

Mathematische Methoden

von Antoine Bauer, Fehler melden an antbauer@student.ethz.ch

Komplexe Zahlen

Normalform

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a + bi$ wobei $i = \sqrt{-1}$, $a = \operatorname{Re}\{z\}$ und $b = \operatorname{Im}\{z\}$:

Komplexe Konjugierte	$\bar{z} = a - bi$
Dreiecksungleichung	$ z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $
Absolutbetrag	$ z = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\operatorname{Re}\{z\}^2 + \operatorname{Im}\{z\}^2}$
Phase	$\varphi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}}\right)$

Eulersche Formel und Identitäten

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} & \sinh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} & \cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

Polarform

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Die Exponentialfunktion ist $2\pi i$ -periodisch, deswegen wird definiert:

Argument	$\arg(z) = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Hauptwert des Arguments	$\operatorname{Arg}(z) = \varphi \in (-\pi, \pi]$

Rechenregel in der Polarform

Realteil	$\operatorname{Re}\{z\} = \cos(\varphi)$
Imaginärteil	$\operatorname{Im}\{z\} = \sin(\varphi)$
Komplexe Konjugierte	$\bar{z} = z \cdot e^{-i\varphi}$
Potenzieren	$(z e^{i\varphi})^n = z ^n \cdot e^{in\varphi}$
n-te Wurzel	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{ z } \cdot e^{i(\frac{\varphi+2\pi k}{n})}$ $k = 0, \dots, n-1$
Logarithmus	$\log(z) = \log z + i(\varphi + 2\pi k)$
Hauptwert des Log.	$\operatorname{Log}(z) = \log z + i\varphi$
Potenzen mit $z, \omega \in \mathbb{C}$	$z^\omega = e^{\omega \cdot \operatorname{Log}(z)}$
Hauptwert der Potenz	$p.v.(z^\omega) = e^{\omega \cdot \operatorname{Log}(z)}$

Logarithmusgesetze gelten nicht beim komplexwertigen Logarithmus!

Wertetabelle für Trigonometrische Funktionen

deg/rad	$0^\circ/0$	$30^\circ/\frac{\pi}{6}$	$45^\circ/\frac{\pi}{4}$	$60^\circ/\frac{\pi}{3}$	$90^\circ/\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Komplexe Folgen und Reihen

Sei eine komplexe Folge $z_n = x_n + iy_n$. Der Grenzwert existiert, wenn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

Absolute Konvergenz gilt auch (mit komplexem Absolutbetrag).

Offen und abgeschlossen

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heisst **offen**, wenn zu jedem $z \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $B(z, \epsilon) \subseteq U$ gilt.

Eine Teilmenge U heisst **abgeschlossen**, falls das Komplement U^c offen ist.

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad g hat genau g Nullstellen. Falls ein Polynom eine komplexe Nullstelle z_0 besitzt, ist auch \bar{z}_0 eine Nullstelle.

Grenzwert einer Funktion

Sei $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, wobei $U \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in U$. Der Grenzwert von $f(z_0)$ ist $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{s.d. } \forall z \in U : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - a| < \epsilon$$

Bemerkung: Sei $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \Leftrightarrow \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}\{f(z)\} = a_1 \right) \wedge \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}\{f(z)\} = a_2 \right)$$

Stetigkeit

Sei eine offene Menge $U \in \mathbb{C}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. $f(z)$ ist stetig im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, genau dann, wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

$f(z)$ ist auf U stetig, falls $f(z)$ an jeder Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ stetig ist.

- i. Summe, Differenz und Produkt stetiger Funktionen sind stetig.
- ii. Komposition von stetigen Funktionen ist stetig.
- iii. Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn sowohl Realteil als auch Imaginärteil stetig sind.

Zeigen von Stetigkeit

Falls f an der Stelle z_0 stetig ist, gilt $\forall \omega \in \mathbb{C} : \lim_{t \rightarrow 0} f(z_0 + t\omega) = f(z_0)$.

Beweis mit Kontraposition:

- i. Richtung finden, in der f nicht stetig ist.
- ii. Zwei Richtungen finden, auf denen der Grenzwert ungleich sind.

Beweis mit Polarkoordinaten ($z = r e^{it}$):

Falls $\lim_{r \rightarrow r_0} \text{unabhängig von } t$ existiert ist f stetig in z_0 .

C-Differenzierbarkeit und Holomorph

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

C-Differenzierbarkeit

Sei eine offene Menge $U \in \mathbb{C}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. f ist \mathbb{C} -differenzierbar in $z_0 \in U$ falls der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Bemerkung: \mathbb{C} -differenzierbar $\Rightarrow \mathbb{R}$ -differenzierbar

Satz

$f(z)$ ist \mathbb{C} -Differenzierbar $\Rightarrow f(z)$ ist stetig.

Holomorph

Sei eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.

f heisst holomorph ... :

- i. auf U , falls sie auf U \mathbb{C} -differenzierbar ist.
- ii. in z_0 , falls f holomorph in einer offenen Menge $U_1 \ni z_0$ ist.

iii. falls sie beliebig oft \mathbb{C} -differenzierbar ist.

Bemerkungen:

- Holomorphe Funktionen sind **analytische Funktionen** (Funktionen die sich als Potenzreihen darstellen lassen) mit $R = \infty$
- Ganze Funktionen sind auf ganz \mathbb{C} holomorph.
- Falls eine Funktion \bar{z} enthält ist die Funktion **nie** holomorph.

Cauchy-Riemann Gleichungen (CRG)

$f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph \Rightarrow Die partielle Ableitungen existieren und f erfüllt die CRG:

$$\partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0) \quad \partial_y u(x_0, y_0) = \partial_x v(x_0, y_0)$$

Kriterium für \mathbb{C} -Differenzierbarkeit

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und sei $z_0 \in U$. f ist \mathbb{C} -differenzierbar, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1) $\partial_x u, \partial_x v, \partial_y u, \partial_y v$ existieren in einer offenen Menge von z_0 .
- 2) $\partial_x u, \partial_x v, \partial_y u, \partial_y v$ sind stetig in z_0 und erfüllen die CRG in z_0 .

Konsequenzen der CRG

Sei $f, g : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph:

- i. $\operatorname{Re}\{f\}$ ist konstant $\Rightarrow f$ ist konstant
- ii. $\operatorname{Re}\{f\} = \operatorname{Re}\{g\} \Rightarrow f = g + ic$ wobei $c \in \mathbb{R}$
- iii. $f : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph $\Rightarrow f$ ist konstant
- iv. $|f|$ ist konstant $\Rightarrow f$ ist konstant

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph \Rightarrow

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Harmonische Funktionen

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heisst harmonisch auf U , wenn $U \subset \mathbb{R}^2$ und

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

Kurvenintegrale

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. So gilt $\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re}\{f(t)\} dt + i \int_a^b \operatorname{Im}\{f(t)\} dt$

Pfad

Ein Pfad ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften:

- i. Ein Pfad ist **einfach**, falls aus $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ folgt, dass $t_1 = t_2$ oder $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$. (Pfad ohne Selbstschnüppunkte)
- ii. Falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ heisst der Pfad **geschlossen**.
- iii. Der Pfad ist differenzierbar auf (a, b) , wenn $\gamma'(t)$ für jedes $t \in (a, b)$ existiert. $\gamma'(t_0)$ heisst Tangentialvektor.

Parametrisierung

Gerade von a nach b : $\gamma(t) = (1-t) \cdot a + t \cdot b$, $t \in [0, 1]$

Kreis mit Zentrum z_0 und Radius r im positiven Sinne:

$$\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{2\pi i t}, \quad t \in [0, 1]$$

Kurvenintegrale

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Pfad. Das Kurvenintegral von f entlang γ ist:

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Homotopie

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma, \delta : [a, b] \rightarrow U$ zwei Pfade mit $\gamma(a) = \delta(a) = \alpha \in \mathbb{C}$ und $\gamma(b) = \delta(b) = \beta \in \mathbb{C}$. Man sagt γ ist homotop zu δ , falls

i. $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$ stückweise stetig.

ii. $\forall t \in [a, b] : \begin{cases} H(0, t) = \gamma(t) \\ H(1, t) = \delta(t) \end{cases}$

iii. $\forall s \in [a, b] : \begin{cases} H(s, a) = \alpha \\ H(s, b) = \beta \end{cases}$

Die Funktion H ist die sogenannte **Homotopie** von γ und δ .

Parametrisierung durch $s : H(s, t) = (1-s) \cdot \gamma(t) + s \cdot \delta(t)$

Wegzusammenhängend

Eine Menge U heisst **wegzusammenhängend**, falls es für jedes Paar $z_1, z_2 \in U$ einen Pfad $\gamma(t)$ gibt, der die zwei Punkte verbindet.

Einfach zusammenhängend

Eine Teilmenge U heisst **einfach zusammenhängend**, falls sie **wegzusammenhängend** ist und für alle $\alpha, \beta \in U$ alles Pfade von α nach β homotop zueinander sind.

Hauptsatz der komplexen Integralrechnung

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene **wegzusammenhängend** Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ **stetig** und $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

Für jede geschlossene Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

\Leftrightarrow Das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(z) dz$ ist unabhängig vom Pfad.

\Leftrightarrow Es gibt eine \mathbb{C} –differenzierbare Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$

$\Leftrightarrow F$ ist eine Stammfunktion von f und

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

Integralsatz von Cauchy

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine **einfach zusammenhängende** offene Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine **holomorphe** Funktion

$\Rightarrow f$ besitzt eine Stammfunktion F und die dazu äquivalente Eigenschaften.

Eigenschaften des Kurvenintegrals

Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Pfad, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene **wegzusammenhängende** Menge.

Linearität: Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\int_{\gamma} [\alpha f(z) + \beta g(z)] dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Umkehrrichtung: Sei $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\delta(t) := \gamma(1-t)$:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\delta} f(z) dz$$

Man schreibt $\delta = \gamma^{-1}$ oder $\delta = -\gamma$

Verkettung: Sei $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Pfad mit $\gamma(1) = \delta(0)$:

$$(\gamma * \delta)(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\text{Und } \int_{\gamma * \delta} f(z) dz = \int_{\delta} f(z) dz + \int_{\gamma} f(z) dz$$

Unabhängigkeit der Parametrisierung: Sei $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine andere Parametrisierung des Bildes von γ :

$$\int_{\delta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

Cauchy Schwarz:

$$\left| \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)| dt$$

Standardabschätzung: Sei $L(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt$ die Länge des Pfads und $|f(z)| \leq M$ für jedes $z \in U$ bzw. $M = \max_{t \in [0, 1]} |f(\gamma(t))| < \infty$:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L$$

Seien γ und $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ einfache geschlossene, gleich orientierte Kurven, wobei γ alle anderen Kurven umschliesst, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sich nicht schneiden und U die Menge ist, die die äussere Kurve umschliesst, ohne die von $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ umschlossenen Bereiche:

$$f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph} \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

Sei $\delta \subseteq U$ eine geschlossene Kurve, die in ihrem Inneren nur Punkte enthält, wo f holomorph ist:

$$\int_{\delta} f(z) dz = 0$$

Vektorfelder und Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ist definiert als

$$\operatorname{div} F := \partial_x F_1(x, y) + \partial_y F_2(x, y)$$

Satz von Gauss in \mathbb{R}^2

Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \in \mathbb{R}^2$, sei $V \subset U$ eine kompakte Menge mit stückweise glattem Rand ∂V mit Parametrisierung $\gamma(t)$ und:

$$\int_V \operatorname{div} F(x, y) dx dy = \int_{\partial V} F(s) \cdot n_s ds$$

Mit $n_s = \left(\begin{array}{c} \dot{\gamma}_2 \\ -\dot{\gamma}_1 \end{array} \right) / \left\| \left(\begin{array}{c} \dot{\gamma}_2 \\ -\dot{\gamma}_1 \end{array} \right) \right\|$ der Einheitsnormalvektor an der Stelle $s \in \partial V$.

Allgemeine Cauchy Integralformel

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine **einfach zusammenhängende** offene Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ **holomorph**, $z_0 \in U$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \setminus \{z_0\}$ ein Pfad, der z_0 einmal im **positiven** Sinne (Gegenurzeigersinn) umläuft:

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = g^{(n)}(z_0)$$

Wobei z_0 eine **Singularität** der Menge U ist.

Der Mittelwertsatz

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine **offene** Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ **holomorph**, $z_0 \in U$ und $r > 0$ s.d. $\bar{B}(z_0, r) \subseteq U$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Jeder Punkt z ist ein Mittelwert der umgebenden Kreisscheibe.

Lemma

Sei $f : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Falls für jedes $z \in B(z_0, r)$ gilt

$$|f(z)| \leq \frac{|f(z_0)|}{\text{Mittelwert}}$$

Maximum Modulus Prinzip

Sei U eine **wegzusammenhängende** Menge. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ **holomorph** und **nicht konstant**

$\Rightarrow |f(z)|$ besitzt kein Maximum auf U .

\Leftrightarrow Es gibt keinen Punkt $z_0 \in U$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$

Korollar

Sei f eine nicht konstante und stetige Funktion auf einer kompakten Menge K , die holomorph auf dem Inneren ($K \setminus \partial K$) von K ist.

$$\Rightarrow \max_{z \in K} |f(z)| \text{ wird auf } \partial K \text{ erreicht}$$

Tipp: $z = re^{it}$ und Ableiten nach $t = 0$ setzen.

Satz von Liouville

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ **beschränkt** und eine **ganze** Funktion $\Rightarrow f$ ist konstant

Reihenentwicklung

Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Konvergenzradius

$$R := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \text{oder} := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}} \begin{cases} |z| < R \text{ konvergiert absolut} \\ |z| > R \text{ divergiert} \\ R = \infty \text{ konvergiert } \forall z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Wichtige Reihen

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

sinh und cosh jeweils gleich wie sin und cos, aber ohne $(-1)^n$

Taylorreihe

Sei $f : B(z_0, R_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $R_0 > 0 \Rightarrow f(z)$ besitzt für jedes $z \in B(z_0, R_0)$ eine Taylorreihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$$

Die Reihe konvergiert $\forall z \in B(z_0, R_0)$

Bemerkung: MacLaurin-Reihe = Taylorreihe bei $z_0 = 0$

Laurent-Reihe

Sei holomorph auf dem Kreisring $r < |z - z_0| < R$ und γ eine geschlossene Kurve im Kreisring und z_0 im positiven Sinne umläuft:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

mit $a_n = c_n = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ und $b_n = a_{-n}$

Tipp: Partialbruchzerlegung → Aufteilen von \mathbb{C} in Kreisringe → umformen und geometrischen Reihe benutzen

Singularitäten

Falls f in z_0 nicht holomorph ist, aber in mindestens einem $z \in B(z_0, \epsilon)$ mit $\epsilon > 0$ holomorph ist, heisst z_0 eine Singularität.

Isolierte Singularität

Falls f in z_0 nicht holomorph ist, aber in allen $z \in B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$ mit $\epsilon > 0$ holomorph ist, heisst z_0 eine isolierte Singularität.

Weitere Klassifizierung

Falls $f(z)$ eine Laurent-Reihe besitzt gilt:

Falls $c_k = 0$ für alle $k < n$ und $c_n \neq 0$...

- i. $n > 0 \Rightarrow z_0$ ist eine Nullstelle **n-ter Ordnung**
- ii. $n = 0 \Rightarrow z_0$ ist eine hebbare Singularität
- iii. $n < 0 \Rightarrow z_0$ ist ein Pol **n-ter Ordnung**
- iv. Falls für alle $c_k = 0$ ein $c_m \neq 0$ mit $m < k$ existiert, dann ist z_0 eine **wesentliche Singularität**.

Hebbarkeitsatz von Riemann

Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Es ist äquivalent:

z_0 ist eine hebbare Singularität von f .

$\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existiert in \mathbb{C}

$\Leftrightarrow f$ ist auf einer punktierten Scheibe $B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$ beschränkt.

Meromorph

Eine holomorphe Funktion auf $U \setminus \{z_0\}$ heisst meromorph auf U , falls z_0, \dots, z_N Pole oder hebbare Singularitäten sind.

Satz von Picard

Sei z_0 eine wesentliche Singularität von $f(z)$. In jeder noch so kleinen punktierten Scheibe $B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$ nimmt $f(z)$ jeden Wert in \mathbb{C} , bis auf höchstens eine Ausnahme, unendlich oft an.

Der Residuensatz

Das Residuum

Sei z_0 eine isolierte Singularität von f .

$$\text{Res}(f, z_0) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) d\xi$$

Der Residuensatz

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene wegzusammenhängende Menge, $\gamma \subset \mathbb{C}$ eine positiv orientierte geschlossene Kurve, die $z_1, \dots, z_n \in U$ mit der Windungszahl W umschliesst, und $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n W(\gamma, z_k) \cdot \text{Res}(f, z_k)$$

Polstellen

Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f(z)$. z_0 ist ein Pol m-ter Ordnung \Leftrightarrow Es gibt in der Umgebung von z_0 eine Funktion $\phi(z)$, mit

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z) \quad \phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$$

Falls $\phi(z_0) = 0 \rightarrow$ Laurent-Reihe benutzen!

Korollar

Falls z_0 ein Pol m-ter Ordnung ist:

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi(z)}{(m-1)!}$$

Nullstellen

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph bei $z_0 \in U$. f hat in z_0 eine Nullstelle m-ter Ordnung \Leftrightarrow Es gibt ein $g : U \rightarrow \mathbb{C}$, mit

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \quad g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \neq 0$$

Anwendungen: $f(z) \equiv 0$

Lemma

Sei $f : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f(z_0) = 0$. Dann ist entweder $f(z) \equiv 0 \forall z \in B(z_0, r)$ oder z_0 ist eine isolierte Nullstelle von f .

Satz

Sei U wegzusammenhängend und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Falls $f(z) \equiv 0$ auf einer offenen Menge oder Geradenstrecke, dann ist $f(z) = 0$ auf U .

Identitätsprinzip für holomorphe Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Falls $f(z) = g(z)$ auf einer offenen Menge oder Geradenstrecke, dann gilt $f(z) \equiv g(z)$.

Anwendungen: Integrale mit Sinus und Cosinus

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(t), \sin(t)) dt = \int_{\gamma} f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) iz$$

Mit $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Anwendungen: Uneigentliche Integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^a f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx \quad x \in \mathbb{R}$$

Falls es konvergiert, gilt: $I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Trick: Eine Parametrisierung γ_R wählen mit Anfangspunkt R und Endpunkt $-R$ sodass $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$

Mit dem Residuensatz folgt dann:

$$2\pi i \sum_{k=1}^n W \cdot \text{Res}(f, z_k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx \right) = I$$

Lemma

Falls $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)} h(z)$ mit den Polynomen p und q . $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$ mit $\gamma_R = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ bzw. $t \in [2\pi, \pi]$ falls:

1. $\deg(p) + 2 \leq \deg(q)$
2. $q(z)$ hat keine Nullstellen auf der reellen Achse.
3. $|h(z)|$ ist auf $Im(z) \geq 0$ bzw. $Im(z) \leq 0$ beschränkt.

Achtung: für $Im(z) \leq 0$ ist γ_R in negative Richtung definiert $\rightarrow -\sum \text{Res}$

Uneigentliche Integrale mit Sinus und Cosinus

Gleches Prinzip wie im Lemma. Exponentialfunktion benutzen und in Reel- und Imaginärteil aufteilen. ($e^{i\alpha x}$ beschränkt auf $Im(z) \geq 0$ mit $\alpha < 0$ bzw. $Im(z) \leq 0$ mit $\alpha > 0$)

Fourier Analysis

Periodische Funktionen

Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. h ist periodisch, falls es ein $T \in \mathbb{R}$ (Periode) gibt, sodass $h(t + T) = h(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Fourierreihe

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T} nt}$$

$a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$

Koeffizienten

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \exp\left(-i \frac{2\pi}{T} nt\right) dt$$

n-te Harmonische/n-1-te Oberschwingung/Grundschwingung ($n = 0$):
 $a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)$

Symmetrieeigenschaften

$f(t)$ gerade: $a_n = "2 \cdot a_n|_{t_0}" \quad b_n = 0$

$f(t)$ ungerade: $a_n = 0 \quad b_n = "2 \cdot b_n|_{t_0}"$

Koeffizientenrechnung

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n)$$

$$a_0 = c_0$$

$$c_0 = a_0$$

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Satz von Dirichlet

Bei Sprungstellen einer periodischen, stückweise stetigen Funktion mit linker und rechter Ableitung an jedem Punkt nimmt die Fourierreihe bei der Sprungstelle den mittleren Wert an: $f(t_0) = \frac{1}{2} (f(t_0^-) + f(t_0^+))$

Trigonometrisches Polynom

Ein trig. Polynom hat die gleiche Form wie eine Fourierreihe aber $N \in \mathbb{N}_0$, statt $N \rightarrow \infty$. Das trig. Polynom ist nur eine Approximation einer Funktion f .

Gibbsches Phänomen

Vor und nach Sprungstellen entstehen Überschwingungen von ca. 18%

$$\sup|f(t) - s_N(t)| \approx 0.18 \cdot \frac{1}{2}(f(t_0^-) + f(t_0^+)) \quad t \in [-L, L]$$

Beste Approximation

$$E_N^*(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \frac{1}{2} \left(a_0^2 + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \right) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \right)$$

E_N^* nimmt monoton ab mit zunehmendem N . Für $N \rightarrow \infty$ also $E_N^* = 0$ kriegt man den [Satz von Parseval](#).

Ergänzung: Orthonormalitätsrelationen

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T e^{i\frac{n\pi}{T}t} e^{-i\frac{m\pi}{T}t} dt &= \begin{cases} 2T & n \neq m \\ 0 & n = m \end{cases} \\ &= \begin{cases} T & n = m \neq 0 \\ 2T & n = m = 0 \end{cases} \\ \int_{-T}^T \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \sin\left(\frac{m\pi}{T}t\right) dt &= \int_{-T}^T \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \sin\left(\frac{m\pi}{T}t\right) dt = 0 \end{aligned}$$

Fourier-Transformation

Absolut integrierbar

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heisst absolut integrierbar falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0)$$

Fourier Transformation

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar. Die Fourier Transformation \hat{f} ist

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Inverse Fourier-Transformation

Sei \hat{f} absolut integrierbar.

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Satz von Dirichet für die Fouriertransformation

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar und stückweise stetig mit linker und rechter Ableitung an jedem Punkt. Für ein Punkt $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt abhängig von der Stetigkeit:

$$f(t_0) = \begin{cases} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} & \text{stetig} \\ \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) \right) & \text{nicht stetig} \end{cases}$$

Satz von Plancherel

Seien f und \hat{f} absolut integrierbar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)|^2 d\omega$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation

1. $\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha \mathcal{F}\{f\}(\omega) + \beta \mathcal{F}\{g\}(\omega)$
2. $\mathcal{F}\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-i\omega a} \cdot \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$
3. $\mathcal{F}\{e^{iat} \cdot f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega - a)$
4. $\mathcal{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} \cdot \mathcal{F}\{f(t)\}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
5. $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = f(-t)$
6. $\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\}(\omega) = (i\omega)^n \cdot \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$
7. $\mathcal{F}\{t^n f(t)\} = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \mathcal{F}\{t^n f(t)\}(\omega)$

Faltung

Seien f und g absolut integrierbar. Das Faltungsprodukt von f und g ist

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (x-t) dt$$

Bemerkungen

- i. $\forall t < 0 : f(t) = 0$ und $g(t) = 0 \Rightarrow (f * g)(x) = \int_0^x f(x-t) g(t) dt$
- ii. $f * g$ ist mindestens so glatt, wie die glatteste der beiden Funktionen
- iii. Die Faltung ist wie ein gewichteter Mittelwert

Eigenschaften der Faltung

$$\begin{array}{ll} f * g = g * f & \mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\{f\} \mathcal{F}\{g\} \\ (f * g) * h = f * (g * h) & \mathcal{F}^{-1}\{f * g\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{f\} \mathcal{F}^{-1}\{g\} \\ (f + g) * h = f * h + g * h & \mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{g\} \\ f(x-a) * g = (f * g)(x-a) & \mathcal{F}^{-1}\{f * g\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{f\} * \mathcal{F}^{-1}\{g\} \end{array}$$

Laplace-Transformation

Man kann mit der Laplace-Transformation auch wachsende d.h. nicht absolut integrierbare Funktionen betrachten

Sei $s \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Die Laplace Transformation ist

$$\mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Sei \mathcal{E} der Originalraum der Originalfunktionen f mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $f(t) = 0$ für jedes $t < 0$
- 2) $\exists \sigma \in \mathbb{R} \exists M > 0 \forall t > 0 : |f(t)| \leq M e^{\sigma t}$
- 3) f ist stückweise stetig
- 4) $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t), \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$ existieren $\forall t \in \mathbb{R}$ insbesondere $t = 0$

Das **Wachstumskoeffizient** ist das kleinste σ_f , sodass $|f(t)| \leq M e^{\sigma_f t}$ für jedes σ gilt $\sigma \geq \sigma_f$.

Heaviside Funktion

Falls $f \not\equiv 0$ für $t < 0$, kann man die Funktion zwingen die Bedingung zu erfüllen mit einer Multiplikation der Heaviside Funktion.

$$H(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Eigenschaften der Laplace-Transformation

1. $\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g\}(s)$
2. $\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) = e^{-as} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
3. $\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s - a)$
4. $\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{s}{a}\right)$
5. $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k-1)}(t)$
6. $\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$
7. $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau) d\tau\}(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
8. $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(x+iy) = \int_{x+iy}^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(\tau) d\tau$
9. $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-st}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$ für eine T-periodische f
10. $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$
11. $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) = e^{-as}$

Dirac-Delta Funktion

$$\delta := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \chi_{(-\epsilon, \epsilon)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0) \quad H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(s) ds$$

Satz von Lerch

Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{E}$ mit σ_1, σ_2 , $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$ für alle s mit $Re\{s\} > \max\{\sigma_1, \sigma_2\} \Rightarrow f_1(t) = f_2(t) \forall t$ an denen f_1 und f_2 stetig sind.

Inverse Laplace-Transformation

Sei $f \in \mathcal{E}$ mit σ_f . Sei $\beta_c(y) := c + iy$ für $y \in (-\infty, \infty)$ und $c > \sigma_f$ beliebig. An allen Stetigstellen von f :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_c} e^{st} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) ds$$

An Unstetigstellen: Satz von Dirichet

Laplace-Transformationstabelle

Originalraum $f(t)$	Bildbereich $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
$e^{at} \cdot f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s-a), s > a$
$f'(t)$	$s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - sf(0) - f'(0)$