Antoni Iwanowski
Nr indeksu: 479235

$$U = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 : p(i) + p(-i) = p(1) = 0\}$$
$$V = span(x^4, x^3 + x, x^2, 1)$$

Sprawdzmy ile wynosi $dimU$.

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$p(1) = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$$
$$p(i) = a_4 - ia_3 - a_2 - ia_1 + a_0 = a_4 - a_2 + a_0 + i(-a_3 - a_1)$$

Skoro $p$ ma współczynnniki rzeczywiste to $p(-i) = \overline{p(i)}$. Zatem $p(i)+p(-i) = p(i)+\overline{p(i)} = 2Re(p(i)) = 2(a_4 - a_2 + a_0) = 0$. Wynika z tego:

$$a_4 - a_2 + a_0 = 0 \implies a_0 = a_2 - a_4$$

Mamy też $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0$, podstawiając $a_0$ otrzymujemy:

$$a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_2 - a_4 = 0$$

$$a_3 + 2a_2 + a_1 = 0$$
$$a_1 = -2a_2 - a_3$$

Zatem $dimU = 3$ - możemy wybrac dowolne $a_2, a_3, a_4$ wtedy $a_0, a_1$ sa juz wyznanczone jednoznacznie.
$(1, x^2, x^3 + x, x^4)$ są od siebie niezależne więc stanowią bazę $V$.

$$v(x) = c_1x^4 + c_2(x^3 + x) + c_3x^2 + c_4 = c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_2x + c_4$$

Skoro bierzemy częśc wspólna z $U$ to współczynniki $c$ muszą spełniać równania dla $p(x)$. Podstawmy $a_4 = c_1, a_3 = c_2, a_2 = c_3, a_1 = c_2, a_0 = c_4$:

$$a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \implies c_1 + c_2 + c_3 + c_2 + c_4 = 0 \implies c_1 + 2c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$a_4 - a_2 + a_0 = 0 \implies c_1 - c_3 + c_4 = 0$$

Z drugiego równania otrzymujemy: $c_3 = c_1 + c_4$. Podstawmy do pierwszego:

$$c_1 + 2c_2 + (c_1 + c_4) + c_4 = 0$$

$$2c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0 \implies c_2 = -c_1 - c_4$$

Wstawmy do $p(x)$:

$$p(x) = c_1x^4 + (-c_1 - c_4)x^3 + (c_1 + c_4)x^2 + (-c_1 - c_4)x + c^4$$

$$p(x) = c_1(x^4 - x^3 + x^2 - x) + c_4(-x^3 + x^2 - x + 1)$$

Baza $U \cap V$ jest:

$$b_1 = x^4 - x^3 + x^2 - x$$

$$b_2 = -x^3 + x^2 - x + 1$$

Oraz $dim(U \cap V) = 2$.
Zauważmy, że $dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = 3 + 4 - 2 = 5$. Zatem bazą może być np: $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.
Z definicji sumy prostej wiemy, że $W$ spełnia :$(U \cap V) \cap W = \{0\}$. Można też zauważyć, że zgodnie z defnicją $W$: $dim(\mathbb{R}[x]_4) = dim(U \cap V) + dim(W) \implies dim(W) = dim(\mathbb{R}[x]_4) - dim(U \cap V) = 5 - 2 = 3$.
Bazą $U \cap V$ jest $\{x^4 - x^3 + x^2 - x, -x^3 + x^2 - x + 1\}$ Mamy już zatem w bazie wielomian stopnia 4 i 3. Zapiszmy to w postaci macierzowej, ale w macierzy 5x5 zostawiając miejsce na 3 wiersze bazy $W$ - najłatwiej jest je uzupełnić wpisując jednomiany o brakujących stopniach tj. $1, x, x^2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz jest trójkątna górna i ma niezerowe wyrazy na przekątnej. Widać zatem, że jest LNZ, zatem $W = span(1, x, x^2)$.