Antoni Iwanowski
Nr indeksu: 479235

Zadanie 1

Rozpiszmy najpierw postać trygonometryczną licznika i mianownika ułamka z zadania. Zaczniemy od $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

$$|\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$$

Policzmy teraz: $1-i\sqrt{3}$.

$$|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$$

$$1-i\sqrt{3} = 2\cdot e^{i\cdot\frac{-\pi}{3}}$$

Zapiszmy teraz równanie z zadania:

$$Im\left(\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}\right)^n\right) = 0$$

$$Im\left(\left(\frac{2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}}{2\cdot e^{i\cdot\frac{-\pi}{3}}}\right)^n\right) = 0$$

$$Im\left(\left(e^{i\cdot(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})}\right)^n\right) = 0$$

$$Im\left(e^{in(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})}\right) = 0$$

$$Im\left(\cos\left(n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) = 0$$

Skoro interesuje nas tylko część urojona możemy zapisać:

$$\sin\left(n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 0$$

$$\sin\left(n\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) = 0$$

$$\sin \frac{7n\pi}{12} = 0$$

Zatem:

$$\frac{7n\pi}{12} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Skoro $NWD(12, 7) = 1$, to:

$$n = 12$$

W ten sposób pokazaliśmy, że najmniejsze $n \in \mathbb{N}$ wynosi 12.