Intégration pratique

14 février 2021

Introduction

Dans cette note, on va redonner les résultats de théorie de l'intégration de Lebesgue permettant de justifier les interversions des signes $\sum, \int, \frac{d}{dx}, \lim$.

1 Théorème de convergence dominée

Théorème 1.1 (Convergence dominée)**.** *Soit $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ un espace mesuré.*
Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 qui converge μ-presque partout vers une application mesurable f de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ et tel qu'il existe une fonction $g \in L^1$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq g(x)$.
Alors $f \in L^1$ et $\lim \|f_n - f\| = 0$ i.e. f_n converge vers f dans L^1.

Dans les hypothèses de ce théorème, $\lim \int f_n = \int \lim f_n = \int f$
Le théorème de convergence dominée nous permet d'intervertir une limite et une intégrale (resp. une série)

Exemple 1.2. Calculons la limite de $I_n := \int_0^n (1 - x/n)^n x^m dx$ quand $n \to \infty$ et $m \in \mathbb{N}$.
Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto (1 - x/n)^n x^m \mathbf{1}_{[0,n]}(x)$. On a alors $I_n = \int f_n$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim f_n = e^{-x} x^m \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} =: f(x)$.
De plus, on a l'inégalité, pour tout n et pour tout x, $|f_n(x)| \leq e^{-x} x^m \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Cette dernière application étant intégrable, on en déduit, grâce au théorème de convergence dominée que $\lim I_n = \int f = \int_0^\infty x^m e^{-x} dx = \Gamma(m+1) = m!$

2 Théorème de Fubini

Définition 2.1 (espace σ-finis)**.** Un espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ est dit σ-fini s'il existe des ensembles de mesures finis qui recouvrent X.

Exemple 2.2.
1. Mesure de comptage sur un ensemble dénombrable : $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$
2. Mesure de Lebesgue et plus généralement, mesure de Haar sur un groupe localement compact σ-compact : $\mathbb{R}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et leur produits.

Définition 2.3. Soient $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ et $(Y, \mathcal{G}, \mu)$ deux espaces mesurés σ-finis.
- La tribu produit de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, noté $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, est définie comme étant la plus petite tribu contenant les $F \times G$ pour $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{G}$.
- La mesure produit de λ et μ, noté $\lambda \otimes \mu$, est définie de la façon suivante :
  Soit $Q \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.
  Soient $Q_x := \{y | (x, y) \in Q\}$ et $Q^y := \{x | (x, y) \in Q\}$ les sections de Q suivant, respectivement, x et y. $\lambda \otimes \mu(Q) := \int_X \lambda(Q_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y) d\lambda(y)$

On peut définir ainsi le produit de plusieurs espaces mesurés.

Exemple 2.4. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$
$\lambda_{\mathbb{R}^d} = \lambda_{\mathbb{R}} \otimes \ldots \otimes \lambda_{\mathbb{R}}$

Théorème 2.5 (de Fubini)**.** *Soient $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ et $(Y, \mathcal{G}, \mu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ une application $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ -mesurable.*
1) Si $f \geq 0$ alors les applications $\varphi_y : x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu(y)$ et $\psi_x : y \mapsto \int_X f(x, y) d\lambda(y)$ sont mesurables sur,respectivement, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et

$$\int_{X \times Y} f d(\lambda \otimes \mu) = \int_X \varphi_y(x) d\lambda(x) = \int_Y \psi_x(y) d\mu(y)$$

2) Si f est $\lambda \times \mu$-intégrable alors les applications $f(x,\cdot)$ et $f(\cdot,y)$ sont intégrables pour, respectivement, presque tout $x \in X$ et presque tout $y \in Y$. Les applications φ_y et ψ_x sont bien définis (comme dans le 1)) pour, respectivement, presque tout y et presque x et sont intégrables. On a, alors, comme dans le cas précédent,

$$\int_{X\times Y} fd(\lambda \otimes \mu) = \int_X \varphi_y(x)d\lambda(x) = \int_Y \psi_x(y)d\mu(y)$$

Le théorème de Fubini permet de faire les intervertions $\sum\sum, \sum\int, \int\int$

Exemple 2.6. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculons $I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{dx_1 \dots dx_n}{1-x_1\dots x_n}$.
$I = \int_{[0,1[} \cdots \int_{[0,1[} \sum_{p\geq 0}(x_1 \dots x_n)^p dx_1 \dots dx_n$.
Comme $(x_1 \dots x_n)^p \geq 0$ sur $[0,1[^n$ alors, par le théorème de Fubini, on peut intervertir les signes somme et intégrale et donc :
$I = \sum_{p\geq 0} \int_{[0,1[^n} (x_1 \dots x_n)^p dx_1 \dots dx_n = \sum_{p\geq 0} \left(\int_{[0,1[} x^p dx\right)^n = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{(p+1)^n} = \zeta(n)$

Exemple 2.7. Soit (u_n) une suite dont la série est absolument convergente.
Montrons que, pour toute permutation σ de $\mathfrak{S}_n$, $\sum u_{\sigma(n)} = \sum u_n$.
Soit $(u_{n,p})$ la suite définie par : $u_{n,p} = u_n \delta_{n,\sigma^{-1}(p)}$.
Pour utiliser le théorème de Fubini, nous devons nous assurer que $\sum_{n,p} |u_{n,p}| < \infty$. Pour ce faire, on peut utiliser le théorème de Fubini pour les fonctions positives :
$\sum_{n,p} |u_{n,p}| = \sum_n \sum_p |u_{n,p}| = \sum_n |u_n| < \infty$.
On en déduit, grâce au théorème de Fubini, que :
$\sum_n u_n = \sum_n \sum_p u_{n,p} = \sum_p \sum_n u_{n,p} = \sum_p u_{\sigma(p)}$

3 Théorème de continuité et de dérivation sous le signe $\int$

Dans la suite, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré, a et b sont deux réels tels que $a < b$ et f désigne une application de $X \times [a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1 (de continuité sous le signe $\int$)**.** *Si f vérifie les trois hypothèses suivantes :*
1) Pour tout $t \in [a,b]$, $f(\cdot,t) \in L^1$;
2) $\exists g \in L^1, \forall x \in X, \forall t \in [a,b], |f(x,t)| \leq g(x)$ (hypothèse de domination)
3) Pour tout $x \in X$, l'application $f(x,\cdot)$ est continue sur $[a,b]$;
alors, l'application $F : t \in [a,b] \mapsto F(t) := \int_X f(x,t)d\mu(x) \in \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$.

Théorème 3.2 (de dérivabilité sous le signe $\int$)**.** *Si f vérifie les trois hypothèses suivantes :*
1) Pour tout $t \in [a,b]$, $f(\cdot,t) \in L^1$;
2) Pour tout $(x,t) \in X \times [a,b]$, l'application $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est définie ;
3) $\exists g \in L^1, \forall x \in X, \forall t \in [a,b], \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$ (hypothèse de domination).
Alors,
1)l'application $F : t \in [a,b] \mapsto F(t) := \int_X f(x,t)d\mu(x) \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a,b]$
2) Pour tout $t \in]a,b[$, $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t) \in L^1$ et $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x)$.

Théorème 3.3 (Généralisation)**.** *Soit $k \in \mathbb{N}$ et f qui vérifie les trois hypothèses suivantes :*
1) Pour tout $t \in [a,b]$, $f(\cdot,t) \in L^1$;
2) Pour tout $(x,t) \in X \times [a,b]$, l'application $\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x,t)$ est définie ;
3) $\exists g \in L^1, \forall x \in X, \forall t \in [a,b], \left|\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x,t)\right| \leq g(x)$ (hypothèse de domination).
Alors,
1)l'application $F : t \in [a,b] \mapsto F(t) := \int_X f(x,t)d\mu(x) \in \mathbb{R}$ est k fois dérivable sur $[a,b]$
2) Pour tout $t \in]a,b[$, $\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(\cdot,t) \in L^1$ et $F^{(k)}(t) = \int_X \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x,t)d\mu(x)$.

Exemple 3.4. Soit $\Gamma : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$.
Soit $f : (x,t) \mapsto x^{t-1}e^{-x}$.
Γ est bien défini pour tout $t > 0$ (par des arguments de croissance comparée et de comparaison aux séries de Riemann).
Comme, de plus,$f \geq 0$ alors $f \in L^1$.
f est clairement $\mathcal{C}^\infty$.
Soit $0 < a < b$ deux réels et considérons la restriction de Γ sur $[a,b]$.
Soit $x > 0$,$t \in]a,b[$ et $k \in \mathbb{N}$

$\left|\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x,t)\right| = |x^{t-1}ln(x)^k e^{-x}| \leq |ln(x)^k e^{-x}|x^{a-1}$.
Par croissante comparée et comparaison aux séries de références, cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème de dérivation, Γ est $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$. On en conclut donc que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Références

[1] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe : cours et exercices.* Sciences sup. Dunod, 1998.