Antoni Iwanowski
Nr indeksu: 479235

Zadanie 1

Szukamy wszystkich macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takich, że

$$AB = BA \quad \text{dla każdej } B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Weźmy macierz jednostkową E_{ij}, która ma jedynkę w miejscu (i, j), a zera w każdym innym miejscu. Z założenia mamy

$$AE_{ij} = E_{ij}A \quad \text{dla wszystkich } i, j.$$

Zobaczmy, jak wyglądają te macierze po pomnożeniu.
- Mnożąc z prawej stroną, AE_{ij} „kopiuje" kolumnę i macierzy A do kolumny j, więc wszystkie kolumny oprócz j są zerowe.
- Mnożąc z lewej strony, $E_{ij}A$ „kopiuje" wiersz j macierzy A do wiersza i, a pozostałe wiersze są zerowe. Porównajmy poszczególne elementy.

(a) Dla $i \neq j$ i dowolnego $k \neq j$:

$$(AE_{ij})_{ik} = 0, \qquad (E_{ij}A)_{ik} = a_{jk}.$$

Ponieważ macierze są równe, mamy $0 = a_{jk}$ dla wszystkich $j \neq k$. To znaczy, że wszystkie elementy poza przekątną są zerowe — A jest diagonalna.

(b) Dla pola (i, j):

$$(AE_{ij})_{ij} = a_{ii}, \qquad (E_{ij}A)_{ij} = a_{jj}.$$

Z równości macierzy otrzymujemy $a_{ii} = a_{jj}$ dla wszystkich i, j. A więc wszystkie elementy na przekątnej są takie same.

Wynika z tego, że:

$$A = \lambda I_n, \quad \text{dla pewnego } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sprawdzmy, czy takie A rzeczywiście spełnia warunki z zadania. dla $A = \lambda I_n$ i dowolnego B mamy

$$AB = \lambda B = BA,$$

Zatem wyznaczyliśmy macierze A spełniające warunek z zadania.