ANÁLISIS MATEMÁTICO DE |SEN(t)| A TRAVÉS DE LA SERIE DE FOURIER.

MATHEMATICAL ANALYSIS OF |SEN(t)| THROUGH THE FOURIER SERIES

Medina García, Anthony; Jara Rojas, Gerardo.
Estudiantes de la facultad de Ingeniería, Universidad de Costa Rica, Guanacaste, Costa Rica. Correo: gerardo.jara @ucr.ac.cr, anthony.medina @ucr.ac.cr

Resumen: La Serie de Fourier es una herramienta completa que proporciona ayuda a las personas del área de la matemática e ingeniería, para el procesamiento de datos y el entendimiento de diversos tipos de señales. La aplicación de la Serie de Fourier a simple parecer ser un tema complicado, sin embargo, el objetivo del presente documento es presentar paso a paso la solución matemática de los coeficientes de la Serie trigonométrica de Fourier para la señal |sin(t)|. Esto conlleva a obtener la descomposición de la señal en términos de senos y cosenos, lo cual permite realizar un análisis profundo sobre el comportamiento de la señal.
Palabras clave: Serie Fourier, valor absoluto sin(t)|.

Abstract: The Fourier Series is a comprehensive tool that provides assistance to individuals in the fields of mathematics and engineering for data processing and understanding various types of signals. The application of the Fourier Series may appear to be a complex topic at first glance; however, the aim of this document is to present, step by step, the mathematical solution for the coefficients of the Fourier Trigonometric Series for the signal |sin(t)|. This entails obtaining the signal's decomposition in terms of sines and cosines, enabling a profound analysis of the signal's behavior.
Key words: Fourier Series, absolute value of sin(t).

INTRODUCCIÓN

La descomposición de señales a partir de senos y cosenos mediante el uso de la Serie de Fourier es una aplicación fundamental para los ingenieros, la cual es de suma importancia para el análisis de diversos tipos de señales y el procesamiento de datos .El presente documento se fundamenta en el cálculo de los coeficientes de la serie de fourier para una señal en específico, con el fin de comprender la composición de la señal |sin(t)|, tomando en cuenta su comportamiento periodico y simétrico.

Además se realiza una simulación en el programa Python con el fin de demostrar mediante gráficos la aproximación de la señal mediante el uso de los coeficientes calculados previamente.

RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis de la serie trigonométrica de Fourier de la función en estudio. Así mismo, los cálculos realizados de los coeficientes de la serie considerando las variables importantes: periodo. frecuencia de la señal y amplitud.

En primer lugar, los coeficientes calculados describen el comportamiento de la función según sus componentes armónicos (ver fig No 1-2-3).

.

Figura No 1: Representación del proceso correspondiente al cálculo del coeficiente fundamental a_0.

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t0}^{t0+T} f(t)dt$$

$$f(t) = |sen(t)|$$

$$T = \pi$$

$$\omega = 2\pi\frac{1}{T} = 2$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} sen(t)dt$$

$$a_0 = \frac{4}{\pi}$$

Figura No 2: Representación del proceso correspondiente al cálculo del coeficiente a_n.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(t)\cos(2nt)dt$$

Usando la siguiente propiedad:

$$\int \operatorname{sen}(mt)\cos(nt)dt = \frac{-\cos(m-n)t}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)t}{2(m+n)} + c$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(t)\cos(2nt)dt = \frac{2}{\pi}[\frac{-\cos(1-2n)t}{2(1-2n)} - \frac{\cos(1+2n)t}{2(1+2n)}]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}[\frac{-\cos(1-2n)t}{2(1-2n)} - \frac{\cos(1+2n)t}{2(1+2n)}]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{-1}{\pi}[\frac{\cos(1-2n)t}{(1-2n)} + \frac{\cos(1+2n)t}{(1+2n)}]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{-1}{\pi}[\frac{\cos(\pi-2n\pi)}{(1-2n)} + \frac{\cos(\pi+2n\pi)}{(1+2n)} - \frac{\cos(0-2n0)}{(1-2n)} - \frac{\cos(0+2n0)}{(1+2n)}]$$

Usando la siguientes propiedades:

$$\cos(\pi+2n\pi) = \cos(\pi) = -1$$

$$\cos(\pi-2n\pi) = \cos(\pi) = -1$$

$$\cos(0) = 1$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi}[-\frac{1}{1-2n} - \frac{1}{1+2n} - \frac{1}{1-2n} - \frac{1}{1+2n}]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}[\frac{2}{1-2n} + \frac{2}{1+2n}]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}[\frac{2+4n+2-4n}{1-4n^2}]$$

$$a_n = \frac{-1}{\pi}[\frac{4}{4n^2-1}]$$

Figura No 3 Serie Fourier de la señal.

$$x(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{-4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nt)$$

Por otro lado, la segunda parte del proyecto en ejecución, implica el uso de los coeficientes anteriormente calculados, con el propósito de obtener una aproximación a la señal utilizando el software de python. Los resultados de la simulación en dicho programa se presentan a continuación (Ver gráfico No 1-2).

Gráfico No 1: Gráfica correspondiente a los armónicos de la señal.

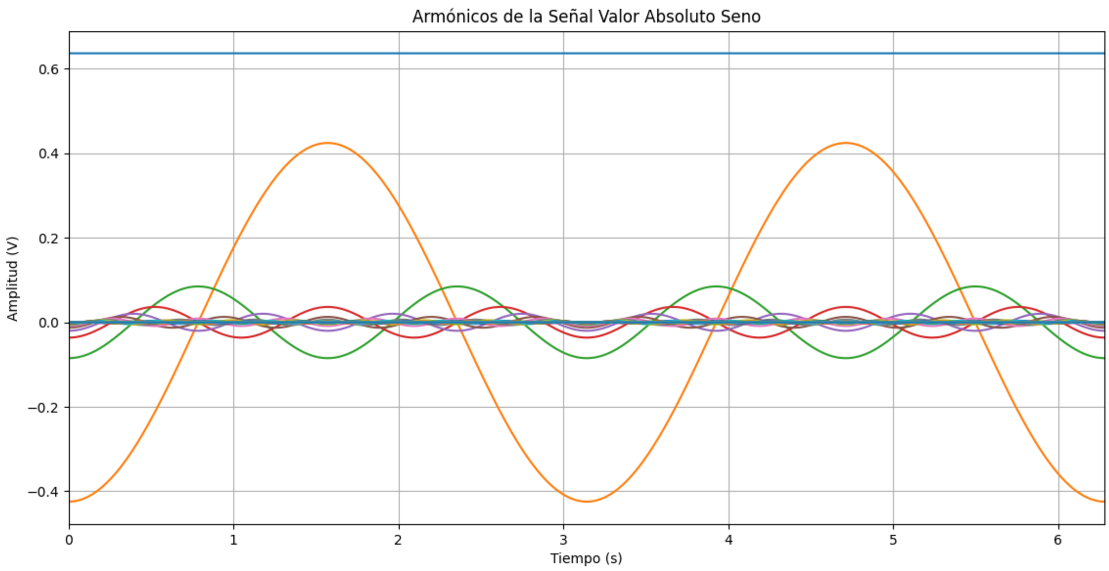
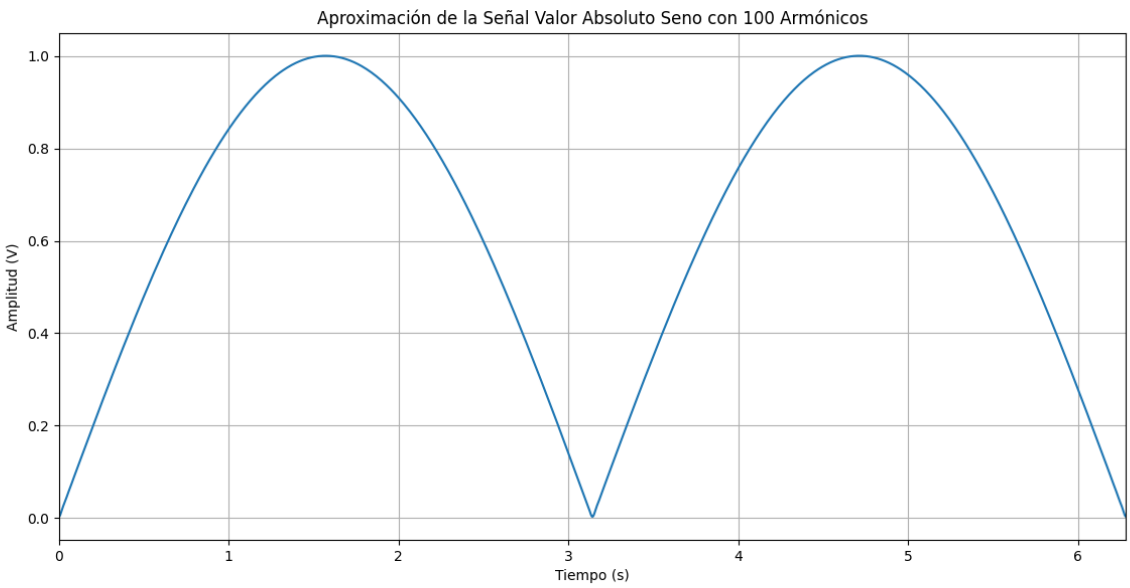


Gráfico No 2: Gráfico correspondiente a la aproximación de la señal.



DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En primer lugar, el coeficiente de la serie de fourier representa al componente constante CD, este mismo se refleja como una línea constante de color azul que se ubica en la zona superior del gráfico uno.

En cuanto a los otros dos coeficientes; el coeficiente a_n se obtiene luego de realizar el cálculo de la integral mostrada en la figura 2. Dicho coeficiente existe para En relación con la aproximación de la señal en el programa de Python; para ejecutar el programa se considera el correspondiente periodo, amplitud y frecuencia de dicha señal. todo n, es decir, n puede ser cualquier número par e impar a partir del valor de uno hasta infinito.

No obstante, el valor de b_n es igual a cero, debido a la propiedad de la Serie de Fourier para funciones pares. Para este caso, el valor absoluto del seno es una función par, por ende, se aplica la propiedad de Fourier.

De la misma manera, se utilizan 1000 puntos en la simulación del código en Python con el propósito de obtener una aproximación pertinente a la señal del valor absoluto del seno.

CONCLUSIONES

En esta solución, se ha explorado la descomposición en serie de Fourier de la función |sin(t)|, un proceso que implica la expresión de una función periódica en términos de sumas ponderadas de senos y cosenos, en la cual el valor an existe para todo n, a0 que es la componente DC . dio el resultado de 2 π y bn = 0 por la propiedad de serie de Fourier para funciones par, el cálculo de los armónicos así como la representación gráfica de la misma se realiza en un código ejecutado en el programa Python

BIBLIOGRAFÍA

Zill, D. Cullen, M. Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera. Cengage Learning. Séptima Edición. 2009.