliebig. An allen Stetigstellen von f:

f(t) = 1/(2πi) ∫_{β_c} e^{st} L{f(t)}(s) ds

An Unstetigstellen: Satz von Dirichet

Laplace-Transformationstabelle

Originalraum f(t)	Bildbereich L{f(t)}(s)
1	1/s, s > 0
t^n	n! / s^{n+1}, s > 0
sin(at)	a / (s^2 + a^2), s > 0
cos(at)	s / (s^2 + a^2), s > 0
e^{at} · f(t)	L{f(t)}(s - a), s > a
f'(t)	s L{f(t)}(s) - f(0)
f''(t)	s^2 L{f(t)}(s) - s f(0) - f'(0)