BTS SIO. Mathématiques pour l'informatique

Lycée Carcouët

14 février 2023

Résumé

Base 10

En base dix, on utilise dix chiffres (0, 1, 2 . . ., 9).

$$\begin{aligned} 2548 &= 2000 + 500 + 40 + 8 \\ &= 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 67{,}89 &= 60 + 7 + 0{,}8 + 0{,}09 \\ &= 6 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 8 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Base 2

En base deux (en binaire), on utilise deux chiffres (0 et 1).

$$\begin{aligned}1101_b &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \\ &= 13\end{aligned}$$

1101_b (ou 1101_2 ou ...) correspond au nombre décimal 13.

Exposants négatifs : en utilisant $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0{,}25$; $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = 0{,}125$ ..., on peut représenter les nombres décimaux.

$$\begin{aligned}10{,}011_b &= 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\ &= 1 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}25 + 1 \times 0{,}125 \\ &= 2{,}375\end{aligned}$$

Base 16 ou hexadécimale

On utilise 16 symboles : 0, 1, 2, ..., 9, A, B, C, D, E, F.

$$\begin{aligned} 1AF507_h &= 1 \times 16^5 + 10 \times 16^4 + 15 \times 16^3 + 5 \times 16^2 \\ &\quad + 0 \times 16^1 + 7 \times 16^0 \\ &= 1048576 + 655360 + 61440 + 1280 \\ &\quad + 0 + 7 \\ &= 1766663 \end{aligned}$$

Puissances de 16 : $16^2 = 256$, $16^3 = 4096$, ...

Division euclidienne

Dans les entiers naturels : pour tout dividende a et tout diviseur b non nul, il existe un unique quotient q et un unique reste r tels que

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < b$$

Si $r = 0$, on dit que

- a est divisible par b ;
- b est un diviseur de a ;
- a est un multiple de b.

Nombres premiers

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : un et lui-même.

Exemples : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 sont des nombres premiers. 9 n'est pas un nombre premier (ses diviseurs sont 1 ; 3 ; 9). 0 et 1 non plus.

Test de primalité : pour savoir si un nombre n est premier ou pas, on le divise par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout entier naturel N supérieur ou égal à 2 se décompose de manière unique en produit de nombres premiers.

Exemple : $660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$. On a essayé de diviser 660 par les nombres premiers, en commençant par le plus petit, jusqu'à obtenir 1.

Diviseurs d'un nombre

Pour trouver tous les diviseurs de 360, on le décompose en produit de facteurs premiers :

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Puis on prend tous les facteurs 1 par 1, 2 par 2, etc.

PGCD de deux entiers

On obtient le PGCD de deux entiers

- soit en cherchant le plus grand entier commun dans la liste des diviseurs de chacun ;

  exemple :

  - les diviseurs de 24 sont *1*, *2*, *3*, 4, *6*, 8, 12, 24 ;
  - ceux de 54 sont *1*, *2*, *3*, *6*, 9, 18, 27, 54.

  Le plus grand diviseur commun est *6*.
- soit à l'aide de leurs décompositions en facteurs premiers :
  - $72 = 2^3 \times 3^2$
  - $54 = 2 \times 3^3$

$$PGCD(72{,}54) = 2 \times 3^2$$

Entiers premiers entre eux

Deux entiers sont dits **premiers entre eux** si leur seul diviseur commun est 1.

Exemple : 20 et 33 sont premiers entre eux car leur PGCD est 1.

Définition des congruences

Soit n un entier naturel non nul. Deux entiers a et b sont dits **congrus modulo** n si a et b **ont le même reste dans la division euclidienne par** n.

Notation : $a \equiv b \quad (n) \qquad \text{ou} \qquad a \equiv b \mod n$

Exemples :

$$\begin{aligned} 36 &\equiv 6 \quad (5) \\ 125 &\equiv 6 \quad (7) \\ 13 &\equiv 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Définition équivalente : deux entiers naturels a et b (avec $a > b$) sont congrus modulo n si $a - b$ **est divisible par** n.

Propriétés des congruences

a, b, c, d, k sont dans $\mathbb{N}$ et n est dans $\mathbb{N}^*$.

1. Transitivité. Si $a \equiv b \quad (n)$ et $b \equiv c \quad (n)$, alors $a \equiv c \quad (n)$
2. Somme. Si $a \equiv b \quad (n)$ et $c \equiv d \quad (n)$, alors $a + c \equiv b + d \quad (n)$.
3. Multiplication. Si $a \equiv b \quad (n)$ et $c \equiv d \quad (n)$, alors $ac \equiv bd \quad (n)$.
   En particulier : Si $a \equiv b \quad (n)$, alors $ka \equiv kb \quad (n)$.
   Conséquence : si $a \equiv b \quad (n)$, alors $a^p \equiv b^p \quad (n)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Attention : on peut ajouter, soustraire, multiplier membre à membre des congruences, mais pas diviser.

Résumé

Négation d'une proposition P

Table de vérité :

P	$\neg P$
1	0
0	1

Conjonction de deux propositions P et Q

$P \wedge Q$ se lit "P et Q".

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjonction de deux propositions P et Q

$P \vee Q$ se lit "P ou Q".

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implication

$P \Rightarrow Q$ se lit P implique Q.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

NB : c'est équivalent à $(\neg P) \vee Q$

Équivalence

$P \Leftrightarrow Q$ se lit "P équivaut à Q".

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Propriétés des connecteurs logiques

$$\neg(\neg P) = P$$

$$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$$

$$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$$

Distributivité :

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Propriétés des connecteurs logiques

Élements neutres

$\mathscr{V}$ étant une proposition vraie et $\mathscr{F}$ une proposition fausse, pour toute proposition P :

$$P \vee \mathscr{F} \Leftrightarrow P$$

$$P \wedge \mathscr{V} \Leftrightarrow P$$

Tiers-exclu :

$$P \vee \neg P \Leftrightarrow \mathscr{V}$$

Non-contradiction :

$$P \wedge \neg P \Leftrightarrow \mathscr{F}$$

Propriétés de $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

Comprendre des phrases logiques contenant les **quantificateurs** $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe) et des **prédicats** portant sur des **variables**.

- $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x > 2$
  Comprendre : "il existe un réel x tel que $x > 2$".
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 2$
  Comprendre : "pour tout réel x, $x > 2$".
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \qquad x + y = 5$

La première proposition est vraie ($x = 10$ convient), la seconde est fausse (par exemple pour $x = 0$). La troisième est vraie : pour tout nombre réel x, il existe un nombre y tel que $x + y = 5$ ($y = 5 - x$ convient).

- Arithmétique
  - Systèmes de numération
  - Arithmétique modulaire
- Algèbres de Boole
  - Calcul des propositions
  - Calcul des prédicats
  - Langage ensembliste
  - Calcul booléen
- Éléments de la théorie des ensembles
  - Produit cartésien de deux ensembles
  - Relations binaires
  - Application f d'un ensemble E dans un ensemble F
- Calcul matriciel
- Graphes et ordonnancement

Langage ensembliste

E et F désignent des ensembles.

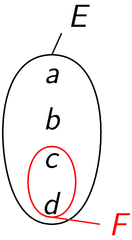
$E = \{a,b,c,d\}$, $F = \{c,d\}$

- $c \in E$ signifie que c est un **élément** de E.

  $c \in F$; $a \in E$ mais $a \notin F$.

- F est **inclus** dans E : on écrit $F \subset E$ et on dit que F est un **sous-ensemble** de E.

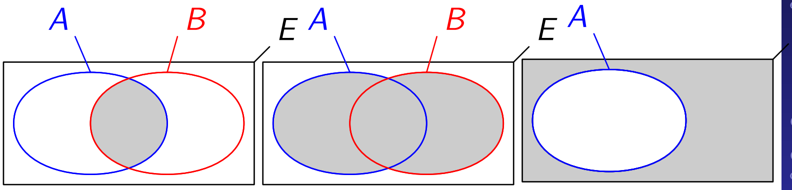
  $F \subset E$, $F \subset F$, $\varnothing \subset F$.



Complémentaire, intersection et réunion

Pour $A \subset E$ et $B \subset E$.

- Le **complémentaire** de A dans E est noté $\complement_E A$ ou $\overline{A}$. C'est $\{x \in E \; ; \; x \notin A\}$.
- **Réunion** : $A \cup B = \{\; x \in E \; ; \; x \in A \; \vee \; x \in B \;\}$
- **Intersection** : $A \cap B = \{\; x \in E \; ; \; x \in A \; \wedge \; x \in B \;\}$
  Si $A \cap B = \varnothing$, A et B sont disjoints.



Intersection $A \cap B$ Réunion $A \cup B$ Complément $\complement_E A$

Associativité

$$a + (b + c) =$$

Associativité

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Associativité

$$a.(b.c) =$$

Associativité

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

Commutativité

$$a + b =$$

$$a.b =$$

Commutativité

$$a + b = b + a$$

$$a.b = b.a$$

Éléments neutres

$$a + 0 =$$

$$a.1 =$$

Éléments neutres

$$a + 0 = a$$

$$a.1 = a$$

Distributivité de . par rapport à +

$$a.(b + c) =$$

Distributivité de . par rapport à $+$

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

Distributivité de $+$ par rapport à .

$$a + (b.c) =$$

Distributivité de $+$ par rapport à $.$

$$a + (b.c) = (a + b).(a + c)$$

Tiers-exclus

$$a + \overline{a} =$$

Tiers-exclus

$$a + \overline{a} = 1$$

Non-contradiction

$$a.\overline{a} =$$

Non-contradiction

$$a.\overline{a} = 0$$

$$\overline{1} =$$

$$\overline{0} =$$

$$\overline{\overline{a}} =$$

$$\overline{1} = 0$$

$$\overline{0} = 1$$

$$\overline{\overline{a}} = a$$

Idempotence

$$a.a =$$

$$a + a =$$

Idempotence

$$a.a = a$$

$$a + a = a$$

Absorption

$$a + 1 =$$

$$a.0 =$$

Absorption

$$a + 1 = 1$$

$$a.0 = 0$$

Lois de De Morgan

$$\overline{a.b} =$$

Lois de De Morgan

$$\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$$

Lois de De Morgan

$$\overline{a+b} =$$

Lois de De Morgan

$$\overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b}$$

Absorption

$$a + ab =$$

Absorption

$$a + ab = a$$

a absorbe son multiple.

Absorption

$$a(a+b) =$$

Absorption

$$a(a+b) = a$$

Résumé

Arithmétique
- Systèmes de numération
- Arithmétique modulaire

Algèbres de Boole
- Calcul des propositions
- Calcul des prédicats
- Langage ensembliste
- Calcul booléen

Éléments de la théorie des ensembles
- Produit cartésien de deux ensembles
- Relations binaires
- Application f d'un ensemble E dans un ensemble F

Calcul matriciel

Graphes et ordonnancement

Produit cartésien de deux ensembles

$E \times F$, le produit cartésien de deux ensembles E et F, est l'ensemble des couples (x,y) où x est un élément de E et y est un élément de F.

$$E \times F = \{(x,y)\ ;\ x \in E,\ y \in F\}$$

Si un ensemble E a un nombre n fini d'éléments, on appelle ce nombre le **cardinal** de E. On le note $\mathrm{card}(E)$.

Si $\mathrm{card}(E) = n$ et $\mathrm{card}(F) = p$, alors $\mathrm{card}(E \times F) = n \times p$.

Relation binaire

Une relation binaire $\mathscr{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est la donnée d'une partie (un sous-ensemble) noté G de $E \times F$, appelée le graphe de $\mathscr{R}$.

Pour $x \in E$ et $y \in F$, $x \mathscr{R} y$ signifie $(x,y) \in G$.

Souvent $E = F$: la relation binaire $\mathscr{R}$ sera définie sur un ensemble E.

$\mathscr{R}$ est une relation binaire sur E.

- $\mathscr{R}$ est **réflexive** si

$$\forall x \in E \qquad x \mathscr{R} x$$

- $\mathscr{R}$ est **symétrique** si

$$\forall (x,y) \in E \times E \qquad x \mathscr{R} y \Rightarrow y \mathscr{R} x$$

- $\mathscr{R}$ est **antisymétrique** si

$$\forall (x,y) \in E \times E \qquad (x \mathscr{R} y) \wedge (y \mathscr{R} x) \Rightarrow x = y$$

- $\mathscr{R}$ est **transitive** si

$$\forall (x,y,z) \in E \times E \times E \qquad (x \mathscr{R} y) \wedge (y \mathscr{R} z) \Rightarrow x \mathscr{R} z$$

Relation d'équivalence

$\mathscr{R}$ est **une relation d'équivalence** si elle est

- réflexive
- symétrique
- transitive.

Relation d'ordre

Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est une relation d'ordre si elle est

- réflexive
- antisymétrique
- transitive.

Exemples :

$\leqslant$ et $\geqslant$ dans $\mathbb{R}$;

la relation d'inclusion est une relation d'ordre dans $\mathscr{P}(E)$ (l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E).

Ordre total

Une relation d'ordre $\mathscr{R}$ sur E est une relation d'ordre total si

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad (x \mathscr{R} y) \vee (y \mathscr{R} x)$$

On peut comparer tous les éléments. Sinon l'ordre est partiel.

Application f d'un ensemble E dans un ensemble F

Une application f associe à tout élément d'un ensemble E un élément unique d'un ensemble F.

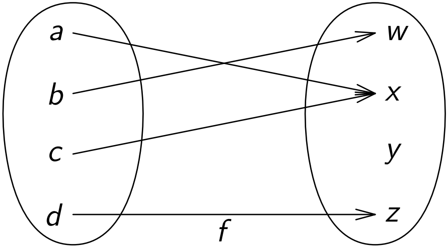
Notation :

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & E & \longrightarrow & F \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

$f(x)$ s'appelle **l'image** de x, E est l'ensemble de départ, F est l'ensemble d'arrivée.
$f(E)$ s'appelle **l'image** de E. Bien sûr, $f(E) \subset F$.

Exemple d'application

f est une application de $E = \{a,b,c,d\}$ vers $F = \{w,x,y,z\}$.



$f(E) = \{w,x,z\}$
L'image de a est x.
Les antécédents de x sont a et c.

Injection

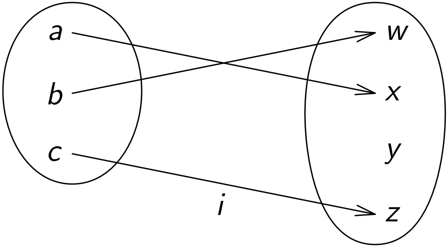
Une application f de E dans F est une injection si deux éléments distincts de E ont des images distinctes :

$$\forall x \in E,\ \forall x' \in E, \qquad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Cela revient à dire : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
Ou que deux flèches ne pointent pas vers le même élément de F.

Exemple d'injection

i est une injection de $E = \{a,b,c\}$ vers $F = \{w,x,y,z\}$.

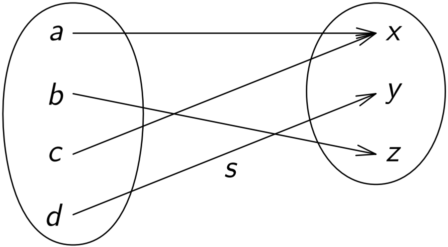


Surjection

Une application f de E dans F est une surjection si tout élément F admet un antécédent (au moins).

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \ \mid \ f(x) = y$$

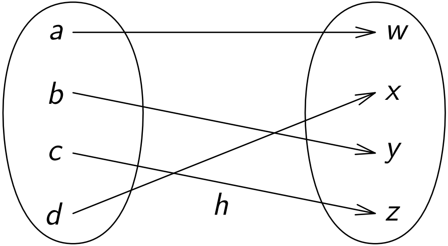
Exemple : s est une surjection de $E = \{a,b,c,d\}$ vers $F = \{x,y,z\}$.



Bijection

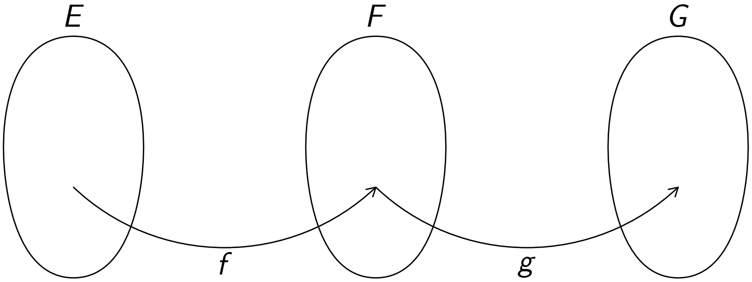
Une application f de E dans F est une bijection si elle est injective et surjective.

Exemple : h est une bijection de $E = \{a,b,c,d\}$ vers $F = \{w,x,y,z\}$.



Composée de deux applications

f est une application de E vers F et g est une application de F vers G.
L'application, notée $g \circ f$, de E vers G, qui à tout x de E associe $g(f(x))$ est la composée de f et g.



Résumé

Matrice de dimension $n \times p$

lignes - colonnes

n lignes

p colonnes

notation : $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

a_{ij} est l'élément situé ligne i, colonne j.

Addition de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 15 & \cdot \end{pmatrix}$$

- on ajoute des matrices de même dimension
- la somme a la même dimension

on ajoute les éléments situés à la même position

$$5 + 10 = 15$$

Multiplication par un nombre :

$$2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 10 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 10 \\ 20 & 200 \end{pmatrix}$$

Multiplication de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 40 & 50 & 60 \\ 20 & 70 & 80 & 90 \\ 30 & 100 & 200 & 300 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad\qquad 3 \times \boxed{4}$

- On peut multiplier car le nombre de colonnes de la 1ère est égal au nombre de lignes de la 2ème. (3 et 3)
- Le résultat est une matrice de dimension $2 \times \boxed{4}$

BTS SIO. Mathématiques pour l'informatique

Multiplication de matrices

$$\underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}}\times\underset{3 \times \boxed{4}}{\begin{pmatrix}10&40&50&60\\20&70&80&90\\30&100&200&300\end{pmatrix}}=\underset{2 \times \boxed{4}}{\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&1800&\cdot\end{pmatrix}}$$

Pour calculer cet élément (ligne 2, colonne 3), on "multiplie" la ligne 2 de la 1ère, par la colonne 3 de la 2ème :

$$4\times 50 + 5\times 80 + 6\times 200 = 1800$$

Matrice identité (ou unité) I :

$$A \times I = I \times A = A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Inverse d'une matrice A :

- A^{-1} est telle que $A^{-1} \times A = I$
- A^{-1} est donnée par la calculatrice.

exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

La calculatrice donne $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/6 \\ 2/3 & -1/12 \end{pmatrix}$

Systèmes linéaires

$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 8x + 4y = 7 \end{cases}$ s'écrit $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{B}$

$$AX = B$$

on multiplie à gauche par A^{-1}

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I} X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B \quad (\text{car } IX = X)$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/6 \\ 2/3 & -1/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 11/4 \end{pmatrix}$

La solution est $x = -0{,}5$ et $y = 2{,}75$

Résumé

Matrice d'adjacence

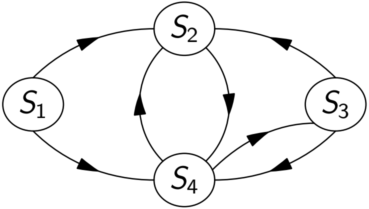


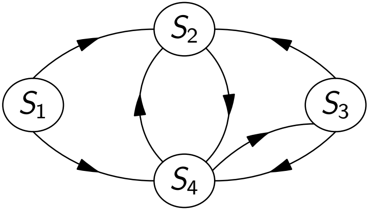
Figure – Un graphe orienté (4 sommets, 7 arêtes).

Ce graphe peut être représenté par la matrice d'adjacence :

$$M = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le $\boxed{1}$ indique la présence d'un arc de S_1 vers S_2.

Chemin, circuit



- La suite ordonnée (S_1, S_2, S_4) est un **chemin** de longueur 2.
- (S_2, S_4, S_3, S_2) est un **circuit** de longueur 3 : c'est un chemin dont le premier et le dernier sommet sont confondus.
- (S_1, S_2, S_4, S_3) est un **chemin hamiltonien** : c'est un chemin qui passe par tous les sommets une fois et une seule. Il est de longueur 3 (on passe par trois arcs).

Puissances de la matrice d'adjacence

Soit M la matrice associée à un graphe G. Le coefficient d'indice ij (ligne i, colonne j) de la matrice M^n est le nombre de chemins de longueur n reliant S_i à S_j.

Exemple :

$$M^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} ; M^3 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & \boxed{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il y a $\boxed{1}$ chemin de longueur 2 reliant S_3 à S_2.
Il y a $\boxed{2}$ chemins de longueur 3 reliant S_1 à S_4.
Il y a 1 circuit de longueur 3 reliant S_2 à S_2.

Matrice d'adjacence booléenne

Les matrices d'adjacence booléennes ne comportent **que des 0 et des 1** (1 s'il existe un arc d'un sommet à un autre, 0 sinon) . On ne veut plus savoir combien il y a de chemins de telle longueur mais seulement **s'il existe un chemin ou pas entre deux sommets**.

L'addition et la multiplication booléennes sont notées $\oplus$ et $\otimes$

Les puissances sont notées $M^{[p]}$

$$M^{[p]} = \underbrace{M \otimes M \otimes \cdots \otimes M}_{p \text{ facteurs}}$$

Matrices booléennes

En pratique (pour l'épreuve), on effectue les calculs sur les matrices d'adjacence normalement puis on remplace tous les coefficients non nuls par des 1.

Exemple : si on demande de calculer $A^{[2]}$, on calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on en déduit

$$A^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fermeture transitive d'un graphe

La fermeture transitive d'un graphe à n sommets $S_1, \dots, S_n$, est le graphe obtenu en ajoutant tous les arcs de S_i à S_j s'il existe un chemin de S_i à S_j.

Si M est la matrice d'adjacence du graphe, la matrice de la fermeture transitive du graphe est

$$\boxed{\widehat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus \cdots \oplus M^{[n]}}$$