Antoni Iwanowski
Nr indeksu: 479235

Ponieważ $\dim X = \dim X^* = n$, aby wykazać, że dane układy n-elementowe są bazami, wystarczy udowodnić, że są one liniowo niezależne.

Baza przestrzeni X

Badamy liniową niezależność układu $(x_1, \ldots, x_n)$. Rozważmy kombinację liniową przyrównaną do wektora zerowego:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0_X, \quad \text{gdzie } \alpha_j \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Aby sprawdzić, czy współczynniki α_j muszą być zerowe, nałóżmy na obie strony równania funkcjonał y_i^* (dla dowolnego ustalonego $i \in \{1, \ldots, n\}$). Z liniowości funkcjonału otrzymujemy:

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right) = y_i^*(0_X)$$
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_i^*(x_j) = 0.$$

Powyższa równość zachodzi dla każdego $i = 1, \ldots, n$. Możemy zapisać ten układ n równań w postaci macierzowej. Niech $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]^T$. Wtedy:

$$A\alpha = \mathbf{0}, \tag{2}$$

gdzie $A_{ij} = y_i^*(x_j)$. Z treści zadania wiemy, że macierz A jest nieosobliwa ($\det A \neq 0$). Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu równań z macierzą nieosobliwą jest wektor zerowy:

$$\alpha = \mathbf{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Zatem wektory $x_1, \ldots, x_n$ są liniowo niezależne. Ponieważ jest ich n i $\dim X = n$, stanowią one bazę przestrzeni X.

Baza przestrzeni X^*

Badamy liniową niezależność układu $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$. Rozważmy kombinację liniową przyrównaną do funkcjonału zerowego:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i^* = 0_{X^*}, \quad \text{gdzie } \beta_i \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Równość ta oznacza, że dla każdego wektora $v \in X$ wartość kombinacji wynosi 0. W szczególności musi to zachodzić dla wektorów x_j (dla $j = 1, \dots, n$):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i^*\right)(x_j) = 0_{X^*}(x_j)$$
$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i^*(x_j) = 0.$$

Zauważmy, że teraz sumujemy po indeksie i (wiersze macierzy A). Zapisując to macierzowo dla wektora współczynników $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_n]^T$:

$$\beta^T A = \mathbf{0}^T \quad \text{lub równoważnie} \quad A^T \beta = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Skoro macierz A jest nieosobliwa, to jej transpozycja A^T również jest nieosobliwa ($\det(A^T) = \det(A) \neq 0$). Stąd wynika, że:

$$\beta = \mathbf{0} \implies \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0.$$

Zatem funkcjonały $y_1^*, \dots, y_n^*$ są liniowo niezależne. Ponieważ jest ich n i $\dim X^* = n$, stanowią one bazę przestrzeni X^*.