Курс «Математика (часть 1)»

Курс «Математический анализ. Часть 1»

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Раздел I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Глава 1. Понятие числа

§1.1. Множество действительных чисел

§1.2. Числовая ось. Модуль действительного числа

§1.3. Определение комплексного числа. Алгебраическая форма записи комплексного числа

§1.4. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа

§1.5. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра

§1.6. Извлечение корня степени *п*

Глава 2. Функция

§2.1. Понятие функции. Способы задания функции

§2.2. Простейшие свойства функций

§2.3. Понятие обратной функции

§2.4. Элементарные функции

§2.5. Задание функции в полярных координатах

§2.6. Уравнение кривой в параметрическом виде

Глава 3. Теория пределов

§3.1. Предел функции

§3.2. Бесконечно малая величина и её свойства

§3.3. Свойства пределов

§3.4. Свойства пределов, связанные с неравенствами

§3.5. Первый замечательный предел

§3.6. Второй замечательный предел

§3.7. Сравнение бесконечно малых величин

§3.8. Эквивалентные бесконечно малые величины и их свойства

§3.9. Вычисление пределов с помощью эквивалентных величин

§3.10. Односторонние пределы

Глава 4. Непрерывные функции и их свойства

§4.1. Непрерывность функции в точке

§4.2. Точки разрыва и их классификация

§4.3. Свойства функций, непрерывных в точке и на интервале

Раздел II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 1. Производная и дифференциал

§1.1. Определение производной

§1.2. Геометрический смысл производной, уравнение касательной

§1.3. Правила дифференцирования

§1.4. Производные элементарных функций

§1.5. Дифференциал

§1.6. Производные и дифференциалы высших порядков

Глава 2. Основные теоремы дифференциального исчисления

§2.1. Теорема Ролля

§2.2. Теорема Лагранжа

§2.3. Теорема Коши

§2.4. Формула Тейлора

§2.5. Правило Лопиталя

§2.6. Виды неопределенностей и их раскрытие

Глава 3. Исследование функций

§3.1. Условия возрастания и убывания функций

§3.2. Экстремум функции. Необходимое условие

§3.3. Достаточные условия экстремума

§3.4. Выпуклость и вогнутость графика функции

§3.5. Асимптоты графика функции и их нахождение

§3.6. Построение графика функции

Раздел III. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 1. Основные понятия и свойства функции нескольких

переменных

§1.1. Понятие функции нескольких переменных

§1.2. Предел функции нескольких переменных

§1.3. Непрерывность функций двух переменных

Глава 2. Дифференциальное исчисление функций двух переменных

§2.1. Частные производные

§2.2. Дифференциал

§2.3. Дифференцирование сложной функции и неявной функции

§2.6. Частные производные и дифференциалы высших порядков

§2.7. Формула Тейлора для функции двух переменных

Глава 3. Исследование функций двух переменных

§3.1. Скалярное поле и его геометрия

§3.2. Производная по направлению

§3.3. Градиент

§3.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

§3.2. Экстремум функции двух переменных

Ответы к задачам I-III разделов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предмет, основы которого излагаются в этом пособии, носит название «математический анализ», - название, которое студенты сокращают: «матанализ», или даже: «матан». Полное название этой дисциплины, однако, не только более длинное: «математический анализ функций с помощью дифференциального и интегрального исчислений», но и даёт представление о том, чем занимается данная часть высшей математики. Основная идея дифференциального исчисления заключается в изучении и исследовании локальных свойств функции для описания свойств функции в целом.

Основателями дифференциального исчисления по праву считаются английский ученый И.Ньютон и немецкий ученый Г.Лейбниц. В их трудах были введены основные понятия дифференциального исчисления – производная и дифференциал. И.Ньютон разработал теорию флюксий (в современной терминологии – производных). В работах Г.Лейбница, независимо от И. Ньютона, дифференциальное исчисление построено на основе понятия дифференциала. Оба этих понятия, как и важнейшее – непрерывность, базируются на идее предела.

Впрочем, отдельные задачи дифференциального исчисления, связанные с нахождением максимума и минимума некоторых функций, а также с вычислением касательных к некоторым кривым, были решены еще математиками Древней Греции.

В начале XIX века в трудах Ш. Лагранжа, О. Коши, Б. Тейлора, К. Гаусса, Эйлера дифференциальное исчисление обрело достаточно законченную форму, а курс этого раздела математического анализа принял классический вид.

В настоящем пособии вводимые идеи и понятия по возможности подробно поясняются большим количеством примеров и иллюстраций. Каждый из трёх разделов снабжен набором задач для самостоятельного решения, а задачи – ответами, помещенными в конце пособия.

Пособие рассчитано на студентов 1 курса всех технических направлений и профилей как дневного, так и заочного обучения. Электронный вариант пособия доступен также студентам, обучающимся с применением дистанционных технологий.

**РАЗДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ**

**Глава 1. Понятие числа**

**§1.1. *Множество действительных чисел***

В этом разделе мы дадим общие сведения о действительных числах, необходимые для усвоения материала, изложенного в книге. Понятие действительного числа будет дано на основании интуитивного представления и знаний, полученных в средней школе.

Читателю, заинтересованному в более полном изучении этого вопроса можно рекомендовать учебники [1-14].

Хорошо известно, что целые положительные числа образуют множество, называемое *множеством натуральных чисел* и обозначаемое в дальнейшем буквой *N*:

.

Добавляя к натуральным числам число 0 и целые отрицательные числа, получим *множество всех целых чисел*, которое обозначают *Z*:

.

Числа, представимые в виде несократимой дроби , где *p* и *q* – целые числа, а , называются *рациональными числами* и обозначают *Q*. Так как любое целое число  представимо в виде , то это означает, что все целые числа – рациональные. Часто используется эквивалентное определение рационального числа: рациональными называются числа, которые можно представить в виде конечной десятичной или бесконечной периодической дроби.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*. Возникает вопрос: существуют ли иррациональные числа? Положительный ответ на этот вопрос даёт следующее утверждение:

**Утверждение 1***. Число  является иррациональным числом*.

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного. По определению число  является решением уравнения . Допустим, что число  - рациональное. Тогда оно представимо в виде несократимой дроби , т.е. . Отсюда следует, что ; возведем в квадрат обе части последнего равенства, получим

 (1.1)

Так как правая часть (1.1) делится на 2, то и левая делится на 2, но это в свою очередь означает, что *р* делится на 2, т.е.  делится на 4. Тогда из (1.1) следует, что  делится на 4, т.е.  делится на 2, а значит,  делится на 2, т.е. дробь  сократимая, что противоречит условию. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Примером иррационального числа служит десятичная дробь вида



Здесь серия нулей после каждой единицы увеличивается на один нуль по сравнению с предшествующей серией нулей. Иррациональность этого числа следует из того факта, что выписанная десятичная дробь не обладает периодом.

§**1.2. *Числовая ось. Модуль действительного числа***

Множество всех действительных чисел, включающее в себя рациональные и иррациональные числа, обозначим .

На протяжении изучения основ математического анализа значительную роль играет геометрическое изображение чисел. Для такого представления действительных чисел возьмём прямую линию и на ней зафиксируем точку *О*, которая является началом отсчёта длин, выберем масштаб, т.е. отрезок, длина которого принимается за единицу, и установим направление отсчёта. Обычно, справа от *О* – положительные числа, слева – отрицательные.

По определению, прямую линию, на которой указаны начало отсчёта, масштаб и направление отсчёта, называют числовой осью (рис. 1.1).

0

1

Рис. 1.1

*O*

*M*α

α

Каждому действительному числу  поставим в соответствие точку  такую, что длина отрезка прямой  в точности равна . Очевидно, существует взаимно-однозначное соответствие между числами и точками числовой оси, поэтому точку числовой оси, соответствующую числу , будем обозначать также . Точка *О* соответствует числу «ноль».

На числовой оси наглядно представляются различные соотношения между числами. Меньшему числу соответствует точка, лежащая левее точки, изображающей большее число. Числу, заключенному между двумя данными числами, соответствует точка, лежащая между точками, изображающими данные числа.

Приведём ещё несколько определений и следствий из них, которые будут использоваться нами на протяжении всего последующего изложения.

**Определение 1.1**. *Абсолютной величиной* (*модулем*)  числа  называется число, определяемое следующим образом:



Из определения следует, что  для всех чисел  таких, что ,  при . Геометрически модуль числа  это длина отрезка числовой оси от точки *О* до точки . Отметим, что если , то неравенство

, (1.2)

равносильно двойному неравенству



Соотношение (1.2) означает, что точка  отстоит от точки *О* на расстоянии не более чем , а это возможно только в том случае, когда  принадлежит интервалу .

Рис. 1.2

*O*

*ε*

*– ε*

Приведем некоторые свойства абсолютной величины, непосредственно вытекающие из определения:

1. Абсолютная величина суммы не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых, т.е.

.

1. Абсолютная величина разности не меньше разности абсолютных величин

.

1. Абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей

.

1. Абсолютная величина частного равна частному абсолютных величин

.

**Определение 1.2.** *Интервалом*  называется множество чисел , удовлетворяющих соотношениям



**Определение 1.3**. *Отрезком*  называется множество чисел , удовлетворяющих соотношениям

.

**Определение 1.4**. *Полуоткрытым интервалом* или  называется множество чисел , удовлетворяющих соотношениям

 или, соответственно, .

Кроме конечных интервалов могут рассматриваться бесконечные интервалы. Так запись  означает, что ; запись  означает, что ; наконец, запись  означает, что . Запись  означает, что все точки отрезка  принадлежат интервалу .

**Определение 1.5**. Множество точек , удовлетворяющих неравенству

 или 

называется ε-*окрестностью* точки .

*x*

Рис. 1.3

*a*

*a + ε*

*a – ε*

**§1.3. *Определение комплексного числа.  
Алгебраическая форма записи комплексного числа***

Решение уравнения вида  привело нас к понятию иррационального числа. Однако не все квадратные уравнения имеют решение, выражаемое рациональным или иррациональным числом, т.е. разрешимое в действительных числах. Например, чтобы решить уравнение , необходимо расширить множество действительных чисел. Это можно сделать, если ввести понятие комплéксного числа.

**Определение 1.6**. *Комплексными числами* называются выражения вида  (*a* и *b* – действительные числа, *i* – некоторый символ, смысл которого выяснится ниже). При этом *a* называется *действительной частью* числа *z* и обозначается ; *b* называется *мнимой частью* числа *z* и обозначается .

Два комплексных числа и  равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т.е.  и 

Арифметические операции над комплексными числами определяются следующим образом:

- *суммой* чисел  и  называется число

;

- *разностью* чисел  и  называется число

;

- *произведением* чисел  и  называется число

*a1a2 – b1b2 + (a1b2 + a2b1)i*.

Определенные таким образом операции удовлетворяют всем правилам сложения и умножения действительных чисел:

1. коммутативность сложения ,
2. ассоциативность сложения ,
3. коммутативность умножения ,
4. ассоциативность умножения ,
5. дистрибутивность умножения относительно сложения

.

Таким образом, сложение, вычитание и умножение комплексных чисел производятся согласно формулам

*(a1 + b1i) ± (a2 + b2i) = a1 ± a2 + (b1 ± b2)i*, (1.3)

*(a1 + b1i)(a2 + b2i) = a1a2 – b1b2 + (a1b2 + a2b1)i.* (1.4)

Комплексное число вида *a + 0i* отождествляется с действительным числом *a*, т.е. считают, что *a + 0i = a*. Например,

0 + 0*i* = 0, 1 + 0*i* = 1, – 1 + 0*i* = – 1

Таким образом, множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел.

Числа 0 *+ bi* называют *чисто мнимыми* и обозначают *bi.* Например, 0 *– 2i* = -2*i*, 0 + 1*i* = *i*. Смысл символа *i* вытекает из формулы (1.4):

. (1.5)

Число  принято называть *мнимой единицей*.

Числа  и , т.е. числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряженными* комплексными числами.

Формула (1.4) не нуждается в запоминании. Она получается, если формально перемножить двучлены  и  по обычному правилу умножения, затем, в соответствии с формулой (1.5), заменить *i*2 на –1.

Рассмотрим примеры.

**Пример1.1**. Найти сумму и произведение двух сопряженных комплексных чисел  и .

Решение. По формуле (1.3) находим сумму чисел

.

Произведение находим формальным перемножением

.

И в том, и в другом случае получаем в результате действительные числа. На это опирается определение частного двух комплексных чисел:

- *частным* чисел  и  (при условии  и  одновременно) называется число

 (1.6)

Формула (1.6) для деления комплексных чисел получается, если числитель и знаменатель дроби умножить на число, сопряженное знаменателю, и после этого раскрыть скобки. Например, для частного двух сопряженных чисел:

.

**Пример 1.2**. Даны комплексные числа  и . Найти разность *z*2 – *z*1 и частное z2/z1.

Решение. По формуле (1.3) находим

z2 – z1 = (2 + 5*i*) – (-1 + 6*i*) = 3 – *i*.

Частное находим по формуле (1.6):

 .

**Пример 1.3**. Выполнить действия

.

Решение. Перемножив числа, стоящие в знаменателе. получим

.

Далее поступим так же, как в примере 1.1. Тогда

.

**§1.4. *Геометрическая интерпретация комплексных чисел.   
Модуль и аргумент комплексного числа.  
 Тригонометрическая форма записи комплексного числа***

Каждому комплексному числу  может быть поставлена в соответствие точка  координатной плоскости и, наоборот, каждой точке  плоскости можно соотнести комплексное число . Установленное таким образом соответствие является взаимно однозначным. Оно дает возможность рассматривать комплексные числа как точки координатной плоскости. Такую плоскость называют комплексной плоскостью. При этом ось абсцисс называют *действительной осью* (на ней расположены точки, соответствующие действительным частям комплексного числа), ось ординат – *мнимой осью* (на ней лежат точки, соответствующие мнимым частям комплексного числа).

φ

*b*

*a*

*z*

*y*

*O*

*x*

*М*

Рис. 1.4

Используя взаимосвязь между точками плоскости и векторами, комплексное число  удобно интерпретировать геометрически как вектор  (рис.1.4). Каждому вектору плоскости с началом в точке O (0; 0) и с концом в точке  соответствует комплексное число  и наоборот.

Точке *O* (0;0) соответствует нулевой вектор.

Опираясь на установленное взаимно-однозначное соответствие и не боясь путаницы, мы будем комплексное число *z* называть также точкой или вектором *z*.

Изображение комплексных чисел векторами позволяет дать простое геометрическое истолкование операциям над комплексными числами. Например, сумма комплексных чисел геометрически может быть истолкована как вектор, равный сумме векторов, соответствующих слагаемым комплексным числам (рис.1.5).

**Определение 1.7**. *Модулем* комплексного числа называется длина соответствующего этому числу вектора.

*z*1

*y*

*O*

*x*

Рис. 1.5

*z*2

*z*1+*z*2

Для модуля числа *z* используется обозначение |*z*|. Модуль комплексного числа может быть вычислен по формуле

. (1.7)

**Определение 1.8**. *Аргументом* комплексного числа *z* ≠ 0 называется угол между положительным направлением действительной оси и вектором *z*, причем этот угол считается положительным, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательным, если отсчет производится по часовой стрелке. Для числа *z* = 0 аргумент не определяется.

Аргумент комплексного числа, в отличие от модуля, определяется неоднозначно. Например, аргументами числа  являются каждый из углов φ*k* = +2π*k*, где *k* – произвольное целое число. Будем называть *главным значением* аргумента угол . Для обозначения аргумента числа используется символ  (будем также употреблять букву φ). Главное значение аргумента обозначим . Таким образом,



Действительная и мнимая части комплексного числа  выражаются через его модуль  и аргумент φ следующим образом:

 (1.8)

Следовательно, комплексное число  можно записать в виде

. (1.9)

Такая форма записи называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа.

Аргументы φ комплексного числа могут быть найдены из формул

 или  (1.10)

Так как , то получаем

, (1.11)

На рис. 1.6 точки *М*1и *М*2 расположены симметрично относительно начала координат. Комплексное число, соответствующее точке *М*1 , имеет аргумент, равный φ, а число, изображенное точкой *М*2 , имеет аргумент, равный .

φ

*b*

*a*

*z*

*y*

*O*

*x*

*М*1

Рис. 1.6

*М*2

*- a*

*- b*

Для точек *z*, лежащих на действительной оси,  при  и  при . Если точка *z* лежит на мнимой оси, то  при  и  при .

**Пример 1.4.** Найти модули комплексных чисел

z1 = 2 – *i,* z2 = 2 + 5i, z3 *= i.*

Решение. По формуле (1.14) находим

|z1| =  , |z2| = .

Для вычисления модуля z3 нет необходимости использовать формулы (1.7). Длина вектора z3 = i, очевидно, равна единице и поэтому |z3| = 1.

**Пример 1.5**. Найти аргументы комплексных чисел

z1 = -*i*, z2 = 1, z3 = -1 + *i*.

Решение. Построив векторы z1, z2, z3, находим один из аргументов для каждого числа:   
φ1 = -π/2, φ2 = 0, φ3 = 3π/4. Следовательно,

, , arg *z*3 = ,

где k – произвольное целое число.

**Пример 1.6**. Найти аргументы комплексного числа *z* = -1 –*i.*

Решение*.* В данном случае *a* = -1, *b* = –*i*. Система (1.10) имеет вид



Решив эту систему, найдем . Следовательно,



**Пример 1.7**. Найти аргументы комплексного числа z = .

Решение*.* Каждый из аргументов φ числа z =  удовлетворяет уравнению

 .

Из этого уравнения следует, что

.

Так как число z =  расположено во втором квадранте комплексной плоскости, то его аргументами будут числа φk при нечетных значениях k. Следовательно,



**§1.5. *Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра***

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел особенно удобна при умножении и делении чисел. Пусть  и  – два числа, записанные в тригонометрической форме. Тогда

.

Используя тригонометрические формулы суммы углов, получим

, (1.12)

Таким образом, *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения*. В частности, при  имеем



Обобщая на общий случай возведения комплексного числа в натуральную степень, получим *формулу Муавра*

 (1.13)

Она показывает, что *при возведении комплексного числа в целую положительную степень, модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени*.

Если положить , то формула примет вид

,

откуда вытекают, в частности, тригонометрические формулы тройных углов:

; .

При делении комплексных чисел в тригонометрической форме, используя аналогично тригонометрические формулы, получим

. (1.14)

Таким образом, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, разность аргументов делителя и делимого является аргументом частного*.

**Пример 1.8**. Найти произведение и частное двух чисел

 и .

Решение. Так как , , то , а . Аргументом произведения  будет сумма . Поскольку , то аргументом частного будет . Таким образом

, .

**Пример 1.9**. Записать в тригонометрической форме комплексное число

.

Решение. Число  имеет модуль, равный 1, и аргумент ; число  имеет модуль 2 и аргумент ; число  имеет модуль  и аргумент . Поэтому , а аргумент . Следовательно,



**Пример 1.10**. Возвести в девятую степень комплексное число .

Решение. Модуль числа  равен 2, а одним из аргументов является угол , поэтому модуль числа  равен , а аргумент числа  равен . Следовательно,

.

**§1.6. *Извлечение корня степени n***

*Число  называется корнем степени  из числа  (обозначается ), если .*

Например, числа  и  являются корнями второй степени (квадратными корнями) из числа , так как  и .

Из определения корня вытекает, что каждое решение уравнения  является корнем степени  из числа . Другими словами, для того чтобы извлечь корень степени  из числа , достаточно решить уравнение . Это уравнение имеет  решений (корней степени  из ), которые, если использовать тригонометрическую форму записи (1.9), могут быть найдены по формуле

. (1.15)

В правильности этой формулы нетрудно убедиться, возводя каждое из чисел  в степень *n*. Из формулы (1.15) видно, что все корни степени  из числа  имеют один и тот же модуль , но разные аргументы, отличающиеся друг от друга слагаемым, кратным числу . Отсюда следует, что комплексные числа, являющиеся корнями степени  из числа , соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного -угольника, вписанного в окружность радиуса  с центром в точке *О*.

Таким образом, символ  не имеет однозначного смысла. Поэтому, употребляя его, следует четко представлять себе, что под этим символом подразумевается. Например, используя запись , следует позаботиться о том, чтобы было ясно, понимается ли под этим символом число  или число , или же пара этих чисел.

**Пример 1.11**. Найти все значения .

Решение. Запишем число  в тригонометрической форме

. Согласно формуле (1.15) получаем

.

Следовательно,

,

*y*

*x*

Рис. 1.7

*w*0

*w*1

*w*2

*w*3

2

,

,

.

На рис.1.7 изображены все четыре значения . Точки, соответствующие числам , находятся в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса  с центром в точке .

**Пример 1.12**. Записать число  в алгебраической форме при условии, что действительные части корней  и  отрицательны.

Решение. Для извлечения квадратного корня из числа  положим , тогда  и, следовательно,  и  удовлетворяют системе уравнений



Решив систему, получим два решения  и . По условию действительная часть  отрицательна, поэтому . Аналогично найдем . Таким образом,

.

**Глава 2. Функция**

**§2.1. *Понятие функции. Способы задания функции***

Идея зависимости одних величин от других возникла, по-видимому, на заре становления науки. Однако четкие математические определения появились гораздо позже. Например, Л. Эйлер описывал функцию так: «Величины, зависящие от других так, что с изменением вторых меняются и первые, принято называть их функциями». Таким образом, одни величины считаются независимыми переменными, а другие – зависимыми, т.е. функциями.

Например, изучая прямолинейное движение с постоянным ускорением, мы имеем дело с такими величинами как время *t*, ускорение *a*, начальная скорость *V*0. Функциями же служат путь *S*, пройденный за время *t* или скорость в момент времени *t* , т.е. величины, которые зависят от значения величин *t*, *a*, *V*0. Эта зависимость выражается формулами

.

Другой пример: в формуле Эйнштейна  энергия *E* зависит от массы *m* – независимой переменной.Рассмотрим более подробно случай, когда функция зависит только от одного независимого переменного. Дадим строгое определение функции.

**Определение 2.1**. Пусть - некоторое подмножество действительных чисел. Предположим, что каждому числу  ставится в соответствие единственное число *y*, согласно некоторому правилу. В таком случае будем говорить, что на множестве  *задана* *однозначная функция* или просто функция. Этот факт запишем в виде:  , где *f* обозначает конкретный вид этого правила

Множество  назовем *областью определения* функции . Величину  называют *независимой переменной* или *аргументом*; переменную  называют *функцией* (*зависимой переменной*).

Множество всех значений функции , , будем называть *образом* множества  (или областью значений функции) и обозначать .



Говорят, что функция  отображает  на множество . Если , то будем говорить, что *f* отображает  в *A*. Следует отметить, что символ  обозначает число *y*, которое соответствует числу *x*, . Например, если , то  - значение функции в точке ; если же , то мы говорим, что функция *f* не определена в точке .

Для функций *f* и *g* заданных на одном и том же множестве  определены функции: сумма ; разность ; произведение ; частное . Значения новых функций определены, соответственно, выражениями: , , , . В последнем случае предполагается, что .

Рассмотрим способы задания функций.

Одним из самых распространенных является *аналитический* способ, т.е. определение функции с помощью формулы. Например,

; ; ; .

В дальнейшем будем рассматривать только *действительные функции*, т.е. функции действительного независимого переменного, принимающие действительные значения. Все действительные значения независимой переменной, при которых определена функция, называют *естественной областью определения функции.*

Всякий раз, когда находится область определения функции, это, как правило, естественная область определения. Например, функция  имеет областью определения отрезок , а функция  определена на полубесконечном интервале .

Приведенные примеры определяют функцию *явно*. Примером неявного задания функции может служить уравнение . В общем случае уравнение  определяет *неявно заданную функцию*  *y* от *x* , независимо от того, возможно или невозможно разрешить это уравнение относительно *y*, т.е. получить из него уравнение .

Другим возможным способом задания функции является *графический* способ

На плоскости задается декартова система координат . На оси  возьмем отрезок  и изобразим некоторую кривую Г, которая обладает следующим свойством: любая прямая, параллельная оси  и проходящая через  пересекает Г ровно в одной точке *А* (рис.2.1). В этом случае кривую Г называют *графиком*. График определяет функцию  согласно следующему правилу: произвольной точке , ставится в соответствие значение  определяемое как ордината точки 

*a*

*b*

*x*

*y*

*x*

*Г*

*A*

Рис. 2.1

*О*

Аналогичным образом функция определяется графически на интервале, на всей числовой оси, на объединении двух отрезков и т.д. Если функция  задана графически на , то достаточно просто получить графики следующих функций:

1)  - сжатие (при ) или растяжение (при ) графика по оси ;

2)  - сдвиг графика вверх (при ) или вниз (при ) по оси ;

3)  - сдвиг графика вправо (при ) или влево (при ) по оси ;

4)  - сжатие (при ) или растяжение (при ) графика по оси .

Заметим, что графики функций 1) и 2) определены на том же интервале , что и . Ординаты графика функции 1) получаются из ординат графика функции  умножением на число . Ординаты графика функции 2) получаются из ординат графика  сдвигом последних вверх на величину , если , и сдвигом вниз на , если  (рис.2.2 и 2.3).

График функции 3) получается из исходного сдвигом вправо на , если , и сдвигом на , если . И наконец, график функции 4) при  определен на интервале . График функции  получается из исходного равномерным сжатием его в  раз по оси  (рис.2.4 и 2.5).

*y*

*x*

Рис. 2.2.

*b*

*a*

*y* = 3*f*(*x*)

*y* = *f*(*x*)

1

3

0

*y*

*x*

Рис. 2.3.

*b*

*a*

*y* = *f*(*x*)+*c*

*y* = *f*(*x*)+2

2

0

*y*

*x*

Рис. 2.5

*y* = *f*(*x*)

*y* = *f*(0,5*x*)

0

1

2

*y*

*x*

Рис. 2.4

*y* = *f*(*x*)

*y* = *f*(*x*–4)

0

4

Функция может быть задана в виде *таблицы*. Например, измеряя температуру воздуха в течение суток через каждый час, мы получим таблицу, которая соответствует функции .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| t | 0 | 1 | … | 24 |
| T | T0 | T1 | … | T24 |

Итак, мы определили три типа задания функции. Очевидно, что для функции, заданной формулой, можно построить и соответствующий ей график и таблицу.

Решение обратной задачи – по графику функции восстановить её формулу – не всегда вполне определено. Как для функции, заданной графически или таблично, выписать формулу ее выражающую? Возникает вопрос: а что называть формулой? В частности, вкладывать ли в понятие формулы только конечное число действий?

Во всяком случае, для нас важно, что каким бы из перечисленных выше способов функция ни была бы задана, она является объектом изучения математического анализа.

**§2.2. *Простейшие свойства функций***

Процесс изучения функций состоит в исследовании ее поведения при изменении независимой переменной. Всюду в дальнейшем предполагается, что независимая переменная изменяется, возрастая и принимая все промежуточные значения. Расширяя наши познания, мы будем давать, все более подробное описание функции. Свои исследования начнём, используя только элементарные свойства, доступные из школьного курса математики. Рассмотрим следующие простейшие свойства функции:

1. Наличие нулей
2. Четность и нечетность
3. Периодичность
4. Рост и убывание

Остановимся подробнее на каждом из этих свойств.

**Определение 2.2.** Если , то число  называют *нулем* функции.

*a*

*b*

*с*

*y*

*x*

*d*

Рис. 2.6

*x*0

Если для всех  функция  положительна (), то на данном интервале график функции находится выше оси абсцисс; если же для всех  функция  отрицательна, то на интервале  график функции  находится под осью абсцисс (рис.2.6). В нулях функции график пересекает ось абсцисс.

**Определение 2.3.** Функция  называется *четной*, если для всех значений *х* из области определения выполняется равенство ; функция называется *нечетной,* если для всех значений *х* из области определения выполняется равенство .

Отметим, что *область определения как четных, так и нечетных функций* *обязательно симметрична относительно начала системы координат*.

Так функция  является четной. Если же рассматривать эту же функцию , но заданную, например, только на интервале , то она четной уже не является.

Примерами четных функций, заданных на всей числовой оси, служат также функции , , . Примерами нечетных функций служат функции , . Отметим, что функция не обязательно должна быть четной или нечетной. Например, функции , ,  не являются ни четными, ни нечетными. Такие функции будем называть функциями общего вида.

Отметим, что графики четных функций симметричны относительно оси  (рис.2.7); график любой нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис.2.8). В самом деле, пусть точка ** принадлежит графику четной функции . Точка  симметричная точке  относительно оси  также принадлежит графику этой функции в силу того, что . Соответственно, если точка ** принадлежит графику нечетной функции, то симметричная относительно начала координат точка  также лежит на кривой , так как .

**Определение 2.4.** Функция  называется *периодической*, если существует такое число , что для любого  из области определения функции  также принадлежат области определения и при этом .

*M'*

*y*

*x*

*M*

Рис. 2.7

*M''*

*y*

*x*

*M*

Рис. 2.8

Число  называется *периодом* функции . Совершенно очевидно, что если  - период, то числа , , ,  также являются периодами. В самом деле, например,

;

.

Вообще, если  период, то и  также период при любом :  Таким образом, всякая периодическая функция имеет бесконечно много периодов.

Учитывая это и говоря о *периоде* функции, мы будем иметь в виду *наименьшее положительное* *число*  для которого выполняется равенство

.

Примерами периодических функций являются тригонометрические функции , , , . Первые две из них имеют период , вторые две – период .

*y*

*x*

*T*

Рис. 2.9

*O*

Особо следует отметить, что если периодическая функция с периодом  не определена в точке , то она не определена во всех точках ,  Например функция  не определена в точках ; а  в точках , 

Для построения графика периодической функции, достаточно построить его на интервале , а затем повторить этот график на всю числовую ось с периодом *Т* (рис.2.9).

*А*

*y*

*x*

*C*

Рис. 2.10

*B*

**Определение 2.5.** Функция называется *возрастающей* на интервале, если для любых двух значений аргумента из этого интервала большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется *убывающей* на интервале, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Итак, функция  возрастает на интервале , если для любых , таких что  вытекает .

Функция убывает если для любых , таких что  вытекает . Если рассматривать график возрастающей функции (рис.2.10) слева направо (т.е. по возрастанию аргумента), то график поднимается вверх (дуга *AB*), для убывающей функции график опускается вниз (дуга *BC*).

Интервал изменения аргумента, в котором функция возрастает, называется *интервалом возрастания*, а интервал, в котором функция убывает, называется *интервалом убывания*. Интервалы возрастания и убывания функции называют интервалами *монотонности*.

Функцию  называют *неубывающей* на интервале , если для любых  таких, что , вытекает нестрогое неравенство . Соответственно, функция называется *невозрастающей*, если для любых  таких, что , выполняется нестрогое неравенство .

При построении графиков функции выделяются интервалы возрастания и убывания функции, а также интервалы ее постоянства.

Если график функции известен, то нахождение интервалов монотонности не вызывает затруднения. Наша цель – научиться находить участки монотонности и в том случае, когда график функции неизвестен.

**§2.3. *Понятие обратной функции***

Предположим, что задана функция

. (2.1)

По определению функции, фиксируя значение переменной величины , получаем соответствующее значение . Спрашивается, возможно ли поменять местами  и , т.е. считать - аргументом, а  - функцией? Но тогда уравнение (2.1) определяет , как неявную функцию . В этом случае функция  от переменной  называется *обратной* по отношению к исходной функции. Если уравнение (2.1) разрешимо относительно , то можно получить явное выражение обратной функции

. (2.2)

При этом функция  для всех допустимых значений  удовлетворяет условию: .

Например, в формуле пройденного пути свободно падающего тела



время  - аргумент, а  - функция. Разрешив это уравнение относительно , получим функцию, обратную данной функции.

.

В общем случае, если придерживаться стандартных обозначений и обозначать независимую переменную , а функцию , то обратную функцию нужно записать в виде

.

Функции  и  - взаимно обратные. Например, функции  и  взаимно обратные.

Обратную функцию, в нашем понимании, может иметь только монотонная функция. В некоторых случаях для получения обратной функции вводят дополнительные ограничения на ее возможные значения. Например, неоднозначная функция  является обратной для функции . Если условиться, что берётся лишь арифметическое значение корня, то обратная функция будет однозначной.

Часто используется обозначение  для функции, обратной к функции .

Особо следует отметить, что одна и та же кривая представляет собой как график прямой функции, так и обратной. Все зависит от того, на какой оси –  или  – выбирается аргумент.

*y=*φ(*x*)

*y*

*x*

Рис. 2.11

*y=f*(*x*)

Если прямую и обратную функции считать функциями одного аргумента , т.е. рассматривать функции  и , то график одной этих функций есть зеркальное отображение графика другой функции относительно биссектрисы I и III координатных углов, т.е. прямой  (рис.2.11). В самом деле, если точка  лежит на графике одной из этих функций, то тогда симметричная относительно указанной биссектрисы точка  непременно лежит на графике другой.

**§2.4. *Элементарные функции***

Для определения элементарных функций нам потребуются хорошо известные из школьного курса функции, которые называют *простейшими* или *основными элементарными функциями*. К ним относятся:

* степенная функция ;
* показательная функция , ;
* логарифмическая функция , ;
* тригонометрические функции ;
* обратные тригонометрические функции  .

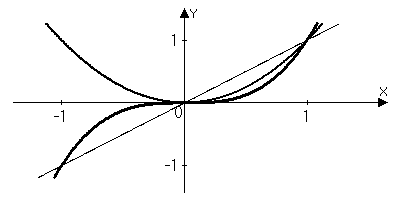
Для удобства дальнейшего изучения введем понятие *сложной функции.* Рассмотрим две функции (компоненты)  и . Пусть при этом область определения функции  содержит область значений функции , т.е. . Тогда можно рассматривать функцию , которую называют *композицией* (*суперпозицией*) функций  и . Заметим, что и область определения, и область значений такой функции от функции может не совпадать с соответствующими областями компонент. Будем называть *сложной* функцией всякую композицию основных элементарных функций. Например, для двух функций  и  можно получить две сложных функции:  и . Другой пример: имея функции  и , получим из них композиции  и .

Разумеется, функции-компоненты могут совпадать. Так, например, для функции , можно рассматривать сложные функции ,  и т.д.

**Определение 2.6***. Элементарной функцией* называется функция, полученная из простейших функций с использованием конечного числа арифметических действий и конечного числа операций композиции (взятия функции от функции).

Остановимся более подробно на простейших элементарных функциях, достаточно полно изученных в курсе средней школы.

* *Степенная функция* .



*y=*1/*x*3

*y=*1/*x*2

*y*=*x*3

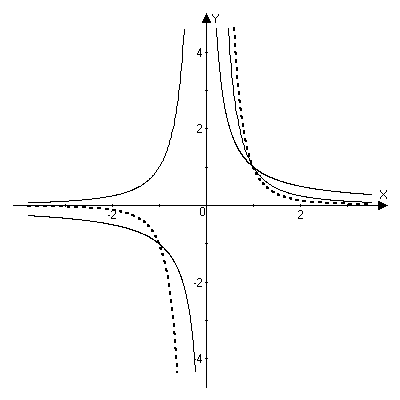
*y*=*x*

Рис. 2.12

*y*=*x*2

*y=*1/*x*

Рис. 2.13



Рассмотрим вначале случай, когда  – целое число. Если , то функция  определена на всей числовой оси. В этом случае графиками функции являются: при  – прямая линия, при  – парабола, при  – кубическая парабола и т.д. На рис.2.12 приведены некоторые из этих графиков.

Если , то областью определения функции  является вся числовая ось за исключением точки . В этом случае графиками являются гиперболы различных порядков. Часть из них приведена на рис.2.13.

*y*

*x*

Рис. 2.14





0

1

1

Рис. 2.13

Рассмотрим теперь случай, когда  – дробное рациональное число ( и  целые числа, ). Тогда степенная функция  определяется следующим образом: . Областью определения такой функции является при  бесконечный интервал , а при  интервал (0,+∞). Наибольший интерес представляет радикал , где - натуральное число. Областью определения такой функции при четном  является множество всех неотрицательных чисел , а при нечетном  - вся числовая ось . Так как функция  является обратной для функции , то графиками радикалов, т.е. функций вида , являются либо параболы различных нечетных порядков, либо части парабол четных порядков. Графики некоторых таких функций приведены на рис.2.14.

* *Показательная функция* . Функция определена на всей числовой оси. Значение этой функции всегда положительно, следовательно, ее график проходит над осью абсцисс. При любом значении  график функции всегда проходит через точку , ввиду того, что . При , функция возрастает и при  – убывает. На рис.2.15 приведены графики показательной функции.

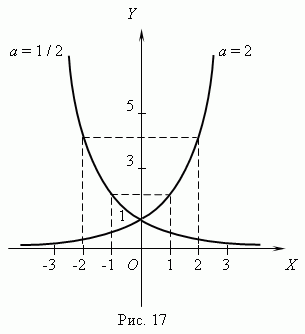




Рис. 2.15

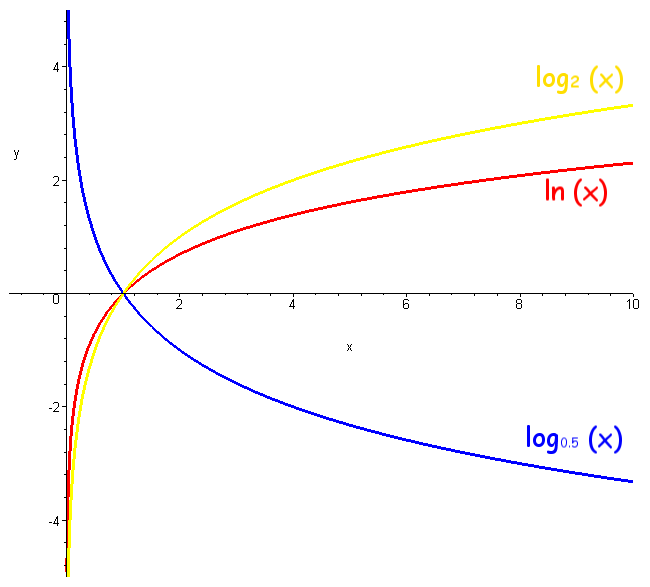


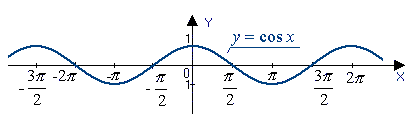
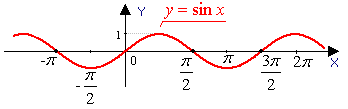
Рис. 2.16

*Логарифмическая функция* . Функция определена при . Если , то, по определению, . Таким образом, логарифмическая функция является обратной по отношению к показательной. Отсюда вытекает, что график логарифмической функции получается из графика показательной функции с помощью зеркального отображения последнего относительно прямой  (рис.2.16).

* *Тригонометрические функции* , , ,.

Аргументом этих функций являются, в нашем случае, числа, которые рассматриваются как меры угла, выраженные в радианах. Рассмотрим каждую из приведенных выше функций подробнее.

Рис. 2.17



Функция  имеет областью определения всю числовую ось и обладает областью значений , т.е. . Эта функция периодическая с периодом . Равенство  выполняется при любом . Графиком функции  является синусоида (рис.2.17).

Функция , также определена на всей числовой оси и также верно неравенство . Графиком функции является косинусоида, которая представляет собой синусоиду, сдвинутую влево на величину . График функции  приведен на рис.2.17.

Функция  не определена при , где . Эта функция имеет период, равный . При приближении слева к значению  функция  неограниченно растёт, а при приближении справа к значению  она неограниченно убывает.

График функции приведен на рис.2.18.

Функция  не определена при , где . Функция имеет период, равный . При приближении слева к значению  функция  неограниченно убывает, а при приближении справа к значению  она неограниченно возрастает.

График этой функции изображен на рис.2.19.

Рис. 2.18

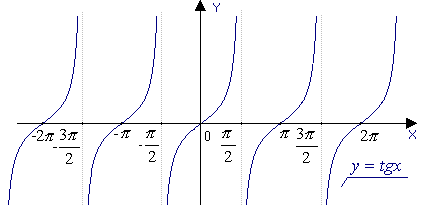
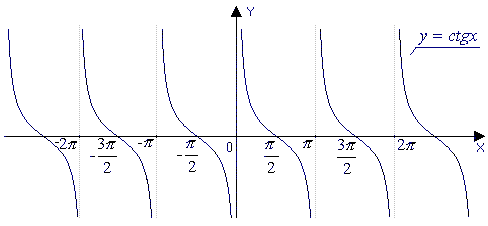


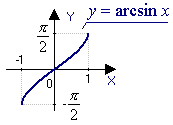
Рис. 2.19



* *Обратные тригонометрические функции* , , , . Рассмотрим каждую из этих функций.

Функция  имеет областью определения отрезок , и по определению  – это дуга, взятая в пределах области определения функции, синус которой равен , т.е. . Отсюда следует, что значение  изменяется в пределах от  до , т.е. . Эти значения функции называют главными значениями функции.

Рис. 2.20



Если решить уравнение  относительно неизвестной величины , то полученное решение является многозначным. В этом случае пишем . График этой функции есть не что иное, как синусоида, идущая вдоль оси ординат (рис.2.20). Нетрудно видеть, что справедливо равенство



Функция  имеет областью определения отрезок , а область значений есть отрезок , т.е. главные значения функции заключены в пределах . По определению, функция  – это дуга, косинус которой равен , т.е. справедливо равенство . Разрешая последнее уравнение, имеем, по определению, .

График этой функции изображен на рисунке 2.21.

Справедлива формула

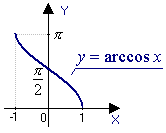


Рис. 2.21



Функция , по определению, есть дуга в пределах , тангенс которой равен , т.е.  Решение полученного уравнения относительно  дает многозначную функцию . Имеет место равенство . Функция  имеет областью определения всю числовую ось, а областью значений – интервал . График функции  изображен на рисунке 2.22.

Функция , по определению, есть дуга в интервале , котангенс которой равен , т.е. справедливо равенство .

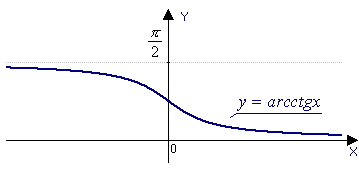
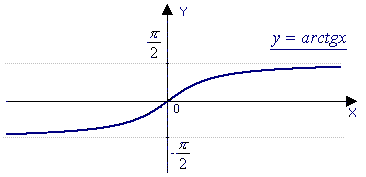


Рис. 2.22

Рис. 2.23

Решая это уравнение относительно , получаем: 

График функции  изображен на рисунке 2.23.

**§2.5*. Задание функции в полярных координатах***

При заданной декартовой системе координат положение точки на плоскости определяется с помощью двух чисел, а именно, значениями абсциссы и ординаты. Однако, кроме декартовой, можно использовать и другие системы координат. Напомним, что вместо декартова ортонормированного базиса на плоскости, можно в качестве базиса выбрать любые два неколлинеарных вектора. Такие системы существуют, но их постоянное употребление слишком громоздко и требует больших вычислений по сравнению с используемой нами декартовой системой координат.

Однако, другая, так называемая *полярная система координат*, получила достаточно широкое распространение. Опишем эту систему подробнее. Полярная система координат вводится следующим образом:

- на плоскости фиксируется некоторая точка *О*, называемая в дальнейшем *полюсом*;

- из полюса *О* проводим направленную прямую , которую назовем *полярной осью*.

Положение произвольной точки *М* на плоскости относительно выбранной системы координат определим двумя числами (рис.2.24). Первое число – длина отрезка . Это число назовём *полярным радиусом* точки *М*. Второе число – угол , между полярной осью и полярным радиусом точки *М.* Это число назовём *полярным углом.* Как обычно, угол считаем положительным, если отсчет ведется против часовой стрелки. Пара чисел  и  составляют *полярные координаты* точки *М.* Как и в декартовой системе координат, в этом случае, используется запись . Очевидно, что полярный радиус *r* может изменяться от 0 до +∞; полярный угол  меняется в пределах от  до  (или от 0 до ). Для полюса *О* полярный радиус равен нулю, а полярный угол не определен. При решении конкретных задач могут рассматриваться и другие значения углов, т.е. углы, не входящие в указанный интервал.

*М*

*А*

*O*

Рис. 2.24

φ

*r*

*х*

*y*

Рассмотрим взаимосвязь между декартовыми и полярными координатами. Для этого зафиксируем декартов базис и введём полярную систему координат, у которой полюс совпадает с началом координат декартовой системы и полярная ось совпадает с положительной полуосью .

Для произвольной точки , тогда имеем ; ;  и  (рис.2.24). Считая  острым углом в прямоугольном треугольнике , получим

; 

или

, . (2.3)

Полученные формулы справедливы при любом . Эти формулы и выражают взаимосвязь между декартовыми и полярными координатами. Из этого же прямоугольника видно, что , , т.е.

, . (2.4)

Формула (2.4) выражает полярные координаты точки через декартовы координаты этой же точки. Отметим, что для вычисления угла  по формуле (2.4) нужна дополнительная информация, например, в каком квадранте находится точка  (сравните с формулами (1.11) нахождения аргумента комплексного числа).

Полярные координаты интересны тем, что многие кривые, имеющие в декартовой системе уравнений достаточно сложный вид, в полярной системе имеют значительно более простой вид.

Приведем три примера

1. Уравнение *окружности* с центром в начале координат и радиусом  в декартовой системе координат определяется уравнением .   
В полярной системе координат та же самая окружность определяется уравнением .

2. Достаточно простое уравнение , являющееся линейным относительно , определяет сложную кривую, изображенную на рис.2.25 и называемую *спиралью Архимеда*.

3. Уравнение *кардиоиды* в декартовых координатах имеет вид

.

В полярных координатах уравнение принимает значительно более простой вид: .

График функции при  приведен на рис. 2.26.

**§2.6. *Уравнение кривой в параметрическом виде***

Рис. 2.26

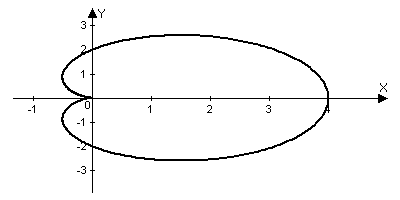
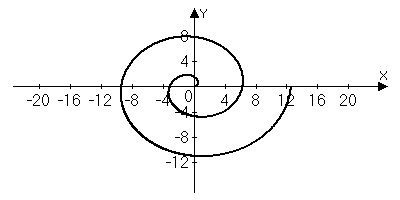


Рис. 2.25



Рассмотрим некоторую кривую на плоскости, уравнение которой определяется равенством  и связывает декартовы координаты точки *x* и *y*. Достаточно часто вместо уравнения  даются выражения текущих координат *x* и *y* в виде функций от некоторой переменной величины , т.е. , . Величину *t* при этом называют *параметром*.

Например, параметрическое уравнение окружности радиуса *R* с центром в начале координат имеет вид

, .

Чтобы получить уравнение функции (в неявном виде), нужно исключить параметр *t*. Для этого возведём обе части равенств в квадрат и, сложив, получим

.

Другой пример: параметрическое уравнение линии имеет вид:

.

Эту линию можно приблизительно построить по точкам, придавая различные значения , и нанося точки с соответствующими координатами  на координатную плоскость. Соединяя их линией, получим кривую – эллипс, неявное уравнение которого можно получить аналогично предыдущему примеру:



Еще пример. Пусть линия задана параметрическими уравнениями

,

Её уравнение в декартовой системе координат – это каноническое уравнение гиперболы: .

В самом деле, .

График этой кривой приведен на рис.2.27.

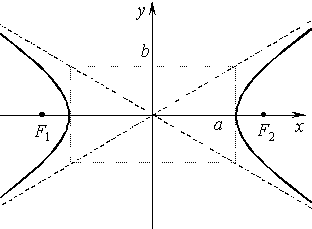


Рис.2.27

**Глава 3. Теория пределов**

**§3.1. *Предел функции***

В этой главе вводится одно из важнейших понятий в математике – понятие предела функции в точке. Теория пределов образует основание математического анализа. Отметим, что при изучении поведения функции понятие предела играет фундаментальную роль.

Пусть независимая переменная  приближается к числу , т.е. величине  придаются значения, сколь угодно близкие , но не равные , Если при этом соответствующие значения функции  приближаются к числу , то число  называется *пределом функции*  *при* , *стремящемся к* . Такое определение может быть достаточно понятное, но недостаточно точное. Дадим более строгое определение предела функции.

**Определение 3.1**. Число  называют *пределом функции*  при , стремящемся к , если для любого, сколь угодно малого числа , существует положительное число  такое, что для всех значений , удовлетворяющих неравенству , выполняется неравенство .

Этот факт записывают так: .

Символ «» означает «предел», а  называют *предельной точкой*. Особо следует отметить, что при вычислении предела функции требуется, чтобы функция была определена в некоторой окрестности точки , и не требуется, чтобы она была определена в самой точке . Например, функция

2

Рис. 3.1

*x*

*y*

1



не определена в точке , однако совершенно очевидно, что

.

График этой функции имеет вид, представленный на рис.3.1.

Непосредственно из определения предела вытекает, что если функция при , имеет предел, то этот предел единственный. В самом деле, допустим, что  и . Тогда для любого значения  существуют значения  и  такие, что, если выполнится неравенство , то , и если выполнится неравенство , то . Возьмём , и тогда при выполнении неравенства , выполняются одновременно неравенства  и . В таком случае разность  может быть представлена так: . Используя свойство модуля , имеем . Так как  можно выбрать сколь угодно малым, то из последнего соотношения вытекает, что , т.е. .

Геометрическую интерпретацию предела поясним, используя рисунок 3.2. Через  проведем прямую параллельную оси  до пересечения с графиком функции в точке . Из точки  проведем прямую параллельную оси  до пересечения с осью  в точке . Выберем произвольное число . Тогда найдется число  такое, что часть графика функции, соответствующая окрестности , будет содержаться в полосе между прямыми, уравнения которых  и . Если неограниченно уменьшать величину ε (сужать полосу), то уменьшается и величина δ. Легко видеть, что для всякого положительного и сколь угодно малого значения ε найдется соответствующее значение δ.

Заметим также, что если функция постоянна в окрестности точки , т.е. , то .















*А*

*В*

Рис. 3.2

Рассмотрим пример функции, не имеющей предела в данной точке. Пусть , при . В точке  функция не определена, при этом для всех , очевидно, , а для всех  имеем . Поэтому не существует числа, к которому значения функции  были бы близки для всех  в окрестности точки . Возьмем, например, . Выберем любое значение . Для всех точек, для которых выполняется неравенство , найдутся две точки  и , принадлежащие интервалу  такие, что  (см. рис.3.3).

*y*

*x*

Рис.3.3

*x*2

*x*1

–1

1

δ

–δ

Во всех предыдущих рассуждениях число  – конечное число, т.е. . Возникает вопрос: как определить предел функции при неограниченном возрастании ? Поступим следующим образом: вместо аргумента  рассмотрим аргумент , связанный с  соотношением . Очевидно, если , то . Используем теперь определение 3.1 предела функции для  при : число  есть предел функции  при , если для любого , существует  такое, что при выполнении неравенства  выполняется неравенство .

Наконец, перейдя к исходной переменной величине  и учитывая, что , получим определение *предела на бесконечности*:

**Определение 3.2**. Число  называют *пределом функции , при* , если для любого  существует  такое, что, как только , так для всех , удовлетворяющих этому неравенству выполняется соотношение

.

В определении мы не уточняем, к какой бесконечности стремится переменная . Совершенно очевидно, что при  требуется выполнение неравенства , а при  должно выполняться неравенство . Тот факт, что число  является пределом функции  при , стремящемся к бесконечности записывается следующим образом

.

Очевидно, верно равенство

.

**Пример 3.1**. Докажем, что .

Решение. Здесь функция  не определена при *x* = 1. Но пока переменная величина *x* стремится к 1 и не равна 1, можно сократить дробь . Теперь найдём предел .

***Предел последовательности***

Используя предел функции при аргументе, стремящемся к бесконечности, можно определить предел последовательности. Для этого представим последовательность как функцию целочисленного аргумента. Этот аргумент обычно обозначают буквой . Значения функции  обозначим при этом . Таким образом, числовая последовательность есть не что иное, как бесконечная последовательность чисел , записываемая коротко . Используя определение предела функции при , стремящемся к бесконечности, легко определить и предел последовательности.

**Определение 3.3**: Число  называют пределом последовательности , если для любого сколь угодно малого  найдется натуральное число  такое, что для всех  выполняется неравенство .

**§3.2. *Бесконечно малая величина и её свойства***

**Определение 3.4**. Функция (величина)  называется бесконечно малой при , если .

Примеры бесконечно малых величин:

* , при , где - целое число;
* , при , где - целое число;
* , при .

Говорить о бесконечно малой величине можно только лишь подразумевая, что аргумент стремится к некоторому определенному значению, т.е. находится в окрестности некоторой определенной точки.

Имеется тесная связь между пределом и бесконечно малой величиной. Ниже будут доказаны две теоремы (прямая и обратная), на которых основаны доказательства основных свойств пределов.

***Теорема 3.1*** (***прямая***). *Если функция  при  имеет пределом число , то в некоторой окрестности точки  функция представима в виде*

*,*

*где  бесконечно малая величина при .*

Доказательство: По условию теоремы . Но тогда для произвольного сколь угодно малого , для всех  из некоторой окрестности точки  () выполняется неравенство

,

а это означает, что , т.е.  есть бесконечно малая величина в окрестности точки . Отсюда следует, что

,

где  - бесконечно малая при . Теорема доказана.

***Теорема 3.2*** (***обратная***). *Если функция  в окрестности точки , представима в виде*

*,*

*где  бесконечно малая величина при , то*

*.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что  или . Так как  бесконечно малая величина, то для любого , существует -окрестность точки , такая, что для всех  из этой окрестности (как обычно, предполагается, что ) выполняется неравенство . Отсюда вытекает, что для этой же -окрестности справедливо неравенство

.

Это и означает, что . Теорема доказана.

При доказательстве основных свойств пределов нам потребуются свойства бесконечно малых величин, которые мы сейчас сформулируем и докажем.

***Теорема 3.3***. *Сумма двух бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.*

Доказательство. Пусть  и  бесконечно малые величины при . Докажем, что их сумма  также бесконечно малая величина при . Зафиксируем произвольное число , тогда найдется -окрестность точки  () такая, что для всех *x* из этой окрестности выполняются неравенства

; .

и, следовательно, для всех *x* из этой же -окрестности выполняются соотношения

,

а это означает, что для всех *x* из данной -окрестности выполняется неравенство , т.е.  есть бесконечно малая величина при .

***Замечание***. Если , где , ,  - бесконечно малые при , то, по только что доказанному,  является бесконечно малой величиной при  и, следовательно,  по той же теореме также бесконечно малая величина при .

Повторяя этот прием очевидно можно установить, что *сумма любого конечного числа бесконечно малых величин является бесконечно малой величиной*.

***Теорема 3.4***. *Если функция  ограничена, а  бесконечно малая величина в окрестности точки , то произведение  тоже бесконечно малая величина при *

Доказательство. Так как  - ограничена, то существует число такое, что , тогда зафиксировав , из того что  бесконечно малая величина в окрестности точки  можно найти -окрестность точки  (), такую, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство

.

Оценим произведение функций  и  для любого значения *x* из этой δ-окрестности.

,

и отсюда  бесконечно малая при . Теорема доказана.

Теперь, пользуясь доказанными в этом пункте теоремами, сформулируем и докажем основные свойства пределов.

**§3.3. *Свойства пределов***

***Теорема 3.5***. *Если пределы функций  и  при , стремящемся к , существуют и конечны, то при  предел суммы этих функций равен сумме пределов, т.е.*

.

Доказательство. По условию теоремы

; ; .

Тогда из теоремы 3.1 следует, что существует окрестность точки  такая, что функции  и  в окрестности точки  представимы в виде

; ,

где  и  бесконечно малые. Следовательно

.

По теореме 3.3 сумма бесконечно малых также бесконечно малая, то есть  – бесконечно малая величина и, следовательно,

.

Из этого равенства и теоремы 3.2 следует, что

.

Отсюда и вытекает справедливость утверждения.

Совершенно очевидно, что теорема 3.5 справедлива при любом конечном числе слагаемых. Заинтересованному читателю предлагается самостоятельно установить этот факт.

***Теорема 3.6***. *Если пределы функций  и  существуют и конечны при , то предел произведения этих функций равен произведению пределов этих же функций, т.е.*

.

Доказательство. По условию теоремы

; , ,

и тогда по теореме 3.1 о связи предела с бесконечно малой получаем

; 

.

Используя теоремы 3.3 и 3.4, мы можем сказать, что величина  является бесконечно малой величиной при . Отсюда получаем соотношение

.

Тогда по теореме 3.2 о связи предела и бесконечно малой имеем

.

Теорема доказана.

***Теорема 3.7***. *Если пределы функций  и  при , стремящемся к , существуют и предел  отличен от нуля, то предел частного функций  и  равен частному пределов этих функций.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теорем 3.5 и 3.6, поэтому приведем его в несколько сокращенном варианте. Согласно условиям теоремы в некоторой -окрестности точки  выполняются равенства

, .

Тогда

, (3.1)

но  – бесконечно малая величина, потому что  – бесконечно малая, а  – ограниченная величина. Тогда из (3.1) и теоремы 3.2 о связи предела и бесконечно малой величины получаем:

.

Теорема доказана.

**Пример 3.2**. Найти предел .

Решение. Разделим числитель и знаменатель на старшую степень переменной *х*, т.е. на  и используем доказанные свойства предела:

.

**§3.4. *Свойства пределов, связанные с неравенствами.***

***Теорема 3.8.*** *Если для всех точек некоторой окрестности точки  для функций  и  выполняется неравенство  и пределы  и  при  существуют, то*

.

Доказательство. Предположим, что ; . Наша цель: доказать неравенство . Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что . Пусть , и тогда, положив , мы найдем окрестность точки , где при  справедливы неравенства:

 и .

Тогда

 и .

Следовательно

,

что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

***Теорема 3.9***. *Если для всех точек некоторой окрестности точки  для функций , ,  выполняются неравенства*

.

*Если при этом , то предел  существует и также равен .*

Доказательство. Согласно предыдущей теореме



или

,

а это и означает, что . Теорема доказана.

Существует еще одно утверждение, которым мы будем постоянно пользоваться. Это утверждение часто называют *признаком Вейерштрасса*. Доказательство его можно найти в полных курсах математического анализа.

**Теорема 3.10. (*Признак Вейерштрасса*)**. Если функция  монотонно возрастает при стремлении *x* к *x*0 и при этом ограничена сверху, то она имеет предел. Аналогично, предел существует у монотонно убывающей и ограниченной снизу функции.

Все сформулированные выше утверждения справедливы и для последовательностей. Мы предлагаем читателю самому сформулировать эти утверждения для последовательностей и доказать их.

**§3.5. *Первый замечательный предел***

Для вычисления пределов часто используют пределы, наиболее часто применяемые при решении практических задач. В задачах теории связи часто встречаются функции вида . Такая функция определена во всех точках числовой прямой за исключением . При , стремящемся к нулю, и числитель, и знаменатель стремятся к нулю. Ответ на вопрос: “Чему равен предел функции  при *х*, стремящемся к нулю?” даёт нижеследующая теорема.

***Теорема 3.11. (Первый замечательный предел)***. *При , стремящемся к нулю, функция  имеет предел, равный единице, т.е.*

.

Доказательство. Докажем теорему, используя геометрическую интерпретацию синуса (рис.3.3). Так как  стремится к нулю и функция  является четной, то можно ограничиться изменениями угла *х* в пределах от 0 до  (1-ой четверти). Рассмотрим окружность радиуса 1 и проведем луч *ОА* под углом *х* к оси абсцисс. Сравнивая площади треугольников с вершинами *ОАС* и *ОСВ* и площадь сектора *ОАС*, заключаем

*A*

*B*

*C*

*1*

*x*

*y*

*x*

*0*

*D*

Рис. 3.3

.

Но , , . Таким образом выполняются неравенства

.

Разделив все части этого неравенства на , и помня, что , получаем

 или .

Перейдем к пределу при , учитывая, что , и теорему 3.9, получим

.

Теорема доказана.

**§3.6. *Второй замечательный предел***

***Теорема 3.12.*** *При , стремящемся к бесконечности, числовая последовательность*  *имеет предел.*

Доказательство. Существование предела последовательности , при  установим с помощью теоремы 3.10 (признака Вейерштрасса). Для этого нам нужно установить ограниченность этой последовательности и её монотонность.

Установим, прежде всего, монотонность этой последовательности.

Согласно биному Ньютона имеем:





. (3.2)

Следующий член последовательности  равен



.

Сравнивая  и , мы видим, что каждое слагаемое , начиная со второго, больше соответствующего слагаемого . В самом деле,

;



И так справедливо для каждого слагаемого . Последнее слагаемое в выражении для , а именно , очевидно также положительно. Таким образом,  для  и, следовательно, последовательность  монотонно возрастает.

Докажем ограниченность этой последовательности. Так как

,

то из (3.2) имеем:

, (3.3)

но ; , и так далее. Известна сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

.

В нашем случае

.

Отсюда и из (3.3) следует, что .

Итак, последовательность  монотонно возрастает и ограничена сверху, поэтому на основании признака Вейерштрасса эта последовательность имеет предел. Этот предел обозначают буквой .

.

Это и есть *второй замечательный предел*, число  – иррациональное число, его приближенное значение равно .

Мы установили второй замечательный предел в предположении, что аргументами функции  являются натуральные числа. Спрашивается, как будет вести себя предел для функции непрерывного аргумента, т.е. для функции ?

***Теорема 3.13***. *Предел функции  при , стремящимся к бесконечности, равен , т.е.*

.

Доказательство. Пусть  произвольное положительное число, тогда существует натуральное число  такое, что . Отсюда следует, что

 или .

Так как аргумент *х* заключен между *п* и , то из предыдущих неравенств имеем:



или

 (3.4)

В последнем выражении перейдем к пределу при . Тогда, по предыдущей теореме,

.

Кроме того, имеем

.

Отсюда и из (3.4) вытекает справедливость утверждения теоремы. Докажем ряд следствий этой теоремы.

***Следствие 3.13.1.***

.

Доказательство. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела,

 (3.5)

Заметим, что

.

Отсюда и из (3.5) следует утверждение следствия. В частности,

.

***Следствие 3.13.2.***

.

Доказательство. Производя замену, сведём это утверждение к предыдущему:

.

***Следствие 3.13.3.***

.

Доказательство. Подходящей заменой, утверждение сводится к утверждению теоремы 3.13:

.

**§3.7. *Сравнение бесконечно малых величин***

Пусть  и  две бесконечно малые величины при . Во многих случаях представляет интерес сравнение бесконечно малых между собой по характеру стремления в нулю. Для этого рассмотрим предел отношения этих величин при , т.е. вычислим предел . При этом возможны следующие случаи:

1. Предел отношения при  существует и равен постоянному числу , т.е.

 (3.6)

В этом случае мы говорим, что бесконечно малые величины α(*х*) и β(*х*) *одного* *порядка* и будем писать, что  (читается «О большое») при . Например, при  функции  и  являются бесконечно малыми величинами одного порядка.

Если в равенстве (3.6) , т.е.

,

то будем говорить, что и  *эквивалентные* бесконечно малые величины при  и будем писать ~ при . Например,  и  при  являются эквивалентными бесконечно малыми.

2. Предел отношения и  при  существует и равен нулю:

.

В этом случае  называют *бесконечно малой более высокого порядка по отношению к*  и пишут  (читается «о малое»). Символ  означает, что

.

Например, при  функция  является бесконечно малой более высокого порядка по отношению к функции .

3. Предел отношения  и  равен бесконечности:

.

В этом случае  является бесконечно малой более высокого порядка по отношению к  и мы будем писать . Так  при .

4. Предел отношения  и  не существует. В этом случае говорят, что бесконечно малые величины  и  *несравнимы*. Примером таких величин являются функции  и  при . В самом деле,

,

но этот последний предел не существует - в окрестности точки  функция  бесконечно много раз пробегает все значения от  до 1.

**§3.8. *Эквивалентные бесконечно малые величины и их свойства***

Наиболее значимыми являются эквивалентные бесконечно малые величины. Остановимся на них более подробно.

Согласно определению,  и  - эквивалентные бесконечно малые величины (~) при , если  и, при этом, .

Например, ~ при , т.к. нами ранее доказано, что .

Отношение эквивалентности обладает следующими свойствами.

***Свойство 3.14 (симметричность)***. Если ~ при , то и ~ при .

Доказательство. Пусть ~ при . Тогда

,

т.е., ~ при . Свойство доказано.



Отсюда, в частности, следует, что если в окрестности точки , и не имеют нулей, то они эквивалентны при тогда и только тогда, когда



.



***Свойство 3.15 (транзитивность).*** Если при величины ~ при , а ~ при , то ~ при .



Доказательство. По условию

и ,



но тогда

.



Свойство доказано.

Мы предлагаем читателю самостоятельно доказать следующее свойство.

***Свойство 3.16***. Если при выполняются отношения эквивалентности ~ и ~, то ~.



Первый и второй замечательные пределы, полученные в предыдущем параграфе, позволяют нам составить таблицу эквивалентности для некоторых функций при :



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. | ; | 2. | ; | 3. | ; |
| 4. | ; | 5. | ; | 6. | ; |
| 7. | ; | 8. | . |  |  |

Вторая эквивалентность вытекает из равенства и предела . Третья и четвертая эквивалентности, по сути, повторяют первую и вторую для соответствующих обратных функций (свойство 3.14).



Для доказательства асимптотического равенства 5 заметим, что , а так как ~, то, по свойству 3.16, из предыдущего соотношения вытекает доказываемая эквивалентность.



Асимптотическое равенство 6 вытекает из свойства 3.13.3:

.



Доказательство эквивалентностей 7 и 8 предоставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения.

**§3.9*. Вычисление пределов с помощью эквивалентных величин***

Приведенный выше список эквивалентностей играет существенную роль при вычислении пределов. Следующие теоремы обосновывают это применение.

***Теорема 3.17***. *Если и , при , то из существования предела при , следует существование предела при , и справедливо равенство*



. (3.7)



Доказательство. Рассмотрим левую часть равенства (3.7). Выражение, стоящее под знаком предела, умножим и разделим на . Тогда получим



.



Преобразуем правую часть этого последнего равенства. Учитывая, что, по условию, существует, и, воспользовавшись тем, что предел произведения равен произведению пределов при условии, что предел каждого компонента существует, получаем:



. (3.8)



Так как при , то в правой части (3.8) и . Следовательно, правая часть (3.8) равна . Таким образом . Теорема доказана.



Эффективность этой теоремы проиллюстрируем на следующем примере.

**Пример 3.3*.*** Вычислить .



Решение. Воспользовавшись таблицей эквивалентности, имеем: . Тогда получаем:



Итак, вычисление пределов существенно можно упростить, если заменить исходную функцию на эквивалентную ей. Приведем критерий эквивалентности функций.

***Теорема 3.18 (Критерий эквивалентности).*** *Для того чтобы функции и были эквивалентными при , необходимо и достаточно, чтобы .*



Доказательство. *Необходимость*. Пусть и эквивалентны, тогда по определению , и на основании теоремы о связи предела и бесконечно малой, получаем: , где – бесконечно малая при . Отсюда , но . То есть откуда . Первая часть теоремы доказана.



*Достаточность*. Пусть . Разделив обе части последнего равенства на g(*x*) и учитывая, что , получаем , а это означает, что при . Теорема доказана полностью.



Эта теорема позволяет эквивалентные функции при записать в виде:



1. ; 2. ; 3. ;



4. ; 5. ; 6. ;



7. ; 8. .



Приведём примеры использования этих результатов.

**Пример 3.4.**



**Пример 3.5**. .



**§3.10*. Односторонние пределы***

Вычислим предел функции , когда аргумент *х* стремится к , но причём *х* остается *меньше* . В этом случае мы будем говорить о пределе функции *слева*, т.е. *левостороннем* *пределе* и записывать это так: .



Предел *справа* (*правосторонний* *предел*) определяется как предел функции , когда *х* стремится к , но при этом *х* *больше,* чем . Правосторонний предел обозначается .



**Пример 3.6.** Функциязадана кусочно:



Найдём односторонние пределы в точке 0:

; .



**Пример 3.7.** Найти односторонние пределы функции в точке 0.



Решение. , т.е. левосторонний предел существует и равен нулю; , т.е. правосторонний предел не существует.



Совершенно очевидно, что функция имеет предел в точке , если левосторонний и правосторонний пределы функции в этой точке равны:



.



**Глава 4. Непрерывные функции и их свойства**

**§4.1. *Непрерывность функции в точке***

**Определение 4.1**. Функция , определенная в некоторой окрестности точки , является *непрерывной в точке* , если для любой последовательности , такой, что , выполняется соотношение .



На практике удобно использовать следующие 3 условия непрерывности функции в точке :



1) функция определена в точке ;



2) предел слева и предел справа функции в точке равны;



3) общее значение пределов слева и справа равно значению функции в точке .



Запишем это определение в виде формулы:

.



Приведенное определение непрерывности равносильно приведенному ниже определению непрерывности на языке «».



**Определение 4.2**. Функция называется *непрерывной в точке* , если для всякого , существует такое, что для всех *х*, для которых , выполняется неравенство .



Следует особо подчеркнуть, что в определении непрерывности, в сравнении с определением предела, рассматривается полная, а не «проколотая» окрестность точки , и предел функции в точке есть не что иное, как значение функции в этой точке.



Если разность мы называем *приращением аргумента*, а разность - *приращением функции*, то из определения и 4.1, и 4.2 следует, что для непрерывной функции всегда выполняется равенство



.



Таким образом, непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

*Замечание*. Определение 4.1 называют определением непрерывности функции *по Гейне*, а определение 4.2 называют определением непрерывности *по Коши*.

Как показано в [1], эти определения равносильны в принятой нами концепции числа.

**Пример 4.1**. Доказать непрерывность функции .



Решение*.* Функция непрерывна на интервале . Исследуем поведение функции в окрестности точки , для чего найдём левосторонний и правосторонний пределы функции в этой точке. Примем во внимание, что , т.е. – ограниченная функция. Следовательно, . Но и, таким образом, согласно определению 4.1, функция непрерывна в точке , а значит, и на всей числовой оси.



**§4.2. *Точки разрыва и их классификация***

Если в точке не выполнено хотя бы одно из условий определения непрерывности 4.1, то говорят, что в этой точке функция *терпит разрыв*.При этом возможны следующие случаи:



* *Устранимый разрыв*. В точке предел функции слева равен пределу справа, но не равен значению , или значение функции в точке не определено:



.



В этом случае, мы говорим, что в точке функция умеет устранимый разрыв. Графически этот факт представлен на рис.4.1.

*y*

*x*

Рис. 4.1

*x*0



Разрыв называется устранимым, потому что его можно устранить. Другими словами, функцию можно сделать непрерывной, если доопределить (или переопределить) её в точке , положив



.



* *Разрыв первого рода*. Если в точке пределы слева и справа для функции существуют, но не равны, то говорят, что в этой точке функция имеет разрыв первого рода:



.



Графически это выглядит следующим образом (рис.4.2). В этом случае не важно, определено или нет значение функции в точке разрыва. Например, функция (знак числа), определенная в §3.11, имеет разрыв I рода в точке . Иногда разрывы I рода называют *скачками* функции.

*y*

*x*

Рис. 4.2

*x*0



* *Разрыв второго рода*. Если в точке , хотя бы один из пределов либо справа, либо слева равен бесконечности или не существует, то в этой точке функция имеет разрыв второго рода. Графически это может быть иллюстрировано рисунками 4.3 – 4.6. Обратим внимание на рис.4.6. Это график функции . В точке предел этой функции не существует.



Рассмотрим несколько функций, которые хотя и не являются элементарными, но, тем не менее, заслуживают интерес с точки зрения непрерывности.

*y*

*x*

Рис. 4.6

*y*

*x*

Рис. 4.5

*y*

*x*

Рис. 4.4

*y*

*x*

Рис. 4.3

Функция «знак числа» определяется так:

*x*

Рис.4.8

0

–1

1

2

1

2

–1

–2

–2

*y*



Эта функция определена и непрерывна для всех значений аргумента за исключением точки , в которой функция терпит разрыв I рода – скачок.



Заметим следующее свойство этой функции:

.



Функция «целая часть числа» определена для всех чисел и равна наибольшему целому, не превосходящему это число. Обозначается (читается «антье *x*»). Целая часть числа удовлетворяет двойному неравенству



.



Например, . График функции приведен на рис.4.8.



Очевидно, функция разрывная во всех целых точках, причем в каждой из них скачок функции равен +1.

Функция «дробная часть числа» есть разность между числом и его целой частью:

.



Например, . Таким образом, целая и дробная часть числа связаны соотношением:



.



График функции представлен на рис.4.9. Функция также разрывная при каждом целом значении аргумента, причем скачок функции в каждой из них равен . Интересно также, что эта функция периодична, период её равен 1.

*x*

Рис.4.9

0

1

1

2

–1

–2

*y*



Функции находят применение не только в математическом анализе, но в теории чисел, в теории рекурсивных функций.



**§4.3. *Свойства функций, непрерывных в точке и на интервале***

Сформулируем ряд свойств непрерывных функций. Доказательства этих свойств выходит за рамки нашего курса. Строгие доказательства имеются в полных курсах математического анализа (см. список литературы в конце настоящего пособия).

***Свойство 4.1*** ***(ограниченность непрерывной функции)*** *Если функция непрерывна в точке , то она ограничена в некоторой окрестности этой точки*, т. е. существуют и такие, что для всех *x,* для которых выполняется неравенство



***Свойство 4.2*** ***(непрерывность суммы, произведения и частного непрерывных функций).*** *Если функции и непрерывны в точке , то функции , , , – непрерывны в точке* .



***Свойство 4.3*** ***(знакоопределенность непрерывной функции)***. Если функция непрерывна в точке и при этом , то в некоторой окрестности точки знак функции совпадает со знаком числа т. е. существует , такое что для всех , для которых выполняется равенство .



***Свойство 4.4*** ***(непрерывность сложной функции).*** Если функция непрерывна в точке , а функция непрерывна в точке при этом *,* то в некоторой окрестности точки определена сложная функция , которая непрерывна в точке .



**Определение 4.3**. Функцию назовем *непрерывной на отрезке* , если она непрерывна в каждой точке интервала, а также непрерывна справа в точке и слева в точке .



Для непрерывных на отрезке функций справедливы нижеследующие утверждения

***Теорема 4.1*** (***об ограниченности непрерывной на отрезке функции***). *Если функция непрерывна на отрезке , то она ограничена, т. е. существует постоянная , такая что для любого x из отрезка выполняется неравенство .*



Замечание. Теорема 4.1 неверна для промежутка, не являющегося отрезком. Например, функции , непрерывны на интервале , но не ограничены на этом интервале.



***Теорема 4.2 (о достижении наибольшего и наименьшего значения****). Если функция непрерывна на отрезке , то она достигает своего наибольшего и наименьшего значения на этом отрезке.*



Замечание. Функция, непрерывная на интервале, может не достигать своих наибольших и наименьших значений. Например, функция не достигает на интервале (0,1) своего наименьшего значения, равного нулю и не достигает наибольшего значения, равного единице.



***Теорема 4.3 (о нулях непрерывной функции***). *Если функция непрерывна на отрезке и на концах принимает значения разных знаков, то на отрезке существует точка такая, что .*



***Теорема 4.4 (о промежуточных значениях***). *Если функция непрерывна на отрезке и m, M – соответственно наименьшее и наибольшее значение функции на этом отрезке, то для любого числа такого, что , существует точка , что .*



***Теорема 4.5 (о существовании обратной функции***). *Если функция непрерывна и монотонно возрастает (убывает) на отрезке , то на отрезке определена функция , обратная к f непрерывная и монотонно возрастающая (убывающая).*



***Теорема 4.6 (о непрерывности элементарных функций***). *Всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, где она определена*.



**Пример 4.2.** Исследовать функцию на непрерывность: найти точки разрыва, определить их характер, выявить интервалы непрерывности.



Решение.

Каждая из частей функции , и - непрерывны в своей области определения, и даже на всей числовой оси. Поэтому подозрительными на разрыв являются точки, в которых «склеиваются» эти части: и . Исследуем поведение функции в окрестности каждой из этих точек, т.е. вычислим односторонние пределы и значения функции в точках:



Для имеем:



; ; .



Поскольку все три значения равны, то заключаем: функция непрерывна в точке .



Аналогично, для имеем:



; ; .



И на этот раз все три значения равны. Вывод: функция непрерывна и в точке .



*y*

*x*

Рис. 4.7

0

1



Таким образом, данная функция непрерывна на всей числовой оси. График функции приведен на рис.4.7.

**РАЗДЕЛ II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

**Глава 1. Производные и дифференциалы**

**§1.1. *Определение производной***

Пусть на некотором интервале задана некоторая функция , а задача состоит в исследовании поведения функции на этом интервале. А именно, - в выяснении того, где функция возрастает, где убывает, насколько быстро происходит это изменение, где функция достигает максимума или минимума, и т.д. Для решения всех перечисленных выше задач поступим следующим образом. В исследуемой точке вычислим значение функции , затем аргументу придадим положительное приращение и вычислим значение функции . Наконец, вычислим приращение функции . Если положительно, то мы *предполагаем*, что функция возрастает справа от точки ; если же отрицательно, то она *предположительно* убывает справа от этой точки. Впрочем, сделанный нами вывод является спорным и, как показано на рис.1.1, сделанное заключение может оказаться как верным, так и ошибочным.



Рис. 1.1

*x*

*y*

*x*1

Δ*x*

*x*2

Δ*x*

Δ*f*

Δ*f*

Из рисунка видно, что в точке *х*1 приращение положительно при выбранном приращении и функция возрастает в окрестности этой точки. В точке *х*2 приращение также положительно, но функция вблизи точки убывает. Отсюда вывод: чем меньше приращение аргумента , тем достовернее заключение о поведении функции. Все эти рассуждения приводят нас к необходимости исследовать поведение отношения приращения функции к приращению аргумента при неограниченном уменьшении приращения аргумента, т.е. возникает потребность в исследовании величины .



Дадим формальное определение производной. Пусть функция по-прежнему определена в интервале , и пусть произвольная точка из этого интервала. Придадим аргументу приращение , такое, что не выходит за рамки данного интервала, т.е. , при этом может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Функция получит при этом приращение Δ*у*:



**Определение 1.1**. Если предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению независимого аргумента , при стремлении к нулю, существует, т.е. существует



,



то его называют *производной функции* *по независимой переменной* *х* в точке и обозначают .



Нахождение производной называется *дифференцированием* функции. Термин происходит от латинского «differentia» - разность, что связано с определением производной, как предела отношения соответствующих *разностей* значений функции и значений аргумента.

Если производная функции определена в каждой точке интервала , который может быть и бесконечным интервалом, то производная сама является функцией независимой переменной *х* на . В этом случае можно рассматривать две функции и . Докажем, что функция непрерывна в области дифференцирования.



***Теорема 1.1* (*о непрерывности дифференцируемой функции*)**. *Если функция дифференцируема в точке , т.е. имеет в этой точке производную, то функция непрерывна в этой точке.*



Доказательство. Пусть функция дифференцируема в точке *x* , . Тогда справедливо равенство



. (1.1)



На основании теоремы о связи предела и бесконечно малой величины и соотношения (1.1) имеем

, (1.2)



где - бесконечно малая величина. Из соотношения (1.2) следует, что



. (1.3)



Переходя к пределу в обеих частях соотношения (1.3) получаем:

,



т.е., , или , а это означает, что функция в точке , есть непрерывная функция.



**§1.2. *Геометрический смысл производной.***

***Уравнение касательной***

Покажем, что производная функции имеет простой геометрический смысл, тесно связанный с уравнением касательной к графику функции. Прежде всего, дадим определение касательной к линии в точке .



Пусть задана плоскость с декартовой системой координат, и пусть функция определяет некоторую линию *L* в этой плоскости (рис.1.2). Касательная к линии *L* в точке , определяется следующим образом. На линии *L* возьмем точку соответствующую значению функции в точке . Через точки и проведем секущую . Касательной к линии *L* назовем прямую , к которой стремится секущая при . Будем считать, что такая предельная прямая существует. В этом случае хорда стремится к нулю, угол также стремится к нулю.

*y*

*x*

Рис.1.2

*О*

*x*0



*М*0

*М*1

*М*

*K*

***L***

α



Учитывая все вышесказанное, можно сформулировать предложение, которое и определяет геометрический смысл производной.

***Теорема 1.2.*** *Если функция дифференцируема в точке , то касательная, проведенная к графику функции в точке , имеет угловой коэффициент, равный значению производной функции в этой точке, т.е.*



Доказательство. Пусть - касательная к линии, определяемой графиком функции , в точке . Обозначим угол через ; тогда угловой коэффициент прямой равен . Рассмотрим секущую, её угловой коэффициент вычисляется следующим образом:



(1.4)



Так как , а то равенство (1.4) можно переписать в виде



(1.5)



В обеих частях равенства (1.5) перейдем к пределу при . Согласно определению касательной и производной, имеем



,



.



Отсюда и равенства (1.5) вытекает, что . Теорема доказана.



Замечание**.** Используя только что доказанную теорему, легко выписать уравнение касательной линии к графику функции в точке . Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом наклона, имеем:



(1.6)



Полученное уравнение прямой (1.6) является уравнением касательной к линии графика функции в точке .



**§1.3. *Правила дифференцирования***

Для дифференцирования функций необходимо знать правила дифференцирования и формулы дифференцирования основных элементарных функций. Цель настоящего параграфа – вывод основных правил дифференцирования.

***Предложение 1.1***. *Производная постоянной величины равна нулю*, т.е. .



Доказательство**.** Пусть , тогда при любом , функция .



Отсюда , т.е. при любом , и тогда



.



***Предложение 1.2***. *Производная функции равна единице,* т.е. .



Доказательство**.** Пусть , тогда .



Следовательно, при любом значении величины всегда имеет место равенство , поэтому .



***Предложение 1.3.*** *Производная суммы (разности) функций равна сумме (разности) их производных*, т.е.



Эти равенства справедливы только тогда, когда существуют производные слагаемых и .



Доказательство.Рассмотрим случай, когда . В этом случае имеем:



Отсюда, используя утверждение, что предел суммы равен сумме пределов, получаем:

.



Справедливость равенства доказывается аналогично.



***Предложение 1.4.*** *Производная произведения равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый*, т.е., если , то .



Доказательство**.** Если , то имеем



. (1.7)



К правой части равенства (1.7) прибавим и вычтем произведение и тогда, группируя, получим



.



Так как

и ,



то последнее неравенство перепишется в виде

.



Разделим обе части последнего равенства на . Затем, переходя к пределу и учитывая, что предел суммы равен сумме пределов, получаем



.



В наших обозначениях:

; ; ; .



Следовательно, . Предложение доказано.



Приведем несколько следствий из доказанного утверждения.

***Следствие 1.4.1***. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной*, т.е. .



В самом деле, согласно предложению 1.4, имеет место равенство . Но так как , из последнего соотношения вытекает доказываемое предложение.



***Следствие 1.4.2.*** *Дифференцирование трех и более сомножителей*.

Рассмотрим случай, когда . Представим эту функцию в виде . Тогда, используя правило дифференцирования произведения, имеем: . Но . Отсюда и из предыдущего равенства получаем



.



Совершенно аналогично доказывается справедливость равенства:

.



Окончательно правило дифференцирования трех и более сомножителей можно сформулировать так: *производную первого сомножителя умножаем на произведение всех остальных функций, затем производную второго сомножителя умножаем на произведение всех остальных сомножителей и этот процесс продолжаем до последнего сомножителя; полученные произведения нужно сложить*.

***Предложение 1.5.*** *Производная дроби является дробью, числитель которой равен разности произведения производной числителя на знаменатель и произведения числителя на производную знаменателя, а знаменатель равен квадрату знаменателя исходной дроби*, т.е.

.



Доказательство**.** Пусть , тогда приращение функции будет таково:



,



или окончательно: .



Разделив обе части последнего равенства на и используя свойства пределов, имеем:



.



Так как , , , то получаем



.



Предложение доказано.

**§1.4. *Производные элементарных функций***

***Производная степенной функции***

***Предложение 1.6***. *Производная степенной функции вычисляется по формуле .*



Доказательство**.** Пусть , тогда приращение функции можно записать в виде



.



Рассмотрим теперь отношение приращения функции к приращению аргумента

(1.8)



Так как ; для любого , то величина – бесконечно малая при . Следовательно, величина , согласно известной эквивалентности ( раздел I §3.9), эквивалентна величине .



Отсюда и из теоремы о вычислении пределов с помощью эквивалентных величин из (1.8) получаем:



.



Частные случаи:

1. Для производная .



2. Для производная .



3. Для производная .



4. Для производная .



***Производная синуса и косинуса***

***Предложение 1.7.*** *Производные функций и вычисляются по формулам:*



(1.9)



Доказательство. Установим справедливость первого равенства из (1.9).

Если , то . Воспользовавшись формулой разности синусов, имеем:



.



Так как , то величина эквивалентна величине и, тогда:



Тем самым первая формула из (1.9) доказана. Установим справедливость второй из формул (1.9). Если , то . Используя формулу разности косинуса, имеем:



.



Отсюда и из эквивалентности величине , при получаем



.



Предложение полностью доказано.

***Производные тангенса и котангенса***

***Предложение 1.8.*** *Производные функций и вычисляются по формулам:*



и .



Доказательство. Для вычисления производных этих функций воспользуемся правилом вычисления производной от частного и формулами производных для функций и Тогда



.



Аналогично,

.



***Производная показательной функции***

***Предложение 1.9.*** *Производная функции находится по формуле , . В частности, .*



Доказательство. Пусть , тогда



. (1.10)



Но величина эквивалентна при . Таким образом, из (1.10) имеем



.



Если , то из доказанного равенства вытекает, что .



***Производная логарифмической функции***

***Предложение 1.10***. *Производная функции вычисляется по формуле*



.



Доказательство. Пусть , тогда приращение функции будет иметь вид



,



но величина эквивалентна при . Отсюда и из предыдущего равенства имеем



.



Предложение доказано.

***Следствие.*** Если , где , то .



В самом деле . Здесь использована формула перехода к другому основанию логарифма



,



и правило дифференцирования, согласно которому постоянный множитель можно выносить за знак производной.

***Производная сложной функции***

Рассмотрим сложную функцию , где является в свою очередь функцией независимой переменной *х*. Например, функция является сложной функцией, здесь . Производные таких функций будем находить, используя следующее утверждение.



***Предложение 1.11***. *Производная сложной функции по независимой переменной равна её производной по промежуточной переменной, умноженной на производную промежуточной переменной по переменной независимой,* т.е. если , где , то .



Доказательство. Зафиксируем независимую переменную *х*, тогда функции и будут иметь, соответственно, значения и . Придадим независимой переменной приращение . Тогда, по определению производной,



(1.11)



Отношение можно преобразовать следующим образом:



.



Подставляя полученное выражение в (1.11) и используя свойства пределов, имеем:

(1.12)



Так как , то нам остается доказать, что



(1.13)



Для установления справедливости равенства (1.13), необходимо доказать что при . Но функция имеет производную и, следовательно, она непрерывна, а это в свою очередь означает, что при , стремящемся к нулю, также стремится к нулю. И тогда



.



Из доказанных равенств следует справедливость утверждения 1.11.

***Следствие***. Правило дифференцирования сложной функции остаётся в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если , , , то . Действительно, в этом случае по доказанному утверждению , и следствие становится очевидным.



**Пример** **1**.**1**.

.



**Пример 1.2**.



.



**Пример** **1**.3.

.



***Производная обратной функции***

Пусть и - взаимно обратные функции, т.е. такие, что и .



***Предложение 1.12*.** *Если функция строго монотонна на некотором интервале и имеет не равную нулю производную в некоторой точке х этого интервала, то обратная ей функция также имеет производную в соответствующей точке , причём эта производная определяется равенством или* .



Доказательство. Рассмотрим обратную функцию . Дадим аргументу *y* приращение . Ему соответствует приращение обратной функции, причём в силу строгой монотонности функции . Поэтому можно записать



(1.14)



Если , то, в силу непрерывности обратной функции, приращение . И так как , то из (1.14) следуют равенства



, т.е. .



Таким образом, *производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции*.

**Пример 1.4***.* Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную для функции



Решение. Обратная функция имеет производную . Следовательно,



***Производные обратных тригонометрических функций***

В этом пункте будут установлены правила дифференцирования обратных тригонометрических функций.

***Предложение 1.13***: *Производные функций , , , находятся по формулам*



.



Доказательство**.** Доказательство проведем для двух функций и ; для двух оставшихся функций доказательства аналогичны.



1. Если , то . Используя правило дифференцирования обратной функции, имеем



.



Но . Отсюда и из предыдущего равенства получаем



, (имея в виду, что ).



2. Если , то . По формуле для производной обратной функции имеем



.



Используя тригонометрическое тождество , получим



.



Предложение доказано.

***Сводка основных формул дифференцирования***

Выведенные правила дифференцирования, формулы производных основных элементарных функций запишем в виде таблицы.

На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций. Поэтому в приведённой ниже таблице формул дифференцирования аргумент *х* заменён на промежуточный аргумент *u*.

**Правила дифференцирования**



1. в частности,



1. в частности ;



1. ;



1. .



**Формулы дифференцирования**

1. ;



2. , в частности, ; ;



3. , в частности, ;



4. , в частности ;



5. ;



6.



7.



8.



9. ;



10.



11.



12.



**Пример 1.5.**Найти производную функции



Решение. .



**Пример 1.6.**Найти производную функции .



Решение. .



**Пример 1.7***.* Найти производную функции .



Решение.



**Пример 1.8.**Найти производную функции .



Решение.



.



**§1.5*. Дифференциал***

С понятием производной тесно связано понятие дифференциала. Этому понятию и будет посвящен настоящий параграф.

***Определение дифференциала***

Рассмотрим функцию , которая имеет производную в точке *х* и в некоторой окрестности этой точки. Значению *х* дадим приращение Δ*х*. Обозначим Δ*у* соответствующее приращение функции. Согласно определению производной, мы можем записать



.



На основании теоремы о связи предела и бесконечно малой величины мы можем записать, что в некоторой окрестности точки *х* справедливо равенство

, (1.15)



где – бесконечно малая величина при . Умножая обе части соотношения (1.15) на Δ*х*, получим:



. (1.16)



Если , то первое слагаемое в (1.16) имеет тот же порядок малости, что и Δ*х*, а второе слагаемое , при делении на Δ*x* стремится к нулю при , т.е. имеет порядок малости более высокий, чем первое слагаемое. Величина , уже вне зависимости от равенства нулю величины , называется *дифференциалом* функции. Итак, мы пришли к следующему определению.



**Определение 1.2.** *Дифференциалом функции в точке х называется произведение производной , вычисляемой в заданной точке х, на приращение аргумента .*



Дифференциал обозначают или , таким образом



или (1.17)



Как следует из определения, дифференциал зависит от двух переменных - точки дифференцирования *х* и приращения . Из (1.16) и (1.17) вытекает равенство



, (1.18)



т.е. дифференциал функции *dy* и её приращение отличается друг от друга на бесконечно малую величину *,* более высокого порядка чем . Если пренебречь бесконечно малой величиной , то (1.18) даёт приближенное равенство . Это равенство означает, что при достаточно малых приращение функции с большей степенью точности можно заменить её дифференциалом. Заметим, что если , то . С другой стороны , и мы имеем весьма важное соотношение



. (1.19)



Учитывая это последнее равенство, соотношения (1.17), определяющее дифференциал, перепишем в виде

или . (1.20)



***Геометрический смысл дифференциала***

Рассмотрим функцию , которая в точке *х* имеет производную . На рис.1.3 график функции выделен жирной линией. Прямая *АС* – касательная к графику функции, проведенная в точке *х* и имеющая угол наклона к оси *Ох,* равный α. Из приведенного рисунка видно, что – приращение аргумента, - приращение функции. Очевидно, , т.е. - дифференциал функции. Следовательно, . Отсюда вытекает, что *геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции, проведенной в точке х.*



Таким образом, замена на геометрически означает замену части кривой графика функции частью касательной к этой кривой.

*y*

*x*

Рис.1.3

*x*



*A*

*D*

*C*

*B*

α



Из нашего рисунка видно, что дифференциал *dy* прямо пропорционален приращению аргумента Δ*x*. Этот же вывод следует непосредственно из формулы , т.е. – это коэффициент пропорциональности. Отсюда можно сделать вывод: заменяя Δ*у* на *dy* полагаем, что приближенно малые изменения функции пропорциональны соответствующим им малым изменениям аргумента, т.е. при малых изменениях всякая функция, имеющая производную, ведет себя как линейная.



Приведем ряд примеров нахождения дифференциалов.

**Пример 1.9.** , .



**Пример 1.10.** , .



**Пример 1.11**. , .



**Пример 1.12**. , .



**Пример 1.13**. , .



**Пример 1.14**. , .



***Применение дифференциалов в приближенных вычислениях***

Применение дифференциалов в приближенных вычислениях основано на приближенном равенстве

.



Но в этом соотношении , . Отсюда получаем формулу приближенного вычисления функции в точке , т.е. имеем



(1.21)



**Пример** **1.15**. Вычислить приближенно .



Решение. Рассмотрим функцию . По формуле (1.21) имеем:



.



Так как , то получаем



.



Вычисления на калькуляторе дают значение . Абсолютная погрешность составляет около 0,0000121.



***Инвариантность формы записи дифференциала***

Выше была установлена форма записи дифференциала в случае, когда *х* является независимой переменной. Покажем, что данная форма имеет место и в том случае, когда *х* является функцией от произвольной переменной *t*. В самом деле, если и , и тогда дифференциал *dy* находится по формуле



(1.22)



Используя правило дифференцирования сложной функции, можно записать .Отсюда и (1.22) имеем



(1.23)



Но . Окончательно из (1.23) имеем , а это означает, что форма записи дифференциала *dy* сохраняется независимо от того, является ли *х* независимой или зависимой переменной. Это свойство называют *инвариантностью* (неизменностью) формы записи дифференциала.



Особо следует отметить, что форма записи дифференциала в виде верна только в том случае, когда *х* – независимая переменная. Если же аргумент *x* является зависимой переменной, например, , то, очевидно, что и не совпадают.



**§1.6. *Производные и дифференциалы высших порядков***

Пусть функция определена на интервале и дифференцируема в каждой точке этого интервала, т.е. для любого существует . Тогда эту производную можно рассматривать как функцию независимого переменного *х* и тем самым ставить вопрос о производной для функций .



Производную от производной будем называть *второй производной* или *производной второго порядка* исходной функции . Вторую производную будем обозначать либо , либо .



Например, для функции имеем: .



Аналогично производная от второй производной называется *третей* производной или *производной третьего порядка* функции и обозначается либо, либо



Производной порядка называется производная от производной порядка *n*. Эти производные обычно обозначаются специальным образом



.



Порядок производной берется в скобках, чтобы производную *n*-го порядка отличить от *n*-ой степени функции .



Рассмотрим функцию , заданную на интервале и пусть эта функция имеет все производные вплоть до порядка *n*. Если – приращение аргумента *х*, то выражение , определяемое равенством



,



называют *дифференциалом n-го порядка*. Обычно используют обозначение , в этом случае дифференциал порядка *n* записывается в виде



Из последнего равенства можно формально написать, что

(1.24)



Правая часть (1.24) обычно используется для выражения *n*-ой производной функции .



**Глава 2. Основные теоремы дифференциального исчисления**

**§2.1. *Теорема Ролля***

Многие приложения производной основаны на теореме Лагранжа о конечных приращениях функции. Эта теорема будет доказана ниже. Для её доказательства используется теорема Ролля о нуле производной, которая формулируется следующим образом:

***Теорема 2.1 (Ролля***). *Пусть функция определена и непрерывна на отрезке и дифференцируема на интервале , тогда, если на концах отрезка функция принимает равные значения, то существует точка c, принадлежащая , в которой производная функции равна нулю, т.е..*



Доказательство. Так как функция непрерывна на отрезке , то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения, которые обозначим соответственно *M* и *m*. При этом возможны два случая: или *M* и *m* не равны.



1) если , то – постоянная величина, следовательно, во всех точках отрезка , т.е., в качестве точки *c* можно взять любую точку из интервала *.*

*y*

*x*

Рис.2.1

*с*

*b*

*a*



2) если *M* и *m* не равны, то функция не является постоянной. Согласно условию теоремы , поэтому хотя бы одно из значений *M* или *m* функция принимает во внутренней точке интервала *.* Не уменьшая общности, можно предположить, что , где *.* Найдём производную функции в точке *c*. По определению



. (2.1)



Так как в точке *a= c* функция достигает своего минимума, то при любом значении всегда выполняется неравенство



.(2.2)



Если Δ*x >* 0, то и, следовательно, согласно (2.1), . Если же Δ*x <* 0, то и, следовательно, .



Из сказанного выше следует, что одновременно выполняются два неравенства и . Это возможно только в том случае, когда *.* Теорема доказана.



***Геометрическая интерпретация теоремы Ролля***.

Как хорошо известно, значение производной в точке равно значению тангенса угла наклона между касательной, проведённой к графику функции в данной точке и положительным направлением оси *OX* . В условиях теоремы существует точка, принадлежащая интервалу, в которой производная равна нулю и, следовательно, в этой точке касательная параллельна оси *OX*  (рис.2.1).

**§2.2. *Теорема Лагранжа о конечных приращениях***

***Теорема 2.2 (Лагранжа***). *Если функция непрерывна на отрезке и дифференцируема в интервале , то существует точка c, принадлежащая интервалу , такая, что выполняется равенство:*



*.*



Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию , определённую следующим образом:



.



Функция непрерывна на отрезке , и дифференцируема на интервале . На концах отрезка функция принимает равные значения. В самом деле



,



Таким образом, функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. По теореме Ролля для функции существует точка *c*, в которой *.* Найдём . Очевидно,



*.*



Отсюда

,



или

. (2.3)



Из соотношения (2.3) и вытекает справедливость теоремы.

***Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа***

Рассмотрим график функции на отрезке (рис.2.2)*.* Пусть точка *A –* точка с координатами и точка *B -* точкас координатами *.* Проведём секущую *AB*. Тогда, согласно равенству (2.3), касательная , проведенная к графику функции в точке *С*,параллельна секущей *AB*. Этот факт и является геометрической интерпретацией теоремы Лагранжа.

*y*

*x*

Рис.2.2

*с*

*b*

*a*

*A*

*C*

*B*

*A′*

*B′*



Приведем некоторые следствия теоремы Лагранжа, которые будут использованы в дальнейшем.

**Следствие 2.1**. *Если производная функции равна нулю в каждой точке некоторого отрезка , то функция постоянна на этом отрезке.*



Доказательство. Пусть *x* – произвольная точка промежутка *.* Согласно теореме Лагранжа для отрезка имеет место равенство:



. (2.4)



По условию производная функции во всех точках интервала . Так как , то . Отсюда и равенства (2.4) имеем



.



Это и означает, что во всех точках *x* равна значению функции в точке *a*, т.е.  постоянна на отрезке . Следствие доказано.



**Следствие 2.2**. *Если две дифференцируемые функции имеют равные производные на отрезке , то эти функции отличаются на этом промежутке не более, чем на постоянное слагаемое.*



Доказательство. По условию *,* когда *х* принадлежит интервалу , т.е. *.* Таким образом, производная функции на отрезке равна нулю и, согласно следствия 1 эта разность равна постоянной величине, т.е. *.* Тем самым утверждение доказано.



**§2.3. *Теорема Коши***

Некоторые пределы можно вычислять, используя правило Лопиталя. Доказательство правила опирается на теорему Коши. Приведем формулировку и доказательство этой теоремы.

***Теорема 2.3 (Коши***). *Если функции и непрерывны на отрезке и дифференцируемы в интервале и, кроме того, производная функции во всех точках интервала отлична от нуля, то существует точка c, принадлежащая интервалу , такая, что имеет место равенство:*



*.* (2.5)



Доказательство. Прежде всего, установим, что *.* В самом деле, по теореме Лагранжа имеет место равенство:



*.*  (2.6)



По условию теоремы и, следовательно, правая часть (2.6), равная   
 отлична от нуля, т.е. . Для доказательства справедливости равенства (2.5), как и при доказательстве теоремы Лагранжа, введём вспомогательную функцию, определяемую равенством:



. (2.7)



Функция непрерывна на отрезке и дифференцируема в интервале *.* Вычислим значение функции на концах этого отрезка:



Итак, *.* Следовательно, функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля, согласно которой найдётся точка *c*, принадлежащая интервалу *,* такая, что *.* Используя равенство (2.7), получаем:



.



Отсюда получаем требуемое равенство

.



Теорема доказана.

**§2.4. *Формула Тейлора***

***Многочлен Тейлора и его нахождение***

При вычислении производных, значений функции в точке мы видим, что наиболее просто эти значения вычисляются у многочлена. В силу этого, спрашивается, можно ли заменить функцию многочленом, по крайней мере, в некоторой окрестности заданной точки. Если такая замена возможна, то каким условиям должна удовлетворять функция. Ответы на поставленные вопросы даёт формула Тейлора, которую мы рассмотрим в этом параграфе. Пусть функция *,* заданная на отрезке *,* имеет в каждой внутренней точке этого отрезка производную порядка . Для этой функции найдём многочлен:



(2.8)



такой, что значение функции и многочлена *,* а также все производные до –ой включительно функции и многочлена в точке *x*0 совпадают. Другими словами выполняются равенства:



(2.9)



Используя равенства (2.9), найдём коэффициенты *A*0*, A*1*, …, An* многочлена , определяемого соотношением (2.8). Из первого равенства (2.9) получаем:



. (2.10)



Так как



то из второго равенства (2.9) имеем:

*.* (2.11)



Аналогично получаем:

. (2.12)



Используя равенства (2.10), (2.11), (2.12), многочлен (2.8) можно записать следующим образом:

(2.13)



Многочлен, определяемый правой частью равенства (2.13), называют многочленом Тейлора для функции . Значения функции и *n* её производных в точке *x*0равны соответственно значению этого многочлена и его производными в точке *x*0.



Совершенно очевидно, что нельзя утверждать равенство *.* Многочлен даёт лишь некоторое приближение функции *.* Разность между функцией и её многочленом Тейлора обозначим , т.е.



*.*)



Отсюда получаем:

. (2.14)



Равенство (2.14) называют *формулой Тейлора* для функции в точке *x*0. При этом называют остаточным членом формулы Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора можно записать в нескольких видах. Приведём некоторые из них:



***Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа***

Докажем предварительно следующее утверждение.

***Лемма.*** *Пусть функции и определены в некоторой окрестности точки и удовлетворяют следующим условиям:*



1. *для любого значения из этой окрестности существует и ;*



1. *функции и в точке равны нулю вместе со всеми своими производными до порядка n включительно, т.е.*



*,*



*;*



*3) для любого значения из этой окрестности .*



*Тогда для любого x из этой окрестности существует точка с, принадлежащая интервалу между и , такая, что выполняется равенство*



*.*



Доказательство. Возьмем произвольное значение *х* из заданной окрестности. Предположим, что *х* лежит правее точки , т.е. . Применим теорему Коши к функциям и на отрезке , так как по условию . Справедливо равенство



, где .



Совершенно аналогично, применяя теорему Коши для функций и на отрезке , находим



, где .



Повторяя эту процедуру – применяя теорему Коши для функций и



, и , …, и на соответствующих отрезках, окончательно получаем



,



где .



Учитывая произвольность выбора *х*, лемма доказана.

Сформулируем и докажем основное утверждение этого пункта.

***Теорема 2.4.*** *Если функция непрерывно дифференцируема вплоть до порядка включительно в некоторой окрестности точки , то для любого х из этой окрестности найдется точка с, принадлежащая интервалу , такая, сто имеет место равенство , т.е. остаточный член формулы Тейлора имеет форму , которую называют формой Лагранжа.*



Доказательство. Пусть *х* произвольная точка из заданного интервала и пусть многочлен Тейлора для функции , тогда из (2.14) следует, что остаточный член формулы Тейлора для функции представим в виде .



Из условий (2.9), определяющих многочлен Тейлора, определения (2.13) и равенства (2.14) следует, что



(2.15)



Рассмотрим две функции и . Из (2.15) и определения функции следует, что эти функции удовлетворяют условиям леммы, поэтому для них выполняется равенство



.



Отсюда и вытекает справедливость нашего утверждения.

***Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано***

***Теорема 2.5***. *Если функция непрерывно дифференцируема вплоть до порядка включительно в некоторой окрестности точки , то для любого х из этой окрестности справедливо равенство , где называют остаточным членом в форме Пеано*.



Доказательство. Согласно утверждению теоремы предыдущего пункта имеет место равенство , где .



Очевидно, .



Отсюда вытекает, что . Тем самым теорема доказана.



Если , то формула Тейлора (2.14) принимает вид:



(2.16)



и называется *формулой Маклорена*.

***Разложение функций по формуле Маклорена***

Представление функции формулой Тейлора (Маклорена) назовём *разложением функции* по формуле Тейлора (Маклорена). Ниже приводятся разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена.

1. ;



2. ;



3. ;



4. .



При получаем частные случаи



;



;



;



5. ;



6. ;



7. .



***Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений***

Рассмотрим формулу Тейлора (Маклорена) (2.16) с остаточным членом в форме Лагранжа, где вместо *c* будем писать , . Тогда эта формула будет иметь вид:



.(2.17)



Если в формуле (2.17) отбросить остаточный член, то получится приближенная формула

,



заменяющая функцию сложной природы многочленом Тейлора. Погрешность в этой формуле по абсолютной величине равна первому отброшенному члену. В частности, если производная порядка функции ограничена по абсолютной величине числом , то



.



Например, если , то приближенная формула здесь имеет вид:



и остаточный член *rn (x)* в этом случае определяется равенством:

.



Таким образом, при *x* > 0 погрешность оценивается так:

.



Для *x=* 1 имеем:

; .



Если , то



.



Остаточный член в этом случае имеет вид:



и погрешность оценивается легко:

.



Если взять только один член в разложении, то есть , то для того, чтобы погрешность была меньше , достаточно взять для положительного значения *х,* или *x* < 0.1817, что соответствует примерно . Если использовать два члена формулы, т. е. , то для достижения той же точности уже достаточно взять или .



Таким образом, с увеличением числа членов многочлена Тейлора, он с все большей точностью и на большом протяжении воспроизводит исходную функцию.

**§2.5. *Правило Лопиталя***

Мощным инструментом при вычислении пределов и раскрытии неопределенностей является следующая теорема.

***Теорема 2.6 (Правило Лопиталя).*** *Если функции и определены в промежутке , , и, кроме того, пусть в промежутке существуют конечные производные и , причем в окрестности точки , а также существует предел . Тогда имеет место равенство* .



Доказательство. Функции и *g (x*) доопределим в точке *x= a* по непрерывности, положив *f (a) = f (b) =* 0*.* Тогда эти функции непрерывны на замкнутом промежутке [*a, b*]*.* Применяя теорему Коши, получим:



,где *a< c< x.* Тогда, очевидно, если *x→ a*, то и *c→ a*, поэтому из предыдущего равенства имеем:



.



Теорема доказана.

Правило Лопиталя сводит предел отношения функций к пределу отношений производных, если последний существует. Часто оказывается, что нахождение предела отношения производных проще и его можно найти элементарными способами.

**Пример** **2.1**. Вычислить предел: .



Решение. Нетрудно видеть, что и , т. е. мы имеем неопределенность вида . Можно воспользоваться правилом Лопиталя, согласно которому искомый предел равен пределу отношения производных. Таким образом, получаем:



**Пример 2.2.** Вычислить предел .



Решение. .



**Пример** 2.3. Вычислить предел .



Решение.



.



Замечание 1. Иногда правило Лопиталя нужно применять несколько раз. Это необходимо в том случае, когда после применения правила Лопиталя неопределенность остается. В качестве примера рассмотрим вычисление следующего предела:



.



Замечание 2. Правило Лопиталя можно применять и в том случае, когда аргумент *х* стремится не к конечному числу, а к бесконечности, т.е. если функции и *g* (*x*) дифференцируемы на промежутке (*a, +*∞) , то имеет место равенство



,



если существует предел, стоящий справа. Для доказательства последнего равенства достаточно сделать замену , применить правило Лопиталя при , а затем вернуться к исходной переменной.



**§2.6. *Виды неопределенностей и их раскрытие***

Всего насчитывается семь видов неопределенностей. Рассмотрим каждый из них и покажем, как они раскрываются, т.е. как вычисляются соответствующие пределы.

***Неопределённость вида***



Рассмотрим предел

*.*



Если , то при вычислении предела отношения этих функций мы имеем неопределенность вида . Выше мы подробно рассмотрели, как с помощью правила Лопиталя можно раскрывать неопределенность такого вида.



***Неопределенность типа***



Если и , то при вычислении предела отношения этих функций мы имеем дело с неопределенностью вида . Заметим, что здесь может быть как конечным числом, так и бесконечностью. Для вычисления этих пределов справедливо то же правило Лопиталя, но в другом виде.



***Теорема 2.7****. Если функции и определены и дифференцируемы на промежутке , причём и , , и если существует предел отношения производных, т. е. , то существует предел и он также равен A.*



Доказательство. Рассмотрим неопределенность вида **.** Используя тождественные преобразования, имеем:



(2.18)



В правой части равенства (2.18) получилось неопределенность вида , к которой применимо правило Лопиталя, доказанное выше.



.



Воспользовавшись тем, что предел произведения равен произведению пределов, имеем



или

.



По условию теоремы предел в левой части последнего равенства существует и равен А, и, тем самым, теорема доказана.

Теорема остается справедливой и в том случае, когда стремится к бесконечности.



Рассмотрим примеры.

**Пример 2.4**. Найти предел .



Решение.



Отсюда, в частности, следует, что функция при любом положительном ε стремится к бесконечности быстрее, чем функция , т. е. логарифмическая функция возрастает медленнее, чем любая степенная функция.



**Пример 2.5**. Найти предел .



Решение*.* .



Если , то справа имеем неопределенность того же типа , но продолжая этот процесс, используя то же правило Лопиталя, в конце концов, получим степень с отрицательным или нулевым показателем. Поэтому всегда .



Таким образом, показательная функция с основанием больше единицы возрастает быстрее степенной функции.

**Пример 2.6**. Найти предел



Решение*.* .



***Неопределенность вида***



Если а то при вычислении предела произведения мы имеем дело с неопределенностью вида 0⋅∞. Неопределенность такого типа легко привести либо к неопределенности вида , либо к неопределенности вида , а затем воспользоваться правилом Лопиталя. В самом деле:



**Пример 2.7**. Найти предел:

Решение. .



***Неопределённость вида***



Если при вычислении предела имеют место равенства и , то говорят о неопределенности вида . Можно произвести преобразования, сводящие это выражение к неопределенности вида или :



.



Иногда того же результата можно достичь значительно проще.

**Пример 2.8**. Найти предел .



Решение.



***Неопределенности вида***



В случае неопределенностей вида рекомендуется эти выражения сначала прологарифмировать.



Пусть , тогда . Предел ln *y*  представляет неопределенность вида 0⋅∞, которую мы изучили ранее. Предположим, что используя приемы, описанные выше, мы нашли , который оказался равный либо конечному числу *A*, либо +∞, либо −∞. Тогда исходный предел будет равен, соответственно, либо *e A*, либо +∞, либо 0.



**Пример 2.9**. Найти предел



Решение.Имеем неопределенность вида . Пусть , тогда . Здесь неопределенность вида . Найдем :



Следовательно, .



**Глава 3. Исследование функций**

**§3.1. *Условия возрастания и убывания функций***

Пусть функция задана на промежутке от *a* до *b*. Введем определения, которые будут использоваться в дальнейшем.

*y*

*x*

Рис. 3.2

*x*2

*x*1

*a*

*b*

*f(x*2)

*f(x*1)



*y*

*x*

Рис. 3.1

*a*

*b*

*x*1

*x*2

*f(x*1)

*f(x*2)

**Определение 3.1.** Функция , заданная в интервале , называется *монотонно возрастающей*, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е., если и , то (рис.3.1).



**Определение 3.2**. Функция называется *возрастающей* (неубывающей) на интервале , если при любых таких, что, всегда выполняется неравенство .



Аналогично определяются монотонно убывающие функции и убывающие (невозрастающие) функции:

**Определение 3.3**. Функция , заданная в интервале , называется *монотонно убывающей*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е., если и , то (рис.3.2).



**Определение 3.4.** Функция называется *убывающей* (невозрастающей) на интервале , если при любых , , всегда выполняется неравенство .



Выясним, каким образом по производной можно судить о возрастании или убывании функции в заданном промежутке. Теоремы, сформулированные и доказанные ниже, позволят с помощью производной функции найти промежутки возрастания и убывания функции.

***Теорема 3.1***. *Если функция определена и непрерывна на интервале , имеет конечную производную и возрастает, то ее производная на этом интервале не отрицательна, т.е. , для любого x*∈*.*



Доказательство: Пусть функция удовлетворяет условиям теоремы. Предположим, что произвольная точка отрезка и  произвольное приращение, такое, что . Так как возрастающая, то , и в пределе при , получим . Теорема доказана.



***Теорема 3.2.*** *Если функция определена на интервале и имеет на этом интервале конечную неотрицательную производную , то функция возрастает на интервале .*



Доказательство: Пусть *x*1*, x*2() ̶ две произвольные точки интервала . Применим теорему Лагранжа к функции на отрезке [*x1, x2*],получим *,* . Так как , то , т.е. функция возрастает на интервале . Теорема доказана.



Совершенно аналогично доказываются нижеследующие утверждения.

***Теорема 3.3.*** *Если функция определена на интервале , имеет конечную производную и убывает, то ее производная на этом интервале не положительна, т.е. , для любого .*



***Теорема 3.4***. *Если функция определена на интервале и имеет на этом интервале конечную неположительную производную , то функция убывает на интервале .*



Замечание. Отметим, что функция монотонно возрастает (убывает), если производная функции , () и нет целого промежутка, на котором тождественно равна нулю.



**§3.2*. Экстремум функции. Необходимое условие***

Пусть функция определена и непрерывна на отрезке .



**Определение 3.5**. Если функция определена и непрерывна на отрезке , то говорят, что она достигает в точке *максимума (минимума*), если существует окрестность точки , (целиком содержащаяся в отрезке ) такая, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство .



**Определение 3.6.**Точки максимума и минимума функции называются точками *экстремума* функции*.*

Наша цель – нахождение всех значений аргумента, при которых функция достигает экстремума. В решении этой задачи основную роль играет производная. Первоначально предположим, что функция в интервале имеет конечную производную. Пусть точка *x*0*,* , , является точкой экстремума функции. Найдем производную в этой точке. Не уменьшая общности можно предположить, что в точке *x0* функция достигает максимума. Согласно определению, найдется окрестность точки *x*0, для всех точек которой выполняется неравенство



(3.1)



Рассмотрим выражение

, (3.2)



которое при является производной функции в точке *x*0. Зафиксируем Δ***x*** таким образом, чтобы *x*0+Δ*x* принадлежащему интервалу . Величина в силу соотношения (3.1) всегда отрицательна. Следовательно, знак выражения, определяемого равенством (3.2), полностью определяется знаком . А именно: при Δ***x*** > 0



(3.3)



и при



. (3.4)



Переходя к пределу в (3.3) и (3.4) получим выражение для производной . Из (3.3) вытекает, что , а из (3.4) вытекает, что . Следовательно, . В этом и состоит *необходимое условие экстремума*.



*y*

Рис. 3.3

*x*

*x*0

*x*1

Экстремум будем искать только в тех точках, где производная равна нулю. На рис.3.3 это точки и . Особо следует отметить, что равенство нулю производной вовсе не означает, что в этой точке функция достигает экстремума. Это условие, подчеркнем еще раз, является необходимым, но не достаточным. Например, функция *x*3 имеет производную 3*x*2, равную нулю при , но в этой точке функция не имеет экстремума. Эта функция везде возрастает.



Допустим теперь, что в отдельных точках интервала функция не имеет производных. Тогда не исключена возможность, что именно в этих точках функция может достигать минимального или максимального значения. Например, функция в точке имеет минимум, хотя производной в этой точке у этой функции не существует. Точнее, есть левая производная, равная −1, и есть правая производная, равная +1.



Суммируя все вышесказанное, сформулируем необходимое условие экстремума функции.

***Теорема 3.5 (необходимое условие экстремума)***. *Если непрерывная и дифференцируемая во всех точках некоторой окрестности точки x0 , за исключением, быть может, самой точки x0, функция достигает экстремума в точке x0 , то ее производная в точке x0 либо равна нулю, либо не существует.*



Таким образом, только в точках, в которых производная равна нулю либо производная не существует, следует ожидать появления экстремума функции. Точки, в которых производная равна нулю или не существует, будем называть *критическими* точками.

**§3.3. *Достаточные условия экстремума***

Итак, если - критическая точка для функции , то эта точка является всего лишь «подозрительной» на экстремум и поведение функции в окрестности этой точки подлежит дальнейшему исследованию. Эти исследования состоят в проверке достаточных условий существования экстремума, которые будут установлены ниже.



***Исследование экстремума функции с помощью первой производной***

Пусть в некоторой окрестности точки, (за исключением быть может точки *x*0) существует конечная производная и слева от *x*0 , так и справа от *x*0 сохраняет определенный знак.



Тогда возможны случаи:

1) при *x*< *x*0 и при *x*> *x*0, т.е. производная при переходе через точку меняет знак “плюс” на “минус’’. Это означает, что в промежутке функция возрастает, а в промежутке убывает, следовательно, значение будет наибольшим для функции в промежутке т.е. в точке функция имеет максимум.



2) при и при , т.е. производная при переходе через точку меняет знак “минус” на “плюс’’. В этом случае легко убедиться, что в точке функция имеет минимум.



3) как при так и при либо же и слева и справа от , т.е. при переходе через *x*0 не меняет знака. Тогда функция либо все время возрастает, либо все время убывает, так что в точке никакого экстремума нет.



Итак, мы получили достаточное условие для исследования экстремума функции.

Пусть точка - критическая для функции . Тогда, подставляя в производную сначала значения *х* меньшие, чем , а затем значения *х* большие, чем , устанавливаем знак производной вблизи от точки *x*0 слева и справа. Если при этом *производная меняет знак плюс на минус, то в точке функция имеет максимум, если меняет знак минус на плюс, то в точке функция имеет минимум; если же знак производной не меняется, то в этой точке экстремума нет.*



Данное правило полностью решает вопрос в том случае, когда на интервале всего лишь конечное число критических точек. Пусть критические точки функции . Тогда в любом промежутке *, , …,*  существует производная , сохраняющая постоянный знак. Рассматривая соседние промежутки и применяя достаточные условия существования экстремума функции легко определить, есть или нет экстремума в каждой из точек .



***Исследование экстремума функции с помощью второй производной***

Пусть при первая производная функции обращается в нуль, т.е. . Такие точки будем называть *стационарными* точками данной функции. Допустим также, что в этой точке функция дважды дифференцируема, т.е. существует и непрерывна в этой точке и в некоторой её окрестности.



Справедливо утверждение:

***Теорема 3.6****:* *Пусть функция дважды непрерывно дифференцируема в окрестности стационарной точки , если , то функция имеет минимум, если же , то - максимум.*



Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, т.е. и значение существует. Если , то функция возрастает, т. е. вблизи точки слева , а справа . Таким образом, производная меняет знак с “минуса” на “плюс” и, следовательно, функция , согласно п.1.8.1, имеет в точке минимум.



Совершенно аналогично можно показать, что если , то в точке *x*0 меняет знак плюс на минус, т.е. в точке *x*0 функция имеет максимум.



Теорема доказана.

Приведем некоторые примеры исследований функций на экстремум.

**Пример 3.1**. Найти экстремум функции *.*



Решение. Так как *,* то стационарные точки и . Экстремумы функции могут быть только в этих точках. При переходе через производная меняет знак “+” на “−”, следовательно, в этой точке функция имеет максимум.



При переходе через точку производная меняет знак “−” на “+”, следовательно, в этой точке функция имеет минимум. Вычислив значения функции в точках и , найдем экстремумы функции: максимум и минимум .



Тот же результат можно получить, используя вторую производную. Так как , то *f″* (2) = −6 < 0, а , то в точке *x=* 2 функция имеет максимум, а при *x=*3 - минимум.



**Пример 3.2.** Найти экстремумы функции .



Решение. Найдем производную этой функции:

.



Стационарные точки функции *x=−*3 и *x=*3. Точка *x=−*1 является критической, но не является стационарной, потому что при *x=−*1 функция не определена.

Легко видеть, что при переходе через точку *x=−*3 производная не меняет знака, следовательно, точка *x=−*3 не является точкой экстремума.

В точке *x=*3 производная меняет знак с “−” на “+”, следовательно, в этой точке минимум. Находим .



Замечание. Для определения знака производной достаточно решить неравенство . Это неравенство решается методом интервалов (рис.3.4).



*x*

Рис. 3.4

−3

−1

3

−

+

+

+

Отсюда видно, что при переходе через точку *x=−*3 производная не меняет знака, а при переходе через точку *x=*3 знак производной меняется с “−” на “+”. Точка *x=−*1 не является точкой максимума, потому что в этой точке функция не определена.

**Пример 3.3.** Найти экстремум функции .



Решение.Находим производную функции:



При производная равна нулю, а при *x=*1 и *x=*2 производная не существует, следовательно, точки , , критические точки функции. При переходе через точку *x*=1 производная не меняет знака и, следовательно, эта точка не является точкой экстремума.



При переходе через точку производная меняет знак минус на плюс, следовательно, в точке функция имеет минимум. При переходе через точку *x*=2 производная меняет знак с “+” на ”−“, т. е. точка *x*=2 - точка максимума. Минимум функции равен , а максимум равен *f* (2) = 0.



***Наибольшее и наименьшее значение функции***

Согласно теореме Вейерштрасса, всякая непрерывная на отрезке функция достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции состоит в следующем.

Пусть непрерывна на отрезке и имеет на нем *к* стационарных точек . Тогда наибольшее значение функции на отрезке равно наибольшему из чисел *f* (*a*)*, f* (*x*1)*,…f* (*xk*)*, f* (*b*), а наименьшее значение функции - наименьшему из этих чисел.



**Пример 3.4**. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

*f* (*x*) = 2*x*3− 3*x*2− 36*x*− 8на отрезке [−3, 6].



Решение.Находим производную функции: *f′(x)* = 6 (*x*+2) (*x*−3) . Таким образом, стационарные точки функции: *x* = −2 и *x* = 3. Вычисляем значения функции *f* (−3), *f* (−2)*, f* (3), *f* (6) . Эти значения соответственно равны: *f* (−3) = 100, *f* (−2) = 36, *f* (3) = −89, *f* (6) = 100. Отсюда, наибольшее значение функции *f* (6) = 100, наименьшее – *f* (3) = −89.

**§3.4*. Выпуклость и вогнутость графика функции***

Рассмотрим на плоскости график некоторой однозначной дифференцируемой функции . Важной характеристикой формы этого графика является не только возрастание и убывание, но и направление выпуклости и вогнутости кривой. Определим эти понятия.



**Определение 3.7**. График дифференцируемой функции называется *вогнутым* на интервале , если при любых кривая расположена *выше* касательной, проведенной к кривой в точке *M* (*x*, *f* (*x*)) (рис. 3.5).



**Определение 3.8.** График дифференцируемой функции называется *выпуклым* на интервале , если при любых кривая расположена *ниже* касательной, проведенной к кривой в точке *M* (*x*, *f* (*x*)) (рис. 3.6).



*y*

*x*

Рис.3.5

*a*

*b*

*y*

*x*

Рис.3.6

*a*

*b*

Для нахождения промежутков выпуклости и вогнутости графика функции можно использовать следующее утверждение.

***Теорема 3.7***. *Если для дважды дифференцируемой функции вторая ее производная положительна в каждой точке промежутка , то график этой функции вогнутый на данном промежутке.*



*Если же вторая производная отрицательна, в каждой точке промежутка , то график функции выпуклый на данном промежутке.*



Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть , при любом из интервала , и пусть *x*0 произвольная точка из этого интервала. Через точку *M*0 (*x*0*, f* (*x*0)) графика функции проведем касательную . Как известно, уравнение этой касательной задается уравнением



. (3.5)



Сравним в точке ординаты кривой и касательной , для этого рассмотрим разность . Используя (3.5), имеем:



(3.6)



По теореме Лагранжа справедливо равенство:

*,*



где *с*  лежит между *x* и *x*0 и поэтому из (3.6) получаем:

. (3.7)



Используя еще раз теорему Лагранжа, имеем:

*,*



где *с*1 лежит между *с* и *x*0 , поэтому из (3.7) имеем:

.



По условию теоремы *f″ (c*1*)*> 0. Если , то также и, следовательно, (*x*−*x*0) (*c*−*x*0) > 0, т. е., и в этом случае δ > 0. Таким образом, при всегда имеем , т.е. *y > y*0 .



Отсюда следует, что при любом из интервала график функции расположен выше своих касательных, т. е., график функции является выпуклым на этом интервале.



Вторая часть теоремы доказывается совершенно аналогично. Теорема доказана.

***Точки перегиба***

**Определение 3.9.** Точка называется *точкой перегиба* кривой , если можно найти такое число , что на отрезке она выпукла, а на отрезке она вогнута; или наоборот.



Таким образом, точка перегиба всегда отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой части, а касательная к кривой (если она существует) в точке перегиба пересекает эту кривую. В дальнейшем точку перегиба часто будем обозначать только её абсциссой.

Для нахождения точек перегиба можно воспользоваться следующим утверждением.

***Теорема 3.9.*** *Если для функции ее вторая производная в точке x*0  *обращается в нуль (или не существует) и при переходе через эту точку меняет свой знак на противоположный, то точка графика M*0 (*x*0*, f* (*x*0)) *является точкой перегиба.*



Доказательство. Предположим, что вторая производная в точке *x*0  обращается в нуль и меняет свой знак с плюса на минус. Тогда левее точки *x*0  вторая производная положительна и, следовательно, по теореме 3.7, график функции - вогнутая кривая. Правее точки *x*0  вторая производная отрицательна и, следовательно, график функции выпуклый (рис.3.7).



*x*

Рис. 3.7

*y*

*М*0

*x*0

Таким образом, в точке *M*0 кривая меняет вогнутость на выпуклость и, следовательно, точка - точка перегиба графика этой функции. Теорема доказана.



**§3.5*. Асимптоты графика функции и их нахождение***

Рассматривая график функции на интервале , мы вынуждены удовлетворяться лишь его частью, поскольку этот интервал всегда конечен. Однако большой интерес вызывает поведение функции «на бесконечности», т.е. при неограниченном возрастании (по абсолютной величине) абсциссы и/или ординаты переменной точки кривой. Важным частным случаем при этом является неограниченное приближение графика функции к некоторой прямой. Рассмотрим этот случай подробнее.



**Определение 3.10.**Прямая линия называется *асимптотой* кривой, если расстояние от точки кривой до этой прямой по мере удаления точки в том или ином направлении в бесконечность стремится к нулю.



***Вертикальные асимптоты***

Если или , то прямая *x* = *x*0 - называется *вертикальной асимптотой* графика функции . Например, прямая является вертикальной асимптотой графиков функций и , так как , и . График функции tg *x* имеет бесконечно много вертикальных асимптот: каждая из прямых является асимптотой.



Отсюда вытекает правило нахождения вертикальных асимптот. Первоначально находятся точки *x*1, *x*2, … *x*k , в которых функция не определена, а затем вычисляются всевозможные односторонние пределы функции в этих точках, а именно, вычисляются пределы и . Если, по крайней мере, один из этих пределов равен +∞ или −∞, то прямая является вертикальной асимптотой.



***Горизонтальные и наклонные асимптоты***

Предположим, что график функции имеет наклонную асимптоту в направлении положительной оси , как это изображено на рис. 3.8.



*y*

*М*

δ

*y = f(x)*

*Y=kx+b*

*x*

Рис.3.8

Так как разность ординат ⏐*y* −*Y*⏐ лишь постоянным множителем (равным косинусу угла между асимптотой и осью *х*) отличается от расстояния , то при *x*→+∞, одновременно с , должна стремиться к нулю и эта разность:



. (3.8)



Преобразуем это выражение

.



Очевидно, выражение в скобках стремится к нулю, поскольку . Используя свойства пределов, окончательно получаем:



. (3.9)



Учитывая теперь (3.9), из (3.8) получаем

. (3.10)



Таким образом, если кривая графика функции имеет наклонную асимптоту , то коэффициенты этой прямой *k* и *b* находятся по формулам (3.9) и (3.10) соответственно.



В частности, при получаем *горизонтальную* асимптоту, уравнение которой определяется равенством , где



.



Для нахождения всех наклонных асимптот графика функции следует отдельно найти асимптоты при *x*→+∞ и при *x*→ −∞.



**Пример 3.4**. Найти все асимптоты графика функции .



Решение. Функция определена и непрерывна всюду, за исключением .



.



Следовательно, - вертикальная асимптота. Для нахождения наклонных асимптот воспользуемся формулами (3.9) и (3.10).



.



Таким образом, - уравнение наклонной асимптоты.



**Пример 3.5**. Найти все асимптоты графика функции .



Решение. Функция определена и непрерывна при , следовательно, вертикальных асимптот нет. Функция четная. Найдем асимптоты при , используя формулы (3.9),(3.10).



.



.



Таким образом, прямая - наклонная асимптота.



Исследуем поведение функции при .



Несложно показать, что и в этом случае . Следовательно, - также асимптота графика функции.



**§3.6. *Построение графика функции***

Все исследования, проведенные выше, нужны, в основном, при построении графиков функций. В ходе построения графиков функций можно придерживаться, например, следующей схемы:

1. *Найти область определения функции. Проверить, является ли функция четной, нечетной, периодической.*

*Найти точки пересечения графика с осями координат, промежутки, где значения функции положительны, отрицательны. Найти точки разрыва функции.*

1. *Найти асимптоты графика. Найти односторонние пределы функции в граничных точках области определения и в точках разрыва.*
2. *Вычислить первую производную функции, найти экстремумы и промежутки ее возрастания и убывания.*
3. *Вычислить вторую производную, найти точки перегиба графика, промежутки выпуклости и вогнутости графика функции.*
4. *Нарисовать график функции.*

При решении конкретной задачи отдельные этапы этой схемы могут быть расширены, другие же могут быть совершенно излишними.

**Пример 3.6.** Исследовать и построить график функции .



Решение. Данная функция определена на всей числовой прямой и бесконечное число раз дифференцируема. Следовательно, вертикальных асимптот функция не имеет. Так как , то наклонных асимптот тоже нет. График пересекает ось ординат в точке .



Найдем экстремумы функции, а также участки ее возрастания и убывания. Вычисляем производную . Очевидно, что при и при . Значит, на интервалах и функция возрастает, а при функция убывает. Отсюда следует, что - точка максимума *f* (−3) =6, а - точка минимума *f* (1) = −2.

*y*

*x*

Рис. 3.9

-3

1

6

-2



Вычислим вторую производную . Функция выпукла вверх при *x* < − 1   
() и выпукла вниз при *x* > − 1 (*)*. При - график имеет точку перегиба *f* (−1) =2. Проведенные исследования позволяют построить график функции. График функции изображен на рисунке 3.9.



**Пример 3.7.** Исследовать и построить график функции .



Решение. Функция определена на всей действительной оси за исключением точки *x*= 2. График ее пересекает оси координат в одной точке *M* (0; 0). Функция положительна при *x*> 0,   
*x* ≠ 2 и отрицательна при . Так как , то прямая *x*= 2 - вертикальная асимптота графика. Найдем наклонные асимптоты:



. .



Итак, график имеет наклонную асимптоту .



Вычислим первую производную:

.



Очевидно, точка - экстремум функции. На интервалах функция возрастает, на интервале убывает. Следовательно, точка - точка минимума и .



Вычислим вторую производную

.



Мы видим, что функция имеет единственную точку перегиба при *x*= 0. Если *x*< 0 ,то функция выпукла вверх, поэтому ее график при *x*→ −∞ приближается к асимптоте снизу. При и при *x* > 2 функция выпукла вниз. Отсюда следует, что при *x*→ +∞ график приближается к асимптоте сверху. Вычислив еще несколько точек графика, на основе проведенных исследований делаем эскиз графика функции.



*y*

*x*

Рис. 3.10

0

2

6

**РАЗДЕЛ III. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

**Глава 1. Основные понятия и свойства**

**функции нескольких переменных**

**§1.1*. Понятие функции нескольких переменных***

Большинство физических величин являются зависимыми от других величин, причём, как правило, от нескольких. Например, температура может изменяться при переходе от одной точки к другой. Поскольку каждая точка определяется тремя декартовыми координатами, допустим *x*, *y*, *z*, то и температура определяется значениями трех переменных *x*, *y* и *z*. Сила притяжения между двумя телами зависит от их масс и расстояния между ними.

Настоящая глава посвящена функциям многих переменных. Изучение функций многих переменных ограничим случаем, когда функция зависит от двух переменных. Этот важный частный случай выявит все важнейшие особенности функций многих переменных. Отметим, что для функции двух переменных допустима наглядная геометрическая интерпретация.

Если на плоскости введена система координат, то каждая точка плоскости характеризуется двумя числами – координатами *x* и *y*. Сопоставив каждой такой точке действительное число *z*, мы тем самым определим функцию или – функцию двух независимых переменных.



**Пример 1.1**. , **Пример 1.2**. ,



**Пример 1.3.** , **Пример 1.4**. .



Множество всех точек , для которых значение функции определено, называется её областью определения. В примере 1.1 областью определения служит вся плоскость, в примере 1.2 – вся плоскость за исключением точки , в примере 1.3 – круг радиуса 1 с центром в начале координат, а в примере 1.4 – также вся плоскость за исключением точки .



Графиком функции двух переменных служит поверхность в трёхмерном пространстве. Каждая точка этой поверхности имеет координаты .



Графики для примеров 1.1- 1.4 показаны соответственно на рис.1.1 - 1.4.

Для определения функции трёх переменных необходимо рассмотреть множество точек трёхмерного пространства, характеризуемых в случае введённой системы координат, тремя числами . Пусть .

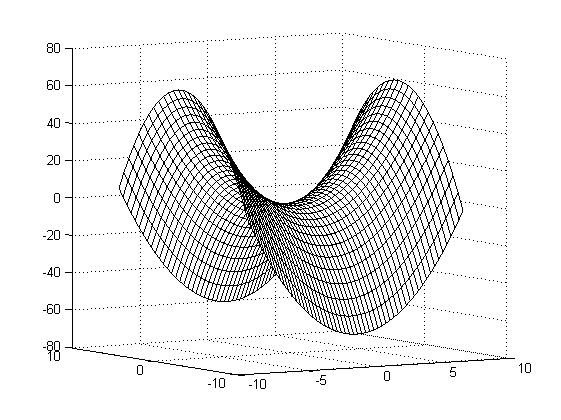


Рис. 1.1

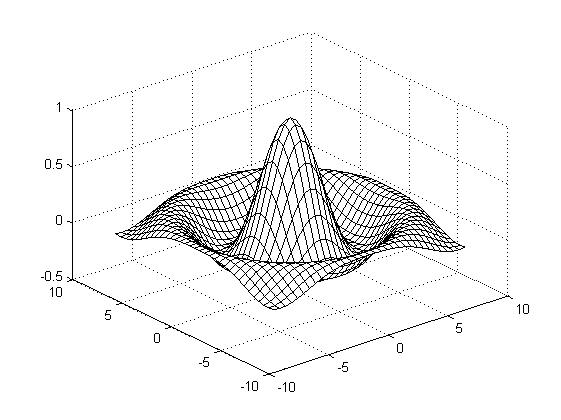


Рис. 1.2

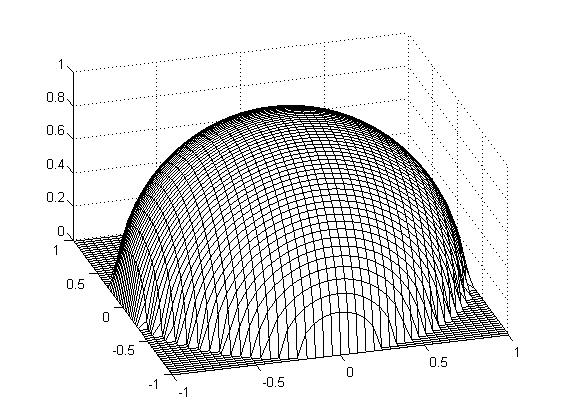
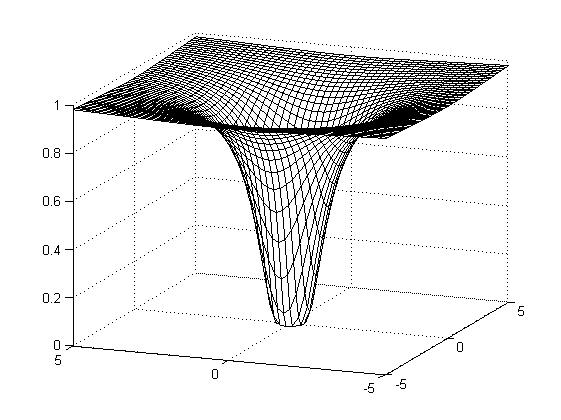


Рис. 1.4

Рис. 1.3

Сопоставим каждой такой точке некоторое действительное число. Тем самым определена функция трёх независимых аргументов . Для изображения такой функции требуется уже четырёхмерное пространство.



В общем случае, функцией *n* независимых переменных называется правило, при котором каждой упорядоченной совокупности *n* чисел ставится в соответствие некоторое число *у*. Будем использовать в этом случае обозначение .



Вернёмся к случаю двух переменных. Ещё одним примером такой функции является расстояние от фиксированной точки до точки . Как известно, расстояние от до определяется равенством , определенным для всех точек плоскости.



Назовём δ-*окрестностью точки* множество точек, удовлетворяющих неравенству . Очевидно, δ-окрестность представляет собой внутренность круга радиуса δ с центром в точке .



Точка *М* называется *внутренней точкой* области *D*, если эта точка принадлежит области *D* вместе с некоторой своей δ-окрестностью.

Область *D* называется *открытой*, если все её точки – внутренние.

Точка *М* называется *граничной точкой* области *D*, если любая δ-окрестность этой точки содержит как точки области *D,* так и точки не входящие в эту область. Множество граничных точек области *D* образует её *границу.* На рис.8.5 точка *М*1 – внутренняя точка, а *М*2 – граничная точка области *D*1.

Риc. 1.5

*М*1

*М*2

δ

*D*1

*D*2

*D*3

*Замкнутым* называется множество, которое содержит все свои граничные точки.

Область называется *линейно* *связной*, если любые две её точки можно соединить ломаной, все точки которой принадлежат этой области. На рис.1.5 области *D*1 и *D*2 – связные. Область *D*3 не связная.

В дальнейшем, если не предполагается обратное, будем под областью подразумевать открытую линейно связную область.

**§1.2. *Предел функции двух переменных***

Пусть функция определена в некоторой области, содержащей точку . Число *А* называется *пределом функции* *в точке* , если для любого положительного числа можно указать такое положительное число , что для всех точек *M* из δ-окрестности точки , за исключением может быть самой точки , выполняется неравенство .



Будем записывать этот факт следующим образом:

или . (1.1)



Из определения предела следует, что если он существует, то он не зависит от способа стремления точки *М* к точке . Заметим, что для функции одной переменной можно говорить о левостороннем или правостороннем пределах. Для функции двух переменных число таких «односторонних» пределов бесконечно. Это обстоятельство значительно отличает факт существования предела функции одной переменной от функции двух или большего числа переменных.



**Пример 1.6**. Найти предел .



Решение. Пусть точка приближается к точке вдоль прямой . Тогда



.



Очевидно, при разных значениях *k* предел будет принимать разные значения. Следовательно, функция не имеет предела в точке .



**Пример 1.7**. Найти предел .



Решение. Снова выберем путь стремления точки к бесконечности вдоль прямой , . В таком случае



.



Выражение при любом значении *k.* Но тогда .



Отметим, что если , то при функция в окрестности точки называется *бесконечно малой*, а при – *бесконечно большой*. Кроме того, имеют место все свойства пределов, известные для функции одной переменной.



***Свойство 1.1***. *Если пределы функций и при , стремящемся к , существуют и конечны, то предел суммы этих функций равен сумме пределов, т.е.*



.



***Свойство 1.2***. *Если пределы функций и при , стремящемся к , существуют и конечны, то предел произведения этих функций равен произведению пределов, т.е.*



.



***Свойство 1.3***. *Если пределы функций и при , стремящемся к , существуют и конечны и, при этом, предел отличен от нуля, то предел отношения этих функций равен отношению пределов, т.е.*



.



***Свойство 1.4***. *Если для всех точек некоторой окрестности точки для функций и выполняется неравенство и пределы и при существуют, то*



.



***Свойство 1.5***. *Если для всех точек некоторой окрестности точки для функций , , выполняются неравенства*



.



*Если при этом , то предел существует и также равен :* .



**§1.3. *Непрерывность функции двух переменных***

Пусть точка принадлежит области определения функции вместе с некоторой окрестностью этой точки.



**Определение 1.1**. Функция называется *непрерывной в точке* , если ее предельное значение в этой точке существует и равно значению , т.е. .



Точки, в которых не выполнено это определение, называются точками разрыва функции. Например, у функций примеров 1.2 и 1.4 точка является точкой разрыва. А у функции точки разрыва образуют целую линию – прямую .



На языке «» определение непрерывности примет следующий вид.



**Определение 1.2**. Функция называется *непрерывной в точке* , если для любого можно указать такое , что для всех точек *M* таких, что , выполняется неравенство .



Обозначим приращение функции в точке и назовём его *полным* *приращением*. Обозначим также приращения аргументов, соответственно и .



Тогда определение непрерывности функции двух переменных можно сформулировать так: *функция непрерывна в точке , если* *полное приращение функции в этой точке стремится к нулю, когда приращения аргументов стремятся к нулю*



.



Если положим , то функция является функцией одной переменной *x* (точнее ) и ее приращение называется *частным приращением функции по x.*



Аналогично, при – функция одной переменной *y* (точнее ). Её приращение называется *частным приращением по y.*



**Определение 1.3**. Функция называется *непрерывной по переменной x в точке* , если ее частное приращение в этой точке стремится к нулю при стремлении к нулю . Аналогично, функция называется *непрерывной по переменной y в точке* , если ее частное приращение в этой точке стремится к нулю при условии .



Непрерывность по отдельным переменным, однако, недостаточна для непрерывности функции в точке. Убедимся в этом, рассматривая следующий пример.

**Пример 1.8**. Докажем, что функция



непрерывна по каждой переменной в отдельности в точке , но не является непрерывной в этой точке при одновременном изменении координат.



Поверхность, задаваемая этой функцией, представлена на рис. 1.6.

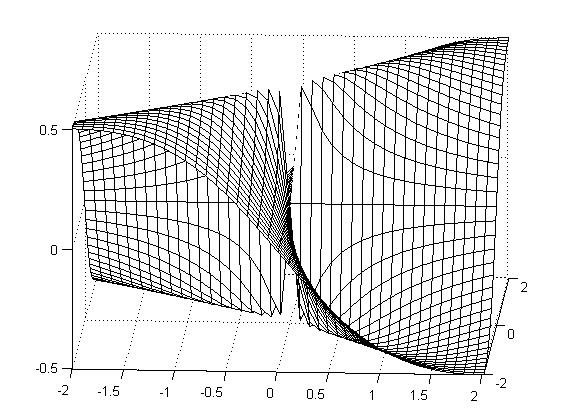


Рис. 1.6

Действительно, полагая, например, , получаем и , то есть и по этой координате функция непрерывна. Аналогично . Отметим, что геометрически стремление в точку происходит по координатным осям. Однако через точку проходит еще множество прямых , на которых при *y* стремится к нулю одновременно. Вычислим предел функции *z* в этом случае.



При этот предел равен нулю, а при предел отличен от нуля и данная функция разрывна в точке . Точки разрыва функции могут образовать линии разрыва. Например, для функции линии разрыва образуют оси координат.



Из определения непрерывности и из свойств предела следуют свойства непрерывных функций, аналогичные соответствующим свойствам функции одной переменной.

**Свойство 1.6.** *Сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке функций также непрерывны в этой точке. В последнем случае предполагается, что знаменатель отличен от нуля в точке* .



**Свойство 1.7.** *Если функция непрерывна в точке , функции и непрерывны в точке , причем и , то сложная функция непрерывна в точке .*



**Свойство 1.8.** *Если функция непрерывна в ограниченной замкнутой области G, то в этой области она ограничена, принимает наименьшее и наибольшее значение, а также принимает и все промежуточные значения*.



**Глава 2. Дифференциальное исчисление   
функций двух переменных**

**§2.1. *Частные производные***

Пусть в некоторой открытой области плоскости задана функция двух переменных . Возьмем произвольную точку в этой области и образуем частное приращение функции по *х* .Рассмотрим теперь отношение



.



**Определение 2.1.** *Частной производной функции* *по переменной х* в точке называется предел этого отношения при (если он существует и конечен).



Для обозначения частной производной функции по в точке используют символы



, , , .



Таким образом, .



Аналогично, считая переменную постоянной и придавая переменной приращение , получим *частное приращение функции по переменой y* в точке: .



**Определение 2.2.** *Частной производной функции по переменной у в точке*  называется предел



,



если он существует и конечен. Другие обозначения для частной производной по *у* имеют вид

, , .



Для выяснения физического смысла частных производных заметим, чтоотношение дает среднюю скорость изменения функции по переменной на отрезке , между точками и . Значит, предел этого отношения при (если он существует и конечен) характеризует *мгновенную* скорость изменения данной функции по аргументу в самой точке .



Аналогично, частная производная характеризует скорость изменения функции точке только по аргументу .



Операция нахождения частных производных и называется *дифференцированием функции по переменной*и *переменной*, соответственно.



Фактически, частная производная функции по (по ) есть, по определению, обыкновенная производная функции , рассматриваемой как функция одной переменной (соответственно ) при постоянном значении другой переменной. Поэтому, вычисление частных производных от конкретных функций производится по известным для функции одной переменной правилам. Только требуется помнить, по какой переменной ищется производная, и при этом другую переменную считать постоянной.



**Пример 2.1**. Найти частные производные функции

.



Решение. Считая постоянной, имеем ; считая постоянной, имеем .



Аналогично определяются и обозначаются частные производные функции любого числа независимых переменных. Именно, частная производная от функции по любой из независимых переменных в точке есть предел отношения частного приращения функции по в этой точке к приращению при (если это предел существует и конечен): .



Частные производные функции двух переменных имеют простой геометрический смысл. Предположим, что функция имеет в точке частную производную по переменной . Допустим, что поверхность является графиком функции (рис.2.1). Проведем через точку плоскость, параллельную координатной плоскости *xOz* (на рисунке заштрихована). Уравнением такой плоскости будет . В сечении этой плоскости с поверхностью получится дуга , где .   
Построим в точке касательную прямую к линии . Пусть прямая образует с осью угол . Тогда .



Рис.2.2



Рис.2.1



Действительно, по определению, есть обычная производная по аргументу от функции одной переменной при . Согласно §1.2 раздела II, производная этой функции в данной точке равна тангенсу угла наклона к оси касательной к графику этой функции в точке . Линия , между тем, и есть график функции , а прямая – эта самая касательная.



Аналогично, если функция имеет в точке частную производную по переменной , то , где – угол наклона к оси касательной, проведенной в точке к линии пересечения поверхности и плоскости с уравнением (на рисунке 2.2 эта плоскость заштрихована).



**§2.2*. Дифференциал***

Пусть функция определена в некоторой окрестности точки . Составим *полное приращение* функции в этой точке



.



Функция называется *дифференцируемой в данной точке* , если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде



, (2.1)



где *A*, *B* – числа, не зависящие от и , а и – бесконечно малые величины при и . Первые два слагаемых выражения (2.1) образуют *главную часть приращения функции*, линейную относительно и . Эта часть называется *полным дифференциалом* функции и обозначается *dz*



(2.2)



Для независимых переменных *x* и *y* приращения совпадают с дифференциалами этих переменных , . Учитывая это, слагаемые выражения (2.2) называются *частными дифференциалами* функции . Таким образом



, , . (2.3)



**Теорема 1.1 (*необходимое условие дифференцируемости***). *Если функция дифференцируема в точке , то в этой существуют её частные производные по переменным x и y, причем*



, .



Доказательство. Из условия дифференцируемости функции следует, что , и поэтому дифференцируемая функция непрерывна в точке . Частное приращение по переменной *х* имеет вид , где - бесконечно малая величина, зависящая от , причем при .



Аналогично, частное приращение по переменной *у* имеет вид , где - бесконечно малая величина, зависящая от , причем при . Имеем



и , т.е. и .



Теорема доказана.

***Следствие 2.1****.* *Условие дифференцируемости функции* (2.1) *можно представить в виде*

,



где - бесконечно малая величина при и . Здесь - «о малое» (см. раздел I §3.7), .



Формула для вычисления полного дифференциала вытекает из равенств (2.3):

. (2.4)



Заметим, что из непрерывности функции и существования частных производных еще не следует дифференцируемость функции.

Например, функция в точке непрерывна и имеет частные производные, но не дифференцируема в этой точке. В самом деле, непрерывность функции в начале координат вытекает из равенства . Вычислим частные производные этой функции в этой точке. По определению ;



.



Обе частных производных в точке равны 0. Исследуем теперь функцию на дифференцируемость. Для этого проверим, можно ли приращение функции в точке (0,0) представить в виде



,



где и - бесконечно малые величины для, соответственно, *x* и *y*, стремящихся к нулю. В нашем случае эта формула будет иметь вид



.



Проверим, справедливо ли это утверждение. Для этого рассмотрим предел . Покажем, что он не равен нулю. В самом деле, если при вычислении предела положим , то . Следовательно, рассматриваемый предел не существует, и, таким образом, при , то есть функция в точке не дифференцируема.



Достаточные условия дифференцируемости функции даны в следующей теореме, которую мы приведем без доказательства.

***Теорема 2.2.*** *Если функция имеет непрерывные частные производные и в точке , то она дифференцируема в этой точке и её полный дифференциал выражается формулой* (2.4).



Дифференциал функции двух переменных обладает теми же свойствами, что и дифференциал функции одной переменной:



1) , где ,



2) ,



3) ,



4) .



Доказательство приведем для свойства 3).

Пусть и , но , . Тогда получим .



Полный дифференциал функции нескольких переменных обладает, как и в одномерном случае, свойством инвариантности формы. Это будет доказано в следующем параграфе.

**§2.3*. Дифференцирование сложной функции и неявной функции***

Пусть - функция двух переменных, каждая из которых является функцией независимой переменной *t*, то есть , . В этом случае функция является сложной функцией одной независимой переменной , а переменные *х* и *у* - *промежуточные переменные.*



***Теорема 2.3.*** *Если - дифференцируемая в точке функция и и – дифференцируемые функции независимой переменной , то производная сложной функции вычисляется по формуле*



(2.5)



Доказательство. Дадим независимой переменной приращение . Тогда функции и получат приращение и соответственно. Они, в свою очередь, вызовут приращение функции .



Так как по условию функция дифференцируема в точке , то ее полное приращение можно представить в виде



,



где при . Разделим выражение на и перейдем к пределу при . Тогда и в силу непрерывности функции и (по условию теоремы они дифференцируемые). Получаем:



,



т.е.

,



или

.



Теорема доказана.

***Следствие 2.2.*** *Пусть, где , т.е. - сложная функция одной независимой переменной . Тогда производную можно найти по формуле, называемой формулой полной производной,*



(2.6)



Доказательство. В данном случае роль переменной играет . Согласно формуле (2.5) имеем:



или ,



что и требовалось доказать.

Пусть , где . Тогда - сложная функция независимых переменных и . Ее частные производные и можно найти, используя формулу (2.5) следующим образом. Зафиксировав , заменяем в ней соответствующими частными производными :



(2.7)



Аналогично получаем: .



Таким образом, производная сложной функции (*z*) по каждой независимой переменной (*u* и *v*) равна сумме произведений частных производных этой функции (*z*) по ее промежуточным переменным (*x* и *y*) на их производные по соответствующей независимой переменной (*u* или *v*).

**Пример 2.8**.Найти частные производные , , если .



Решение. Используем формулу (2.7):

.



Преобразуем правую часть полученного равенства:

.



Аналогично,



Далее, преобразуем:



Теперь, используя правило дифференцирования сложной функции, покажем, что полный дифференциал обладает *свойством инвариантности*: полный дифференциал функции сохраняет один и тот же вид независимо от того, являются аргументы независимыми переменными или функциями независимых переменных.



Рассмотрим сложную функцию , где , т.е. функцию , где *u* и *v* - независимые переменные. Найдем полный дифференциал этой функции



.



В последней строке выражения в скобках представляют собой полные дифференциалы и функций и . То есть, справедливо равенство



.



Следовательно, дифференциал сохранил свою форму, хотя смысл дифференциалов *dx* и *dy* здесь уже совершенно другой.

Если функция задана *неявно* уравнением . Оставляя в стороне вопрос об условиях существования однозначной функции и её производных, поставим задачу нахождения частных производных и в случае, если они существуют. Подставим в уравнение вместо *z* функцию . Получим тождество . Дифференцируя это выражение по переменным *х* и *у*, получим



,



.



Отсюда (при условии , используя обозначения и ) получим окончательно



и (2.8)



Замечание 1. Уравнение не всегда определяет одну переменную как неявную функцию двух других. Так, уравнение определяет функции и , определенные в круге , а уравнение не определяет вообще никакой функции.



Имеет место следующее утверждение, которое мы приведем без доказательства.

**Теорема 2.4. *(о существовании неявной функции).*** *Если функция и ее производные определены и непрерывны в некоторой окрестности точки , причем , а , то существует окрестность точки , в которой уравнение определяет единственную функцию , непрерывную и дифференцируемую в окрестности точки и такую, что .*



Замечание 2. Уравнение задаёт неявную функцию одной переменной. Можно показать, что в случае, если удовлетворены условия существования неявной функции одной переменной (имеется теорема, аналогичная вышеуказанной), то производная неявной функции находится по формуле



**Пример 2.9***.* Найти частные производные функции *z*, заданной неявно уравнением .



Решение. Здесь . По формулам (2.8) вычислим .



**Пример 2.10.** Найти , если неявная функция задана уравнением .



Решение. Здесь . Следовательно, , т.е. .



**§2.4*. Частные производные и дифференциалы высших порядков***

Пусть частные производные , функции , определенной в области , существуют в каждой точке этой области.



В этом случае частные производные представляют собой функции двух переменных *x* и *y*, также определенных в области . Эти функции могут, в свою очередь, иметь частные производные, называемые *вторыми частными производными* или *частными производными второго порядка* функции . Они определяются и обозначаются следующим образом:



- вторая частная производная по переменной *х*;



- вторая частная производная по переменной *y*;



и - смешанные частные производные.



Аналогично определяются частные производные и более высокого порядка, например, - третья смешанная частная производная.



Замечание. Запись, например, «» не означает возведение в квадрат. Читать её следует так «*д два зет по д икс дважды*».



**Пример 2.11**. Найти все вторые частные производные функции .



Решение. Сначала найдем первые частные производные:

, .



Теперь дифференцируя каждую из полученных частных производных еще раз по каждой переменной, получим уже четыре частных производных второго порядка:

, , , .



Заметим, что в последнем примере смешанные частные производные оказались равными. Это не случайно. Вообще, имеет место утверждение:

***Теорема 2.5 (Шварца).*** *Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные частные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, равны между собой.*

В частности, непрерывные смешанные частные производные второго порядка равны между собой

.



Рассмотрим функцию , которая неограниченное число раз дифференцируема в каждой точке *M* области .



Тогда дифференциал первого порядка этой функции равен

.



Для сокращения записи второго и последующих дифференциалов введем символ *d* при помощи сокращения и определим операцию возведения этого символа в степень *n* как операцию возведения двучлена в степень *n*:



Тогда мы можем применить символ *d* для вычисления дифференциалов любого порядка



.



И, наконец, выражение для дифференциала порядка *n* можно записать в форме:

.



**§2.5*. Формула Тейлора для функции двух переменных***

Пусть функция задана в окрестности точки и раз дифференцируема в этой окрестности. По аналогии с тем, как было сделано с функцией одной переменной, можно представить функцию двух переменных в виде многочлена *n*-го порядка по степеням и и некоторого остаточного члена. Для случая такое представление имеет вид



где - остаточный член, структура которого аналогична структуре остаточного члена в формуле Тейлора для функции одной переменной.



В общем случае, рассмотрим приращения и и заметим, что при и они превращаются в дифференциалы и входят в выражения для . Тогда можно представить полное приращение функции в точке для любой точки из указанной окрестности формулой Тейлора



,



где *N* – некоторая точка указанной окрестности, зависящая от .



**Глава 3. Исследование функций двух переменных**

**§3.1*. Скалярное поле и его геометрия***

Если в каждой точке пространства или части пространства определено значение некоторой величины, то говорят, что задано ***поле***данной величины.

Поле называется ***скалярным******полем***, если рассматриваемая величина скалярная, т.е. вполне характеризуется своим числовым значением.

Пример скалярных полей дает поле температур, поле давления, поле высот над уровнем моря, поле электрического потенциала.

Задание скалярного поля осуществляется заданием скалярной функции точки *М* . Если в пространстве введена декартова система координат *Oxyz*, то .



Будем полагать, что эта функция имеет непрерывные частные производные по всем переменным.

Уравнение где - постоянная, определяет некоторую поверхность, на которой величина *u* сохраняет постоянное значение. Такая поверхность называется поверхностью уровня скалярного поля.



Например, если скалярное поля задано функцией , то поверхности уровня имеют уравнения . При они представляют собой семейство концентрических сфер с центром в начале координат и радиусами . Поверхности уровня для различных значений *C* не пересекаются. Таковой является геометрия скалярного поля потенциала, порожденного точечным электрическим зарядом.



Другой пример - поле температур, возникающее вокруг равномерно нагретой прямой нити. Поверхности уровня такого поля - круговые цилиндры, общей осью которых служит эта нить.

Скалярное поле называется *плоским*, если существует плоскость такая, что во всех плоскостях, параллельных этой, скалярное поле будет одним и тем же. Если эту плоскость принять за плоскость *Oхy*, то скалярное поле определится скалярной функцией , т.е. не будет зависеть от *z*. В этом случае уравнения представляют собой уравнения линий уровня поля. Другими словами, линии уровня поля – это линии на плоскости *Oxy*, на которых функция постоянна.

Рис. 3.1



**Пример 3.1**. Найти линии уровня скалярного поля

.



Решение. Линии уровня поля определяются уравнениями .



При *с =* 0 получаем пару прямых .



При получаем семейство гипербол (рис.3.1).



**§3.2*. Производная по направлению***

Пусть задано скалярное поле . Обычно представляет интерес скорость изменения этой величины по заданному направлению. Зададим произвольную прямую , и возьмем на ней некоторую точку (рис.3.2). Для любой переменной точки на этой прямой рассмотрим направленный отрезок . Будем считать его положительным, если его направление совпадает с направляющим вектором прямой, и отрицательным – в противном случае. Другими словами, отрезок > 0, если векторы и направляющий вектор прямой сонаправлены и < 0, если они противоположно направлены.

Рис.3.2

*М*0

*М*

*l*



Пусть неограниченно приближается к . Если при этом существует предел



разностного отношения, то этот предел называется *производной по направлению* *l* от функции и обозначается символом



. (3.1)



Это определение производной по направлению носит инвариантный характер, т.е. не связано с выбором системы координат. Если же задана система координат, то можно вывести расчетную формулу для вычисления производной скалярного поля по заданному направлению.

**Теорема 3.1.** *Производная скалярного поля по направлению l в точке равна*



*,* (3.2)



*где - частные производные функции в точке , а - направляющие косинусы единичного вектора* ***el****.*



Доказательство. В стандартной системе координат векторы и коллинеарны. Следовательно, выполняются равенства



.



Обозначая это общее отношение через *t*, координаты текущей точки можно представить в виде:



, , .



Таким образом, функция представляется как сложная функция, а её приращение , вызванное приращением независимой переменной *t* равно



,



где все частные производные вычисляются при (), а - бесконечно малая более высокого порядка, чем при .



Отсюда

.



Переходя к пределу в формуле (3.1), получим



,



где частные производные вычисляются в точке *M*0. Теорема доказана.

**Пример 3.2**. Найти производную поля в точке в направлении от этой точки к точке .



Решение. Находим вектор и его направляющие косинусы



, ; ; .



; ; .



Применяя формулу (3.2), получим

.



Так как , то поле в данном направлении убывает.



**§3.3*. Градиент***

Пусть имеется скалярное поле, определяемое дифференцируемой скалярной функцией



***Градиентом*** скалярного поля *u* в данной точке *М* называется вектор, обозначаемый символом **grad** *u*, и определяемый равенством

*=* . (3.3)



Если - единичный вектор в направлении *l,* то производная по направлению *l* связана с этим вектором следующим соотношением:



. (3.4)



Градиент скалярного поля обладает двумя основными свойствами.

Первое: его абсолютная величина определяет наибольшую скорость изменения поля. Действительно, так как , где φ – угол между векторами и ***e****l****,*** то при получаем наибольшую, а при ÷ наименьшую скорости изменения поля, равные соответственно и .



На рис.3.3 градиент построен в трёх разных точках, лежащих на одной линии уровня (см. пример в разделе 3.1).

Второе свойство градиента состоит в том, что он направлен по нормали к поверхности (линии) уровня. В самом деле, рассмотрим разность двух поверхностей уровня и разностные отношения и , где и – положительные приращения вектора нормали ***n*** и произвольного направления *l* в некоторой точке поверхности уровня. Так как длина нормали меньше длины наклонной, то. Поскольку предел сохраняет знак неравенства, имеем . То есть, наибольшая скорость возрастания поля с одной стороны равна , с другой стороны, согласно первому свойству, равна. Следовательно,

Рис. 3.3



,



откуда следует, что . Если же , то вектор ***n*** указывает направление наибольшей скорости убывания поля.



Другие свойства градиента:

,



, где *с* – постоянная, (3.5)



.



Эти свойства выводятся из определения градиента.

**Пример 3.3.** Найти наибольшую скорость возрастания скалярного поля в точке *A* (-1; 1; -1).



Решение. Вычислим градиент поля

.



Его значение в точке *А*:

.



Таким образом, наибольшая скорость возрастания поля равна

.



**Пример 3.4**. Найти градиент скалярного поля *u = x –* 2*y +*3*z*.

Решение. Согласно формуле (3.3) имеем

**grad** u = ***i*** – 2***j*** +3***k***.

Поверхностями уровня данного скалярного поля являются плоскости ; вектор **grad** *u*= (1, −2, 3) есть нормальный вектор плоскостей этого семейства.



**Пример 3.5**. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня скалярного поля   
*u= x2 + y2 + z2*.

Решение. Поверхности уровня данного скалярного поля – сферы

*x2 + y2 + z2 = C* ( *C* >0).

Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, так что

**grad***u* ***=*** 2*x****i +*** 2*y****j +*** 2*z****k***

определяет вектор нормали к поверхности уровня в точке *М*(*x, y, z*)*.* Для единичного вектора нормали получаем выражение

.



**§3.4*. Касательная плоскость и нормаль***

В этой главе мы рассмотрим некоторые геометрические вопросы исследования функции нескольких переменных, использующие результаты предыдущей главы. Покажем, в частности, что дифференцируемость функции в точке с геометрической точки зрения означает наличие касательной плоскости к графику функции в точке .



Введем понятие касательной плоскости к поверхности в точке . Будем предполагать, что в этой точке, а также в некоторой её окрестности, функция определена, непрерывна и дифференцируема.

Рис. 3.1

*x*0+Δ*x*

*x*0

*y*0+Δ*y*

*y*0

*z*

*N*0

*N*1

*N*2

*M*0



Плоскость, проходящая через точку поверхности, называется *касательной плоскостью* в этой точке, если угол между этой плоскостью и секущей плоскостью, проходящей через точку и любую точку *N*, поверхности, стремится к нулю, когда точка *N* стремится к .



Положим , , , где , . Тогда условие дифференцируемости можно записать в виде:



, , ,



где – бесконечно малая при более высокого порядка, чем и .



Пусть , . Рассмотрим секущую плоскость , проходящую через точки , и . Используя уравнение плоскости, проходящей через три данные точки, получим



,



где , .



Приводя уравнение плоскости к общему виду, получим



.



Разделим обе части последнего равенства на величину :



.



При стремлении точек и к , секущая плоскость становится касательной плоскостью. При этом

***n***

Рис. 3.2



,



, .



Тогда уравнение касательной плоскости примет вид

.



Нормальный вектор



касательной плоскости определяет уравнение нормали, т.е. прямой, перпендикулярной касательной плоскости и проведенной через точку касания.

Уравнение этой нормали к поверхности в точке имеет вид:



.



В случае неявного задания функции , коэффициенты и вычисляются по формулам (2.8), и тогда уравнение касательной плоскости удобнее переписать в виде



,



а уравнение нормали

.



**Пример 3.1.** Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, задаваемой неявно равенством в точке .



Решение. Из уравнения поверхности, подставляя и , найдём значение . Имеем . Найдём частные производные



, , .



Таким образом, уравнение касательной плоскости имеет вид

или .



Уравнение нормали к поверхности в точке имеет вид



.



Замечание*.* Формулы касательной плоскости и нормали к поверхности получены для обыкновенных, т.е. не особых, точек поверхности. Точка поверхности называется *особой*, если в этой точке все частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует. Такие точки мы здесь рассматривать не будем.



**§3.5*. Экстремум функции двух переменных***

Понятие максимума и минимума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной.

Пусть функция определена в некоторой области *D*, точка .



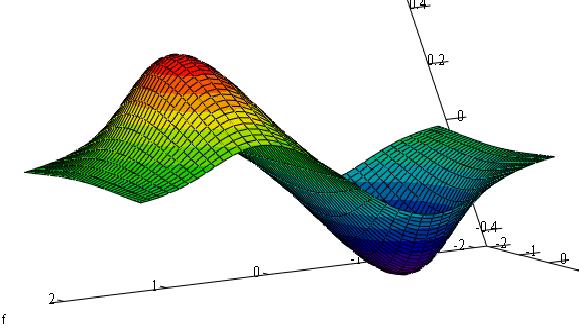
Точка называется ***точкой максимума*** функции , если существует такая δ-окрестность точки , что для каждой точки, отличной от , из этой окрестности выполняется неравенство .



Точка называется ***точкой минимума*** функции , если существует такая δ-окрестность точки , что для каждой точки, отличной от , из этой окрестности выполняется неравенство .



Рисунок 3.3 получен с помощью программы MatLab, причем для наглядности поверхность показана в косоугольной системе координат. Здесь - точка максимума, а - точка минимума функции.



z

Значение функции в точке максимума (минимума) называется ***максимумом (минимумом)*** функции. Максимум и минимум функции являются её ***экстремумами***.

Отметим, что, в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют *локальный* (местный) характер: значение функции в точке сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к . В области *D* функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.



Пусть функция задана в некоторой области и – точка экстремума этой функции. Пусть - полное приращение функции, где *M* – произвольная точка области в указанной окрестности точки . Тогда при в точке имеем максимум, а при – минимум.



***Теорема 3.1 (необходимый признак экстремума)*** *Пусть функция имеет в точке экстремум. Тогда, если в этой точке существуют частные производные первого порядка, то эти частные производные равны нулю.*



Доказательство. Докажем равенство нулю частной производной . Положим и получим функцию одной переменной *х*. Очевидно, эта функция имеет в точке экстремум. Согласно необходимому признаку экстремума функции одной переменной производная . Рассуждая аналогично, получим . Теорема доказана.



Данный необходимый признак не является достаточным. Например, частные производные по *x* и *y* функции в точке равны нулю, но экстремума в этой точке нет, так как в окрестности её есть как положительные, так и отрицательные значения функции. Поэтому будем считать точки, в которых частные производные равны нулю, как точки возможного экстремума - *стационарные* *точки*.



***Теорема 3.2 (достаточный признак экстремума).*** *Пусть в точке и некоторой ее окрестности функция дважды дифференцируема и все производные непрерывны. Пусть*



и .



*Положим*

, , .



*Тогда, если в точке возможного экстремума выполнены условия:*



*а) , то в этой точке есть экстремум. При – минимум, при – максимум.*



*б) , то в этой точке нет экстремума.* (В этом случае говорят: есть точка *минимакса*).



Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора

.



Так как точка – точка возможного экстремума функции , то (по необходимому признаку экстремума). Оставляя в формуле Тейлора бесконечно малые второго порядка, получим:



.



Перепишем это выражение в следующем виде:

.



Полагая , получим .



Определим знак по знаку правой части квадратного трехчлена . Пусть дискриминант квадратного уравнения меньше нуля. Тогда уравнение не имеет корней и сохраняет знак: при этот знак положителен, при – отрицателен. Следовательно, при и функция имеет минимум, при и функция имеет максимум в точке .



Если , то квадратный трехчлен не сохраняет знак, и экстремума нет.



Заметим, что при необходимо дополнительное исследование.



**Пример 3.2.** Найти экстремумы функции .



Решение. Находим частные производные:

; .



Для определения стационарных точек запишем систему уравнений:



Решая эту систему, получим одну точку, координаты которой: ; . Вторые частные производными постоянны:



; ; .



Следовательно, и экстремум существует. Так как , то точка - точка максимума данной функции. При этом .



**Пример 3.3.** Найти экстремумы функции .



Решение. Находим частные производные:

; .



Приравнивая частные производные к нулю и решая полученную систему уравнений, найдём три стационарные точки: ; ; .



Найдём вторые частные производные:

; ; .



Подставляя координаты стационарных точек в выражение , получим:



Для точки .



Для точки .



Для точки .



Таким образом, точки и - точки минимума функции. В этих точках значения функции одинаковы и равны . В точке нужны дополнительные исследования. Однако, очевидно, эта точка не является точкой экстремума. В самом деле, в этой точке , а в любой окрестности этой точки значения могут быть как положительными, так и отрицательными. Например, вдоль оси *Ох* (т.е. при ) вблизи начала координат, а вдоль прямой имеем .

