# Parcijalne diferencijalne jednadžbe 1 - Prva zadaća

Ante Ćubela

Prosinac 2022.

## Zad 1

*Riješite početnu zadaću:*

$$\begin{cases} 2u_{xx} + 3u_{tt} - 7u_{xt} = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = g(x), \\ u_t(x,0) = h(x). \end{cases}$$

### Rješenje

Kao što uputa kaže, uvedimo zamjenu varijabli:

$$\xi = \alpha x + t;$$
$$\eta = x + \beta t.$$

Definirajmo funkciju $v$ takvu da je $v(\xi, \eta) = u(x,t)$ i nađimo parcijalne derivacije prvog i drugog reda od $u$:

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \cdot \alpha + v_\eta; \\ u_t &= v_\xi + v_\eta \cdot \beta; \\ u_{xx} &= \alpha^2 v_{\xi\xi} + 2\alpha v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}; \\ u_{tt} &= v_{\xi\xi} + 2\beta v_{\xi\eta} + \beta^2 v_{\xi\xi}; \\ u_{xt} &= \alpha v_{\xi\xi} + (1+\alpha\beta) v_{\xi\eta} + \beta v_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Kada uvrstimo parcijalne derivacije od $u$ u početnu jednadžbu dobijemo:

$$\begin{aligned} 0 &= 2u_{xx} + 3u_{tt} - 7u_{xt} \\ &= 2\alpha^2 v_{\xi\xi} + 4\alpha v_{\xi\eta} + 2v_{\eta\eta} + 3v_{\xi\xi} + 6\beta v_{\xi\eta} + 3\beta^2 v_{\eta\eta} \\ &\quad - 7\alpha v_{\xi\xi} - 7(1+\alpha\beta) v_{\xi\eta} - 7\beta v_{\eta\eta} \\ &= (2\alpha^2 - 7\alpha + 3) v_{\xi\xi} + (2 - 7\beta + 3\beta^2) v_{\eta\eta} + (4\alpha + 6\beta - 7(1+\alpha\beta)) v_{\xi\eta}. \end{aligned}$$

Uzmimo $\alpha$ i $\beta$ tako da dobijemo jednadžbu oblika $v_{\xi\eta} = 0$.

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 - 7\alpha + 3 &= 2\alpha^2 - 6\alpha - \alpha + 3 = 2\alpha(\alpha - 3) - (\alpha - 3) \\ &= (2\alpha - 1)(\alpha - 3) \implies \alpha = \frac{1}{2},\ \alpha = 3. \\ 3\beta^2 - 7\beta + 2 &= \dots \implies \beta = \frac{1}{3},\ \beta = 2. \end{aligned}$$

Neka je $\alpha = 3,\ \beta = 2$. Slijedi da vrijedi:

$$\begin{aligned} (4\alpha + 6\beta - 7 - 7\alpha\beta) v_{\xi\eta} &= 0 \\ -25 v_{\xi\eta} &= 0 \\ v_{\xi\eta} &= 0 \Big/ \int d\eta \\ v_\xi &= A(\xi) \Big/ \int d\xi \\ v &= \xi \int A(\xi)\, d\xi + B(\eta) \\ v &= C(\xi) + B(\eta), \end{aligned}$$

za neke funkcije $A$, $B$ i $C$. Iz početne substitucije znamo da je $\xi = 3x + t$ i $\eta = x + 2t$. Slijedi:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(\xi,\eta) = v(3x+t, x+2t) = C(3x+t) + B(x+2t); \\ g(x) &= u(x,0) = C(3x) + B(x); \qquad (1) \\ u_t(x,t) &= v_\xi + \beta v_\eta = v_\xi + 2v_\eta = C'(\xi) + 2B'(\eta) = C'(3x+t) + 2B'(x+2t); \\ \implies h(x) &= u_t(x,0) = C'(3x) + 2B'(x). \qquad (2) \end{aligned}$$

Sada riješimo sustav jednadžbi (1) i (2) za $C(x)$ i $B(x)$:

$$g(x) = C(3x) + B(x) \implies B(x) = g(x) - C(3x) \implies B'(x) = g'(x) - 3C'(3x) \qquad (3)$$

Kada uvrstimo u (2) slijedi:

$$\begin{aligned} h(x) &= C'(3x) + 2g'(x) - 6C'(3x) \\ 5C'(3x) &= 2g'(x) - h(x) \\ C'(3x) &= \frac{1}{5}\big(2g'(x) - h(x)\big) \ \Big/ \int_0^x \ dy \\ \frac{1}{3}C(3x) - \frac{1}{3}C(0) &= \frac{2}{5}\big(g(x) - g(0)\big) - \frac{1}{5}\int_0^x h(y)\ dy \\ \overset{(3)}{\implies} B(x) &= g(x) - C(3x) = g(x) - \frac{6}{5}g(x) + \frac{6}{5}g(0) - C(0) + \frac{3}{5}\int_0^x h(y)\ dy. \end{aligned}$$

Iz toga dobijemo da je:

$$\begin{aligned} B(x) &= -\frac{1}{5}g(x) + \frac{3}{5}\int_0^x h(y)\ dy + \frac{6}{5}g(0) - C(0); \\ C(3x) &= \frac{6}{5}g(x) - \frac{3}{5}\int_0^x h(y)\ dy - \frac{6}{5}g(0) + C(0), \end{aligned}$$

te za takve $C$ i $B$, rješenje početne zadaće je:

$$u(x,t) = C(3x+t) + B(x+2t).$$

## Zad 2

*Pokažite da za zadaću:*

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 1, \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

*postoji $C^1$ rješenje na nekoj okolini $x$-osi.*

### Rješenje

Uz oznake s vježbi definiramo:

$$\begin{aligned} a_1(x,y,z) &= z; \\ a_2(x,y,z) = 1; b(x,y,z) &= 1. \end{aligned}$$

Iz početnog uvjeta stavimo:

$$S = \{(s,0) : s \in \mathbb{R}\} \equiv \gamma(s),$$

pa je normala na skup $S$ dana s

$$n(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nađimo karakteristične točke:

$$a(\gamma(s), u_0(s)) = a(s,0,s) = \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$a \cdot n = 0 \implies \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0,$$

pa zaključujemo da nema karakterističnih točaka.

Postavimo sada karakterističan sustav:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 = z, \\ \frac{dy}{dt} = a_2 = 1, \\ \frac{dz}{dt} = b = 1, \end{cases}$$

uz početne uvjete:

$$\begin{cases} x(0) = s, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = s. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe imamo:

$$\frac{dy}{dt} = 1 \implies dy = dt \implies y = t + C_1,$$

pa uz dani početni uvjet slijedi da je

$$y = t.$$

Analogno imamo:

$$z = t + C_2 \implies z = t + s.$$

Za prvu jednadžbu slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= z = t + s \\ dx &= (t+s)dt \\ x &= \frac{t^2}{2} + st + C_3 \\ \Longrightarrow \quad x &= \frac{t^2}{2} + st + s. \end{aligned}$$

Dobili smo sustav:

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} + st + s, \\ y = t, \end{cases}$$

odakle slijedi:

$$x = \frac{y^2}{2} + ys + s \implies s(y+1) = x - \frac{y^2}{2} \implies s = \frac{x - \frac{y^2}{2}}{y+1}.$$

Sada slijedi da je rješenje:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= z(t,s) \\ &= t + s \\ &= y + \frac{x - \frac{y^2}{2}}{y+1} \\ &= \frac{y^2 + y + x - \frac{y^2}{2}}{y+1} \\ &= \frac{\frac{y^2}{2} + y + x}{y+1}, \end{aligned}$$

odakle vidimo da je rješenje definirano za $y \neq -1$, pa postoji na nekoj okolini $x$-osi, ali ne i na cijelom $\mathbb{R}$.

## Zad 3

*Neka je $u$ $C^1$ rješenje jednadžbe $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = -u$ u zatvorenom jediničnom krugu te neka je $a(x,y)x + b(x,y)y > 0$ na jediničnoj kružnici. Dokažite da je tada $u \equiv 0$.*

### Rješenje

Prvo primijetimo da kada bi se maksimum $(x_0, y_0)$ dostizao u interioru jediničnog kruga, tada bi zbog $u_x(x_0,y_0) = u_y(x_0,y_0) = 0$ vrijedilo:

$$-u(x_0,y_0) = a(x_0,y_0)u_x(x_0,y_0) + b(x_0,y_0)u_y(x_0,y_0) = 0,$$

pa je maksimalna vrijednost od $u$ nula. Analogno vrijedi i za minimum, pa slijedi da je $u \equiv 0$.
Sada pretpostavimo da se maksimum $(x_0, y_0)$ dostiže na rubu, tj. na jediničnoj kružnici. Tada $\nabla u(x_0,y_0)$ pokazuje u smjeru vanjske normale, pa vrijedi $\nabla u(x_0,y_0) = \lambda(x_0,y_0)$, za neki $\lambda \geq 0$. Tada zbog dane nejednakosti na jedininčnoj kružnici vrijedi:

$$\begin{aligned}
-u(x_0,y_0) &= a(x_0,y_0)u_x(x_0,y_0) + b(x_0,y_0)u_y(x_0,y_0) \\
&= \begin{bmatrix} a(x_0,y_0) \\ b(x_0,y_0) \end{bmatrix} \cdot \nabla u(x_0,y_0) \\
&= \begin{bmatrix} a(x_0,y_0) \\ b(x_0,y_0) \end{bmatrix} \cdot \lambda(x_0,y_0) \\
&= \lambda(a(x_0,y_0)x_0 + b(x_0,y_0)y_0) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

pa slijedi da je $u(x,y) \leq 0$ na cijelom disku. Analognim postupkom možemo pokazati da je $u(x,y) \geq 0$ na cijelom disku, pa slijedi da je $u \equiv 0$.