Άσκηση 1.

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	
3	2/15	2/15	1/15	1/15	1/30	13/30
4	2/15	1/15	1/15	1/15	1/30	11/30
5	1/15	1/30	1/30	1/30	1/30	6/30
	5/15	7/30	5/30	5/30	3/30	

$Z = X + Y + |X - Y|.$

i) $E(X) = 3 \cdot 13/30 + 4 \cdot 11/30 + 5 \cdot 6/30 = 113/30$

$E(Y) = 1 \cdot 5/15 + 2 \cdot 7/30 + 3 \cdot 5/30 + 4 \cdot 5/30 + 5 \cdot 3/30 = 37/15$

Είναι $E(XY) = \sum_{x=3,4,5} \sum_{y=1,2,3,4,5} P(x,y) \cdot x \cdot y =$

$= 2/15 \cdot 3 + 2/15 \cdot 6 + 1/15 \cdot 9 + 1/15 \cdot 12 + 1/30 \cdot 15 +$
$2/15 \cdot 4 + 1/15 \cdot 8 + 1/15 \cdot 12 + 1/15 \cdot 16 + 1/30 \cdot 20 +$
$1/15 \cdot 5 + 1/30 \cdot 10 + 1/30 \cdot 15 + 1/30 \cdot 20 + 1/30 \cdot 25 =$

$\frac{6}{15} + \frac{12}{15} + \frac{9}{15} + \frac{12}{15} + \frac{15}{30} +$

$8/15 + 8/15 + 12/15 + 16/15 + 20/30 +$

$5/15 + 10/30 + 15/30 + 20/30 + 25/30 = 88/15 + 105/30 = 281/30$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 281/30 - 113/30 \cdot 37/15 = 17/225$

ii) $Z = X + Y + |X - Y|$

Είναι για $X = 3,4,5$ και $Y = 1,2,3,4,5$:

$Z = 3+1+|3-1| = 6$, $3+2+|3-2| = 6$, $3+3+|3-3| = 6$, $3+4+|3-4| = 8$,
$3+5+|3-5| = 10$

$4+1+|4-1| = 8$, $4+2+|4-2| = 8$, $4+3+|4-3| = 8$, $4+4+|4-4| = 8$,
$4+5+|4-5| = 10$

$5+1+|5-1| = 10$, $5+2+|5-2| = 10$, $5+3+|5-3| = 10$, $5+4+|5-4| = 10$, $5+5+|5-5| = 10$

Επομένως $S_Z = \{6, 8, 10\}$.

$P(Z=6) = 2/15 \cdot 2 + 1/15 = 5/15$

$P(Z=8) = 2/15 + 1/15 \cdot 4 = 6/15$

$P(Z=10) = 1/15 + 1/30 \cdot 6 = 8/30$

iii) Μέση τιμή της Z: $E(Z) = \sum_{x \in S_Z} x \cdot P(Z=x) = 6 \cdot 5/15 + 8 \cdot 6/15 + 10 \cdot 4/15 = 118/15$

Άσκηση 2.

y \ x	1	2	3	4	5	
1	1/16	1/8	1/8	1/8	1/16	8/16 = 1/2
2	1/16	1/8	1/8	1/8	1/16	8/16 = 1/2
	2/16	2/8	2/8	2/8	2/16	

i) Τα τέρματα που θα σημειωθούν κατά μέσο όρο είναι τα τέρματα που θα σημειωθούν από την ομάδα A συν αυτά από την B κατά μέσο όρο. Επομένως $E(X) + E(Y) = 1 \cdot 2/16 + 2 \cdot 2/8 + 3 \cdot 2/8 + 4 \cdot 2/8 + 5 \cdot 2/16 + 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/2$ $= 9/2 = 4.5 \simeq 5$ τέρματα.

ii) Η πιθανότητα να κέρδισε η A είναι $P(X > Y) = 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/16 + 1/8 + 1/8 + 1/16 = 12/16$

iii) $P(X+Y>5)$. Έστω $Z=X+Y$. Τότε έχουμε για $X=1,2,3,4,5$ κ' $Y=1,2$:

$Z = 1+1=2,\ 1+2=3,\ 2+1=3,\ 2+2=4,\ 3+1=4,\ 3+2=5,\ 4+1=5,\ 4+2=6,\ 5+1=6,\ 5+2=7$

Δηλαδή $S_Z=\{2,3,4,5,6,7\}$

$P(X+Y>5) = P(Z>5) = P(Z=6)+P(Z=7) = 1/8+1/16+1/16 = 4/16.$

Επομένως χάνουμε 12 στα 16 παιχνίδια δηλαδή χάνουμε 12€ και κερδίζουμε 4 στα 16 παιχνίδια δηλαδή κερδίζουμε $4\cdot 4=16$€. Στα 16 παιχνίδια κατά μέσο όρο κερδίζουμε μόνο 4€ που δεν είναι αρκετά εντυπωσιακό για να μας συμφέρει ιδιαιτέρως.

iv) Η B χάνει όποτε $Y<X$ δηλαδή όταν κερδίζει η A, που έχουμε την πιθανότητα από το ερώτημα ii). Άρα η B χάνει κατά μέσο όρο 12 στα 16 παιχνίδια, επομένως κατά μέσο όρο χρειάζονται

$E(Z)= 1/p = 1/\frac{12}{16} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1.\bar{3}$ παιχνίδια μέχρι να χάσει η B,

με Z τ.μ. τον αριθμό ανεξάρτητων επαναλήψεων μέχρι να χάσει η ομάδα B, που ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με $p=12/16=3/4$.

Άσκηση 3.

i) Έχουμε τον πίνακα των τ.μ. X, Y από τον οποίο ορίζεται η από κοινού συνάρτησή τους:

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$
2	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	0
3	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$	0	0
4	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot 1$	0	0	0

$\Longrightarrow$

$x \backslash y$	1	2	3	4	
1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,4
2	0,1	0,1	0,1	0	0,3
3	0,1	0,1	0	0	0,2
4	0,1	0	0	0	0,1
	0,4	0,3	0,2	0,1	

ii) $E(X) = 1\cdot 0.4 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0.2 + 4\cdot 0.1 = 0.4+0.6+0.6+0.4 = 2$

$E(Y) = 1\cdot 0.4 + 2\cdot 0.3 + 3\cdot 0.2 + 4.0.1 = 0.4+0.6+0.6+0.4 = 2$

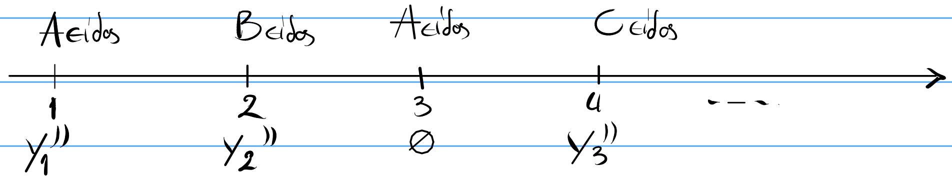
$$E(XY) = \sum_{x=1,2,3,4}\ \sum_{y=1,2,3,4} P(x,y)\cdot x\cdot y = 0.1 + 0{,}1\cdot 2 + 0{,}1\cdot 3 + 0{,}1\cdot 4 +$$
$$0\cdot 1\cdot 2 + 0.1\cdot 4 + 0.1\cdot 6 +$$
$$0{,}1\cdot 3 + 0{,}1\cdot 6 +$$
$$0{,}1\cdot 4 = 3.5$$

Επομένως είναι $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3.5 - 2\cdot 2 = -0.5$.

Άσκηση 4.

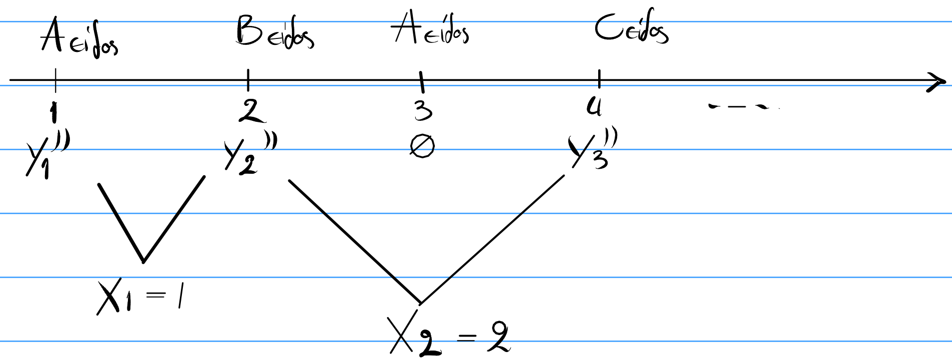
Θεωρούμε την τ.μ. Y_i : ο αριθμός των κουπονιών μέχρι το i-οστό νέο κουπόνι.

Γραφικά:



Επίσης θεωρούμε την τ.μ. $X_i = Y_{i+1} - Y_i$: ο αριθμός των κουπονιών που πήρε να βρούμε το i+1-οστό κουπόνι αφού έχουμε βρει ήδη i διαφορετικά είδη κουπονιών.

Γραφικά:



Από τον τύπο $X_i = Y_{i+1} - Y_i$ προκύπτει πως για N διαφορετικά κουπόνια ισχύει $Y_N = \sum_{i=0}^{N-1} X_i$.

Αφού $Y_N = X_{N-1} + Y_{N-1} = X_{N-1} + X_{N-2} + Y_{N-2} = X_{N-1} + X_{N-2} + \dots X_0 + Y_0 = \sum_{i=0}^{N-1} X_i + 0$.

Για κάθε κουπόνι που τραβάμε μετά από i νέα κουπόνια από τα N διαφορετικά, υπάρχει $\frac{N-i}{N}$ πιθανότητα να είναι νέο. Παρατηρούμε πως η τ.μ. X_i είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων επαναλήψεων (αγορά κουπονιού) μέχρι το επόμενο νέο κουπόνι. Επομένως η X_i ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με $p = \frac{N-i}{N}$.

Η μέση τιμή της X_i είναι $E(X_i) = \frac{N}{N-i}$.

Επομένως η μέση τιμή της τ.μ. που μας ενδιαφέρει είναι:

$$E(Y_N) = E\left(\sum_{i=0}^{N-1} X_i\right) = \sum_{i=0}^{N-1} E(X_i) = \sum_{i=0}^{N-1} N \cdot \frac{1}{N-i} = N \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} = N H_N.$$

Δηλαδή ο μέσος αριθμός κουπονιών που πρέπει να αγοράσει κάποιος για να έχει τουλάχιστον ένα από κάθε ένα από τα N είδη κουπονιών.

Άσκηση 5.