

Antoni Iwanowski
Nr indeksu: 479235

Udowodnimy najpierw, że $\ker(A) = \ker(A^T \cdot A)$.
Niech $x \in \ker(A)$. Zatem zachodzi $Ax = 0$. Zobaczmy jak to wpływa na $A^T \cdot A$. Zatem $(A^T \cdot A)x = A^T \cdot (Ax) = A^T \cdot 0 = 0$. Czyli x zeruje również $A^T \cdot A$, zatem $x \in \ker(A^T \cdot A)$.
Pokażmy teraz inkluzję w drugą stronę. Niech $x \in \ker(A^T \cdot A)$. Zatem zachodzi $A^T \cdot Ax = 0$. Przekształćmy to równanie domnażając obie strony lewostronnie przez x^T . Otrzymujemy $x^T A^T \cdot Ax$ z własności transpozycji jest to równe: $(Ax)^T(Ax)$. Zatem $(Ax)^T(Ax) = 0 \implies \|Ax\|^2 = 0 \implies \|Ax\| = 0 \implies Ax = 0$, czyli x zeruje też A , zatem $x \in \ker(A)$.
Pokazaliśmy inkluzję w obie strony zatem zachodzi: $\ker(A) = \ker(A^T \cdot A)$.
Z twierdzenia o wymiarze obrazu i jądra wiemy, że:

$$\dim(\ker(A)) + \dim(\operatorname{im}(A)) = n$$

Skoro $\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{im}(A))$:

$$\dim(\ker(A)) + \operatorname{rank}(A) = n$$

Analogicznie wiemy, że:

$$\dim(\ker(A^T \cdot A)) + \operatorname{rank}(A^T \cdot A) = n$$

Czyli:

$$\dim(\ker(A^T \cdot A)) + \operatorname{rank}(A^T \cdot A) = \dim(\ker(A)) + \operatorname{rank}(A)$$

Skoro $\ker(A) = \ker(A^T \cdot A)$ to $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(A^T \cdot A))$:

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T \cdot A)$$

Sprawdźmy co się stanie jak w miejsce A wpiszemy A^T :

$$\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}((A^T)^T \cdot A^T) = \operatorname{rank}(A \cdot A^T)$$

Z twierdzenia 7.4 wiemy, że $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$. Zatem wychodzi:

$$\operatorname{rank}(A^T \cdot A) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A \cdot A^T)$$

Czyli:

$$\operatorname{rank}(A^T \cdot A) = \operatorname{rank}(A \cdot A^T)$$