Nelinearna Analiza i Primjene 1 - Domaća Zadaća

Ante Ćubela

Siječanj 2022.

Zad 1

Kao dio propozicije smo trebali pokazati da je skup

$$\mathbb{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \cdots, n\},\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

kompaktan i konveksan.

Rješenje

U prostoru $\mathbb{R}^n$ vrijedi da je skup kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen.

Neka je $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}$ proizvoljan. Kako za svaki x_i vrijedi $x_i \in [0,1]$ (jer im je suma jednaka 1 i svi su nenegativni), možemo vidjeti da je:

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pa za $M = 2$ vrijedi da je $\mathbb{K} \subset K(0,2)$ (kugla u normi 1), pa je $\mathbb{K}$ ograničen.

Za isti x definirajmo funkciju $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ s:

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Kako $x_i \geq 0$ za svaki i, ta funkcija je jednaka $\| \cdot \|_1$ normi na skupu $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$. Kao takva je i neprekidna na $\mathbb{K}$ (znamo otprije).
Sada možemo uočiti da je:

$$\mathbb{K} = f^{-1}(\{1\}),$$

a kako je f neprekidna i $\{1\}$ zatvoren kao diskretan skup, slijedi da je i $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{K}$ zatvoren.
Kako je $\mathbb{K}$ zatvoren i ograničen, slijedi da je kompaktan na $\mathbb{R}^n$.

Još želimo dokazati da je taj skup konveksan. Za $x = (x_1, \cdots, x_n)$, te $y = (y_1, \cdots, y_n)$, gledamo konveksnu ljusku $tx + (1-t)y$. Za $t \in [0,1]$ imamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left[tx_i + (1-t)y_1 \right] &= \sum_{i=1}^{n} tx_i \ + \ \sum_{i=1}^{n} (1-t)y_i \\
&= t \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{=1} \ + \ (1-t) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i}_{=1} \\
&= t + (1-t) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Predzadnja jednakost vrijedi jer su x i y iz skupa $\mathbb{K}$. Slijedi da je $tx + (1-t)y \in \mathbb{K}$, pa je $\mathbb{K}$ konveksan.

Zad 2

Kod Godunovljeve metode smo za konveksnu funkciju fluxa f imali funkciju F definiranu kao $F(u_L, u_R) = f(u^*(u_L, u_R))$, gdje smo imali 4 mogućnosti za u^*:

$$s := \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}$$

$$\begin{aligned}
&(1)\ f'(u_L),\ f'(u_R) \geq 0 && \implies u^*(u_L, u_R) = u_L \\
&(2)\ f'(u_L),\ f'(u_R) \leq 0 && \implies u^*(u_L, u_R) = u_R \\
&(3)\ f'(u_L) \geq 0 \geq f'(u_R) \quad \implies u^*(u_L, u_R) = && \begin{cases} u_L, & \text{ako } s > 0 \\ u_R, & \text{inače} \end{cases}, \\
&(4)\ f'(u_L) < 0 < f'(u_R) && \implies u^*(u_L, u_R) = u_s
\end{aligned}$$

gdje je u_s vrijednost razrjeđujućeg vala (transonic refraction). Ako je f konveksna, dokazat ćemo da je funcija:

$$\hat{F}(u_L, u_R) := \begin{cases} \min\limits_{u_L \leq u \leq u_R} f(u), & \text{ako } u_L \leq u_R \\ \max\limits_{u_R \leq u \leq u_L} f(u), & \text{ako } u_L > u_R \end{cases}$$

jednaka funkciji F za prve tri mogućnosti.

Rješenje

Prvo razmatramo prvu mogućnost, tj. $f'(u_L),\ f'(u_R) \geq 0$. Kako je f konkavna, f' strogo raste. Ujedno znamo i da je $f' > 0$ na intervalu između u_L i u_R. Slijedi da funkcija f strogo raste na intervalu između u_L i u_R. Onda se minimum i maksimum funkcije f postižu redom u lijevom i desnom rubu intervala.
Ukoliko je $u_L \leq u_R$, $\hat{F}$ će biti jednaka minimumu od f, to jest vrijednosti od f u lijevom rubu intervala $[u_L, u_R]$. Znači da vrijedi:

$$\hat{F}(u_L, u_R) = f(u_L).$$

Ukoliko je $u_L > u_R$, $\hat{F}$ će biti jednaka maksimumu od f, to jest vrijednosti od f u desnom rubu intervala $[u_R, u_L]$. Znači da vrijedi:

$$\hat{F}(u_L, u_R) = f(u_L).$$

Za drugu mogućnost, tj. $f'(u_L), f'(u_R) \leq 0$ istim postupkom (uz činjenicu da sada f pada na intervalu između u_L i u_R) dokažemo da je:

$$\hat{F}(u_L, u_R) = f(u_R)$$

u oba slučaja.

Sada razmatramo treću mogućnost, tj. $f'(u_L) \geq 0 \geq f'(u_R)$. Kako je f konveksna, slijedi da f' strogo raste. Iz toga i činjenice da $f'(u_R) \leq f'(u_L)$ slijedi da je $u_R < u_L$. Znači da će vrijednost funkcije $\hat{F}$ biti maksimum od $f(u)$ na intervalu $[u_R, u_L]$.
Promotrimo sada vrijednost od s:

$$s = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}.$$

Vrijednost $u_R - u_L < 0$, pa promatrajmo predznak od s.
Ako je $s > 0$, tada slijedi $f(u_R) - f(u_L) < 0$, tj. $f(u_L) > f(u_R)$. Kako je funkcija konveksna, a derivacija mijenja predznak, maksimum će se postići ili u lijevom ili u desnom rubu intervala. Kako je $f(u_L) > f(u_R)$, vidimo da se taj maksimum postiže u u_L. Pa za $s > 0$, smo pokazali da je:

$$\hat{F}(u_L, u_R) = f(u_L).$$

Analogno, ako je $s < 0$, slijedi $f(u_R) - f(u_L) > 0$, pa je $f(u_R) > f(u_L)$, što znači da se maksimum postiže u u_R. Znači za $s < 0$ imamo:

$$\hat{F}(u_L, u_R) = f(u_R).$$

U slučaju da je $f(u_R) = f(u_L)$, tada možemo uzeti obje vrijednosti u_L ili u_R. Slijedi da je u slučajevima (1), (2) i (3), funkcija $\hat{F}$ jednaka funkciji F.