Vorlesung zu: Maxwell the GOAT

Vorlesung 1

Historischer Hintergrund

Newton: $F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ ⟹ nichts über Herkunft der Kraft

⟹ Problem der Fernwirkung

oder Coulomb

$$F_C = K_C \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

⟹ Einführung der Felder $F_e = qE$, $F_m = qv \times B$

Coulomb Lorentz

$$\Rightarrow F(r,t) = q\left[E(r,t) + v(r,t) \times B(r,t)\right]$$

$$\int_V \rho \, dV = q_{tot}$$

$$\sum_n q_n \delta(r_n) = q_{tot}$$

↳ delta Funktion

q nur an spezifischen Orten r_n

Bew $\int_V \sum_n q_n \delta(r_n) dV$

$$= \sum_n q_n \underbrace{\int_V \delta(r_n) dV}_{1} = q_{tot}$$

Wichtig allgemein: • Verzögerung der Messungen (Ausbreitung mit c)

• Felder sind relativ

n_r': Einheitsvektor von der Ladung zum Messpunkt

$$E(r_0,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{n_r'}{r'^2} + \frac{r'}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{n_r'}{r'^2}\right) + \frac{1}{c}\frac{d^2}{dt^2} n_r'\right]$$

→ $r' \to \infty$ → nur Beschleunigung spielt eine Rolle

⟹ Es braucht beschleunigte Ladung um Strahlung freizusetzen

Gesetz von Gauss
$$\int_{\partial V} E(r,t) \cdot n \, da = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(r,t) \, dV$$

Induktionsgesetz von Faraday
$$\int_{\partial A} E(r,t) \, ds = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A B(r,t) \, n \, da$$

Gesetz von Ampère
$$\int_{\partial A} B(r,t) \, ds = \mu_0 \int_A j(r,t) \, n \, da$$

Keine magn. Ladungen
$$\int_{\partial V} B(r,t) \, n \, da = 0$$

⟹

$$\nabla \cdot E(r,t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r,t)$$

$$\nabla \times E(r,t) = -\frac{\partial}{\partial t} B(r,t)$$

$$\nabla \times B(r,t) = \mu_0 j(r,t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} E(r,t)$$

$$\nabla \cdot B(r,t) = 0$$

$$\nabla \times \nabla \Psi = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$$

$$\boxed{\int_{\partial V} F(r,t) \, n \, da = \int_V \nabla \cdot F(r,t) \, dV}$$

$$\boxed{\int_{\partial A} F(r,t) \, ds = \int_A \nabla \times F(r,t) \, n \, da}$$

Recap Elektrostatik:

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \text{und} \quad \nabla \times E = 0$$ → statisch B ändert sich nicht mit der Zeit

→ Einführung eine Potenzial $\phi(r,t)$

$$E(r,t) = -\nabla\phi(r,t)$$

$$-\nabla \times \nabla\phi \overset{!}{=} 0$$ per Definition

$$-\nabla \cdot \nabla\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(r',t)}{|r-r'|}\,dV'}$$ Poisson Gleichung

↳ Beiträge von ρ → aber skaliert mit $|r-r'|$ (Abstand zum Beobachter, bzw. Messpunkt von ϕ)

Vorlesung 2

Mikroskopische Maxwell-Gleichungen

$$\int_{\partial V} E(r,t)\cdot n\,da = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(r,t)\,dV \qquad \int_{\partial A} E(r,t)\,ds = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A B(r,t)\,n\,da$$

$$\int_{\partial A} B(r,t)\,ds = \mu_0\int_A j(r,t)\,n\,da + \underline{\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_A E(r,t)\,n\,da} \qquad \int_{\partial V} B(r,t)\,n\,da = 0$$

↳ von Maxwell hinzugefügt (Maxwellscher Verschiebungsstrom)

neue diff. Form

$$\nabla \times B = \mu_0 j - \underbrace{\varepsilon_0\mu_0}_{=1/c^2}\frac{\partial}{\partial t}E$$

⇒ Grund für EM Wellen

Dipolmoment

Poisson: $$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\frac{\rho(r')}{|r-r'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\frac{q\,\delta(\vec{r}')}{\underbrace{|r-r'|}_{r}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

d: ⊕ $+q$, ⊖ $-q$ ⇒ Überlagerung der Felder

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \qquad r = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \dots$

$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 \dots$

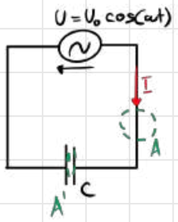
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left|\vec{r} + \begin{pmatrix}0\\0\\d/2\end{pmatrix}\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r} - \begin{pmatrix}0\\0\\d/2\end{pmatrix}\right|}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\underbrace{(z+d/2)^2}_{\approx z^2+dz}}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\underbrace{(z-d/2)^2}_{\approx z^2-dz}}}\right]$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r\sqrt{1+\frac{dz}{r^2}}} - \frac{1}{r\sqrt{1-\frac{dz}{r^2}}}\right] \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{r^2}\right)} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{r^2}\right)}\right]$$

$\frac{z}{r} = \cos\theta$ (Polarkoordinaten)

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{r^2}\right) - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{r^2}\right)\right] = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{z}{r^2} = \boxed{\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Beispiel



C ist leer

→ zunächt fliesst mal ein Strom $I = \dot{Q}$

→ muss ein Magnetfeld geben

Ausserhalb des Kondensators

$$\int_{\partial A} \vec{B}\, ds = \mu_0 \int_A \vec{j}\, d\vec{A} = \underline{\underline{\mu_0 I}}$$

$$B(\phi)\, 2\pi r \quad \Rightarrow \quad B(\phi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Innerhalb des " "

→ fliesst kein Strom $j = 0$

$$B'(\phi)\; 2\pi r = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E}\, d\vec{A}$$

$$= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} A \cdot E$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \mu_0 A}{d} \frac{\partial}{\partial t} U$$

$$= \mu_0 C \frac{\partial}{\partial t} U = \mu_0 \dot{Q} = \underline{\underline{\mu_0 I}}$$

$$\boxed{B = B' = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

↳ Magnetfeld räumlich konstant

⇒ Divergenz nehmen

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = 0 = \mu_0 \nabla \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \underbrace{\nabla \vec{E}}_{\rho/\varepsilon_0}$$

$$\boxed{0 = \nabla \vec{j} + \partial_t \rho} \Rightarrow \text{Kontinuitätsgleichung für die Ladung}$$

Integralform

$$\int_V \nabla j\, dV + \partial_t \int_V \rho\, dV = 0$$

$$\boxed{\int_{\partial V} j\, n\, da = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\, dV}$$

Fluss der Ladung aus V heraus = Änderung der Ladung innerhalb von V

⇒ Kirchhofsche Regel falsch bzw. nur anwendbar für spezifische Schaltungen

Makroskopische Maxwell-Gleichungen

⇒ mikroskopische Gleichungen in der Realität nichts anwendbar

z.B. Polarisation ändert die Ladungsdichte: $\rho = \rho_0 + \rho_{Pol}$ ← keine Kontrolle darüber

$$\int_{\partial V} E\, n\, da = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \overbrace{\rho}^{\rho_0 + \rho_{pol}}\, dV \quad \underline{\text{und}} \quad \boxed{\int_{\partial V} P\, n\, da = -\int_V \rho_{Pol}\, dV} \Rightarrow \nabla P = -\rho_{Pol}$$

↳ neues Feld definiert

$$\nabla(\varepsilon_0 E + P) = \rho_0$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0} \quad \text{mit} \quad \boxed{D = \varepsilon_0 E + P}$$

folgt also

$$\boxed{\int_{\partial V} D\, n\, da = \int_V \rho_0\, dV} \quad \text{und} \quad \boxed{j_{pol} = \frac{\partial}{\partial t} P}$$

↳ Polarisationsstrom

Für das H-Feld

$$j = j_0 + j_{pol} + j_{mag} \Rightarrow \int_{\partial A} M\, ds = \int_A j_{mag}\, n\, da$$

$M = f(B)$
↳ Magnetisierung (Folge von B)

Magnetische Induktionfeld

$$\int_{\partial A} \underbrace{\left[\frac{1}{\mu_0} B - M\right]}_{H \rightarrow \text{Magnetfeld}} ds = \int_A \left[j_0 + \frac{\partial}{\partial t} D\right] n\, da$$

$$\boxed{B = \mu_0 \left[H + M\right]}$$

$$\boxed{\nabla \times H = \frac{\partial}{\partial t} D + j_0}$$

H → Magnetfeld

$$\boxed{\int_{\partial A} H\, ds = \int_A \left[\frac{\partial}{\partial t} D + j_0\right] n\, da}$$

⇒ die anderen zwei Gleichung bleiben unverändert

Ziel war Quellen ρ_0, j_0 zu behalten

Vorlesung 3

H in $[A/m]$
E in $[V/m]$ $\Rightarrow$ HE in $\frac{AV}{m^2} = \frac{W}{m^2}$ (eine Intensität)

P und M hängen vom Material und der Intensität der Felder ab

mit $\nabla \cdot \nabla \times H$ kriegen wir immer noch $\nabla j_0 + \partial_t \rho_0 = 0$ (Kontinuitätsgleichung)

Wellengleichung

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} B \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\underbrace{\nabla \times \vec{H}}_{\vec{j}_0 + \frac{\partial}{\partial t} D} + \nabla \times \vec{M}\right]$$

$D = \varepsilon_0 E + P$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left[\vec{j}_0 + \frac{\partial}{\partial t} P + \nabla \times M\right]}_{\vec{j}}}$$

$$\boxed{\mathbb{L}\vec{f} = \vec{g}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{L}\vec{f}=0 \Rightarrow \vec{f}_{hom}=\sum_n a_n f_{hom}^{(n)} \\ \mathbb{L}\vec{f}=\vec{g} \Rightarrow \vec{f}_{par} \end{array}\right\} \vec{f}=\vec{f}_{hom}+\vec{f}_{par}$$

Äquivalent für das Magnetfeld:

$$\boxed{\nabla\times\nabla\times H+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}=\nabla\times j_0+\nabla\times\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 M}{\partial t^2}}$$

Im freien Raum: keine Quellen, keine Materie

$\Rightarrow$ nur homogene Lösung

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}=0 \quad \text{und} \quad \nabla\times\nabla\times H+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}H=0$$

$$\nabla\times\nabla\times E=\nabla\underbrace{(\nabla\cdot E)}_{\substack{=0\\ \text{Gaussche}\\ \text{Gesetz}}}-\nabla^2 E$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}=0} \quad \text{und} \quad \boxed{\nabla^2 H-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}H=0}$$

$\Rightarrow$ Wellengleichung im freien Raum

und für statische Felder $\nabla^2\vec{E}=0$ und $\nabla^2\vec{H}=0$

(Poisson Gleichung)

Lösungsansätze:

in <u>einer</u> Dimesion $\frac{\partial^2}{\partial x^2}E-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E=0$ (Physik I)

$\Rightarrow$ d'Alembert: $E(x,t)=E(x-ct)$

$\hookrightarrow$ bewegt sich mit Geschwindigkeit c

Vorlesung 4

Separationsansatz 1: $E(r,t) = \mathrm{Re}\left\{ \underline{E}(r)\, T(t) \right\}$

$\underline{E}$: Hilfsgrösse: - komplex
- keine Funktion der Zeit

$$T(t)\, \nabla^2 \underline{\vec{E}}(r) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t)\right) \underline{\vec{E}}(r) = 0 \qquad \Big| \cdot T^{-1} \cdot \underline{\vec{E}}^{-1} \cdot (-c^2)$$

$$\underbrace{T^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T}_{:= -\omega^2} - \underbrace{c^2 \underline{\vec{E}}^{-1} \nabla^2 \underline{\vec{E}}}_{\overset{!}{=} -\omega^2} = 0$$

$\Rightarrow$ Terme müssen konstant sein, damit die Gleichung erfüllt wird.

$$T^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T = \omega^2 \qquad\qquad c^2 \underline{\vec{E}}^{-1} \nabla^2 \underline{\vec{E}} = \omega^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} T + \omega^2 T = 0} \qquad\qquad \boxed{\nabla^2 \underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\vec{E}} = 0}$$

$\hookrightarrow$ Helmholz-Gleichung

Exponentialansatz:

$$T = c_t\, e^{i\omega t} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{ \underline{\vec{E}}(r)\, e^{i\omega t} \right\}$$

Separationsansatz 2:

Sei $\underline{E}(r) = \underline{E}_0\, X(x)\, Y(y)\, Z(z)$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X + \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z + \frac{\omega^2}{c^2} XYZ = 0 \qquad \Big| \cdot X^{-1} \cdot Y^{-1} \cdot Z^{-1}$$

$$\underbrace{X^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X}_{-k_x^2} + \underbrace{Y^{-1} \frac{\partial^2}{\partial y^2}}_{-k_y^2} + \underbrace{Z^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z}_{-k_z^2} + \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2}}_{:= k^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} X + k_x^2 X = 0 \qquad \text{mit } \boxed{k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}$$

$\rightarrow$ Dispersionsrelation

$\hookrightarrow$ Ort und Zeit verkoppelt ($k = \frac{\omega^2}{c^2}$)

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} Y + k_y^2 Y = 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z + k_z^2 Z = 0$$

$\Rightarrow$ Exponentialansatz

$$X = e^{ik_x x} \quad , \quad Y = e^{ik_y y} \quad , \quad Z = e^{ik_z z}$$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

(Vorfaktoren folgen später)

$$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{k} := \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$XYZ = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}$$

WICHTIG: Es gibt also nicht nur die harmonische Lösung
Auch exponentieller Zerfall!

$\nabla \cdot E = 0$ (Gauss)

$$\Rightarrow 0 = \mathrm{Re}\left\{ \nabla \cdot \vec{\underline{E}}_0 \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \vec{\underline{E}}_{0x} \frac{\partial}{\partial x} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + \vec{\underline{E}}_{0y} \frac{\partial}{\partial y} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + \vec{\underline{E}}_{0z} \frac{\partial}{\partial z} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \left[\vec{\underline{E}}_{0x} k_x + \vec{\underline{E}}_{0y} k_y + \vec{\underline{E}}_{0z} k_z \right] i e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \right\}$$

$$\Rightarrow \vec{\underline{E}}_{0x} k_x + \vec{\underline{E}}_{0y} k_y + \vec{\underline{E}}_{0z} k_z = 0$$

$$\boxed{\vec{\underline{E}}_0 \vec{k} = 0}$$

$\rightarrow$ Transversalitätsbedingung
elektrische Feld muss senkrecht auf k stehen

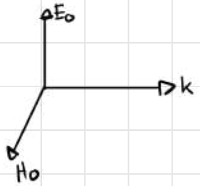
Induktionsgesetz

Magnetfeld folgt direkt

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} H \mu_0$$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{E} = i\omega\mu_0 \underline{H} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{H}_0 = \frac{1}{\omega\mu_0} k \times E_0}$$

$\rightarrow$ H steht senkrecht auf k und E



(falls alles reel ist)

$$\Rightarrow E(r,t) = \mathrm{Re}\left\{ \int_k \int_\omega \underline{E}_0(k,\omega) \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} \, d\omega \, d^3k \right\}$$

$\rightarrow$ aber $k \cdot k = \frac{\omega^2}{c^2}$ (unendlich viele $\vec{k}$ für ein ω)

Bem. $E(r,t)$ ist die Fouriertransformierte von $\underline{E}_0(k,\omega)$

Ebene Welle

k_x, k_y, k_z reell

Sei $E_0 = |E_0| (1,0,0)^t$

$\to$ linear polarisierte Welle

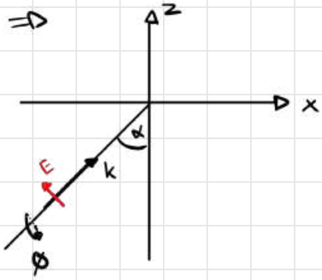
$z \stackrel{!}{=} 0$ damit transvers

Sei $E_0 = |E_0| (1,i,0)^t$

$\to$ Zirkular polarisierte Welle

$\to$ Eliptisch polarisierte Welle mit anderen Faktoren

$\Rightarrow$



$\hookrightarrow$ k liegt in der x-z-Ebene und ist definiert durch den Einfallswinkel α

$$k = \begin{pmatrix} k \sin\alpha \\ 0 \\ k \cos\alpha \end{pmatrix} \to \vec{E}(r) = \vec{E}_0 \, e^{ik(x \sin\alpha + z\cos\alpha)}$$

Bedingung $k \cdot E_0 = 0$: $\sin\alpha \, \underbrace{E_{0x}}_{\cos\alpha E' E_0} + \cos\alpha \, \underbrace{E_{0z}}_{-\sin\alpha E' E_0} = 0$

Normierung: $E_0 = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2}$

bzw: $\sqrt{\left(\frac{E_{0x}}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{E_{0y}}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{E_{0z}}{E_0}\right)^2} = 1$

$E_{0y} = E_{0y}' E_0$

$$\vec{E}_0 = E_0 \begin{pmatrix} \cos\alpha \, E' \\ E_{0y}' \\ -\sin\alpha \, E' \end{pmatrix} \quad \leftarrow 1 \cdot 1 = 1$$

$$\cos^2\alpha \, E'^2 + E_{0y}'^2 + \sin^2\alpha \, E'^2$$
$$= E'^2 + E_{0y}'^2 \quad \leftarrow \text{mit } \phi \text{ (wo das E-Feld zeigt)}$$
$$\Leftarrow \quad = \cos^2\phi + \sin^2\phi$$
$$= 1$$

mit $E' = \cos\phi$ und $E_{0y}' = \sin\phi$

$$\boxed{\vec{E}(r) = E_0 \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\alpha \\ \sin\phi \\ -\cos\phi \sin\alpha \end{pmatrix} e^{ik(x\sin\alpha + z\cos\alpha)}}$$

$\to \phi = 0$: p-polarisation

$\hookrightarrow$ parallel zur Einfallsebene

$\phi = \frac{\pi}{2}$: s-polarisation

$\hookrightarrow$ senkrecht zur Einfallsebene

Evaneszente Wellen

Dispersionsrelation: $k \cdot k = \frac{\omega^2}{c^2} \rightarrow k_z = \sqrt{\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_z^2}$

$\rightarrow$ Ebene Welle mit kleine k_x, k_z

$\rightarrow$ Evaneszente Welle mit grosse k_x und k_z

$k_z = i\underbrace{k_z'}_{\text{reel}} \rightarrow e^{ik_z z} = e^{-k_z z}$ ← exponentielles ab/ansteigen (kann ja aber nicht unendlich viel Energie besitzen $k \sim E \rightarrow$ ausser Raum ist begrenzt)

$$\vec{E}(r,t) = Re\left\{ \vec{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \right\} e^{\mp k_z' z}$$

Intuition: ω Kreisfrequenz

k: Schwingung im Raum

↳ grosse $k_x, k_z \rightarrow$ grosse Schwingung in der Ebene $\rightarrow$ Welle klingt exponentiel ab

$\rightarrow$ Raum ist ein Tiefpassfilter

Jede Superposition von ω und k löst die Wellengleichung:

$$E(r,t) = Re\left\{ \int_k \int_\omega \vec{E}_0(k,\omega) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} d\omega\, d^3k \right\} \qquad \vec{k}\cdot\vec{k} = \frac{\omega^2}{c^2}, \ \vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$$

Überlagerung in Zeit:

$\rightarrow Re\{\}$ kann weggelassen werden falls $E_0(k,\omega) = E_0^*(-k,-\omega)$

$$E(r,t) = \int_\omega \underbrace{\left[\int_k \vec{E}_0(k,\omega) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, dk \right]}_{=\vec{E}(r,\omega)} e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$= \int_\omega \underbrace{\vec{E}(r,\omega)}_{= E^*(r,-\omega)} e^{-i\omega t} d\omega$$

Spektraldarstellung

$$\boxed{E(r,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(r,\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega}$$

neue Maxwell-Gleichung:
→ Fourier einsetzen

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{D}(r,\omega) &= \rho_0(r,\omega) \\ \nabla \times \hat{E}(r,\omega) &= i\omega \hat{B}(r,\omega) \\ \nabla \times \hat{H}(r,\omega) &= -i\omega \hat{D}(r,\omega) + \hat{j}_0(r,\omega) \\ \nabla \cdot \hat{B}(r,\omega) &= 0 \end{aligned}}$$

→ im zeitlichen Fourierraum

Monochromatische Felder

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(r,\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2}\left[\vec{E}\, e^{-i\omega_0 t} + \underbrace{\vec{E}^*\, e^{i\omega_0 t}}_{(\vec{E}\, e^{-i\omega_0 t})^*} \right] = E(r)\, e^{-i\omega_0 t}$$

↳ nur eine Kreisfrequenz

$$\boxed{\hat{E}(r,\omega) = \frac{1}{2}\left[\vec{E}(r)\, \delta(\omega-\omega_0) + \vec{E}^*(r)\, \delta(\omega+\omega_0) \right]}$$

Stehende Wellen

vorwärts- und rückwärtslaufende ebene Wellen:

$$E(r,t) = \mathrm{Re}\left\{ [\vec{E}_1 e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}} + \vec{E}_2 e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}}]\, e^{-i\omega t} \right\}$$

Seien E_1 und E_2: monochromatisch mit $\omega_1 = \omega_2 := \omega$

linear polarisiert $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = |E_0|\,(0,1,0)^t$

gegenlaufend $k_1 = k_0(1,0,0)^t = -k_2$

$$E(r,t) = E_0\,(0,1,0)^t\, \mathrm{Re}\left\{ [e^{ik_0x} + e^{-ik_0x}]\, e^{-i\omega t} \right\}$$

$$\mathrm{Re}\left[e^{ik_0x} + e^{-ik_0x} \right] e^{-i\omega t}$$

$$= \mathrm{Re}\; e^{i(k_0x-\omega t)} + e^{i(-k_0x-\omega t)}$$

$$= \cos(k_0x-\omega t) + \cos(k_0x+\omega t)$$

$$= 2\cos(k_0x)\cos(\omega t)$$

$$\boxed{E(x,t) = 2E_0\cos(k_0x)\cos(\omega t)}$$

Vorlesung 5

Wellenpakete

$k \sim k_0$

$$E(z,t) = \int_k \int_\omega \vec{E}_0(k,\omega)\, e^{ikz - i\omega t}\, d\omega\, dk$$ $\to$ eine dim $\to$ $\omega = kc$

$$= \int_k \underbrace{\left[\int_\omega \vec{E}_0(k,\omega)\, d\omega\right]}_{\hat{E}_0 e^{-(k-k_0)^2/2\sigma^2} \text{ (Gaussche Kurve)}} e^{i(kz - kct)}\, dk$$

$$= \hat{E}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}k^2 + \left[\frac{k_0}{\sigma^2} + iz - ict\right]k - \frac{k_0^2}{2\sigma^2}\right) dk = \hat{E}_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx + c)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a\left(x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}\right)\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a\left(x^2 - \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right)\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a\left(\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right)\right) = \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\sqrt{a}\left(x - \left(\frac{b}{2a}\right)\right)\right)^2\right) dx$$

$$= \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right) \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2)\, dy$$

$\to$ Substitution

$y = \sqrt{a}\left(x - \left(\frac{b}{2a}\right)\right)$

$\frac{dy}{\sqrt{a}} = dx$

$$= \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

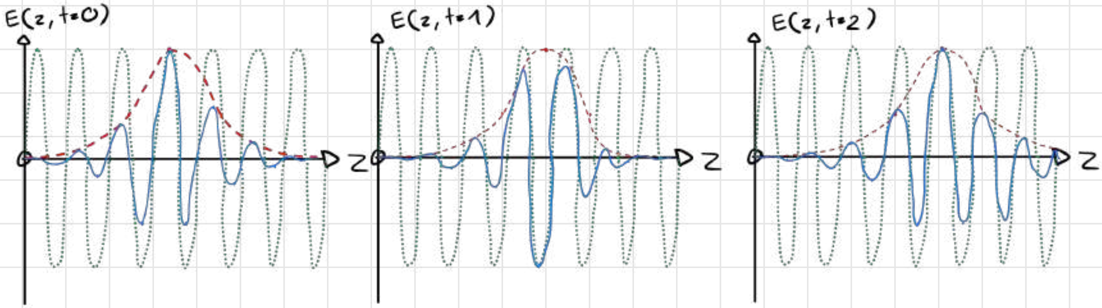
$\Rightarrow$ im oben Fall $a = \frac{1}{2\sigma^2}$, $b = \frac{k_0}{\sigma^2} + i(z-ct)$, $c = -\frac{k_0^2}{2\sigma^2}$

$$\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\underbrace{\left(\frac{k_0}{\sigma^2} + i(z-ct)\right)^2}_{\frac{k_0^2}{\sigma^4} + 2i\frac{k_0}{\sigma^2}(z-ct) - (z-ct)^2} - \frac{k_0^2}{2\sigma^2}\right)\sqrt{2\pi}\,\sigma \quad = \exp\left(ik_0(z-ct) - \frac{1}{2}\sigma^2(z-ct)^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(z,t) = \hat{E}_0 \sqrt{2\pi}\,\sigma\; e^{ik_0(z-ct)}\, e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(z-ct)^2}}$$

Ebene Welle

Gaussche Kurve
↳ wurde gewählt zum integrieren
↳ es gibt auch andere Funktionen



für später: im Vakuum => beide e-Funktion bewegen sich mit c

in dispersive Materialien sind sie aber nicht gleich

↳ Geschwindigkeit von der Frequenz abhängig

Gruppengeschwindigkeit → Envelope $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

Phasengeschwindigkeit → Träger $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$

Intensität

$$I(r) = |\langle S(r,t)\rangle| \longrightarrow \text{Fernfeld: } I(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\langle E \cdot E\rangle$$

Zeitmittelung

Arbeit pro Zeiteinheit die an einer Ladung q verrichtet wird.

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = \overset{I_q}{q\vec{v}\vec{E}} + \underbrace{q\vec{v}(\vec{v}\times\vec{B})}_{=\vec{v}\times\vec{v}\cdot\vec{B}} - \int j \cdot E \, dV = \sigma \int E\cdot E \, dV$$

↳ $q\vec{E} + q(\vec{v}\times\vec{B})$

j: $qv\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

=> Magnetfelder verrichten keine Arbeit (nicht möglich da keine Ladung)

falls Strom induziert ist

$j = \sigma E$

σ: Leitfähigkeit

Beispiel Monochromatisches Feld

$$\vec{E}(r,t) = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}(r)e^{-i\omega t}\right\} = \vec{E}'\cos(\omega t) + \vec{E}''\sin(\omega t)$$

Sei $\vec{E} = \vec{E}' - i\vec{E}''$

↳ zwei Quadraturen

$$\rightarrow \langle\vec{E}\cdot\vec{E}\rangle = E'E'\langle\cos^2(\omega t)\rangle + E'E''\langle\cos(\omega t)\sin(\omega t)\rangle + E''E'\langle\cos(\omega t)\sin(\omega t)\rangle$$

$$+ E''E''\langle\sin^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}E'E' + \frac{1}{2}E''E'' = \frac{1}{2}|E(r)|^2$$

$$\boxed{I(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,|E(r)|^2}$$ Intensität für monochromatische Felder

$\vec{E}_0 e^{ik\cdot r}\cdot(\vec{E}_0 e^{ik\cdot r})^* = \vec{E}_0\,\vec{E}_0^* = |E_0|^2$

$$\boxed{I(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,|E_0|^2}$$ Intensität für ebene Wellen

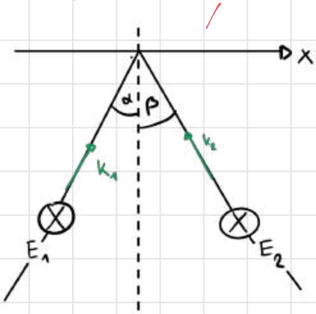
$$\vec{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y)-\gamma}\cdot(\vec{E}_0\, e^{i(k_x x+k_y y)-\gamma})^* = \vec{E}_0\cdot\vec{E}_0^*\, e^{-2\gamma}$$

$$\boxed{I(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,|E_0|^2 e^{-2k_z z}}$$ Intensität einer evaneszente Welle (ortsabhängig)

Mit zwei Feldern

$$I(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\langle[E_1+E_2]\cdot[E_1+E_2]\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[\langle E_1\cdot E_1\rangle + \langle E_2\cdot E_2\rangle + 2\langle E_1\cdot E_2\rangle\right]$$
$$= \boxed{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[\frac{1}{2}|E_1|^2 + \frac{1}{2}|E_2|^2 + \mathrm{Re}\{E_1\cdot E_2^*\}\right]}$$ Intensität für zwei Felder
$$= I_1 + I_2 + 2I_{12}$$

Beispiel: Zwei Ebene Wellen mit gleicher Frequenz



$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underbrace{\vec{E}_1(r)}_{E_{10}e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}}}\, e^{-i\omega t}\},\quad \vec{E}_2(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underbrace{\vec{E}_2(r)}_{E_{20}e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}}}\, e^{-i\omega t}\}$$

$$k_1 = k\begin{bmatrix}\sin\alpha\\0\\\cos\alpha\end{bmatrix}\qquad k_2 = k\begin{bmatrix}-\sin\beta\\0\\\cos\beta\end{bmatrix}$$

Bei $z=0$:

$$= \mathrm{Re}\{E_1\cdot E_2^*\} = |E_{10}||E_{20}|\,\mathrm{Re}\{e^{ikx(\sin\alpha-\sin\beta)+i(\phi_1-\phi_2)}\}$$

E_1: $\vec{E}_{10}e^{ik\sin\alpha\, x - i\omega t}$, $\vec{E}_{10} = |E_{10}|e^{i\phi_1}$

E_2^*: $(\vec{E}_{20}e^{-ik\sin\beta\, x - i\omega t})^*$, $\vec{E}_{20} = |E_{20}|e^{i\phi_2}$

$$= \boxed{E_{10}E_{20}\cos(kx(\sin\alpha-\sin\beta)+\Delta\phi)}$$

→ Intensität osziliert bei der x-Achse

$$\boxed{I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(kx(\sin\alpha - \sin\beta) + \Delta\phi\right)}$$

Mass für Kohärenz: $\boxed{\eta = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}}$

Bsp 2 $\vec{E}_1 = \vec{E}_{10}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{ikz}$ $E_2 = \vec{E}_{20}\begin{bmatrix} \cos\phi\cos\alpha \\ \sin\phi \\ -\cos\phi\sin\alpha \end{bmatrix} e^{ik(x\sin\alpha + z\cos\alpha + \Delta z)}$

Ursprung von E_2 verschieben verschiebt Interferenz

$\Rightarrow z = 0$ $|E(x)|^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\sin\phi\cos(kx\sin\alpha - k\Delta z)$

$\left(I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}|E(x)|^2\right)$

falls $\phi = 0$ (E_1 hat ja $\phi = \frac{\pi}{2}$)
keine Interferenz

Vorlesung 6

Wiederholung

- Wellengleichung im Vakuum $\boxed{\nabla^2 \underline{E}(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{E}(r,t) = 0}$
- Helmholtzgleichung im Vakuum $\boxed{\nabla^2 \underline{E}(r) + k^2\underline{E}(r) = 0}$
  wobei $\underline{E}(r,t) = Re\{\underline{E}(r)e^{-i\omega t}\}$ → nur eine Frequenz
  → Maxwell'sche Gl → Frequenz ändert sich nicht linear
- Dispersionsrelation im Vakuum $\boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \underline{k}}$
- Ebene Wellen $\boxed{\underline{E}(r) = \underline{E}_0 e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}}}$
- Intensität $\boxed{I(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\langle E(r,t)\cdot E(r,t)\rangle}$

  → für monochromatische Felder $\boxed{I(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}|E(r)|^2}$

Nachtrag zur Kohärenz

Van Cittert-Zernike Theorem: In grossen Abstand von einer inkohärenten Quelle ensteht Kohärenz.

Kohärenzlänge: $\boxed{d \sim \frac{\lambda L}{a}}$

Abstand (L)

Grösse der Quelle (a)

Heutige Frage: Wie lauten die konstituirenden Relationen im Frequenzraum?

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P} \quad , \quad B = \mu_0 [H + M]$$

$$\Rightarrow D(r,t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d^3 r' = \int_{-\infty}^{0} dt' \, \tilde{\varepsilon}(r-r', t-t') \, E(r', t')$$

↳ linear

↳ nicht lokal, zeitlich und örtlich

Im Fourier-Raum wird aus Faltung Produkt:

$$\rightarrow \hat{D}(k,\omega) = \varepsilon_0 \, \varepsilon(\omega) \, \hat{E}(k,\omega)$$

$$\hat{B}(r,\omega) = \mu_0 \mu(\omega) \, \hat{H}(r,\omega)$$

Abstand zwischen Atomen kleiner als Wellenlänge in der Praxis (nicht für z.B. Gammastrahlen) → lokal örtlich

Alternativ: Suszeptibilitäten

$$P(r) = \varepsilon_0 \chi_e(r,\omega) E(r)$$

$$M(r) = \chi_m(r,\omega) H(r)$$

Komplexe Permittivität

$$\nabla \times \underline{H}(r) = -i\omega \underline{D}(r) + j_0(r)$$

$$= -i\omega \varepsilon_0 \underbrace{[\varepsilon' + i\varepsilon'']}_{\varepsilon} \vec{E} + \vec{j}_0(r) \qquad \underbrace{\omega \varepsilon_0 \varepsilon''}_{\sigma} \vec{E} =: \vec{j}_{cond}$$

σ → Leitfähigkeit

Realteil vs Imaginäteil

↳ Reaktion (Polarisation)

↳ Verluste (Widerstand)

Wellengleichung in homogenen (dispersiven) Medien

$(j=0,\ \rho=0)$

$$\nabla \times \underline{H} = -i\omega \underline{D}$$

$$\nabla \times \nabla \times \underline{H} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \nabla \times \vec{E} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon(i\omega\vec{B}) = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \vec{H}$$

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c} \qquad \boxed{k = \frac{\omega}{c}\underbrace{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$$

Brechungsindex

$$\nabla(\underbrace{\nabla \cdot H}_{=0}) - \nabla^2 H \Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{H} + k\vec{H} = 0}$$

↳ Helmholtzgleichung

oder $k^2 = k_0^2 \varepsilon\mu$

Beispiel: Skin Effekt in Metalle

Falls $\sigma \gg |\omega\varepsilon_0\varepsilon'| \Rightarrow \varepsilon'' \gg |\varepsilon'|$

$\Rightarrow$ Polarisationsstrom kann ignoriert werden

$\Rightarrow k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mu\varepsilon \approx i\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\left(\frac{\mu\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)$

$\Rightarrow \nabla^2 E(r) + i\omega\sigma\mu_0\mu E(r) = 0 \Rightarrow$ gleich für $j = \sigma E$

j nur in x-Richtung

$$\Rightarrow \partial_x^2 j + i\omega\sigma\mu_0\mu j = 0$$

$$z = i\sqrt{i} = i^{\frac{3}{2}}$$

$$z^2 = i^3 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$z = \pm e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$j(x) = j_0\, e^{\pm i\sqrt{i\omega\sigma\mu_0\mu}\,x}$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\omega\sigma\mu_0\mu} := \omega_0$$

$$= j_0\left[e^{\pm\omega_0} e^{\mp\omega_0 i x}\right]$$

$$\overset{\text{Realteil}}{=} j_0\, e^{\pm\omega_0 x}\cos(\mp\omega_0 x)$$

$$\overset{\text{Energieerhaltung}}{=} j_0\, e^{-\omega_0 x}\cos(\omega_0 x) = j_0\, e^{-x/D_s}\cos(x/D_s)$$

Skintiefe $\boxed{D_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0\mu}}} = \frac{1}{\omega_0}$

↳ Feld des Materials löscht das Ursprungsfeld wieder aus.

↳ für hohe $\omega \Rightarrow$ tiefe $D_s \Rightarrow$ Strom nur an Oberfläche

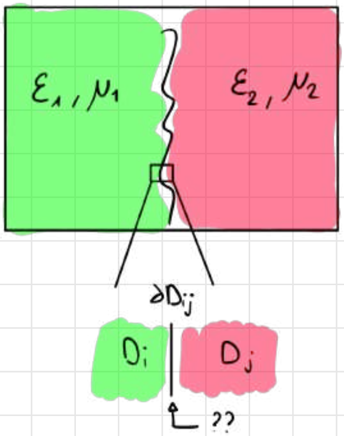
$\Rightarrow$ höherer Widerstand

Vorlesung 7

Felder an Grenzflächen

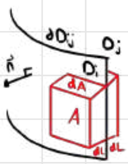
$\nabla^2 E(r) + k_1^2 E(r) = 0$

$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mu_1 \varepsilon_1$



$\nabla^2 E(r) + k_2 E(r) = 0$

$k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mu_2 \varepsilon_2$

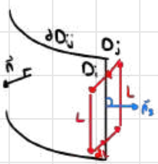


$$\underbrace{A\,dL\,\rho_i(r) + A\,dL\,\rho_j(r)}_{\int_V \rho_0(r)\,dV} \to \rho_i = \frac{\partial q_i}{dL\,dA} \to A\frac{d(q_i+q_j)}{dA} = A\sigma$$

$\to$ Oberflächenladungsdichte

$$\int_V \rho_0(r)\,dV = \underbrace{\int_{\partial V} D(r)\cdot n\,da}_{A[\vec{n}\cdot D_i(r)] - A[\vec{n}\cdot D_j(r)]} \quad dL \to 0$$

$$\to \boxed{\vec{n}\cdot(\vec{D}_i(r) - \vec{D}_j(r)) = \sigma(r)} \quad r \in \partial D_{ij}$$



$$\underbrace{\int_{\partial A} E(r)\,ds}_{L[\vec{n}\times E_i(r)]\cdot\vec{n}_s - L[\vec{n}\times E_j(r)]\cdot\vec{n}_s} = i\omega \overbrace{\int_A B(r)\cdot n_s\,da}^{0 \;\; dL\to 0} \quad dL \to 0$$

$n \times n_s \to$ Richtung von L

$L(n \times n_s)E$
$= L(n \times E)\cdot n_s$

$$\Rightarrow \boxed{n \times [E_i(r) - E_j(r)] = 0} \quad r \in \partial D_{ij}$$

Analog: $\boxed{n \cdot [B_i(r) - B_j(r)] = 0}$

Oberflächenstromdichte K

aber $\int_{\partial A} H(r)\,ds = \int_A [j_0(r) \underbrace{- i\omega D(r)}_{0 \;\; dL\to 0}]\cdot n_s\,da$

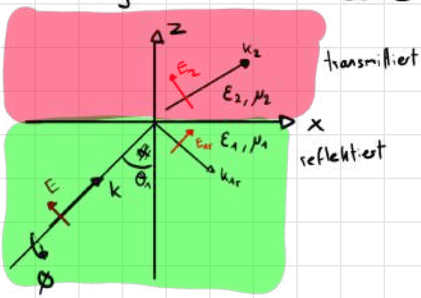
$$\boxed{n \times [H_i(r) - H_j(r)] = K(r)} \qquad r \in \partial D_{ij}$$

Falls keine primäre Quelle $\to \sigma = 0,\ K = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B_i^{\perp} = B_j^{\perp},\quad D_i^{\perp} = D_j^{\perp},\quad E_i^{\parallel} = E_j^{\parallel},\quad H_i^{\parallel} = H_j^{\parallel}}$$

s- und p- Polarisation

Erinnerung:

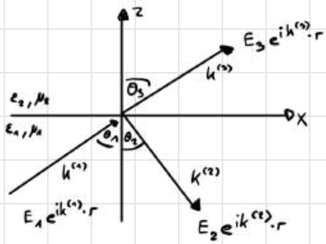


Ebene Welle $\quad E(r) = E_0 \begin{bmatrix} \cos\phi \cos\theta_1 \\ \sin\phi \\ -\cos\phi \sin\theta_1 \end{bmatrix} e^{ik(x \sin\theta_1 + z\cos\theta_1)}$

p - Polarisation $\quad \phi = 0 \quad \to \quad E^{(p)}$

s - Polarisation $\quad \phi = \pi/2 \quad \to \quad E^{(s)}$

$$E = \cos\phi\, \underbrace{E^{(p)}}_{\begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ 0 \\ -\sin\theta_1 \end{bmatrix}} + \sin\phi\, \underbrace{E^{(s)}}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$



Kontinuität von $k^{\parallel}$

$\Rightarrow$ Wellenvektor : $\underline{k} = \underline{k}_{\parallel} + k_z n_z \qquad \underline{k}_{\parallel} = (k_x, k_y, 0)$

Randbedingung bei $z = 0$ für $E_{\parallel}$:

$$[n \times E_1]\, e^{ik_{\parallel}^{(1)} \cdot r_{\parallel}} + [n \times E_2]\, e^{ik_{\parallel}^{(2)} \cdot r_{\parallel}} = [n \times E_3]\, e^{ik_{\parallel}^{(3)} \cdot r_{\parallel}}$$

$\to$ muss linear abhängig sein

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_{\parallel}^{(1)} = k_{\parallel}^{(2)} = k_{\parallel}^{(3)}}$$ (Translationsinvarianz / Impulserhaltung)

s Polarisation

$$E_1(r,t) = \mathrm{Re}\left\{ E_1 e^{i(k_x x + k_{z_1} z - \omega t)} \right\}$$
$$E_{1r}(r,t) = \mathrm{Re}\left\{ E_{1r} e^{i(k_x x + k_{z_1} z - \omega t)} \right\}$$
$$E_2(r,t) = \mathrm{Re}\left\{ E_2 e^{i(k_x x + k_{z_2} z - \omega t)} \right\}$$

$k_y y = 0$
Lok in der xz-Ebene

$$\rightarrow E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ E_1^{(s)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_{1r} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{1r}^{(s)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ E_2^{(s)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{\omega \mu_0 \mu} [k \times E]$$

$$\Rightarrow H_1 = \frac{1}{Z_1} \begin{bmatrix} -(k_{z_1}/k_1) E_1^{(s)} \\ 0 \\ (k_x/k_1) E_1^{(s)} \end{bmatrix}, \quad H_{1r} = \frac{1}{Z_1} \begin{bmatrix} (k_{z_1}/k_1) E_{1r}^{(s)} \\ 0 \\ (k_x/k_1) E_{1r}^{(s)} \end{bmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{Z_2} \begin{bmatrix} -(k_{z_2}/k_2) E_2^{(s)} \\ 0 \\ (k_x/k_2) E_2^{(s)} \end{bmatrix}$$

wobei $Z_i = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_i}{\varepsilon_0 \varepsilon_i}}$

$$E_i^{\parallel} = E_j^{\parallel} \Rightarrow E_1^{(s)} + E_{1r}^{(s)} = E_2^{(s)}$$

$$H_i^{\parallel} = H_j^{\parallel} \Rightarrow Z_1^{-1}\left[-(k_{z_1}/k_1) E_1^{(s)} + (k_{z_1}/k_1) E_{1r}^{(s)}\right] = Z_2^{-1}\left[-(k_{z_2}/k_2) E_2^{(s)}\right]$$

$\Rightarrow$ Matrix form
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ k_{z_1}/k_1 & \frac{Z_1}{Z_2}\frac{k_{z_2}}{k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1r}^{(s)}/E_1^{(s)} \\ E_2^{(s)}/E_1^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ k_{z_1}/k_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{E_2^{(s)}}{E_1^{(s)}} = 2\frac{k_{z_1}}{k_1}\left(\frac{k_{z_1}}{k_1} - \frac{Z_1}{Z_2}\frac{k_{z_2}}{k_2}\right)^{-1} = \boxed{\frac{2 k_{z_1} \mu_2}{\mu_2 k_{z_1} + \mu_1 k_{z_2}} = t^s(k_x, k_y)}$$

$$\boxed{r^s(k_s, k_y) = \frac{\mu_2 k_{z_1} - \mu_1 k_{z_2}}{\mu_2 k_{z_1} + \mu_1 k_{z_2}}} \qquad \boxed{r^s = t^s - 1}$$

↳ Falls komplex: Amplituden und Phasenänderung

$$k_1 \cdot k_1 = \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2(\omega), \quad k_2 \cdot k_2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2(\omega)$$

$$k_{x_1} = k_{x_2} \equiv k_x, \quad k_{z_1} = \sqrt{k_1^2 - k_x^2}, \quad k_{z_2} = \sqrt{k_2^2 - k_x^2}$$

$$k_x = k_1 \sin\theta_1 \begin{cases} k_{z_1} = k_1 \cos\theta_1 \\ k_{z_2} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta_1} \end{cases}$$

---

p-Polarisation

$$\boxed{r^p(k_x,k_y) = \frac{\varepsilon_2 k_{z1} - \varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}}}$$

$$\boxed{t^p(k_x,k_y) = \frac{2\,\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}} \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2}}}$$

Achtung: für $\theta_1 = 0 \rightarrow r^s = -r^p$

Brewster Winkel

$k_{z1} = k_1 \cos\theta_B \quad , \quad k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta_B}$

$\left(k_1 = \frac{\omega}{c} n_1 \quad , \quad k_2 = \frac{\omega}{c} n_2\right)$

existiert ein Winkel, für den nichts reflektiert wird

$\rightarrow r^p = 0 \ , \ r^s = 0$

$\rightarrow \varepsilon_2 k_{z1} = \varepsilon_1 k_{z2} \quad , \quad \mu_2 k_{z1} = \mu_1 k_{z2}$

↳ kann man nicht erfüllen

im sichtbaren Bereich sind Materialien unmagnetisch $\mu_1 = \mu_2 = 1$

↳ durch Rotation von Ladungen (passiert im GHz Bereich)

$\varepsilon_2^2 \cancel{\varepsilon_1} \cos^2\theta_B = \cancel{\varepsilon_1}^2 (\underset{\sin^2\theta_B + \cos^2\theta_B}{\varepsilon_2} - \cancel{\varepsilon_1} \sin^2\theta_B)$

Sei $\varepsilon_1 = 1$

Bsp. H_2O : $n = 1.35 \rightarrow \theta_B = 53°$

SiO_2 : $n = 1.5 \rightarrow \theta_B = 56°$

$\rightarrow \varepsilon_2(\varepsilon_2 - 1)\cos^2\theta_B = (\varepsilon_2 - 1)\sin^2\theta_B$

$\boxed{\tan\theta_B = \sqrt{\varepsilon_2} = n} \ , \quad \theta_B = \arctan(\sqrt{\varepsilon_2})$

↳ ist nur s polarisiert

→ Licht von z.B Wasser reflektiert → grösstenteils S-polarisiert

→ polarisierende Brillen (hohe k_{z2})

↳ vertikal Polarisierte Brillen lässt vertikal nicht durch

Totalreflexion

Frensel + Dispersionsrelation + Stetigkeit von $k^{\parallel}$

Einfallswinkel $k_x = k_1 \sin\theta_1 \rightarrow k_{z_1} = k_1 \cos\theta_1$ $\quad k_{z_2} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta_1}$

$$= k_2 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sin^2\theta_1}$$

Verlustfreie Materialien: $k_{z_2} = k_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1}$

$$\frac{n_1}{n_2} = \tilde{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}}$$

$\tilde{n} < 1 \rightarrow k_{z_2}$ reell $\rightarrow$ ebene Wellen

$\tilde{n} > 1 \rightarrow k_{z_2}$ imaginär $\rightarrow$ evaneszente Welle

Kritischer Winkel $\Rightarrow 1 - \tilde{n}^2 \sin^2\theta_1 = 0$

$$\sin\theta_1 = \frac{1}{\tilde{n}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\theta_c = \arcsin\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}$$

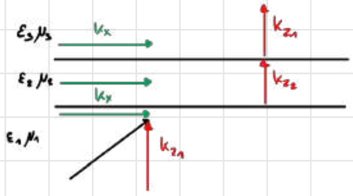
z.B Glas $\rightarrow$ Luft $\quad \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = 2.25 \quad \rightarrow \theta_c = 41.8°$

$\hookrightarrow$ für alle Winke $> \theta_c$

$\rightarrow$ Totalreflexion

Vorlesung 8

Frustierte Totalreflexion



k_x ist stetig

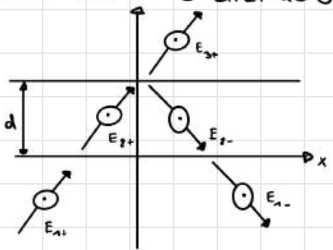
$$k_{z_i} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\mu_i \varepsilon_i - k_x^2}$$

Falls $3 = 1 \Rightarrow k_{z_1} = k_{z_3}$

Ebene Welle rein $\rightarrow$ gleiche Welle wiede raus, Spaltgrösse egal

Alg: Pro unbekannte eine Gleichung $\rightarrow$ Gauss-Elimination auch für n Grenzflächen

Bsp



$$E_{1+}(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{1+} \\ 0 \end{bmatrix} e^{ik_x x + ik_z z}$$

$$E = \begin{cases} E_{1+} + E_{1-} & z < 0 \\ E_{2+} + E_{2-} & 0 < z < d \\ E_{3+} & z > d \end{cases} \Rightarrow \text{Gleichungen für Randbedingungen}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\underbrace{H\cdot(\nabla\times E)-E\cdot(\nabla\times H)}_{\nabla\cdot(E\times H)}=-H\frac{\partial B}{\partial t}-E\frac{\partial D}{\partial t}-j_0E$$

$$\boxed{\int_{\partial V}(E\times H)\,n\,da=-\int_V\left[H\cdot\frac{\partial B}{\partial t}+E\cdot\frac{\partial D}{\partial t}+j_0E\right]dV}$$

John Poynting / Oliver Heaviside (1883):

$$\int_{\partial V}\underbrace{(E\times H)}_{S}\cdot n\,da+\frac{\partial}{\partial t}\int_V\frac{1}{2}\overbrace{[D\cdot E+B\cdot H]}^{w}dV$$

w → Energiedichte

S → Ausbreitungsrichtung der Energie

$$=-\int_V j_0\,dV-\frac{1}{2}\int_V\left[E\cdot\frac{\partial P}{\partial t}-P\frac{\partial E}{\partial t}\right]dV-\frac{\mu_0}{2}\int_V\left[H\cdot\frac{\partial M}{\partial t}-M\frac{\partial H}{\partial t}\right]dV$$

⇒ ist ein Erhaltungssatz

Energiefluss und Intensität

→ zeitliches Mittel der obigen Gleichung

$$\langle S(r)\rangle=\langle E(r,t)\times H(r,t)\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{E(r)\times H^*(r)\}$$

Allg.: $\langle\frac{\partial}{\partial t}f(t)\rangle=\langle\frac{\partial}{\partial t}f_{AC}(t)\rangle+\langle\frac{\partial}{\partial t}f_{DC}(t)\rangle=0$

f_{AC}: zeitlich variabel aber ohne Mittelwert → $\langle\ \rangle=0$

f_{DC}: zeitlich Konstant/ Mittelwert $\frac{\partial}{\partial t}=0$

Bem: $\frac{\partial P}{\partial t}$ Polarisierungsstrom
→ durch das E-Feld induziert
$\frac{\partial M}{\partial t}$ Magnetisierungsstrom

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{\partial V}[E\times H^*]\cdot n\,da=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_V j\cdot E^*\,dV$$

j → $j_0+j_{pol}+j_{mag}$

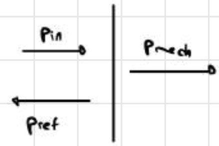
Def $\boxed{I(r)=|\langle S(r)\rangle|}$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\int_{\partial V}\langle\vec{S}\rangle\cdot\vec{n}\,da=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\vec{j}\cdot\vec{E}\,dV}$$

Gesamtleistung $\boxed{\bar{P} = \int_{\partial V} \langle S(r) \rangle \cdot n \, da = \int_{\partial V} I(r) \, da}$

Fernfeld (Ebene Welle) $\langle S(r) \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_i} |E(r)|^2 n_r$

Impulserhaltung & Strahlungsdruck



Impuls: $\underbrace{\int_{\partial V} \overleftrightarrow{T} \cdot n \, da}_{\varepsilon_0 E E + \mu_0 H H - \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \overleftrightarrow{I}} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V g_{field} \, dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} g_{mech} \, dV$

$g_{field} \to \frac{1}{c^2}[E \times H]$ (dImpuls)

$g_{mech} \to \rho E + j \times B$

$P_{in} = P_{ref} + P_{mech}$

$P_{in} \to \frac{1}{c}\langle S \rangle$, $\quad P_{ref} \to -R \frac{1}{c}\langle S \rangle$

$\Rightarrow \boxed{P_{mech} = (1+R)\frac{1}{c}\langle S \rangle}$ $\quad R = |r|^2$

Elektromagnetischer Impuls $\boxed{p(r) = \frac{1}{c^2} \int_V \langle S(r) \rangle dV}$

$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2} \langle S \rangle dx dy \frac{dz}{dt} \longrightarrow c$

Strahlungsdruck $P = \frac{1}{c} \langle S \rangle$

$\Rightarrow$ Sattelitten benutzen diesen Strahlungsdruck

$x = \frac{1}{2} a t^2$, $\quad a \leftarrow P/mc$, $\quad P \leftarrow 1000 \frac{W}{m^2}$

Vorlesung 9

Lineare Netzwerke und Systeme

Wiederholung:

Allg. Wellengleichung $\nabla \times \nabla \times E + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(j_0 + \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \times M \right)$

Zeitharmonische Felder $E(r,t) = \mathrm{Re}\{ \underline{E}(r) e^{-i\omega t} \}$ gleich für j_0, P, M

Lineare, homogen Medien $\underline{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \underline{E}$, $\quad \underline{M} = \mu_0 (\mu - 1) \underline{H}$

Wellengleichung für komplexe Felder $\nabla \times \nabla \times \underline{E} - k^2 \underline{E} = i\omega\mu_0\mu j_0$

$\qquad \rightarrow \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu$

Lösung:

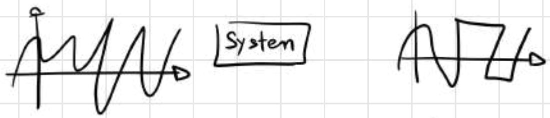
$$\Rightarrow \quad \underline{E}(r) = \underbrace{\underline{E}_0}_{\text{homogen Lösung}} + \underbrace{i\omega\mu\mu_0 \int_V \overleftrightarrow{G}(r,r')\, j_0(r')\, dV'}_{\text{partikuläre Lösung}} \qquad r \notin V$$

$r' \rightarrow j_0 \neq 0$

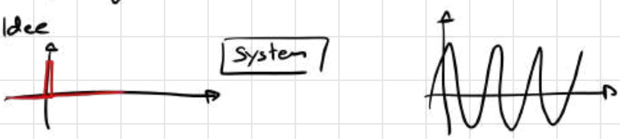
$r \rightarrow$ Anwort/Messpunkt

Für lineare Netzwerke:

Input Output



Idee



$\Rightarrow$ Fourier mit bekannten Input

$$F_0(\omega) = \underbrace{G(\omega)}_{\text{Übertragungs-Funktion}} F_i(\omega)$$

$\longrightarrow$ Jetzt kein System mehr, sondern unser Raum

3D-Fouriertranformation

$$\boxed{\hat{E}(k) = \hat{G}(k)\, \hat{j}(k)}$$

Lineare Diff. gleich $\quad g \longrightarrow \boxed{\mathbb{L}} \longrightarrow f$

$$\mathbb{L} f = g$$

Bsp: harmonischer Oszilator

$\mathbb{L} = \left[m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k \right]$

$g = F(t)$

$f = x(t)$

F wählen mit $F(t) = \tilde{F}_0\, \delta(t - t')$

In unseren Fall

$$\mathbb{L} = \left[\nabla \times \nabla \times + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]$$

$$g = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}$$

$$f = \vec{E}$$

g mit $g = \tilde{g}\, \delta(t-t')\, \delta(\vec{r}-\vec{r}')$

Greensche Funktion

$$\mathbb{L}\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \underline{\vec{B}}(\vec{r})$$

1) Stossantwort $\underset{\text{Richtung}}{\vec{n}}\, \delta(\vec{r}-\vec{r}')$ $\Rightarrow$ Vektorielle Anregung

Greensche Funktion

$$\mathbb{L}\, \overleftrightarrow{G}_i(\vec{r},\vec{r}') = \vec{n}_i\, \delta(\vec{r}-\vec{r}') \qquad i = x, y, z$$

$$\mathbb{L}\, \underbrace{\overleftrightarrow{G}_i(\vec{r},\vec{r}')}_{\left[(\vec{G}_x),(\vec{G}_y),(\vec{G}_z)\right]} = \underbrace{\overleftrightarrow{I}}_{\mathbb{1}_3 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\, \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\left[(n_x),(n_y),(n_z)\right]$$

$$\int_V \mathbb{L}\, \overleftrightarrow{G}(\vec{r},\vec{r}')\, \underline{\vec{B}}(\vec{r}')\, dV' = \underbrace{\int_V \overleftrightarrow{I}\, \delta(\vec{r},\vec{r}')\, \underline{\vec{B}}(\vec{r}')\, dV}_{\vec{B}(\vec{r})} \qquad \Big| \int_V \square\, B(\vec{r}')\, dV$$

auf r'   auf r

$\Rightarrow$ Austauschen nur falls $\vec{r} \notin V$

(falls E in $\vec{j}$)

$$\mathbb{L} \boxed{\underbrace{\int_V \overleftrightarrow{G}(\vec{r},\vec{r}')\, \underline{\vec{B}}(\vec{r}')\, dV'}_{= \vec{A}(\vec{r})}} = \underline{\vec{B}}(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ für die Wellengleichung

$$\underline{E}(r) = i\omega\mu_0\mu \int_V \overleftrightarrow{G}(r,r')\, j_0(r')\, dV'$$

wobei $\nabla \times \nabla \times \overleftrightarrow{G}(r,r') - k^2\, \overleftrightarrow{G}(r,r') = \overleftrightarrow{I}\, \delta(r-r')$

Bsp 1 Harmonischer Oszillator

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \qquad \mathcal{L}x = F \qquad \mathcal{L} = m\,d^2/dt^2 + k$$

Lösung $\quad x(t) = x_p(t) + A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{k/m}$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{G}(t,t') + k\,G(t,t') = \delta(t-t')$$

Lösung $\quad G(t,t') = \frac{1}{m\omega}\sin(\omega(t-t'))$

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t')\,G(t,t')\,dt'$$

Potenziale

Elektrostatik

$$\nabla\cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \nabla\times E = 0$$

$$\Rightarrow E = -\nabla\phi \quad \text{(def.)}$$

Poisson:

$$\nabla\cdot\nabla\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\boxed{\nabla^2\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho} \quad \text{und} \quad \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(r',t)}{|r-r'|}dV'$$

Analog für Magnetostatik

$$\boxed{\nabla^2 A = -\mu_0 j_0} \qquad A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{j(r',t)}{|r-r'|}dV'$$

mit $B = \nabla\times A$

---

1) $\nabla\cdot B = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\nabla\times() = 0 \Rightarrow B = \nabla\times A \quad \text{(def.)}$

2) $\nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\left[E + \frac{\partial}{\partial t}A\right] = 0$

$\Rightarrow \nabla\times\nabla() = 0 \Rightarrow E + \frac{\partial}{\partial t}A = -\nabla\phi \quad \text{(def.)}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E(r,t) &= -\frac{\partial}{\partial t}A(r,t) - \nabla\phi(r,t) \\ B(r,t) &= \nabla\times A(r,t)\end{aligned}}$$

$$E(r,t) = -\frac{\partial}{\partial t}\tilde{A} - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi} - \nabla\tilde{\phi} + \cancel{\nabla\frac{\partial}{\partial t}\chi} = -\frac{\partial}{\partial t}\tilde{A} - \nabla\tilde{\phi}$$

$\Rightarrow B(r,t) = \nabla\times\tilde{A}$

Bem: Eichfunktion $\chi(r,t)$: $\left.\begin{aligned} A &\to \tilde{A} + \nabla\chi \\ \phi &\to \tilde{\phi} - \frac{\partial\chi}{\partial t}\end{aligned}\right\}$ E, B bleiben unverändert

$\nabla\times A$ ist definiert $\nabla\cdot A$ nicht $\Rightarrow$ egal wie man $\nabla\cdot A$ wählt

3) $\nabla\times H = \frac{\partial D}{\partial t} + j_0 \qquad \left(H = \frac{1}{\mu_0}B - M \quad D = \varepsilon_0 E + P\right)$

$$\Rightarrow \nabla\times B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0\underbrace{\left[\nabla\times M + \frac{\partial P}{\partial t} + j_0\right]}_{j}$$

$$\rightarrow \underbrace{\nabla\times\nabla\times}_{\nabla^2-\nabla(\nabla\cdot)} A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} = \mu_0 j$$

$$\rightarrow \nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A = -\mu_0 j + \nabla\left[\nabla\cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]$$

$\nabla\cdot A$ geschickt wählen

$$= -\mu_0 j$$

4) $\nabla\cdot D = \rho_0$

$$\rightarrow \nabla\cdot\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\phi\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\rho_{pol} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_{pol}$$

Eichungen

Lorenz: $\nabla\cdot A = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\underline{A} &= -\mu_0 j\\ \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\phi &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\end{aligned}}$$

Coulomb: $\nabla\cdot A = 0$

$\rightarrow$ Quantum elelektrodynamics

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\underline{A} = -\mu_0 j$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$\hookrightarrow$ wie Poisson

Skalare Green'sche Funktion

Falls Strom und Feld gleiche Richtung $\overleftrightarrow{G}$ skalar

von der Lorenz Eichung $\square\,\underline{A} = -\mu_0 j$

$$\downarrow \begin{pmatrix}\square A_x\\ \square A_y\\ \square A_z\end{pmatrix} = -\mu_0\begin{pmatrix} j_x\\ j_y\\ j_z\end{pmatrix} \rightarrow \text{Skalare Diff. Gleichung}$$

$\Rightarrow$ umformen $\quad [\nabla^2 + k^2]\,\underline{A}(r) = -\mu_0\mu\,\underline{j}_0(r) \quad \Big| \quad [\nabla^2 + k^2]\,\underline{\phi}(r) = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho_0(r)$

$\rightarrow$ Green'sche Funktion:

$$\boxed{[\nabla^2 + k^2]\, G_0(r,r') = -\delta(r-r')}$$

$$\rightarrow \underline{A}(r) = \mu_0\mu\int_V G_0(r,r')\,\underline{j}_0(r')\,dV' \qquad \underline{\phi}(r) = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\int_V G_0(r,r')\,\underline{\rho}_0(r')\,dV'$$

Ansatz: $R\, G_0 = a_1 e^{ikR} + a_2 e^{-ikR}$ mit $R = r - r'$

$\hookrightarrow$ Kugelwelle

Einsetzen und über Volumen ΔV mit Radius r_0 um r' integrieren $\int_{\Delta V} \delta(r-r')dV = 1$

$$\underbrace{\int_{\Delta V} \nabla^2 \frac{1}{R} dV}_{\downarrow} + k^2 \underbrace{\int_{\Delta V} \frac{1}{R} dV}_{2\pi k^2 r_0^2} = \frac{-1}{a_1 + a_2} \quad \left(\int_{\Delta V} \frac{1}{R} dV = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{R} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dR = 2\pi r_0^2 \right)$$

$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot \nabla \frac{1}{R} dV = \int_{\partial\Delta V} \nabla \frac{1}{R} \vec{n}_R \, da = -\int_{\partial \Delta V} \frac{1}{R^2} da = -4\pi$$

wobei $\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\vec{n}_R}{R^2}$

für $r_0 \to 0$ $\quad a_1 + a_2 = \frac{1}{4\pi}$

Freier Raum $a_2 = 0$ $\Rightarrow$ $G_0(r, r') = \frac{e^{ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}$

Lösung anhand der Green'schen Funktion

$\nabla \times \nabla \times E - k^2 E = i\omega \mu_0 \mu j_0$

$E(r) = i\omega \mu_0 \mu \int_V \overleftrightarrow{G}(r, r') j_0(r') dV' \quad r \notin V$

Dyadische Green Funktion: $\nabla \times \nabla \times \overleftrightarrow{G}(r,r') - k^2 \overleftrightarrow{G}(r,r') = \overleftrightarrow{I} \delta(r-r')$

Skalare Green Funktion $\left[\nabla^2 + k^2\right] G_0(r, r') = -\delta(r-r')$

$\hookrightarrow \frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}$

$$\Rightarrow \boxed{\overleftrightarrow{G}(r,r') = \left[\overleftrightarrow{I} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right] G_0(r,r')}$$

Vorlesung 10

Herleitung:

$\underline{E}(r) = i\omega \underline{A}(r) - \nabla \underline{\phi}(r)$ $\qquad$ Lorenz: $\nabla \cdot A(r) = \frac{i\omega}{c^2} \phi(r)$

$$E(r) = i\omega\left[1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\right] \underline{A}(r) = i\omega\left[1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\right] \mu_0 \mu \int_V G_0(r, r') \underline{j_0}(r') dV'$$

$$\left(\underline{A}(r) = \mu_0 \mu \int_V G_0(r, r') j_0(r') dV' \right) \quad = i\omega \mu_0 \mu \int_V \left[1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\right] G_0 \underline{j_0} \, dV'$$

$$= i\omega\mu_0\mu \int_V \left[\overleftrightarrow{I} G_0(r,r') + \frac{1}{k^2} \nabla \Big(\underbrace{\nabla \cdot \big[G_0(r,r') \overleftrightarrow{I} \big]}_{\nabla G_0} \Big) \right] \underline{j}_0(r') dV'$$

$$= i\omega\mu_0\mu \int_V \left(\left[\overleftrightarrow{I} + \frac{1}{k^2} \nabla\nabla \right] G_0(r,r') \right] \underline{j}_0(r') dV'$$

wobei $\quad E(r) = i\omega\mu_0\mu \int_V \overleftrightarrow{G}(r,r') \underline{j}_0(r,r') dV'$

$$\Rightarrow \left[\overleftrightarrow{I} + \frac{1}{k^2} \nabla\nabla \right] G_0(r,r') = \overleftrightarrow{G}(r,r')$$

$$\vec{R}\vec{R} = \big((x-x') \;\; (y-y') \;\; (z-z') \big) \begin{pmatrix} (x-x') \\ (y-y') \\ (z-z') \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{G}(r,r') = \left[\overleftrightarrow{I} + \frac{1}{k^2} \nabla\nabla \right] \frac{e^{ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}$$

$$= \boxed{\frac{\exp(ikR)}{4\pi R} \left[\left(1 + \frac{ikR-1}{k^2R^2} \overleftrightarrow{I} + \frac{3-3ikR-k^2R^2}{k^2R^2} \frac{\vec{R}\vec{R}}{R^2} \right] } \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$= \overleftrightarrow{G}_{NF} + \overleftrightarrow{G}_{IF} + \overleftrightarrow{G}_{FF}$$

$\overleftrightarrow{G}_{NF} \to R^{-3} \to$ Nah feld

$\overleftrightarrow{G}_{IF} \to R^{-2} \to$ (Intermediate) Zwischen Feld

$\overleftrightarrow{G}_{FF} \to R^{-1} \to$ Fern feld

Dipolstrahlung

Punktstrom existiert in einem Punkt

$$\underline{j}_0(r,t) = q\vec{v}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{d}{dt}\vec{p}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \rightarrow \boxed{\underline{j}_0(\vec{r}) = -i\omega\underline{\vec{p}}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)}$$

Dipolmoment: $+q$, $-q$, s; $\vec{p} = q\vec{s}$, $q \to \infty$, $s \to 0$

komplex $\quad \underline{j}_0(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{ \underline{j}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \}$

$$= \mathrm{Re}\{ \underline{\vec{p}}\, e^{-i\omega t} \}$$

$$\underline{E}(r) = i\omega\mu_0\mu \int_V \overleftrightarrow{G}(r,r') \underline{j}_0(r') dV'$$

$$= \omega^2\mu_0\mu\, \overleftrightarrow{G}(r,r_0)\underline{\vec{p}}$$

Dipolfelder

$$\nabla\times\nabla\times E(r) - k^2 E(r) = i\omega\mu_0\mu\, \underbrace{\underline{j}_0(r)}_{} \qquad \underline{j}_0(r) \to -i\omega p\,\delta(r-r_0)$$

$\hookrightarrow \omega^2\mu_0\mu\, \overleftrightarrow{G}(r,r_0) p$

Bisher alles kartesisch $\rightarrow$ transformieren in sphärische Koordinaten

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_r \\ E_\vartheta \\ E_\varphi \end{bmatrix}}_{E^s(r)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & -\sin\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}}_{E(r)}$$

$$E^s(r) = \omega^2 \mu_0 \mu \, T \, \overleftrightarrow{G} p$$

+ transformation rechts

p in z-Richtung

$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$
$y = r\sin\vartheta\cos\varphi$
$z = r\cos\vartheta$

$$E_r = \frac{|p|\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\frac{2}{k^2r^2} - \frac{2i}{kr}\right]$$

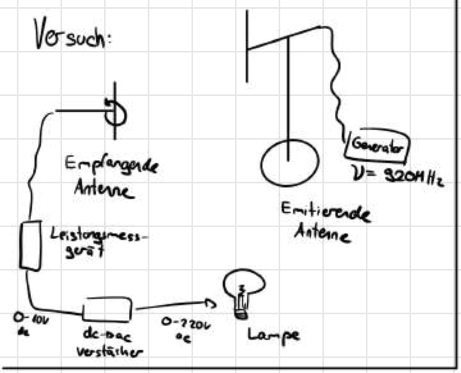
$$kr = 2\pi \frac{r}{\lambda}$$

⇒ E-Feld zwei Komponenten
H-Feld nur eine

⇒
$$E_\vartheta = \frac{|p|\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[\frac{1}{k^2r^2} - \frac{i}{kr} - 1\right]$$

$$H_\varphi = \frac{|p|\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\exp(ikr)}{r} k^2 \left[-\frac{i}{kr} - 1\right] \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}$$

Versuch:



Leistung

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\int_{\partial V} \mathrm{Re}\left\{E(r) \times H^*(r)\right\} n \, da$$

$R = |r - r'| = r$ falls $r' = 0$

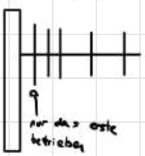
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Re}\left\{E \times H^*\right\} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \frac{|p|^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{n^3\omega^4}{3c^3}$$

$$\frac{\bar{P}(\vartheta,\varphi)}{\bar{P}} = \frac{3}{8\pi}\sin^2\vartheta$$

Multi-Element Antenen

λ-Halb Antene (für eine Frequenz)
↳ Dem meisten Abstrahlung wenn die länge der Antenne eine halbe Wellenlänge ist.



→ Induktion in den anderen
Interferenz führt zu gezielte Strahlung

Vorlesung 11

Dipolstrahlung in inhomogenen Räumen

Energieerhaltung $\displaystyle \int_{\partial V} \overbrace{(E \times H)}^{S} \cdot n \, da + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\overbrace{[D\cdot E + B\cdot H]}^{W} dV = -\int_V j \cdot E \, dV$

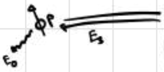
$$\bar{P} = \int_{\partial V} \langle S(r) \rangle \cdot n \, da = \underbrace{-\frac{1}{2}\int_V \mathrm{Re}\left\{j^*(r)\cdot E(r)\right\} dV}_{\text{Arbeit am Dipol}}$$

mit $j(r) = -i\omega p\,\delta(r - r_0)$ → $\displaystyle \bar{P} = \frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\left\{p^* \cdot E(r_0)\right\}$

$$= \frac{\omega^3|p|^2}{2c^2\varepsilon_0\varepsilon}\left[n_p \cdot \mathrm{Im}\left\{\overleftrightarrow{G}(r_0, r_0; \omega)\right\} \cdot n_p\right]$$

(Dipol in z Richtung)

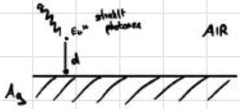
in beliebigen Umgebungen



$$E(r_0) = E_0(r_0) + E_s(r_0)$$

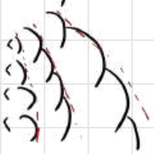
$$\frac{\overline{P}}{P_0} = 1 + \frac{6\pi\varepsilon_0\varepsilon}{|p|^2}\frac{1}{k^3}\,\mathrm{Im}\left\{p^* \cdot E_s(r_0)\right\}$$

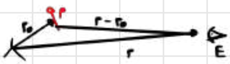
Bsp Atome an Grenzfläche



Frauenhofen Approximation

Phased-array Antenen





$$|r - r_0|^2 = |r|^2 - 2|r||r_0|\cos\theta + |r_0|^2$$

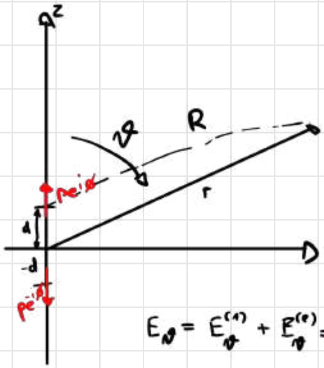
$$\rightarrow |r - r_0| = |r|\sqrt{1 - 2\cos\theta\frac{|r_0|}{|r|} + \frac{|r_0|^2}{|r|^2}} \qquad r_0 << r$$

$$\approx |r| - \cos\theta\,|r_0| = |r| - \frac{r \cdot r_0}{|r|} \qquad \text{Taylor}$$

$$\rightarrow \text{Sei} \quad E_i(r, r_0) = |E_i(r, r_0)|\, e^{i\arg(E_i(r, r_0))}$$

$$\text{im FF} \quad = |E_i(r, r_0)|\, e^{ik|r - r_0|}$$

$$\approx |E_i(r, 0)|\, e^{ik\left(|r| - \frac{r_0 \cdot r}{|r|}\right)} \qquad \text{Frauenhofer}$$



$$E_\vartheta^{(1)} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p e^{i\phi} \sin\vartheta \, \frac{e^{ikR \leftarrow r - d\cos\vartheta}}{R}$$

$$E_\vartheta^{(2)} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p e^{-i\phi} \sin\vartheta \, \frac{e^{ik(r + d\cos\vartheta)}}{r}$$

$$E_\vartheta = E_\vartheta^{(1)} + E_\vartheta^{(2)} = \boxed{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \sin\vartheta \frac{1}{r} e^{ikr} \underbrace{\left[e^{-i(kd\cos\vartheta - \phi)} + e^{i(kd\cos\vartheta - \phi)}\right]}_{2\cos(kd\cos\vartheta - \phi)}}$$

$$\rightarrow \text{max wenn} \quad kd\cos\vartheta - \phi = 0$$

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{\phi}{kd}\right)$$

↳ dort ein max wo nötig

→ Phase ändern d oft Halbe Wellenlänge

Quellen mit beliebiger Zeitabhängigkeit

(bisher monochromatisch)

$$\underline{A}(r) = \mu_0 \int_V G_0(r, r') \, j_0(r') \, dV'$$

$$\left.\begin{aligned} j_0(r,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{j}_0(r,\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ A(r,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(r,\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}\right\} \text{Fourier}$$

→ gilt das Gleiche $\hat{A}(r,\omega) = \mu_0 \int_V \hat{G}_0(r, r', \omega) \, \hat{j}_0(r',\omega) \, dV'$

↳ $\dfrac{\exp(ik|r-r'|)}{4\pi |r-r'|}$

schwierig integrierbar mit verschiedenen Medien → Faltung

$$A(r,t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_V G_0(r, r', t) * j_0(r', t) \, dV'$$

$$G_0(r, r', t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|r-r'|}}{|r-r'|} e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dx = 2\pi \, \delta(y)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\delta[t - R/c]}{R} \qquad R = |r-r'|$$

↳ Falls $t = \frac{R}{c}$ $\quad G_0 = \frac{1}{2R}$

$$\Rightarrow A(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_0(r', t - R/c)}{R} dV' \qquad \phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_0(r', t - R/c)}{R} dV'$$

$\nabla^2 \to \nabla^2 - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$t \to t - R/c$

Lorentz'sches Spektrum

endliche Signale

$$p(t) = p_0 \cos(\omega_0 t) e^{-\Gamma_0/2 \cdot t} \qquad t > 0$$

$$= \frac{p_0}{2} \left[e^{(i\omega_0 - \Gamma_0/2)t} + e^{(-i\omega_0 - \Gamma_0/2)t} \right]$$

Fourier: $\hat{p}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} p(t) e^{i\omega t} dt$

$$= \frac{p_0}{4\pi} \int_0^{\infty} e^{(i(\omega+\omega_0) - \Gamma_0/2)t} + e^{(i(\omega-\omega_0) - \Gamma_0/2)t} dt$$

$$= -\frac{p_0}{4\pi} \left(\frac{1}{i(\omega-\omega_0) - \Gamma_0/2} + \frac{1}{i(\omega+\omega_0) - \Gamma_0/2} \right)$$

Fernfeld: $\hat{E}_\vartheta(\omega) = -\hat{p}(\omega) \dfrac{\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{e^{i\omega r/c}}{r} \dfrac{\omega^2}{c^2}$

$$\Rightarrow \quad \hat{E}_\vartheta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{|p| \sin\vartheta\, \omega_0^2}{8\pi\varepsilon_0 c^2 r} \left[\frac{\exp(i\omega r/c)}{i(\omega+\omega_0) - \gamma_0/2} + \frac{\exp(i\omega r/c)}{i(\omega-\omega_0) - \gamma_0/2} \right]$$

Energie: $$W = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\int_{\partial V} \underset{E\times H}{S(r,t)} \cdot n \, da \Big] dt = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\partial V} |E_\vartheta(r,t)|^2 da \, d\omega$$

(Satz von Parseval) $$= 2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\partial V} |\hat{E}_\vartheta(r,\omega)|^2 da \, d\omega$$

Koordinatenwechsel + Symetrie $$= 4\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |\hat{E}_\vartheta(r,\omega)|^2 r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\phi \, d\omega$$

Energiespektrum: $$\frac{dW}{d\Omega \, d\omega} = 4\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |E_\vartheta(r,\omega)|^2 r^2$$

klein für $\omega > 0$

$\measuredangle$ 180

$(d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\phi)$ $$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_0^2 \sin^2\vartheta}{16\pi^2 c^3} \omega^4 \left| \frac{1}{i(\omega-\omega_0) - \gamma_0/2} + \frac{1}{i(\omega+\omega_0) - \gamma_0/2} \right|^2$$

$$\approx \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_0^2 \sin^2\vartheta \, \omega^4}{16\pi^2 c^3} \frac{\gamma_0^2/4}{(\omega-\omega_0)^2 + \gamma_0^2/4}}$$

für $\gamma_0 = 0$ (monochromatisch) kriegt man eine delta Funktion

Ausdruck integrieren:

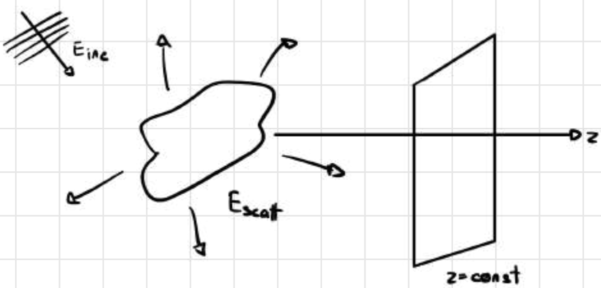
Gesamtenergie $$\boxed{W = \frac{|p|^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\omega_0^4}{3c^3 \gamma_0} = \bar{P}/\gamma_0}$$

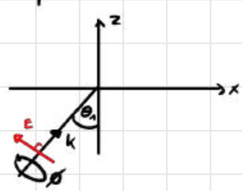
Vorlesung 12

Feldwinkelspektrum

$$E(r,t) = \mathrm{Re}\{ \underline{E}(r) \, e^{-i\omega t} \}$$

recap



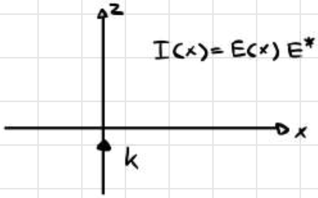


$$E(r) = E_0 \begin{bmatrix} \cos\phi \cos\theta_1 \\ \sin\phi \\ -\cos\phi \sin\theta_1 \end{bmatrix} e^{ik[x\sin\theta_1 + z\cos\theta_1]}$$

$\phi = \pi/2$ (s-polarisiert) & $z = 0$

$$E(x, z=0) = E_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{ikx \sin\theta_1} \qquad E' = E_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{ikx \sin(-\theta_1)}$$

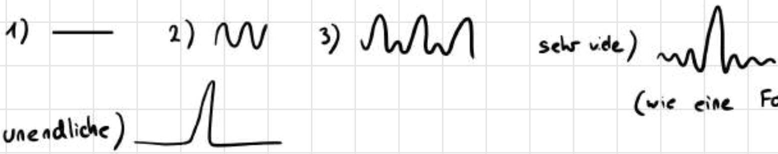
$\theta_1 = 0$



$$I(x) = E(x)\, E^*(x) = \begin{cases} E_0^2 & \text{eine Quelle} \\ \text{Interferenz} & \text{zwei Quellen} \end{cases}$$

$$E_0^2 \left(e^{ikx \sin\theta_1} + e^{-ikx \sin\theta_1} \right)^2$$
$$= E_0^2 \left[e^{2ikx \sin\theta_1} + 2 + e^{-2ikx \sin\theta_1} \right]$$
$$= 2E_0^2 \left(1 + \cos(2k \sin\theta_1\, x) \right)$$

Grösserer Winkel
höhere Frequenz



(wie eine Fourierreihe)

(wie eine Fouriertransformation)

$$\Rightarrow \quad E(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(k_x, k_y; 0)\, e^{i(k_x x + k_y y \pm k_z z)}\, dk_x dk_y$$

$$\hat{E}(k_x, k_y; z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} E(x,y,z)\, e^{-i(k_x x + k_y y)}\, dx\, dy$$

$$(\nabla^2 + k^2)\, E(r) = 0$$

$$(\nabla^2 + k^2) \iint \dots = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[-k_x^2 - k_y^2 + k^2 \right]}_{k_z} E + \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = 0$$

$$\Rightarrow e^{\pm i k_z z}$$

$$\Rightarrow \hat{E} = \hat{E}(z=0)\, e^{\pm i k_z z}$$

$\max[k_x] = k$

Bem falls $-k_z z$

$\rightarrow$ Evaneszente Wellen

$\Rightarrow$ Superposition von ebene und evaneszente Wellen

$$E_1 \overset{FT}{\Rightarrow} \hat{E}_1 \times \underbrace{\hat{H}}_{e^{ik_z(z_2 - z_1)}} = \hat{E}_2 \overset{IFT}{\Rightarrow} E_2$$

Übertragungs-
funktion

sehr hohe Frequenz $\sqrt{k_x^2 + k_y^2} > k$

$\rightarrow$ kommt nichts mehr an

$\rightarrow$ Tiefpass

Auflösungsgrenze $\Delta x \approx \frac{1}{2k} = \frac{\lambda}{4\pi n}$

da $\Delta x \underset{2k}{\Delta k_x} \approx 1$

Paraxiale Approximation

$$k_z = k\sqrt{1-(k_x^2+k_y^2)/k^2} \approx k - \frac{k_x^2+k_y^2}{2k}$$
$$= k\cos\theta = k[1-\theta^2/2 + \dots]$$

$$E(x',y',0) = E_0\, e^{-\frac{x'^2+y'^2}{\omega_0^2}} \quad \text{(Gauss)}$$

$$\hat{E}(k_x,k_y;0) = E_0 \frac{\omega_0^2}{4\pi} e^{-(k_x^2+k_y^2)\frac{\omega_0^2}{4}}$$

$$\Rightarrow E(x,y,z) = E_0 \frac{\omega_0^2}{4\pi} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(k_x^2+k_y^2)\left(\frac{\omega_0^2}{4}+\frac{i}{2}\frac{z}{k}\right)} e^{i(k_x x + k_y y)}\, dk_x\, dk_y$$

$$\boxed{E(\rho,z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{-\frac{\rho^2}{\omega^2(z)}} e^{i[kz - \eta(z) + k\rho^2/2R(z)]}}$$

Ebene Wellenfronten (z klein)

dominiert für grosse z
→ sphärische Phasenfronten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2+ibx)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(-b^2/4a)$$

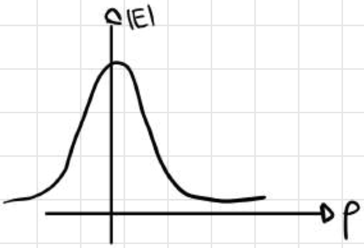
$\omega(z) = \omega_0\left(1+\frac{z^2}{z_0^2}\right)^{1/2}$ Strahl Taille

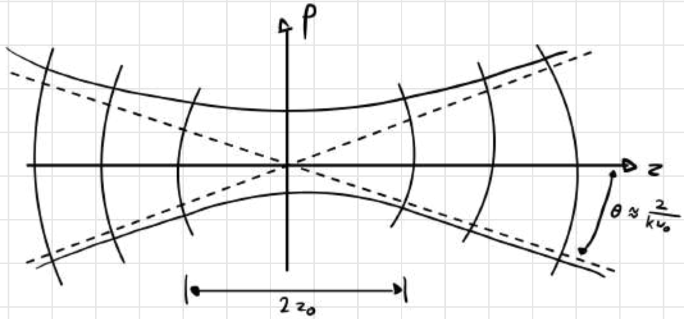
$R(z) = z(1+z_0^2/z^2)$ Wellenfront radius

$\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)$ Phasen Korrektur

$\boxed{z_0 = \frac{k\omega_0^2}{2}}$ $\boxed{\theta = \frac{2}{k\omega_0}}$

Rayleigh Länge





$\omega_0^2 \sim z_0$

→ mehr fokus führt zu schnellerer divergenz

→ Analytisch, erfüllt nicht Maxwell (Gauss und para. Approximation)

→ Ein Strahl bleibt koliniert für ein weg $\approx z_0$ und fängt an zu divergieren danach (sphärisch)

Fernfelder

$r_2 - r_1 \to \infty$

$$E_\infty(x,y,z) = \lim_{kr\to\infty} \iint_{(k_x^2+k_y^2)<k^2} \hat{E}(k_x,k_y;0)\, e^{i\left(\frac{k_x}{k}s_x + \frac{k_y}{k}s_y + \frac{k_z}{k}s_z\right)}\, dk_x\, dk_y \qquad s = (s_x,s_y,s_z) = \left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)$$

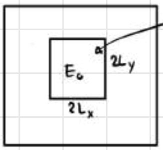
Methode der stationären Phase : $E_\infty(x,y,z) = -2\pi i\, k s_z\, \hat{E}(ks_x, ks_y; 0)\frac{e^{ikr}}{r}$

$$\lim_{\beta\to\infty}\int g(t)\,e^{i\beta f(t)}\,dt \qquad f(t) \to f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0)+\dots$$

↳ einziger beitrag kommt von den stationären Punkte $f'(t_s)=0$

$$= g(t_s)\sqrt{\frac{2\pi}{\beta f''(t_s)}}\; e^{i\beta f(t_s)+i\pi/4}$$

Beispiel



Annahme Welle eben

$$\hat{E}(k_x,k_y;0) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} E(x',y',0)\,e^{-i(k_x x'+k_y y')}\,dx'dy$$

$$= \frac{E_0}{4\pi^2}\int_{-L_y}^{+L_y}\int_{-L_x}^{L_x} e^{-i[k_x x'+k_y y']}\,dx'dy'$$

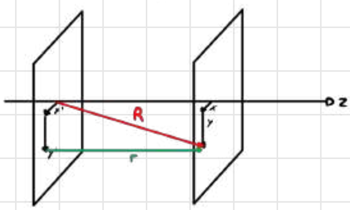
$$= E_0\,\frac{L_x L_y}{\pi^2}\,\frac{\sin(k_x L_x)}{k_x L_x}\,\frac{\sin(k_y L_y)}{k_y L_y}$$

$$E_\infty(s_x,s_y) = -2\pi i k\, s_z\, \hat{E}\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= ik\,\underset{=\sqrt{1-(s_x^2+s_y^2)}}{s_z}\,E_0\,\frac{2L_xL_y}{\pi}\,\frac{\sin(k s_x L_x)}{k s_x L_x}\,\frac{\sin(k s_y L_y)}{k s_y L_y}\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

Vorlesung 13

Frauenhofer Zone



$$E(x,y) = \int_{z=0} A(x',y')\,\frac{\exp(-ikr(x',y'))}{r(x',y')}\,dx'dy'$$

$$r^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+z^2 = R^2\left(1-\frac{2(xx'+yy')}{R^2}+\frac{x'^2+y'^2}{R^2}\right)$$

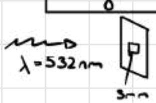
$$r(x',y') = \underbrace{\underbrace{R-\left[\frac{x'x}{R}+\frac{y'y}{R}\right]}_{\text{Frauenhofer}}+\frac{x'^2+y'^2}{2R}}_{\text{Fresnel}}+\dots$$

$\to k\,\frac{x'^2+y'^2}{2R}<1$ für Frauenhofer

Maximale Feldausdehnung in Quellebene: $D = 2\max\left\{\sqrt{x'^2+y'^2}\right\}$

$\to \boxed{R > \frac{1}{8}kD^2}$

Bsp:



$\to R > 13m$

Fourier Optik

$$E(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\hat{E}(k_x, k_y; 0)}_{= \frac{i r e^{-ikr}}{2\pi k_z} E_\infty(k_x, k_y)} e^{i(k_x x + k_y y \pm k_z z)} \, dk_x \, dk_y$$

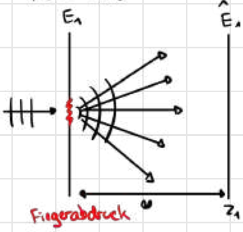
$k_x \to k s_x$

$k_y \to k s_y$

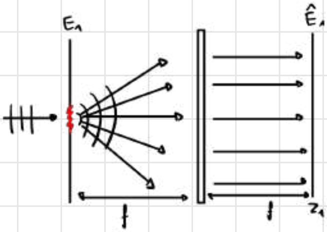
$k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$

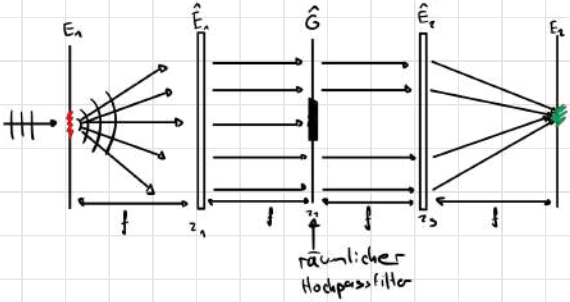
Forensik

für $k_z \not\approx k$ Fourier Optik



$\Rightarrow$

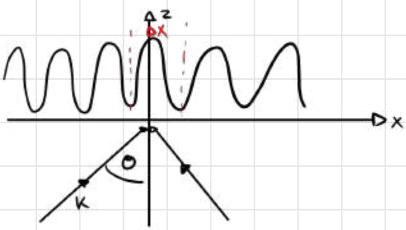




$\hat{H}(k_x, k_y, z_3 - z_1)$

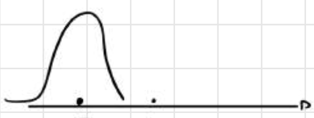
$e^{ik(z_2 - z_1)} \hat{G}(k_x, k_y) e^{ik(z_3 - z_2)}$

Auflösungsgrenze



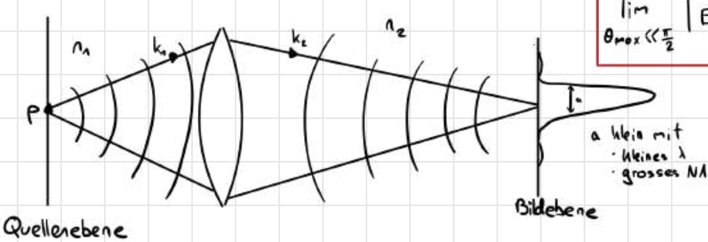
$k_x = k \sin\theta$

$\Delta x = \frac{\pi}{k_x}$



$d > \Delta x = \frac{\pi}{k_x} = \frac{\pi}{k \sin\theta} = \frac{\lambda}{2n \sin\theta}$

Point - Spread Funktion :



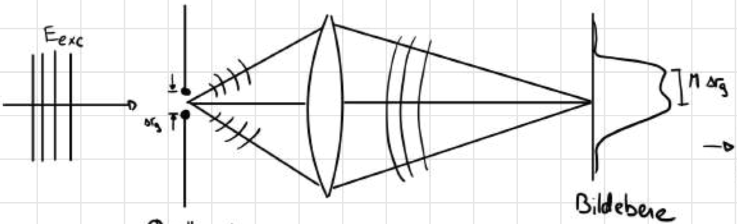
a klein mit
- kleines λ
- grosses NA

$$\boxed{\lim_{\theta_{max} \ll \frac{\pi}{2}} |E(\rho, z=0)|^2 = \frac{\pi^4}{\varepsilon_0^2 n_1 n_2} \frac{p^2}{\lambda^6} \frac{NA^4}{M^2} \left[2 \frac{J_1(2\pi\tilde{\rho})}{2\pi\tilde{\rho}} \right]^2}$$

$NA = n \sin\theta_{max}$

$\tilde{\rho} = \frac{NA \, \rho}{M \lambda}$

Auflösungsgrenze



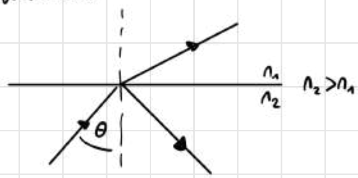
zwei Mal die obere Funktion

→ kürzeste Distanz Maximum 1 auf Minimum 2

$\Delta k_{\parallel} \Delta r_{\parallel} \geq 1$

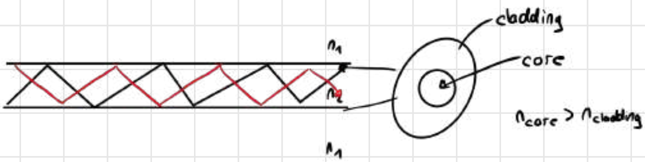
$$\mathrm{Min}[\Delta r_{\parallel}] = 0.6098 \frac{\lambda}{NA}$$

Wellenleiter



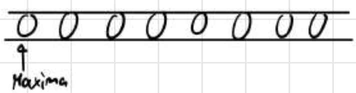
kritischer Winkel: $\sin \theta_c = \frac{n_1}{n_2}$

→ Totalreflexion



Wellenleiter

→ durch Superposition von zwei Ebene Wellen (hoch und runter)



Experimen