Antoni Iwanowski
Nr indeksu: 479235

Wystarczy, że pokażemy, że każda macierz z bazy standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^{n,n}$ należy do spanu zbioru macierzy operacji elementarnych. Niech $E_{i,j}$ oznacza macierz z 1 na pozycji (i, j) oraz 0 na każdej innej pozycji oraz niech $\mathcal{E}$ będzie zbiorem wszystkich macierzy operacji elementarnych na wierszach. Zauważmy, że $I \in \mathcal{E}$, ponieważ jest to macierz pomnożenia dowolnego wiersza przez skalar 1. Sprawdzimy, czy wszystkie $E_{i,k} \in span(\mathcal{E})$.

Przypadek 1: $i \neq j$ (poza przekątna)
Zauważmy, że macierz operacji elementarnej dodania do wiersza i wiersza j (niech będzie to macierz T) wyraża się następująco: $T = I + E_{i,j}$. Skoro span jest zamknięty na odejmowanie oraz $I, T \in \mathcal{E}$, otrzymamy: $E_{i,j} = T - I \in span(\mathcal{E}) \implies E_{i,j} \in span(\mathcal{E})$

Przypadek 2: $i = j$ (przekątna)
Zauważmy, że macierz operacji elementarnej mnożenia wiersza przez skalar 2, (niech będzie to macierz M) ma postać: $M = I + E_{i,j}$, jedynka na pozycji (i, j) zamieni się w dwójkę zatem dwukrotnie dodamy ten wiersz. Analogicznie jak wcześniej: $E_{i,j} = M - I \in span(\mathcal{E}) \implies E_{i,j} \in span(\mathcal{E})$
Pokazaliśmy, że każdy $E_{i,j} \in span(\mathcal{E})$. Uzyskaliśmy, więc:

$$\mathbb{R}^{n,n} = span(\{E_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}) \subseteq span(\mathcal{E})$$

Zatem zbiór macierzy operacji elementarnych rozpina cała przestrzeń $\mathbb{R}^{n,n}$.