Nelinearna Analiza i Primjene 2 - Materijali

Ante Ćubela

Svibanj 2022.

Promatramo rubni problem:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) & = g(x, u(x)), \quad \text{u } \Omega \\ u(x) & = 0, \quad \text{na } \partial\Omega \end{cases}.$$

Slaba formulacija problema (kao i na predavanjima); u je slabo rješenje ako:

$$\int_\Omega -\Delta u(x) y(x) dx = \int_\Omega g(x, u(x)) y(x) dx,$$

za $y \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Po Greenovom teoremu:

$$-\int_\Omega \Delta u(x) y(x) dx = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla y(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} y(x) d\sigma(x).$$

Desni integral je jednak 0 jer je $y \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Slaba formulacija je sad:

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla y(x) dx = \int_\Omega g(x, u(x)) y(x) dx.$$

Definirajmo operator $T := J - G$, gdje je:

$$\langle J(u), y \rangle = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla y(x) dx;$$
$$\langle G(u), y \rangle = \int_\Omega g(x, u(x)) y(x) dx,$$

uz skalarni produkt:

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx.$$

Sada promatramo operatorsku jednadžbu $T(u) = 0$.
Želimo se pozvati na teorem 6.1.4. iz knjige Drabek-Milota imajući na umu da je $W_0^{1,2}(\Omega)$ Hilbertov prostor. Promotrimo neprekidnost, monotonost, i slabu koercitivnost operatora T.

Neprekidnost:

J je identiteta pa samim time i neprekidan operator. ✓

Da dokažemo da je G neprekidan ćemo postaviti neke uvjete na funkciju g. Neka je g Caratheodoryjeva ($g \in \mathrm{CAR}(\Omega, \mathbb{R})$) funkcija i vrijedi ograničena na sljedeći način (ovisno o dimenziji d):

$$\begin{aligned} d = 1: &\quad \big|g(x,s)\big| \le r(x) + C(\big|(\big| s)), \text{ gdje je } r \in L^1(\Omega) \\ d = 2: &\quad \big|g(x,s)\big| \le r(x) + c|s|^{q-1}, \text{ gdje je } r \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega), c > 0, q \ge 1 \qquad (*) \\ d = 3: &\quad \big|g(x,s)\big| \le r(x) + c|s|^{\frac{d+2}{d-2}}, \text{ gdje je } e \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), c > 0. \end{aligned}$$

To je sve generalizacija ocjene:

$$\big|g(x,s)\big| \leq r(x) + c|s|\,, \text{ gdje je } r^2(\Omega), c > 0, \qquad \textbf{(1)}$$

što je nama dovoljno.
Po teoremu 3.2.24. iz Drabek-Milota, slijedi da je operator Nemytskog $u \mapsto g(\cdot, u(\cdot))$ neprekidno preslikavanje s $L^2(\Omega)$ u $L^2(\Omega)$ u našem slučaju (ujedno je $g(\cdot, u(\cdot))$ iz $L^2(\Omega)$.).
Sada za $u_n \to u$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
||G(u_n) - G(u)||_{W_0^{1,2}(\Omega)} &= \sup_{||y||=1} \big|\langle G(u_n) - G(u), y\rangle\big| \\
&\leq \sup_{||y||=1} \int_\Omega \Big| \big(g(x, u_n(x)) - g(x, u(x))\big)\, y(x) dx \Big| \\
&\overset{\text{CS}}{\leq} ||g \circ u_n - g \circ u||_{L^2(\Omega)} \cdot ||y||_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{n\mapsto\infty}{\leq} 0.
\end{aligned}$$

Pošto je $W_0^{1,2} \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$:

$$u_n \overset{W_0^{1,2}(\Omega)}{\longrightarrow} u \implies u_n \overset{W_0^{1,2}(\Omega)}{\rightrightarrows} u.$$

Slijedi:

$$g \circ u_n \rightrightarrows g \circ u \implies G \text{ neprekidan } \implies T \text{ neprekidan.}$$

Monotonost:

Promotrimo uvjet monotonosti:

$$\begin{aligned}
\langle T(u) - T(v), u - v\rangle &= \langle J(u) - J(v), u - v\rangle - \langle G(u) - G(v), u - v\rangle \\
&= \langle u - v, u - v\rangle - \langle G(u) - G(v), u - v\rangle \\
&= ||u - v||^2 - \int_\Omega (g(x, u(x)) - g(x, v(x)))(u(x) - v(x)) dx.
\end{aligned}$$

Prvi slučaj; Ukoliko je funkcija g padajuća po drugoj varijabli, pod-integralna funkcija je negativna, pa slijedi:

$$\begin{aligned}
\langle T(u) - T(v), u - v\rangle &= ||u - v||^2 - \int_\Omega (g(x, u(x)) - g(x, v(x)))(u(x) - v(x)) dx \\
&\geq ||u - v||^2,
\end{aligned}$$

to jest, T je jako monoton operator.
Jaka monotonost povlači strogu monotonost i slabu koercitivnost, pa su uvjeti teorema 6.1.4. zadovoljeni. Slijedi da jednadžba $T(u) = 0$ ima jedinstveno rješenje, pa tako i početni rubni problem ima jedinstveno slabo rješenje. To je ujedno i dokaz teorema 6.2.2..

Da dobijemo jaku monotonost smo stavili dosta "jak" uvjet na funkciju g. Sada ćemo smanjiti taj uvjet kako bi dobili strogu monotonost operatora T. Želimo:

$$\langle T(u) - T(v), u - v\rangle = ||u - v||^2 - \int_\Omega (g(x, u(x)) - g(x, v(x)))(u(x) - v(x)) dx > 0,$$

to jest:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (g(x, u(x)) - g(x, v(x)))(u(x) - v(x)) dx < ||u - v||^2 \\
&\int_\Omega (g(x, u(x)) - g(x, v(x)))(u(x) - v(x)) dx < \int_\Omega \big|\nabla(u(x) - v(x))\big|^2 dx \qquad \textbf{(2)}
\end{aligned}$$

Prije nego ovo pokažemo prisjetimo se definicije "prve" svojstvene vrijednosti:

$$\lambda_1 = \inf_{u\neq 0} \frac{\int_\Omega \left|\nabla u(x)\right|^2 dx}{\int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx} \implies \lambda_1 \cdot \int_\Omega \left|u(x)\right|^2 dx \leq \int_\Omega \left|\nabla u(x)\right|^2 dx. \qquad \textbf{(3)}$$

Sada znamo da će (1) sigurno vrijediti ako vrijedi i:

$$\int_\Omega (g(x,u(x)) - g(x,v(x)))(u(x)-v(x))dx < \lambda_1 \cdot \int_\Omega \left|u(x)-v(x)\right|^2 dx.$$

Sada možemo vidjeti da je dobar izbor za g funkcija koja je Lipschitzova po drugoj varijabli s Lipschitzovom konstantom manjom od λ_1. Vrijedi:

$$\begin{aligned} &\left|g(x,u) - g(x,v)\right| < \lambda_1 \cdot |u-v|\,, \ \forall u,v \in \mathbb{R} \\ \implies &\int_\Omega (g(x,u(x)) - g(x,v(x)))(u(x)-v(x))dx < \lambda_1 \cdot \int_\Omega \left|u(x)-v(x)\right|^2 dx. \end{aligned}$$

Sada slijedi tvrdnja **(2)** pa je operator T strogo monoton.

Da primijenimo teorem 6.1.4. još trebamo pokazati i da je T slabo koercitivan, to jest:

$$\lim_{||u||\mapsto\infty} ||T(u)|| = \infty.$$

Uzmimo sljedeću konstantu $c = \lambda_1 - \varepsilon$ za **(1)** tako da vrijedi:

$$\left|g(x,s)\right| \leq r(x) + (\lambda_1 - \varepsilon)|s|\,, \ \text{za g.s. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Sada slijedi:

$$\begin{aligned} ||T(u)|| &= \sup_{||v||\leq 1} \left|\langle T(u), v\rangle\right| \\ &= \sup_{||v||\leq 1} \left|\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx - \int_\Omega g(x,u(x))v(x)dx\right| \\ &\geq ||u|| - \sup_{||v||\leq 1} \left|\int_\Omega g(x,u(x))v(x)dx\right| \\ &\overset{\textbf{(3)}}{\geq} ||u|| - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left(\int_\Omega \left|g(x,u(x))\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq ||u|| - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot \Big(||r||_{L^2(\Omega)} + (\lambda_1 - \varepsilon)||u||_{L^2(\Omega)}\Big) \end{aligned}$$

Iz jednadžbe **(3)** vrijedi i:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}(\lambda_1 - \varepsilon)||u||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\lambda_1 - \varepsilon}{\lambda_1}||u||,$$

pa konačno imamo:

$$\begin{aligned} ||T(u)|| &\geq ||u|| - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot \Big(||r||_{L^2(\Omega)} + (\lambda_1 - \varepsilon)||u||_{L^2(\Omega)}\Big) \\ &\geq \frac{\varepsilon}{\lambda_1}||u|| - \frac{1}{\lambda_1}||r||_{L^2(\Omega)} \overset{||u||\mapsto\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{aligned}$$

Slijedi da je T slabo koercitivan, pa s time da smo pokazali i neprekidnost i strogu monotonost, slijedi da jednadžba $T(u) = 0$, a time i početni rubni problem, ima jedinstveno rješenje po teoremu 6.1.4..

Ovime smo dokazali naredna dva teorema.

Teorem 6.2.2. Neka je $g \in \mathrm{CAR}(\Omega, \mathbb{R})$, vrijede uvjeti rasta $(*)$, te je $g(x, \cdot)$ padajuća funkcija za g.s. $x \in \Omega$. Tada početni rubni problem ima jedinstveno rješenje.

Teorem 6.2.3. Neka je $g \in \mathrm{CAR}(\Omega, \mathbb{R})$, vrijedi prije spomenuti uvjet rasta $\big|g(x,s)\big| \leq r(x) + (\lambda_1 - \varepsilon)|s|$, za g.s. $x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}$, te je g Lipschitzova po drugoj varijabli. Tada početni rubni problem ima jedinstveno rješenje.

Koristili smo i sljedeće dvije tvrdnje.

Teorem 6.1.4. Neka je H realan Hilbertov prostor i $T : H \mapsto H$ neprekidan, monoton, i slabo koercitivan operator. Tada je $T(H) = H$. Ako je T strogo monoton, tada za svaki $h \in H$ jednadžba $T(u) = h$ ima jedinstveno rješenje.

Teorem 3.2.24. Neka je $g \in \mathrm{CAR}(\Omega, \mathbb{R})$, $p, q \in [1, \infty)$, te postoje $r \in L^q(\Omega)$ i $c \in \mathbb{R}$ takvi da:

$$\big|g(x,s)\big| \leq r(x) + c|s|^{\frac{p}{q}},$$

za g.s. $x \in \Omega$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Neka je F pripadni operator Nemytskog. Tada vrijedi:
(i) Za sve $\varphi \in L^p(\Omega)$, vrijedi $F(\varphi) \in L^q(\Omega)$.
(ii) F je neprekidno preslikavanje s $L^p(\Omega)$ u $L^q(\Omega)$.
(iii) Za svaki ograničen skup $B \in L^p(\Omega)$, vrijedi da je $F(B) \in L^q(\Omega)$ ograničen.