

Bases de Gröbner

Moi

29 octobre 2016

Table des matières

1	Ordre monomial	2
1.1	Généralités	2
1.2	Exemples d'ordres monomiaux	3
2	Algorithme de division	4
3	Idéaux monomiaux	6
4	Bases de Gröbner	8
4.1	Généralités	8
4.2	Propriétés des bases de Gröbner	9
5	Algorithme de Buchberger	11
6	Théorème d'élimination et d'extension	12
7	Géométrie	13
7.1	Généralités	13
7.2	Géométrie de l'élimination	15
8	Graphe	16
8.1	Généralités	16
8.2	Equations polynomiales	16

1 Ordre monomial

1.1 Généralités

Définition 1.1 *Un ordre monomial est une relation d'ordre total \geq de \mathcal{M} telle que :*

1. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n, X^\alpha \geq X^\beta \Rightarrow X^{\alpha+\gamma} \geq X^{\beta+\gamma}$
2. \geq est un bon ordre

On note $X^\alpha > X^\beta$ si $X^\alpha \geq X^\beta$ et $\alpha \neq \beta$ (compatible avec l'addition) et $X^\alpha \leq X^\beta$ si $X^\beta \geq X^\alpha$

Propriété 1.2 *Soit \geq un ordre monomial. 1 est le plus petit élément de \mathcal{M} pour \geq .*

Démonstration 1.3 *Comme \geq est un bon ordre alors il existe un plus petit élément que l'on notera x^α alors : $X^\alpha \leq 1$ et donc $X^{2\alpha} \leq X^\alpha$ (par la compatibilité avec l'addition).*

Or comme X^α est le petit élément de \mathcal{M} alors $X^\alpha \leq X^{2\alpha}$.

Donc, par antisymétrie, $X^\alpha = X^{2\alpha}$ d'où $\alpha = 2\alpha$ et donc $\alpha = 0$.

On en déduit que $1 = X^0$ est le plus petit élément de \mathcal{M} .

Corollaire 1.4 *Soit \geq un ordre monomial et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Si $X^\alpha | X^\beta$ alors $X^\alpha \leq X^\beta$.*

Démonstration 1.5 *Si $X^\alpha | X^\beta$ alors il existe $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tel que : $X^\beta = X^\gamma X^\alpha$. Or comme $1 \leq X^\gamma$ alors par compatibilité avec l'addition, $X^\alpha \leq X^{\alpha+\gamma} = X^\beta$.*

Définition 1.6 *Soit $P := \sum_{\alpha} p_{\alpha} X^{\alpha}$ et \geq un ordre monomial.*

1. *Le monôme dominant de P est : $LM(P) := \max\{X^{\alpha} \in \mathcal{M} | a_{\alpha} \neq 0\}$*
2. *Le multidegré de f est l'élément de \mathbb{N}^n , noté $\text{multideg}(P)$, tel que $x^{\text{multideg}(P)} = LM(P)$*
3. *Le coefficient dominant de P est $LC(P) := a_{\text{multideg}(P)}$*
4. *Le terme dominant de P est $LT(P) := LC(P) \cdot LM(P)$*

1.2 Exemples d'ordres monomiaux

Définition et propriété 1.7 (Ordre lexicographique \geq_{lex}) Soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ alors $X^\alpha \geq_{lex} X^\beta$ si, et seulement si, $\alpha = \beta$ ou le premier coefficient non nul en lisant par la gauche de $\alpha - \beta$ est positif.

Démonstration 1.8 Montrons que \geq est un ordre monomial.

α, β, γ désigneront des éléments quelconques de \mathbb{N}^n et si $\alpha \neq \beta$, $\ell(\alpha, \beta)$ désignera la première composante, en partant de la gauche, non nulle de $\alpha - \beta$ i.e. $\ell(\alpha, \beta) := \min\{r \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid a_r \neq b_r\}$.

Montrons tout d'abord que c'est bien une relation d'ordre.

Réflexivité :

$X^\alpha \geq X^\alpha$ (c.f. premier cas)

Antisymétrie :

Supposons que $X^\alpha \geq X^\beta$ (i) et $X^\beta \geq X^\alpha$ (ii).

Supposons, par l'absurde, que $X^\alpha \neq X^\beta$.

On a avec (i) que $\alpha_{\ell(\alpha, \beta)} > \beta_{\ell(\alpha, \beta)}$ et avec (ii) que $\alpha_{\ell(\alpha, \beta)} < \beta_{\ell(\alpha, \beta)}$. D'où une contradiction.

On a donc $X^\alpha = X^\beta$.

Transitivité :

Supposons que $X^\alpha \geq X^\beta$ (i) et $X^\beta \geq X^\gamma$ (ii).

Si $\alpha = \beta$, $\alpha = \gamma$ ou $\alpha = \beta$ alors l'inégalité $X^\alpha \geq X^\gamma$ est évidente.

Sinon, posons $\ell := \min\{\ell(\alpha, \beta), \ell(\beta, \gamma)\}$.

On a avec (i) et (ii), que : $\alpha_\ell < \beta_\ell \leq \gamma_\ell$ ou $\alpha_\ell \leq \beta_\ell < \gamma_\ell$ et pour tout $k < \ell$, $\alpha_k = \beta_k = \gamma_k$.

On a donc $X^\alpha \geq X^\gamma$.

Montrons que \geq_{lex} est compatible avec l'addition.

Si $\alpha = \beta$ alors $X^{\alpha+\gamma} = X^{\beta+\gamma}$ et donc $X^{\alpha+\gamma} \geq_{lex} X^{\beta+\gamma}$

Sinon, comme $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta$ alors $\ell(\alpha, \beta) = \ell(\alpha + \gamma, \beta + \gamma)$ et donc si $X^\alpha \geq_{lex} X^\beta$ alors $X^{\alpha+\gamma} \geq_{lex} X^{\beta+\gamma}$.

Montrons maintenant que \geq_{lex} est un bon ordre, par l'absurde.

Supposons donc que \geq_{lex} n'est pas un bon ordre et donc qu'il existe une suite $u := (X^{(a_{1,i}, \dots, a_{n,i})})_{i \in \mathbb{N}}$ strictement décroissante.

On en déduit que la suite $u_1 := (a_{1,i})_{i \in \mathbb{N}}$ est décroissante (sinon u ne serait pas décroissante) et est donc stationnaire car \mathbb{N} est bien ordonné.

Alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N_1, u_{1,p} = u_{1,N_1}$.

Considérons maintenant la suite $u_2 := (a_{2,i})_{i \geq N_1}$. Elle est décroissante et donc stationnaire ...

On construit ainsi une suite $(N_i)_{i \geq 1}$ tel que $\forall n \geq N_i, u_{i,n} \geq u_{i,N_i}$.

On en déduit que $\forall p \geq N_n, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_{i,p} = u_{i,N_n}$ ou encore $\forall p \geq N_n, X^{u_{1,p}, \dots, u_{n,p}} = X^{u_{1,N_n}, \dots, u_{n,N_n}}$, ce qui est contradictoire avec la décroissance de u .

Définition et propriété 1.9 (Ordre lexicographique gradué \geq_{grlex}) Soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ alors $X^\alpha \geq_{grlex} X^\beta$ si, et seulement si, $|\alpha| > |\beta|$ ou $(|\alpha| = |\beta| \text{ et } \alpha \geq_{lex} \beta)$.

Définition et propriété 1.10 (Ordre lexicographique gradué renversé $\geq_{grevlex}$) Soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ alors $X^\alpha \geq_{grevlex} X^\beta$ si, et seulement si, $|\alpha| > |\beta|$ ou $(|\alpha| = |\beta| \text{ et le premier coefficient non nul en lisant par la droite de } \beta - \alpha \text{ est positif})$.

Exemple 1.11 *Ordre lexicographique :*

$X_1 >_{lex} X_2 >_{lex} \dots >_{lex} X_n$ Pour $n = 3$, $X^2Y^2Z^4 >_{lex} X^1Y^4Z^{42}$
 $X^3Y^2Z^4 >_{lex} X^3Y^2Z^3$

Ordre lexicographique graduée :

$X_1 >_{grlex} X_2 >_{grlex} \dots >_{lex} X_n$

Pour $n = 3$,

$XY^4Z^8 >_{grlex} X^7Y^2Z^3$

$X^4Y^7Z >_{grlex} X^3Y^3Z^6$

Ordre lexicographique graduée renversée :

$X_1 >_{grevlex} X_2 >_{grevlex} \dots >_{lex} X_n$

Pour $n = 3$,

$X^5Y^3Z^2 >_{grevlex} X^3Y^2Z^4$

$X^4Y^3Z^2 >_{grevlex} X^2Y^5Z^2$

2 Algorithme de division

Lemme 2.1 Soit $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^n$ tel que : $X^\alpha > X^{\alpha_1} > \dots > X^{\alpha_n}$. Soit $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$ tels que $LT(f) = LT(g)$ alors $LM(f - g) < LT(f) = LT(g)$

Démonstration 2.2 Soit $f := pX^\alpha + \sum p_{\alpha_i}X^{\alpha_i}$ et $g := pX^\alpha + \sum q_{\alpha_i}X^{\alpha_i}$ alors $LM(f - g) = LM(\sum p_{\alpha_i}X^{\alpha_i}) \leq X^{\alpha_1} < X^\alpha = LM(f) = LM(g)$

Théorème 2.3

Algorithme 1 Algorithme de division

Entrées : f_1, \dots, f_s, f **Sortie :** a_1, \dots, a_s, r $a_1 := 0; \dots; a_s := 0; r := 0$ $p := 0$ **Tant que** $p \neq 0$ **faire** $i := 1$ $divisionoccured := false$ **Tant que** $i \leq s$ **et** $divisionoccured = false$ **faire****Si** $LT(f_i) | LT(p)$ **alors** $a_i := a_i + LT(p) / LT(f_i)$ $p := p - (LT(p) / LT(f_i)) f_i$ **Sinon** $i := i + 1$ **fin Si****fin Tant que****Si** $divisionoccured = false$ **alors** $r := r + LT(p)$ $p := p - LT(p)$ **fin Si****fin Tant que**

Démonstration 2.4 Remarquons tout d'abord que lors de chaque itération de la boucle, une de ses deux instructions :

1. Si $LT(f_i) | LT(p)$ alors on fait la division de p par f_i
2. Sinon on ajoute $LT(p)$ à r (et on retire $LT(p)$ à p).

Montrons d'abord que l'algorithme s'arrête i.e. il existe une étape où $p = 0$. Pour cela, montrons que la suite des monômes dominants des différentes valeurs p est strictement décroissante tant que $p \neq 0$. Si l'algorithme ne s'arrêtait pas, on aurait une suite infinie strictement croissante ce qui contredit le fait que \geq est un bon ordre.

-Si on fait une division (par f_j) alors p prend la valeur $p' := p - \frac{LT(p)}{LT(f_j)} f_j$.
-Si cette valeur est nulle alors l'algorithme s'arrête sinon comme on a l'égalité :

$$LT \left(\underbrace{\frac{LT(p)}{LT(f_j)} f_j}_{\in k^* \mathcal{M}} \right) = \frac{LT(p)}{LT(f_j)} LT(f_j) = LT(p).$$

On en déduit donc, d'après le lemme, que $LM(p') < LM(p)$.

-Sinon, p prend la valeur $p - LT(p)$. Par le même argument que précédemment, $LM(p - LT(p)) < LM(p)$.

Ce qui permet de conclure.

Montrons maintenant qu'à chaque étape que $f = \sum_{i=0}^s a_i f_i + p + r$.

Initialisation de l'algorithme ("0ème itération") : Comme $a_1 = \dots = a_s = r = 0$ et $p = f$ alors l'égalité est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'à la n ème itération de la boucle, $f = \sum_{i=0}^s a_i f_i + p + r = \sum_{i=0, i \neq j}^s a_i f_i + a_j f_j + p + r$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors :

- si on fait une division (p avec f_j) alors : la nouvelle valeur p' de p est $p - \frac{LT(p)}{LT(f_j)} f_j$ et celle de a_j est $a'_j = a_j + \frac{LT(p)}{LT(f_j)}$. et donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0, i \neq j}^s a_i f_i + a'_j f_j + p' + r &= \sum_{i=0, i \neq j}^s a_i f_i + \left(a_j + \frac{LT(p)}{LT(f_j)} \right) f_j + p - \frac{LT(p)}{LT(f_j)} f_j + r \\ &= \sum_{i=0, i \neq j}^s a_i f_i + a_j f_j + p + r = f. \end{aligned}$$

On obtient donc, lorsque $p = 0$ (et on sait que cela arrivera), que $f = \sum_{i=1}^s a_i f_i + r$ et r est, par définition dans l'algorithme, une somme d'éléments non divisibles par les $LT(f_i)$

3 Idéaux monomiaux

Définition 3.1 Un idéal monomial est un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$ tel qu'il existe une partie A de \mathbb{N}^n telle que $I = \langle X^\alpha | \alpha \in A \rangle = \{ \sum P_\alpha X^\alpha | P_\alpha \in k[X_1, \dots, X_n] \}$.

Lemme 3.2 Soit $I := \langle X^\alpha | \alpha \in A \rangle$ un idéal monomial. Alors $X^\beta \in I$ ssi il existe un $\alpha \in A$ tel que X^α divise X^β .

Démonstration 3.3 \Leftarrow Evident

\Rightarrow Si $X^\beta \in I$ alors il existe une famille de polynômes $P_1, \dots, P_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ et d'exposants $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{N}^n$ telle que $X^\beta = \sum_{i=1}^s P_i X^{\alpha_i}$.

On peut alors remarquer qu'en utilisant les expressions $P_i := \sum p_{i,\alpha} X^\alpha$ alors X^β est de la forme $\sum_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma X^\gamma$ où $\Gamma := \{\gamma \in \mathbb{N}^n | \exists n \in \mathbb{N}, \exists i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \gamma = \alpha_i + n\}$.

Et donc $X^\beta - \sum_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma X^\gamma = 0$ (*)

Comme $k[X_1, \dots, X_n]$ est un k -espace vectoriel dont \mathcal{M} est une base, on

déduit de (*) que $p_\gamma = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \neq \beta \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ (dans le cas contraire, on aurait une

combinaison linéaire (d'élément d'une base) nulle à coefficients non nuls).

On en déduit que $\beta \in \Gamma$ et donc qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^n$ et un $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\beta = \alpha_i + n$ c'est-à-dire qu'il existe un $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tel que X^{α_i} divise X^β .

Lemme 3.4 Soit I un idéal monomial et $f \in k[X_1, \dots, X_n]$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $f \in I$.
2. Tous les termes de f sont dans I .
3. f est une k -combinaison linéaire de monômes dans I .

Démonstration 3.5 (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) est évident.

(1) \Leftrightarrow (3) se montre comme le lemme précédent.

Corollaire 3.6 Deux idéaux monomiaux sont égaux ssi ils contiennent les mêmes monômes.

Démonstration 3.7 \Rightarrow Evident

\Leftarrow Soit I, I' deux idéaux monomiaux tel que $I \cap \mathcal{M} = I' \cap \mathcal{M}$.

Si $f := \sum p_\alpha X^\alpha$ alors d'après le lemme précédent, pour tout $\alpha \in A$, le monôme $X^\alpha \in I$ alors, par hypothèse, $X^\alpha \in I' \cap \mathcal{M}$ d'où $X^\alpha \in I'$ et en réutilisant le lemme, $f \in I'$.

On en déduit que $I \subset I'$ et donc par symétrie de rôle de I et I' , $I = I'$.

Lemme 3.8 Soit $I := \langle X^\alpha | \alpha \in A \rangle$ un idéal monomial et supposons qu'il ait une base finie $\langle X^{\beta_1}, \dots, X^{\beta_s} \rangle$. Supposons aussi qu'il existe une famille $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, X^{α_i} divise X^{β_i} (*) alors $I = \langle X^{\alpha_1}, \dots, X^{\alpha_s} \rangle$.

Démonstration 3.9 D'après (*), on a : $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, X^{\beta_i} \in \langle X^{\alpha_1}, \dots, X^{\alpha_s} \rangle$.
D'où, comme on a, de plus, $X^{\alpha_1}, \dots, X^{\alpha_s} \in I$,
 $I = \langle X^{\beta_1}, \dots, X^{\beta_s} \rangle \subset \langle X^{\alpha_1}, \dots, X^{\alpha_s} \rangle \subset I$.
On en déduit que $I = \langle X^{\alpha_1}, \dots, X^{\alpha_s} \rangle$

Théorème 3.10 (Lemme de Dickson) Un idéal monomial $I := \langle X^\alpha | \alpha \in A \rangle$ peut être écrit sous la forme $I = \langle X^{\alpha_1}, \dots, X^{\alpha_s} \rangle$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. En particulier, I admet une base finie.

Démonstration 3.11 A faire.

4 Bases de Gröbner

4.1 Généralités

Notation 4.1 Soit I un idéal non réduit à $\{0\}$ de $k[X_1, \dots, X_n]$.
On note $LT(I)$ l'ensemble des termes dominants des éléments de I i.e.
 $LT(I) := \{cX^\alpha | \exists f \in I, LT(f) = cX^\alpha\}$

Lemme 4.2 Soient $A \subset k[X_1, X_n]$ et $(p_i)_{i \in A}$ une suite d'éléments de k^* . Alors :
 $\langle p_f f | f \in A \rangle = \langle A \rangle$ (*)
En particulier, $\langle LT(f) | f \in A \setminus \{0\} \rangle = \langle LM(f) | f \in A \setminus \{0\} \rangle$ car pour tout
 $f \in k[X_1, \dots, X_n], f \neq 0, LT(f) = LC(f)LM(f)$

Démonstration 4.3 On notera I_1 l'idéal à gauche de l'égalité (*) et I_2 celui de droite.

\subset : Soit $P = \sum_{f \in A} \alpha_f (p_f f) \in I_1$ alors, par associativité du produit, $P = \sum_{f \in A} (\alpha_f p_f) f \in I_2$
 \supset : Soit $P = \sum_{f \in A} \alpha_f f \in I_2$ alors, par associativité du produit, $P = \sum_{f \in A} \frac{\alpha_f}{p_f} (p_f f) \in I_1$

Propriété 4.4 Soit $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ un idéal. Alors :

1. $LT(I)$ est un idéal monomial.
2. Il existe $g_1, \dots, g_s \in I$ tel que : $LT(I) = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_s) \rangle$.

Démonstration 4.5 (1) D'après le lemme précédent, on a $\langle LM(g) | g \in I \setminus \{0\} \rangle = \langle LT(g) | g \in I \setminus \{0\} \rangle = LT(I)$ ce qui montre que $LT(I)$ est un idéal monomial.

(2) Comme $LT(I)$ est un idéal monomial engendré par $LM(g)$ (avec $g \in I \setminus \{0\}$) alors, d'après le lemme de Dickson, il existe g_1, \dots, g_s tel que $LT(I) = \langle LM(g_1), \dots, LM(g_s) \rangle$. On conclut en utilisant le lemme précédent :
 $LT(I) = \langle LM(g_1), \dots, LM(g_s) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_s) \rangle$

Théorème 4.6 (de la base d'Hilbert) *Tout idéal I de $k[X_1, \dots, X_n]$ admet une base finie.*

Démonstration 4.7 *Si $I = \{0\}$ alors I est engendré par la famille finie $\{0\}$.*

Sinon, on a, d'après la proposition précédente, l'existence de $f_1, \dots, f_s \in I$, $LT(I) = \langle LT(f_1), \dots, LT(f_s) \rangle$. Montrons que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.

\supset : $f_1, \dots, f_s \in I$

\subset : Soit $f \in I$ alors la division de f par f_1, \dots, f_s s'écrit : $f = \sum_{i=1}^s \alpha_i f_i + r$ où chaque terme de r n'est pas divisible par des $LT(f_i)$.

Pour montrer l'inclusion, il nous faut montrer que $r = 0$.

Supposons, par l'absurde, que $r \neq 0$.

On a $r = f - \sum_{i=1}^s \alpha_i f_i \in I$ d'où $LT(r) \in \langle LT(I) \rangle = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.

Alors d'après le lemme 2 du ch 4, on a $LT(r)$ est divisible avec un des $LT(f_i)$ ce qui est en contradiction avec la définition de r .

On en déduit alors que $r = 0$ et donc $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.

Définition 4.8 *Soit \geq un ordre monomial. Un sous-ensemble $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ d'un idéal I est une base de Gröbner si $\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_s) \rangle$.*

Définition 4.9 *Corollaire : Soit \geq un ordre monomial. Alors tout idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$ non réduit à $\{0\}$ a une base de Gröbner. De plus, tout base de Gröbner est une base de I .*

Démonstration 4.10 *(cf celle du théorème de la base d'Hilbert.)*

4.2 Propriétés des bases de Gröbner

Propriété 4.11 *Soit $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ une base de Gröbner d'un idéal I de $k[X_1, \dots, X_n]$ et $f \in I$. Alors il existe un unique $r \in k[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant :*

1. *Tous les termes de r ne sont divisible par aucun des $LT(g_i)$*
2. *Il existe $g \in I$ tel que $f = g + r$*

Démonstration 4.12 *L'algorithme de division nous donne l'existence d'un tel r . Montrons son unicité.*

Supposons, par l'absurde, l'existence de deux restes r_1 et r_2 , $r_1 \neq r_2$ vérifiant (1) et (2).

Alors :
$$\begin{cases} f = g_1 + r_1 \\ f = g_2 + r_2 \end{cases} \quad \text{et donc } r_1 - r_2 = g_1 - g_2 \in I.$$

D'où, comme $r_1 \neq r_2$ alors $LT(r_1 - r_2) \in \langle LT(I) \rangle = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ et donc $LT(r_1 - r_2)$ est divisé par un des $LT(g_i)$ (cf Lemme 2 para 4). On obtient donc une contradiction car aucun terme de r_1 et r_2 n'est divisible par des $LT(g_i)$. D'où $r_1 = r_2$.

Corollaire 4.13 Soit $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ une base de Gröbner d'un idéal I de $k[X_1, \dots, X_n]$ et $f \in k[X_1, \dots, X_n]$. Alors $f \in I$ ssi le reste de la division de f par G est nul.

Démonstration 4.14 \Leftarrow : Evident

\Rightarrow : Soit $f \in I$. La décomposition $f = f + 0$ respecte les deux conditions de la proposition. Alors par unicité du reste, le reste de la division de f par G est nul.

Notation 4.15 On notera \overline{f}^F le reste de f par le n -uple ordonné $F = \{f_1, \dots, f_s\}$. Si f est une base de Gröbner alors on peut considérer F comme un ensemble.

Définition 4.16 Soit $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes non nuls.

1. Si $\text{multideg}(f) = \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\text{multideg}(g) = \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ alors posons $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ où $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$. On appelle X^γ le plus petit multiple commun de $LM(f)$ et $LM(g)$, noté $\text{PPCM}(LM(f), LM(g)) := X^\gamma$.

2. Le S -polynôme de f et g est le polynôme : $S(f, g) := \frac{X^\gamma}{LT(f)}f - \frac{X^\gamma}{LT(g)}g$

Lemme 4.17 Soit $G = \sum_{i=1}^s c_i X^{\alpha_i} g_i$, où $c_1, \dots, c_s \in k$ et $\alpha_i + \text{multideg}(g_i) = \delta \in \mathbb{N}^n$ pour $c_i \neq 0$.

Si $LM(G) < X^\delta$ alors il existe des constantes $(c_{j,k})$ tel que $G = \sum_{j,k} c_{j,k} X^{\delta - \gamma_{j,k}} S(g_j, g_k)$ où $X^{\gamma_{j,k}} = \text{PPCM}(LT(g_j), LT(g_k))$. De plus, chacun des $X^{\delta - \gamma_{j,k}}$ est strictement inférieur à X^δ .

Démonstration 4.18 A faire

Théorème 4.19 Soit I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$. Alors une base $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ de I est une base de Gröbner de I ssi pour tout couple (i, j) , $i \neq j$, $\overline{S(g_i, g_j)}^G = 0$

Démonstration 4.20 A faire

Algorithme 2 Algorithme de Buchberger

Entrées : $F = (f_1, \dots, f_s)$

Sortie : Une base de Gröbner $G = (g_1, \dots, g_t)$ de I , avec $F \subset G$
 $G := F$

repeat

$G' := G$

Pour chaque paire $\{p, q\} \in G'^2, p \neq q$ **faire**

$S := \overline{S(p, q)}^{G'}$

Si $S \neq 0$ **alors**

$G := G \cup \{S\}$

fin Si

fin Pour

Jusqu'à $G = G'$

5 Algorithme de Buchberger

Lemme 5.1 Soit G une base de Gröbner d'un idéal I de $k[X_1, \dots, X_n]$ et $P \in G$ tel que $LT(P) \in \langle LT(G \setminus \{P\}) \rangle$. Alors $G \setminus \{P\}$ est une base de Gröbner de I .

Démonstration 5.2 Comme G est une base de Gröbner de I alors $\langle LT(G) \rangle = \langle LT(I) \rangle$. Si $LT(P) \in \langle LT(G \setminus \{P\}) \rangle$ alors $\langle LT(G \setminus \{P\}) \rangle = \langle LT(G) \rangle = \langle LT(I) \rangle$ d'où $G \setminus \{P\}$ est une base de Gröbner de I .

Définition 5.3 Une base de Gröbner minimale d'un idéal I de $k[X_1, \dots, X_n]$ est une base de Gröbner de I telle que :

1. $\forall P \in G, LC(P) = 1$
2. $\forall P \in G, LT(P) \notin \langle LT(G \setminus \{P\}) \rangle$

Définition 5.4 Une base de Gröbner réduite d'un idéal I de $k[X_1, \dots, X_n]$ est une base de Gröbner de I telle que :

1. $\forall P \in G, LC(P) = 1$
2. Pour tout $P \in G$, aucun monôme de P n'appartient à $\langle LT(G \setminus \{P\}) \rangle$.

Propriété 5.5 Soit I un idéal non nul de $k[X_1, \dots, X_n]$. Alors, pour un ordre monomial fixé, I a une unique base de Gröbner réduite.

Démonstration 5.6 A faire

6 Théorème d'élimination et d'extension

Définition 6.1 Soit $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$. On appelle k ème idéal d'élimination de I l'idéal I_k de $k[X_{k+1}, \dots, X_n]$ défini par : $I_k = k[X_{k+1}, \dots, X_n] \cap I$

Théorème 6.2 (d'élimination) Soit I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$ et G une base de Gröbner de I selon l'ordre lexicographique (que l'on notera ici seulement \geq). Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'ensemble $G_k = G \cap k[X_{k+1}, \dots, X_n]$ est une base de Gröbner du k ème idéal d'élimination I_k .

Démonstration 6.3 Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Posons $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ et tel que $G_k = \{g_1, \dots, g_r\}$ (quitte à renommer les éléments).

Montrons que G_k est une base de I_k .

Comme $G_k \subset I_k$ (car $G \subset I$) alors $\langle G_k \rangle \subset I_k$.

Soit $f \in I_k$ alors d'après le théorème de division par G , il existe $h_1, \dots, h_m \in k[X_1, \dots, X_n]$,

$f = \sum_{k=1}^m h_i g_i$ car (G est une base de Gröbner de I et $f \in I$)

or pour tout $k > r$, $g_i > X^{k+1} \geq LM(f)$ et donc aucun terme de f ne peut être divisible par un $LT(g_i)$. L'algorithme n'incrmente pas les h_k ($k > r$) et donc sont tous nuls.

D'où, $f = \sum_{k=1}^r h_i g_i$ et donc $f_k \in \langle G_k \rangle$, ce qui finit de montrer l'égalité $\langle G_k \rangle = I_k$.

(Le même argument permet de montrer que si $f \in I_k$, $\overline{f}^G = \overline{f}^{G_k}$).

Montrons maintenant que G est une base de Gröbner de I_k .

Il suffit, pour cela, de montrer que pour tout $1 \leq i < j \leq r$, $\overline{S(g_i, g_j)}^{G_k} = 0$.

Soit $i, j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $i < j$.

Comme $S(g_i, g_j)$ est de la forme $Pg_i + Qg_j$ ($P, Q \in k[X_{k+1}, \dots, X_n]$) et I_k est un idéal alors $S(g_i, g_j) \in I_k \subset I$ d'où comme G est une base de Gröbner

alors $\overline{S(g_i, g_j)}^G = 0$ et donc d'après la remarque précédente,

$\overline{S(g_i, g_j)}^{G_k} = 0$. Ce qui permet de conclure.

Théorème 6.4 (d'extension) Soit $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ un idéal de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et I_1 le premier idéal d'élimination.

Ecrivons, pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, f_i sous la forme

$f_i = g(X_2, \dots, X_n)X_1^{N_i} + \text{termes de degré} < N_i \text{ en } X_1$

où $N_i \geq 0$ et $g_i \in \mathbb{C}[X_2, \dots, X_n]$ non nul si $f_i \neq 0$ ($g_i = 0$ si $f_i = 0$).

Supposons qu'on ait une solution partiel $(a_2, \dots, a_n) \in Z(I_1)$. Si $(a_2, \dots, a_n) \notin Z(g_1, \dots, g_s)$ alors il existe $a_1 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_1, \dots, a_n) \in Z(I)$.

Corollaire 6.5 Soit $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ un idéal de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et supposons qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que f_i s'écrit de la forme

$f_i = cX_1^N + \text{termes de degré} < N \text{ en } X_1$
où $N > 0$ et $c \in \mathbb{C} \neq \{0\}$ non nul. Si I_1 est le premier idéal d'élimination de I et $(a_2, \dots, a_n) \in Z(I_1)$ alors il existe $a_1 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_1, \dots, a_n) \in Z(I)$

Démonstration 6.6 Conséquence immédiate du théorème d'extension.
(Comme $g_i = c \neq 0$ alors $Z(g_1, \dots, g_s) = \emptyset$ et donc $(a_2, \dots, a_n) \notin Z(g_1, \dots, g_s)$ pour tout $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$).

7 Géométrie

7.1 Généralités

Définition 7.1 Soit f_1, \dots, f_s des polynômes de $k[X_1, \dots, X_n]$. On appelle variété affine définie par f_1, \dots, f_s l'ensemble : $Z(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid \forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, f_i(a_1, \dots, a_n) = 0\}$.

Exemple 7.2 Cercle ; graphe d'une fonction polynomiale / fonction rationnelle ; Paraboloïde de révolution ; Cône ; "Twisted Cubic"

Lemme 7.3 : Si $V, W \subset k^n$ sont des variétés affines alors $V \cup W$ et $V \cap W$ aussi.

Démonstration 7.4 Supposons $V = Z(f_1, \dots, f_s)$ et $W = Z(g_1, \dots, g_r)$. Alors $V \cap W = Z(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_r)$ et $V \cup W = Z(f_i g_j \mid 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r)$ (que l'on notera $Z(f_i g_j)$).

Montrons la deuxième égalité :

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in V$ alors $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, f_i(a) = 0$ et donc $\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, f_i g_j(a) = 0$ d'où $V \subset Z(f_i g_j)$. On obtient de la même façon que $W \subset Z(f_i g_j)$. D'où $V \cup W \subset Z(f_i g_j)$.

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in Z(f_i g_j)$. Si $a \in V$ alors c'est fini. Sinon, il existe un $i_0 \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tel que $f_{i_0}(a) = 0$. Alors, comme pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket, f_{i_0}(a) g_j(a) = 0$, tous les $g_j(a)$ sont nuls et donc $a \in W$.

On en déduit donc $Z(f_i g_j) \subset V \cup W$ et donc l'égalité voulue.

Définition 7.5 Soit $V = Z(f_1, \dots, f_s) \subset k^n$. Alors une représentation paramétrique de V consiste en des fractions rationnelles $r_1, \dots, r_n \in k(X_1, \dots, X_n)$ telles que les points (x_1, \dots, x_n) tels que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = r_i(t_1, \dots, t_n)$ sont dans V .

Définition 7.6 I est dit finement engendré s'il existe f_1, \dots, f_s tels que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$. $\{f_1, \dots, f_s\}$ est alors appelée base de I .

Propriété 7.7 Si $\{f_1, \dots, f_s\}$ et $\{g_1, \dots, g_r\}$ sont des bases d'un même idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$ alors $Z(f_1, \dots, f_s) = Z(g_1, \dots, g_r)$

Définition 7.8 Soit $V \subset k^n$ une variété affine. Alors on pose $I(V) := \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid \forall a \in V, f(a) = 0\}$

Lemme 7.9 Soit $V \subset k^n$ une variété affine. Alors $I(V)$ est un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$, appelé idéal de V .

Démonstration 7.10 $0_{k[X_1, \dots, X_n]} \in I(V)$ car $\forall x \in k^n, 0_{k[X_1, \dots, X_n]}(x) = 0$.
 Soit $f, g \in I(V)$ et $a \in V$ alors $(f + g)(a) = f(a) + g(a) = 0$ et donc $f + g \in I(V)$.
 Soit $f \in I(V)$, $h \in k[X_1, \dots, X_n]$ et $a \in V$ alors $(fh)(a) = f(a)h(a) = 0h(a) = 0$ et donc $fh \in I(V)$.

Lemme 7.11 Soit $f_1, \dots, f_s \in k[X_1, \dots, X_n]$. Alors $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset I(Z(f_1, \dots, f_s))$.
 L'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie.

Démonstration 7.12 Soit $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ i.e. il existe h_1, \dots, h_s tels que :
 $f = \sum_{i=1}^s h_i f_i$. Comme f_1, \dots, f_s s'annule en $V(f_1, \dots, f_s)$ alors $f = \sum_{i=1}^n h_i f_i$ aussi, ce qui permet de dire que $f \in I(Z(f_1, \dots, f_s))$

Exemple 7.13 $\langle X^2, Y^2 \rangle \neq I(Z(X^2, Y^2))$.

Propriété 7.14 Soit $V \subset W$ des variétés affines de k^n . Alors :

1. $V \subset W$ ssi $I(V) \supset I(W)$
2. $V = W$ ssi $I(V) = I(W)$

Démonstration 7.15 (1) \Rightarrow (2) . Montrons donc (1).

\Rightarrow : Supposons $V \subset W$. Soit $f \in I(W)$ alors pour tout $a \in W$ et, en particulier, pour tout $a \in V, f(a) = 0$, c'est-à-dire $f \in I(V)$ d'où $I(W) \subset I(V)$.

\Leftarrow : Supposons $I(W) \subset I(V)$. Comme W est une variété alors il existe $g_1, \dots, g_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ tels que $W = Z(g_1, \dots, g_s)$ alors $g_1, \dots, g_s \in I(W) \subset I(V)$ et donc les g_i s'annulent sur V .

Comme W est l'ensemble des points sur lesquels les g_i s'annulent alors $V \subset W$.

7.2 Géométrie de l'élimination

Soit $V = Z(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbb{C}^n$

Définition 7.16 Soit π_k la projection $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$ définie par : $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n, \pi_k(a_1, \dots, a_n) = (a_{k+1}, \dots, a_n)$. (Cette application est surjective)

Lemme 7.17 Soit I_k le k ème idéal d'élimination de l'idéal $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Alors, dans \mathbb{C}^{n-k} , $\pi_k(V) \subset Z(I_k)$.

Démonstration 7.18 Pour montrer cette égalité, il faut montrer que $\forall a \in \pi_k(V), \forall f \in I_k, f(a) = 0$.

Soient $a = (a_{k+1}, \dots, a_n) \in \pi_k(V)$ et $f \in I_k$.

Comme π_k est surjective alors il existe un $a' = (a_1, \dots, a_n)$ qui appartient à V . Alors $f(a') = 0$ (car $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$). Or comme f ne dépend que de X_{k+1}, \dots, X_n alors $f(a) = f(a') = 0$.

Théorème 7.19 Soit g_i défini dans le théorème d'extension et I_1 le premier idéal d'élimination de $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$. On a alors l'égalité, dans \mathbb{C}^{n-1} ,
 $Z(I_1) = \pi(V) \cup (Z(g_1, \dots, g_s) \cap Z(I_1))$

Démonstration 7.20 $\supset : c.f.$ Lemme 1

$\subset : Soit a := (a_2, \dots, a_n) \in Z(I_1)$. Alors si $a \notin \langle g_1, \dots, g_s \rangle$, on a, d'après le théorème d'extension, l'existence d'un $a_1 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_1, \dots, a_n) \in V$ et donc $a \in \pi_1(V)$.

Sinon $a \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ et donc dans $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \cap V(I_1)$

Théorème 7.21 (de fermeture) Soit $V = Z(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbb{C}^n$ et soit I_k le k ème idéal d'élimination de $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$. Alors

1. $Z(I_k)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) variété contenant $\pi_k(V)$
2. Si $V \neq \emptyset$, alors il existe une variété affine $W \subsetneq Z(I_k)$ telle que $Z(I_k) \setminus W \subset \pi_k(V)$

Corollaire 7.22 Supposons qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que f_i s'écrit de la forme : $f_i = cX_1^N + \text{termes de degré} < N \text{ en } X_1$ où $N > 0$ et $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ non nul.

Alors $\pi(V) = Z(I_1)$

8 Graphe

8.1 Généralités

Définition 8.1 *Un graphe non orienté est un couple (S, A) , où S est un ensemble fini non vide (des éléments sont les sommets) et A est une partie de l'ensemble $\mathcal{P}_2(S)$ des paires d'éléments de S (les éléments de A sont les arêtes).*

Définition 8.2 *Soit $G := (A, S)$ un graphe non orienté. Les sommets s, t sont dits adjacents si $(s, t) \in A$*

Définition 8.3 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $C_p = \{x_1, \dots, x_p\}$ un ensemble de couleurs. Un graphe $G := (A, S)$ est coloriable si on peut associer à chaque sommet de G une couleur de C_p tel que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.*

8.2 Equations polynomiales

Soit $G := (A, S)$ un graphe non orienté et $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n := \text{Card}(A)$.

Associons à chaque sommet de G la variable x_i et à chaque couleur une racine p -ième de l'unité i.e. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i^p = 1$.

On impose de plus que si x_i et x_j sont adjacents alors $x_i \neq x_j$. Cela revient à dire que $\sum_{k=0}^{p-1} x_i^k x_j^{p-1-k} = 0$.

En effet, $0 = x_i^p - x_j^p = \underbrace{(x_i - x_j)}_{\neq 0} \sum_{k=0}^{p-1} x_i^k x_j^{p-1-k}$. G est coloriable avec p

couleurs si, et seulement si,

le système
$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i^p = 1 \\ \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \text{ et } x_j \text{ sont adjacents}, \sum_{k=0}^{p-1} x_i^k x_j^{p-1-k} = 0 \end{cases}$$
 a une solution

Références

- [1] Pierre Colmez. *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. École Polytechnique, 2011.
- [2] Donal O'Shea David Cox, John Little. *Ideals, Varieties, and Algorithms : An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer New York, 1992.