Antoni Iwanowski
Nr indeksu: 479235

Zadanie 1

Niech $u_k \in \{u_0, u_1, u_2, ..., u_{2024}\}$. Skoro u_k jest pierwiastkiem stopnia 2025 z 1, to $\overline{u_k}$ również jest pierwiastkiem. Przyjmijmy, że $u_k = e^{i\frac{2\pi k}{2025}}$, wtedy $\overline{u_k} = e^{-i\frac{2\pi k}{2025}}$. Ponieważ 2025 jest nieparzyste, jedynym pierwiastkiem rzeczywistym jest $u_0 = 1$; dla $k \in \{1, \dots, 2024\}$ tworzą się pary sprzężone.
Korzystamy z okresowości funkcji wykładniczej $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi m)}$ dla $m \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\overline{u_k} &= e^{-i\frac{2\pi k}{2025}} \\ &= e^{i\left(2\pi - \frac{2\pi k}{2025}\right)} \\ &= e^{i\cdot\frac{2\pi}{2025}\cdot(2025-k)} \\ &= u_{2025-k}\end{aligned}$$

Niech $f(x)$ oznacza krotność x, dla $x \in \{u_0, u_1, u_2, ..., u_{2024}\}$. Wiemy, że krotność pierwiastka i jego sprzężenia są takie same, zatem:

$$f(u_k) = f(\overline{u_k})$$

a ponieważ $\overline{u_k} = u_{2025-k}$, to:

$$f(u_k) = f(u_{2025-k})$$

Zgodnie z treścią zadania: $f(u_k) = k + 1$.

$$f(u_k) = f(u_{2025-k})$$

$$k + 1 = 2025 - k + 1$$

$$2k = 2025$$

$$k = 1012{,}5$$

Co jest sprzeczne, bo k musi być liczbą całkowitą nieujemną. Zatem nie istnieje taki wielomian p spełniający warunki zadania.