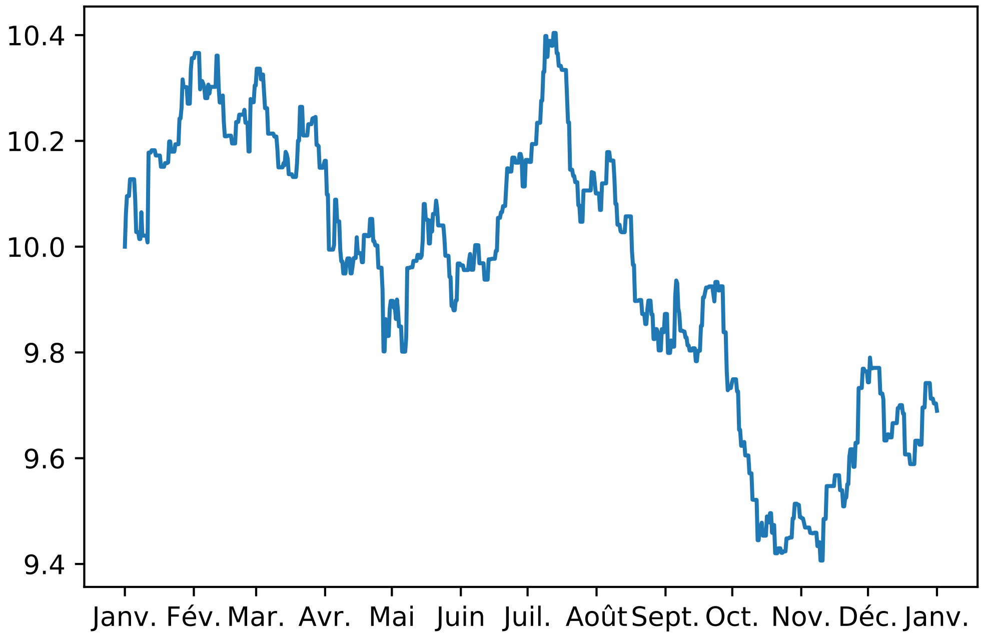
Quand s'arrêter ? Problème de l'arrêt optimal appliqué aux options américaines

Couthures Anthony
M2 Préparation à l'agrégation
Année universitaire - 2019/2020

Supervisé par : Bonnefont Michel



Unité de formation
Mathématiques
et interactions

Université de Bordeaux

Table des matières

Introduction **3**

1 Martingales et Temps d'arrêt **4**
1.1 Généralités sur les martingales discrètes 4
1.2 Décomposition des sur-martingales 5
1.3 Arrêt optimal et enveloppe de Snell 6
1.3.1 Temps d'arrêt et arrêt optimal 6
1.3.2 Enveloppe de Snell 7

2 Marchés Financiers Discrets **11**
2.1 Vocabulaire des marchés financiers 11
2.2 Modèles discrets 12
2.2.1 Actifs financiers 13
2.2.2 Stratégies de gestion 13
2.2.3 Arbitrage et marchés viables 16
2.3 Option européenne et marchés complets 19
2.3.1 Marchés complets 19
2.3.2 Actifs conditionnels dans les marchés complets 20
2.4 Modèle Cox-Ross-Rubinstein : Options européennes 20
2.4.1 Évolution des prix 21
2.4.2 Propriétés du marché CRR 21
2.4.3 Estimation des prix 22
2.4.4 Stratégie de couverture 23

3 Options Américaines **26**
3.1 Exercice et couverture des options américaines 26
3.1.1 Prix des options américaines 26
3.1.2 Stratégie de couverture 26
3.1.3 Exercice optimal 27
3.2 Modèle Cox-Ross-Rubinstein : Options Américaines 28
3.2.1 Stratégie de couverture 29
3.2.2 Exercice optimal 30

Annexe - Code **32**

Bibliographie **42**

Introduction

Le but de ce mémoire est de fournir une première illustration de la théorie de l'arrêt optimal dans le domaine des mathématiques financières. Les mathématiques financières sont une branche des mathématiques dites appliquées dont la raison d'être est la compréhension et la modélisation des marchés financiers ou plus généralement des opérations financières. La théorie de l'arrêt optimal est, quant à elle, comme son nom le laisse sous-entendre, le fait de choisir le bon instant pour réaliser une action et la théorie mathématique qui y est rattachée. On peut parler de l'arrêt optimal dans de nombreuses situations, par exemple elle peut s'appliquer dans le cadre de recrutement de personnel dans le cas bien connu du "problème du secrétaire" avec la fameuse loi des 37% ou encore le problème du parking. Nous l'étudierons ici dans le cadre des marchés financiers et nous nous attarderons plus particulièrement sur le modèle de Cox-Ross-Rubinstien afin de mettre en exergue le meilleur moment pour exercer une option américaine dans ce marché financier grâce à une étude de cas.

Je souhaite remercier M. Bonnefont qui, en ce printemps 2020 et malgré les mesures de confinement dût au Covid-19, a pu trouver le temps de m'aider dans la réalisation de ce mémoire et me donner de précieux exemples qui m'ont simplifié la vérification du code en annexe, alors que le sujet m'étais complètement inconnu.

Nous parcourrons dans ce mémoire trois chapitres. Nous aborderons tout d'abord, une partie purement probabiliste avec l'étude des martingales dans le cadre des espaces discrets, en rappelant leur définition et leurs caractéristiques, puis nous aborderons les temps d'arrêts et introduirons la notion de temps d'arrêt optimal. Le chapitre deux, est quant à lui, plus du domaine des mathématiques financières. Nous y définirons tous les éléments nécessaires à l'étude des marchés financiers discrets en passant par le vocabulaire propre à ce domaine, les différents objets qui les constituent pour enfin réaliser un cas pratique avec une première approche du modèle Cox-Ross-Rubinstein appliqué aux options européennes. Le dernier chapitre sera, enfin, l'étude des options américaines et de la théorie de l'arrêt optimal mise en application sur celles-ci. Nous nous attarderons sur une étude de cas à nouveau dans un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché financier. On pourra trouver à la fin du mémoire une annexe comprenant le code qui a été réalisé en parallèle de celui-ci et qui nous permettra de réaliser des exemples numériques, celui-ci a été mis en ligne à l'adresse : `https://github.com/AnthonyCouthures/Code-memoire-Temps-arret-optimal-pour-les-options-americaines`

Chapitre 1

Martingales et Temps d'arrêt

Les martingales sont l'un des outils fondamentaux pour le calcul de probabilités. Il va de soi que pour étudier le sujet qui nous intéresse, l'étude des martingales est un incontournable. Elles sont même au cœur des modèles qui permettent de simuler les marchés financiers d'aujourd'hui.

Nous nous contenterons dans ce chapitre des martingales sur un espace discret, cette étude est suffisante pour aborder le cas des options américaines. On pourra se référer à [1] pour plus de détails sur le sujet.

1.1 Généralités sur les martingales discrètes

Définition 1.1.1 *(Filtration)* Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on appelle filtration toute suite croissante $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Lorsque celle-ci est finie, i.e $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ on dit que la filtration est d'horizon N.

Cela revient à prendre une tribu qui contient tous les événements qui peuvent survenir avant l'instant n. Cette notion est très concrète vu qu'elle nous permet de stocker les informations du passé, au temps $k \leq n$, pour les prendre en compte au temps n.

Définition 1.1.2 *(Processus)* Une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelée processus. On dit de plus, que le processus est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Nous pouvons maintenant définir l'objet, ou plutôt les objets qui nous intéressent,

Définition 1.1.3 *(Martingales, Sur et Sous-Martingales)* Soit un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que X_n soit intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle le processus $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

i) une martingale, si $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\mathbb{E}\left[\, X_n \mid \mathcal{F}_k \,\right] = X_k$ presque sûrement (p.s),

ii) une sur-martingale, si $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\mathbb{E}\left[\, X_n \mid \mathcal{F}_k \,\right] \leq X_k$ p.s,

iii) une sous-martingale, $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\mathbb{E}\left[\, X_n \mid \mathcal{F}_k \,\right] \geq X_k$ p.s.

Proposition 1.1.4
Un processus adapté $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[\, X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1} \,\right] = 0$$

Démonstration. Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale, alors il est immédiat, en se rappelant la propriété $\mathbb{E}\left[\, X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1} \,\right] = X_{n-1}$ que $\mathbb{E}\left[\, X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1} \,\right] = 0$. Maintenant, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left[\, X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1} \,\right] = 0$ nous avons, par télescopage, pour tout $m \leq n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\, X_n - X_m \mid \mathcal{F}_m \,\right] &= \mathbb{E}\left[\, X_n - X_{n-1} \cdots X_{m+1} - X_m \mid \mathcal{F}_m \,\right] = \sum_{m+1\leq k\leq n} \mathbb{E}\left[\, X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_m \,\right] \\
&= \sum_{m+1\leq k\leq n} \mathbb{E}\left[\, \mathbb{E}\left[\, X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1} \,\right] \mid \mathcal{F}_m \,\right] = 0
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque. On peut voir ainsi que si $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, la suite $(\mathbb{E}[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante. En effet, $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[X_{n-1}]$. Pour les sur-(resp. sous-) martingales, cela se traduit par le fait que $\mathbb{E}[X_n]$ est décroissante (resp. croissante).

1.2 Décomposition des sur-martingales

Nous avons vu que les sur-martingales, sont par définition, des processus décroissants en espérance. Le théorème suivant, affirme alors qu'une sur-martingale peut toujours être vue comme une martingale à laquelle on a ajouté un processus décroissant. Ce processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut, de plus, être pris adapté à la filtration $(\mathcal{F}_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$. Concrètement, cela signifie que Z_n peut être déterminé à l'instant $n-1$.

Ce résultat est central dans la notion de temps d'arrêt optimal et par conséquent dans son application aux marchés financier.

Théorème 1.2.1 (Décomposition de Doob)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sur-martingale. Alors, il existe des processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniques presque sûrement, tels que

i) $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit une martingale,*

ii) $Z_0 = 0$ *et* Z_n *est* $\mathcal{F}_{n-1}$*-mesurable pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et presque sûrement croissant,*

iii) $X_n = Y_n - Z_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Comme vu précédemment, une martingale est d'espérance constante. Donc les variations de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doivent être compensées par le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous allons considérer la différence $\Delta_n = X_n - X_{n-1}$, $n \geq 1$. On pose $Y_0 = X_0$, $Z_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[-\Delta_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] \text{ et } Y_n = X_n + Z_n.$$

Le processus Z_n est croissant, en effet $\mathbb{E}[\Delta_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} \leq 0$ car $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sur-martingale. D'où $Z_{n+1} - Z_n \geq 0$. De plus, $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale car

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] + Y_{n-1} \\
&= \mathbb{E}[(X_n + Z_n) - (X_{n-1} + Z_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] + Y_{n-1} \\
&= \mathbb{E}[\Delta_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[(Z_n - Z_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] + Y_{n-1} \\
&= Y_{n-1}
\end{aligned}$$

Nous avons donc deux processus vérifiant les résultats i), ii) et iii) du théorème, il ne nous manque que l'unicité pour conclure. Prenons une autre décomposition Y'_n, Z'_n vérifiant ces propriétés. On raisonne alors par récurrence forte, pour $n = 0$ on a $Z_0 = 0 = Z'_0$ par ii) et donc $Y_0 = X_0 = Y'_0$. Supposons que pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$ on ait $Z_j = Z'_j$ et $Y_j = Y'_j$. Alors,

$$\begin{aligned}
Z'_{n+1} &= \mathbb{E}\left[Z'_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}[Y_{n+1} - X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = Y'_n - \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= Y'_n - \mathbb{E}\left[Y'_{n+1} - Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = Y_n + Z_{n+1} - Y'_n \\
&= Z_{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence.}
\end{aligned}$$

On a alors, l'unicité du processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, égalité des espérances $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[Y'_n]$ ou encore $Y'_n = Y_n$ p.s. □

1.3 Arrêt optimal et enveloppe de Snell

1.3.1 Temps d'arrêt et arrêt optimal

Dans cette partie nous nous mettons dans un modèle discret construit sur un espace probabilisé filtré, $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$, qui n'est autre qu'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous ne nous attarderons pas trop sur la filtration, nous prenons la filtration classique $\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_i\} : 0 \leq i \leq n)$ qui est la plus petite tribu pour qui les $\{X_i\}_{0\leq i\leq n}$ sont mesurables.

Définition 1.3.1 *(Temps d'arrêt)* Une variable aléatoire ν, à valeur dans $\mathbb{N}$ est un temps d'arrêt si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Proposition 1.3.2
Une variable aléatoire est un temps d'arrêt si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\{\nu \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Démonstration. Supposons que ν soit un temps d'arrêt alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\{\nu = n\} = \{\nu \leq n\} \cap \{\nu \leq n-1\}^c$. Or $\{\nu \leq n-1\}^c = \bigcup_{i=0}^{n-1} \{\nu = i\} \in \mathcal{F}_n$ et comme le passage au complémentaire laisse stable les tribus, $\{\nu \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_n$. Donc on a bien une équivalence de définition. □

Remarque. Cette deuxième définition est celle qui se généralise aux espaces probabilisés continus.

Si ν est un temps d'arrêt, on définit la tribu des événements qui sont antérieurs à ν par

$$\mathcal{F}_\nu = \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap \{\nu \leq n\} \in \mathcal{F}_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

Il s'agit d'une sous-tribu de $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$, de plus ν est $\mathcal{F}_\nu$-mesurable.

On peut alors définir la notion de suite arrêtée à un temps d'arrêt. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et si ν est un temps d'arrêt, la suite arrêtée au temps ν est $\forall\omega \in \Omega$,

$$X_n^\nu(\omega) := X_{\nu(\omega)\wedge n}(\omega) \text{ où } \nu(\omega) \wedge n = \min(\nu(\omega), n).$$

Remarque. On prendra la notation usuelle, sauf si cela est nécessaire, $X_n^\nu(\omega) = X_n^\nu$.

Proposition 1.3.3
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée et soit ν un temps d'arrêt de la filtration. Alors, la suite arrêtée $(X_n^\nu)_{n\in\mathbb{N}}$ est adaptée. De plus, si $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sur-martingale, alors $(X_n^\nu, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sur-martingale.

Démonstration. On peut voir que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_n^\nu = X_{n\wedge\nu} = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (X_k - X_{k-1}) \times \mathbb{1}_{\{k\leq\nu\}} \tag{1.1}$$

Comme ν est un temps d'arrêt pour la filtration, la fonction $\mathbb{1}_{\{k\leq\nu\}} = \mathbb{1}_{\{\nu<k\}^c} = \mathbb{1}_{\{\nu\leq k-1\}^c}$ est bien $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $1 \leq k \leq n$. Donc comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $(X_n^\nu)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite adaptée à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_n^\nu - X_{n-1}^\nu \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] &= \mathbb{E}\left[(X_n - X_{n-1}) \times \mathbb{1}_{\{n\leq\nu\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] \text{ par (1.1)} \\
&= \mathbb{E}\left[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] \text{ car } \mathbb{1}_{\{n\leq\nu(\omega)\}}(\omega) \in \{0,1\}, \forall\omega \in \Omega \\
&\leq 0 \text{ comme } (X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une sur-martingale.}
\end{aligned}$$

Donc on a $(X_n^\nu, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une sur-martingale. □

Dans la suite, pour n et $N \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{T}_{n,N}$ l'ensemble des temps d'arrêt à valeur dans $\{n, n+1, \ldots, N\}$. On note $\mathcal{T}_{n,\infty}$ si les temps d'arrêt sont à valeur dans $\mathbb{N}$. On peut remarquer que si Ω est fini on a $\mathcal{T}_{n,N}$ qui est fini.

Définition 1.3.4 *(Temps d'arrêt optimal)* On appelle temps d'arrêt optimal pour un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout temps d'arrêt $\tau*$ tel que :

$$\mathbb{E}\,[\,X_{\tau*} \mid \mathcal{F}_0\,] = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}\,[\,X_\nu \mid \mathcal{F}_0\,]$$

Pour définir le temps d'arrêt optimal, il n'est pas nécessaire que N soit fini. Toutefois, la notion de temps d'arrêt n'a d'intérêt, dans le cadre de la modélisation et de la prévision statistique que nous allons étudier, que si N est fini. Dans ce cadre, il s'agit d'une stratégie d'arrêt optimal en horizon fini car la décision doit être prise avant le temps N.

1.3.2 Enveloppe de Snell

Nous allons maintenant étudier une sur-martingale particulière construite de la façon suivante. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et un processus adapté $(X_n)_{0\leq n\leq N}$.

Alors, l'enveloppe de Snell $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ du processus $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ est donnée par l'algorithme descendant récursif :

$$\begin{cases} U_N = X_N \\ U_n \ = \max\Big((X_n, \mathbb{E}\,[\,U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\,]\Big) \quad \forall n \leq N-1 \end{cases} \tag{1.2}$$

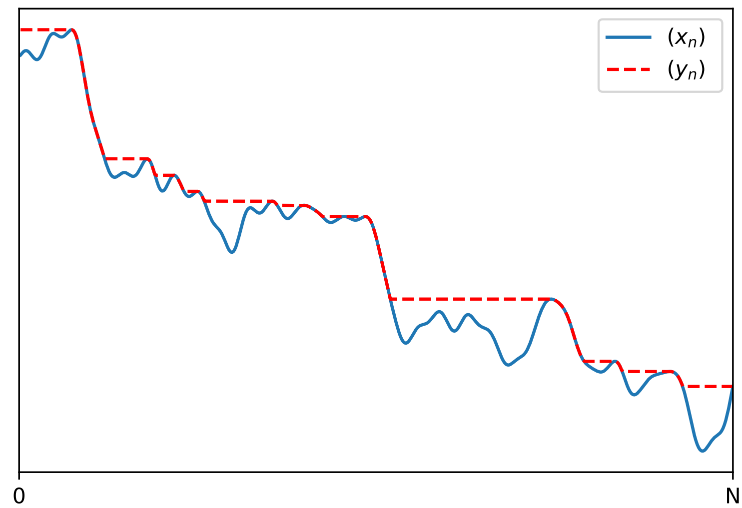


FIGURE 1.1 – Pour déterminer, le maximum d'une suite réelle $(x_n)_{0\leq n\leq N}$, on peut construire récursivement une suite majorante de la manière suivante ; $y_N = x_N$ et $y_n = \max\left(x_n, y_{n+1}\right)$. Comme on peut s'en douter la suite $(y_n)_{0\leq n\leq N}$ est la plus petite suite décroissante majorant $(x_n)_{0\leq n\leq N}$.

On peut voir sur la figure 1.1, la stratégie algorithmique qui est à l'origine de l'enveloppe de Snell. Et, comme le graphique peut nous laisser le deviner, nous allons maintenant montrer que l'enveloppe de Snell $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ d'un processus $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ est la plus petite sur-martingale le majorant.

Proposition 1.3.5
Soit $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale, alors $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ est la plus petite sur-martingale majorant la suite $(X_n)_{0\leq n\leq N}$.

Démonstration. On a la relation :

$$U_{n-1} = \max\left(X_{n-1}, \mathbb{E}\left[\,U_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\,\right]\right), \tag{1.3}$$

Celle-ci nous permet de déduire que $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ est une sur-martingale, en effet :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\,U_n - U_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\,\right] &= \mathbb{E}\left[\,U_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\,\right] - \mathbb{E}\left[\,U_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\,\right] = \mathbb{E}\left[\,U_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\,\right] - U_{n-1} \\ &= \mathbb{E}\left[\,U_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\,\right] - \max\left(X_{n-1}, \mathbb{E}\left[\,U_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\,\right]\right) \leq 0\end{aligned}$$

De plus, il est évident que celle-ci majore $(X_n)_{0\leq n\leq N}$. Montrons maintenant par récurrence décroissante qu'elle est unique, soit $(V_n)_{0\leq n\leq N}$ une sur-martingale majorant $(X_n)_{0\leq n\leq N}$.

Alors par définition de l'enveloppe de Snell, on a $V_N \geq U_N$ et pour tout $n \leq N$ tels que $V_n \geq U_n$, les propriétés des martingales nous donnent,

$$V_{n-1} \geq \mathbb{E}\left[\,V_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\,\right] \geq \mathbb{E}\left[\,U_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\,\right]$$

Et comme $(V_n)_{0\leq n\leq N}$ majore $(X_n)_{0\leq n\leq N}$,

$$V_{n-1} \geq \max\left(X_{n-1}, \mathbb{E}\left[\,U_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\,\right]\right) = U_{n-1}$$

et donc que le résultat est vrai pour tout $n \leq N$ □

Proposition 1.3.6
La variable aléatoire définie par

$$\nu_0 = \inf\left\{n \geq 0 \mid X_n = U_n\right\} \tag{1.4}$$

est un temps d'arrêt et la suite arrêtée associée $(U_{n\wedge\nu_0})_{0\leq n\leq N}$ est une martingale.

Remarque. Ce résultat reste vrai pour tout $0 \leq k \leq N$:

$$\nu_k = \inf\left\{n \geq k \mid X_n = U_n\right\}$$

Démonstration. On a par la formule (1.2), $U_N = Z_N$ et donc $\nu_0 \in \{0, 1, \ldots, N\}$ et l'on a $\{\nu_0 = 0\} \in \mathcal{F}_0$ car ce sont des martingales. De plus, pour $k \geq 1$, ν_0 est $\mathcal{F}_k$-mesurable car

$$\{\nu_0 = k\} = \left(\bigcap_{i=0}^{k-1} \{U_k > X_k\}\right) \cap \{U_k = X_k\} \in \mathcal{F}_k$$

En reprenant l'écriture (1.1) on a : $U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} = (U_{n+1} - U_n) \times \mathbb{1}_{\{\nu_0\,\geq\, n+1\}}$ et comme sur l'ensemble $\{n+1 \leq \nu_0\}$, $\{U_n > X_n\}$ il vient $U_n = \mathbb{E}\left[\,U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\,\right]$. Alors,

$$U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} = \left(U_{n+1} - \mathbb{E}\left[\,U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\,\right]\right) \times \mathbb{1}_{\{\nu_0\,\geq\, n+1\}}$$

Et comme $\{\nu_0 \;\geq\; n+1\}^c \in \mathcal{F}_n$ en passant à l'espérance conditionnelle,

$$\mathbb{E}\left[\,U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} \mid \mathcal{F}_n\,\right] = \mathbb{E}\left[\,U_{n+1} - \mathbb{E}\left[\,U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\,\right] \mid \mathcal{F}_n\,\right] \times \mathbb{1}_{\{\nu_0\,\geq\, n+1\}} = 0$$

En effet, on a $\forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ la valeur de l'indicatrice ou de l'espérance conditionnelle qui est nulle. □

Proposition 1.3.7
Le temps d'arrêt ν_0 vérifie :

$$U_0 = \mathbb{E}\left[\,X_0 \mid \mathcal{F}_0\,\right] = \sup_{\nu\in\mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}\left[\,X_n \mid \mathcal{F}_0\,\right]$$

Démonstration.
$$U_0 = U_0^{\nu_0} = \mathbb{E}\,[\,U_N^{\nu_0} \mid \mathcal{F}_0\,] = \mathbb{E}\,[\,X_{\nu_0} \mid \mathcal{F}_0\,]$$
car $(U_n^{\nu_0})_{0\le n\le N}$ est une martingale et par la proposition (1.3.3), on sait que si $\nu \in \mathcal{T}_{0,N}$, $(U_n^{\nu})_{0\le n\le N}$ est alors une sur-martingale. Donc :
$$\forall \nu \in \mathcal{T}_{0,N}, \quad U_0 \ge \mathbb{E}\,[\,U_N^{\nu} \mid \mathcal{F}_0\,] = \mathbb{E}\,[\,U_\nu \mid \mathcal{F}_0\,] \ge \mathbb{E}\,[\,X_\nu \mid \mathcal{F}_0\,]$$
Cela revient bien à, $U_0 = \sup_{\nu\in\mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}\,[\,X_n \mid \mathcal{F}_0\,]$. □

Remarque. Ce résultat reste vrai si le point de départ n n'est pas 0 dans ce cas on obtient,
$$U_n = \sup_{\nu\in\mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}\,[\,X_\nu \mid \mathcal{F}_n\,]$$

Revenons au temps d'arrêt optimal.

Théorème 1.3.8
Un temps d'arrêt ν est optimal si et seulement si :
$$\begin{cases} X_\nu = U_\nu \\ (U_{\nu\wedge n})_{0\le n\le N} \ \textit{ est une martingale.} \end{cases} \tag{1.5}$$

Démonstration. Grâce à la définition des martingales, comme le processus arrêté $(U_{\nu\wedge n})_{0\le n\le N}$ est une martingale, on a $U_0 = \mathbb{E}\,[\,U_\nu \mid \mathcal{F}_0\,]$. Or, si $X_\nu = U_\nu$, on obtient $U_0 = \mathbb{E}\,[\,X_\nu \mid \mathcal{F}_0\,]$ ce qui par la proposition (1.3.7) nous donne l'égalité :
$$U_0 = \mathbb{E}\,[\,U_\nu \mid \mathcal{F}_0\,] = \mathbb{E}\,[\,X_\nu \mid \mathcal{F}_0\,] = \sup_{\nu\in\mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}\,[\,X_\nu \mid \mathcal{F}_0\,]$$
qui est la définition d'un temps d'arrêt optimal.

Maintenant si ν est un temps d'arrêt optimal, on a :
$$\mathbb{E}\,[\,X_\nu \mid \mathcal{F}_0\,] = \sup_{\nu\,\in\,\mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}\,[\,X_\nu \mid \mathcal{F}_0\,] = U_0 \quad \text{par (1.2)}$$
Or on a $U_\nu = \max\left(X_\nu, \mathbb{E}\,[\,U_{\nu+1} \mid \mathcal{F}_\nu\,]\right)$ donc, comme $(U_n)_{0\le n\le N}$ est une sur-martingale majorant $(X_n)_{0\le n\le N}$ et on sait que l'espérance conditionnelle est monotone,
$$X_\nu \le U_\nu \Rightarrow U_0 = \mathbb{E}\,[\,X_\nu \mid \mathcal{F}_0\,] \le \mathbb{E}\,[\,U_\nu \mid \mathcal{F}_0\,]$$
Ce qui nous donne finalement :
$$\mathbb{E}\,[\,X_\nu \mid \mathcal{F}_0\,] = \mathbb{E}\,[\,U_\nu \mid \mathcal{F}_0\,]$$
Or comme $0 \le U_\nu - X_\nu$ et $\mathbb{E}\,[\,U_\nu - X_\nu \mid \mathcal{F}_0\,] = 0$ on a $U_\nu - X_\nu = 0$ ce qui nous donne l'égalité.

Montrons maintenant que $(U_{\nu\wedge n})_{0\le n\le N}$ est une martingale. On sait maintenant que $U_0 = \mathbb{E}\,[\,U_\nu \mid \mathcal{F}_0\,]$, de plus comme $(U_n)_{0\le n\le N}$ est une sur-martingale,
$$\forall n \le N, \quad \mathbb{E}\,[\,U_\nu \mid \mathcal{F}_0\,] \le \mathbb{E}\,[\,U_{n\wedge\nu} \mid \mathcal{F}_0\,] \le U_0 \Rightarrow \mathbb{E}\,[\,U_\nu \mid \mathcal{F}_0\,] = \mathbb{E}\,[\,U_{n\wedge\nu} \mid \mathcal{F}_0\,]$$
Avec l'écriture $\mathbb{E}\,[\,U_{n\wedge\nu} \mid \mathcal{F}_0\,] = \mathbb{E}\,[\,\mathbb{E}\,[\,U_\nu \mid \mathcal{F}_n\,] \mid \mathcal{F}_0\,]$ et comme $U_{n\wedge\nu} \ge \mathbb{E}\,[\,U_\nu \mid \mathcal{F}_n\,]$ on obtient
$$\mathbb{E}\,[\,U_{n\wedge\nu} - \mathbb{E}\,[\,U\nu \mid \mathcal{F}_n\,] \mid \mathcal{F}_0\,] = 0 \Rightarrow U_{n\wedge\nu} = \mathbb{E}\,[\,U_\nu \mid \mathcal{F}_n\,]$$
Ce qui montre que $(U_{\nu\wedge n})_{0\le n\le N}$ est une martingale. □

Maintenant que nous sommes en capacité d'exprimer la notion d'arrêt optimal grâce à l'enveloppe de Snell, nous pouvons nous demander comment déterminer le plus grand temps d'arrêt qui soit optimal d'un processus $(X_n)_{0\le n\le N}$. Grâce au théorème de décomposition de Doob, énoncé en (1.2.1), la décomposition de $(U_n)_{0\le n\le N}$ nous permet d'obtenir une expression explicite de celui-ci.

Proposition 1.3.9
Le plus grand temps d'arrêt optimal pour un processus $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ *est donné par*

$$\tau^*_{max} = \begin{cases} N & si\ \ Z_N = 0 \\ \inf\{0 \leq n \leq N-1 \mid Z_{n+1} \neq 0\} & si\ \ Z_N \neq 0. \end{cases}$$

où $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ *est l'enveloppe de Snell de* $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ *et ayant pour décomposition de Doob,* $U_n = Y_n - Z_n$ *pour tout* $0 \leq n \leq N$

Démonstration. Comme Z_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $0 \leq n \leq N-1$, τ^*_{max} est un temps d'arrêt. De plus, comme $U_n = Y_n - Z_n$, pour tout $0 \leq k < \tau^*_{max}$, on a par définition $Z_k = 0$. Alors $U_n^{\tau^*_{max}} = Y_n^{\tau^*_{max}}$ pour tout $0 \leq n \leq N$ ce qui implique que $\left(U_n^{\tau^*_{max}}\right)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale. Le théorème (1.3.8) nous dit alors qu'il suffit maintenant de montrer :

$$X_{\tau^*_{max}} = U_{\tau^*_{max}}$$

Alors, en modifiant l'écriture (1.1) de la preuve de (1.3.3), on obtient

$$\begin{aligned} U_{\tau^*_{max}} &= \sum_{k=0}^{N-1} U_k \times \mathbb{1}_{\{\tau^*_{max}=k\}} + U_N \times \mathbb{1}_{\{\tau^*_{max}=N\}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \max\left(X_k, \mathbb{E}\left[\, U_{k+1} \mid \mathcal{F}_k \,\right]\right) \times \mathbb{1}_{\{\tau^*_{max}=k\}} + X_N \times \mathbb{1}_{\{\tau^*_{max}=N\}} \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{E}\left[\, U_{k+1} \mid \mathcal{F}_k \,\right] = \mathbb{E}\left[\, Y_{k+1} - Z_{k+1} \mid \mathcal{F}_k \,\right] = Y_k - Z_{k+1}$ car Z_{k+1} est $\mathcal{F}_k$-mesurable et comme $(Y_n)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale, quand $\tau^*_{max} = k$, $Z_k = 0$ et $Z_{k+1} > 0$, donc $U_k = Y_k$ et on a l'inégalité $\mathbb{E}\left[\, U_{k+1} \mid \mathcal{F}_k \,\right] = Y_k - Z_{k+1} < Y_k = U_k$. Alors,

$$U_k = \max\left(X_k, \mathbb{E}\left[\, U_{k+1} \mid \mathcal{F}_k \,\right]\right) = X_k \neq \mathbb{E}\left[\, U_{k+1} \mid \mathcal{F}_k \,\right]$$

Et donc si $k = \tau^*_{max}$,

$$U_{\tau^*_{max}} = \mathbb{1}_{\{\tau^*_{max}=k\}} \max\left(X_{\tau^*_{max}}, \mathbb{E}\left[\, U_{\tau^*_{max}} \mid \mathcal{F}_{\tau^*_{max}} \,\right]\right) = X_{\tau^*_{max}}$$

Et donc τ^*_{max} est bien un temps d'arrêt optimal par (1.3.8). Et il est bien maximal car si $\nu \in \mathcal{T}_{0,N}$ est atteignable (de probabilité non nulle) et tel que $\nu > \tau^*_{max}$ alors,

$$\mathbb{E}\left[\, U_\nu \,\right] = \mathbb{E}\left[\, Y_\nu \,\right] - \mathbb{E}\left[\, Z_\nu \,\right] = \mathbb{E}\left[\, U_0 \,\right] - \mathbb{E}\left[\, Z_\nu \,\right] < \mathbb{E}\left[\, U_0 \,\right]$$

Donc $(U_n^\nu)_{0\leq n\leq N}$ n'est pas une martingale et ν n'est pas un temps d'arrêt optimal. □

Chapitre 2

Marchés Financiers Discrets

Les marchés financiers sont des systèmes complexes et difficilement contrôlables. Ce chapitre a pour but d'introduire la notion de modèle de marché discret, le vocabulaire afférant ainsi que le formalisme de ceux-ci. Nous y verrons le lien entre les martingales étudiées au chapitre précédent et la notion économique d'arbitrage dans le cadre de marché complet. Nous présenterons en fin de chapitre le modèle de Cox-Ross-Rubinstein dans le cadre des options européennes ce qui nous permettra d'arriver armé pour le chapitre 3 qui traite des options américaines.

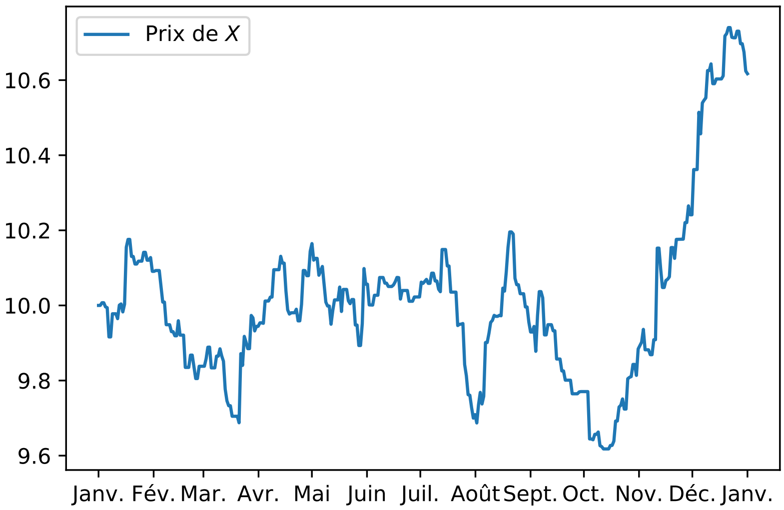


FIGURE 2.1 – Simulation de la variation de prix d'une option X au cours d'une année.

2.1 Vocabulaire des marchés financiers

Définition 2.1.1 *(Option)* Une option est un titre financier donnant à son détenteur le droit, et non l'obligation d'acheter ou de vendre (selon qu'il s'agit d'une option d'achat ou de vente) une certaine quantité d'actif financier à une date convenue et à un prix fixé d'avance.

Remarque. Pour mieux comprendre ce que le terme option signifie voici une liste d'exemple des formes que celles-ci peuvent prendre :

— des actions d'une entreprise,...

— des devises comme euro, dollar,...

— des ressources comme l'or, l'acier, du gaz,...

Les options sont caractérisées par les éléments suivants :
- la nature de l'option
- l'actif sous-jacent sur lequel porte l'option
- le montant
- l'échéance
- la durée d'exercice
- le prix d'exercice

Nous définissons plus en détails ces notions.

Définition 2.1.2 *(la nature de l'option)* La nature d'une option est l'objet de celle-ci, elle peut être soit une option d'achat, dans ce cas on dit qu'il s'agit de *call*, soit une option de vente et on l'appelle alors *put*.

Remarque. Dans la suite de ce mémoire, sauf mention du contraire, nous étudierons des actions en put, afin d'éviter toute confusion sur l'option que nous sommes en train de manipuler.

Définition 2.1.3 *(actif sous-jacent)* L'actif *sous-jacent* est en fait l'objet de l'option. Comme énuméré précédemment, il peut s'agir d'une action, d'une devise, de matières premières,...

Définition 2.1.4 *(montant)* Le montant d'une option est la quantité d'actif sous-jacent associée à celle-ci.

Définition 2.1.5 *(échéance)* L'échéance d'une option est la durée de vie d'une option. Au-delà de cette date, quelque soit le type d'option, l'option est expirée et sa valeur est nulle.

Définition 2.1.6 *(période d'exercice)* La période d'exercice d'une option est le temps avant de pouvoir exercer une option. Si l'option ne peut être exercée qu'à l'échéance, on parle d'une option *européenne*, et si l'action peut être exercée a n'importe quel moment avant l'échéance, on parle alors d'une option *américaine*.

Définition 2.1.7 *(prix d'exercice)* Le prix d'exercice d'une option est le prix auquel l'acquéreur de l'option peut exercer l'option, c'est-à-dire dans le cas d'un *put*, vendre le sous-jacent.

Enfin, une option a un prix qu'on appelle le *prime*. Le *prime* d'une option est donné par le marché lorsque l'option est cotée par un marché organisé.

C'est sur cette notion de *prime* que repose le cœur de problème : quand faut-il exercer une option pour maximiser le profit ?

Exemple 2.1.8 Mettons-nous dans la situation d'un *call* européen, d'échéance N, sur une action cotée en bourse à une valeur S_n au temps n achetée à un prix K. Alors, comme le propriétaire ne peut exercer qu'à l'échéance, il faut qu'on ait $S_N > K$ pour réaliser un profit. Ce profit est alors $S_N - K$. De plus, il n'est pas intéressant d'exercer si le profit n'est pas positif. On obtient donc la valeur à l'échéance du *call* qui est donnée par

$$(S_N - K)_+ := \max (S_N - K, 0) .$$

Dans le cas d'un *put* on aurait eu,

$$(K - S_N)_+ := \max (K - S_N, 0) .$$

2.2 Modèles discrets

Pour pouvoir simuler un marché financier, il faut, comme en physique, se placer dans un modèle à temps discret. C'est pourquoi, dans la suite de cette partie nous donnerons le formalisme des modèles discrets appliqués à la finance. On pourra se reporter à [2] dont cette partie introductive nécessaire en est grandement inspirée.

2.2.1 Actifs financiers

Un modèle mathématique de marché financier discret est construit sur un espace probabilisé filtré $\left(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}, \mathbb{P}\right)$ fini et dont l'horizon est, le plus souvent, le temps d'échéance de notre option $T+1$. Dans la suite, sauf mention du contraire on supposera que $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_N = \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\forall\omega \in \Omega, \mathbb{P}(\omega) > 0$.

Comme dans [2], où nous avons un portefeuille de $d+1$ actifs financier indexé par le marché et dont les prix à l'instant n sont donnés par les variables aléatoires $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d$ à valeurs strictement positives, adaptées à la filtration. Le vecteur $\left(S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d\right)$ est le vecteur des prix à l'instant n.

L'actif 0 est celui des placements sans risque, le plus souvent celui-ci correspond à un placement bancaire et on posera $S_0^0 = 1$. Si le taux d'intérêt des placements sans risque r est fixe, on aura $S_n^0 = (1+r)^n$. Nous introduisons ici la notion de coefficient d'actualisation : $\beta_n = 1/S_n^0$, il s'agit de la somme d'argent qui investie au temps 0 dans l'actif sans risque, permet de disposer de 1 à l'instant n. Toutefois, si le taux d'intérêt de celui-ci n'est pas fixe, on rappelle que la valeur de S_0^n est une solution de l'équation différentielle,

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t)$$

où $p(t)$ est le taux d'intérêt variable au cours du temps, $q(t)$ représente le taux de dépôt (si positif) ou de retrait (si négatif) avec la condition initiale $x(0) = 1$.

On appelle les actifs "à risques", les actifs qui sont numérotés de 1 à d.

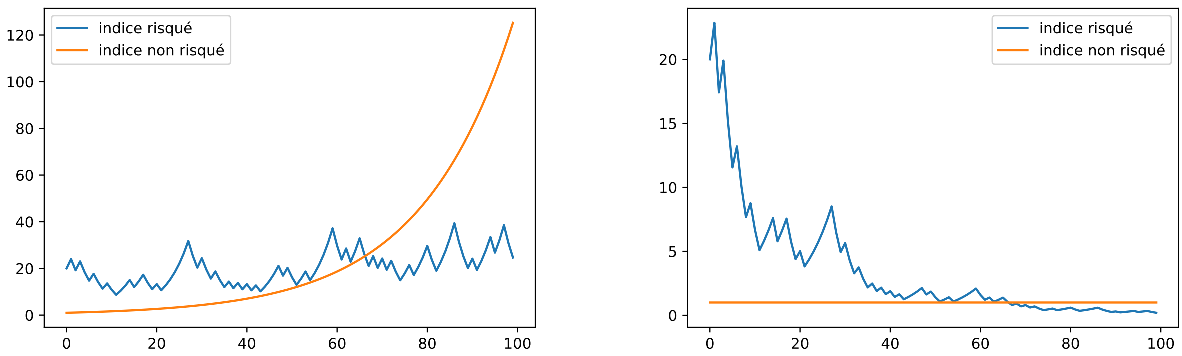


FIGURE 2.2 – Dans notre étude des marchés financiers discrets, nous allons nous rendre rapidement compte que la notion de prix (d'indice) actualisé est fondamentale. On peut voir, à gauche, une trajectoire d'un actif non risqué et d'un risqué et, à droite, ces valeurs actualisées. ($S_1^0 = 20$, $S_0^0 = 1$, $r = 0.05$)

2.2.2 Stratégies de gestion

Les cotations des actifs financiers risqués évoluent au fil du temps, sinon ceux-ci seraient inclus dans S_0^n dans le modèle que nous avons posé. Alors, afin de maximiser leurs gains, les détenteurs d'options utilisent des stratégies qui leur permettent de réajuster leurs portefeuilles à chaque instant, il s'agit de stratégies de gestion.

Définition 2.2.1 *(Stratégie de gestion)* Une stratégie de gestion est un processus aléatoire prévisible $\phi = \left(\left(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$, donnant à chaque temps n les quantités $\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d$ des actifs du portefeuille.

On impose à notre processus d'être prévisible, cela signifie que notre portefeuille, au temps n, $\left(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d\right)$ doit pouvoir être constitué aux vu des informations à la date $(n-1)$ et reste inchangé au moment des cotations du temps n. Le fait d'avoir une stratégie prévisible se traduit mathématiquement par :

$$\forall i \in \{0,1,\dots,d\}\,, \begin{cases} \phi_0^i \text{ est } \mathcal{F}_0\text{-mesurable} \\ \phi_n^i \text{ est } \mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Nous pouvons définir la valeur du portefeuille à l'instant n, que l'on note $V_n(\phi)$ qui est calculée par

$$V_n(\phi) := \phi_n \cdot S_n = \sum_{k=0}^{d} \phi_n^k S_n^k,$$

ainsi, la valeur actualisée du portefeuille, noté $\tilde{V}_n(\phi)$ devient :

$$\tilde{V}_n(\phi) := \beta_n(\phi_n \cdot S_n) = \phi_n \cdot \tilde{S}_n,$$

en posant la notation $\tilde{S}_n(\phi) = \left(1, \beta_n S_n^1, \dots, \beta_n S_n^d\right)$ et qui n'est autre que le vecteur des prix actualisés.

Proposition 2.2.2 (transformée de martingale)
Soit $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ une martingale, $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$ et $(V_n)_{0\leq n\leq N}$ une suite prévisible pour $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$. Alors, la suite

$$\begin{cases} X_0 = V_0 M_0 \\ X_n = V_0 M_0 + V_1 \Delta M_1 + \cdots + V_n \Delta M_n \quad \textit{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$.

Démonstration. Le fait que $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ et $(V_n)_{0\leq n\leq N}$ soit adaptée nous donne que $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ est bien adaptée elle aussi. Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n \right] &= \mathbb{E}\left[V_{n+1} \Delta M_n \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= V_{n+1}\, \mathbb{E}\left[M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= 0 \quad \text{car } (M_n)_{0\leq n\leq N} \text{ est une martingale.} \end{aligned}$$

Donc $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale. □

Remarque. Comme mentionné dans le nom de la proposition, on appelle souvent la suite $(X_n)_{0\leq n\leq N}$, transformée de la martingale $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ par la suite $(V_n)_{0\leq n\leq N}$.

Celle-ci nous donnes une caractérisation des martingales grâce à la transformée de martingale et elle nous sera bien utile dans notre étude des marchés viables et des marchés complets.

Proposition 2.2.3
Une suite adaptée de variables aléatoire réelles $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale si et seulement si pour toute suite prévisible $(H_n)_{0\leq n\leq N}$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n \right] = 0.$$

Démonstration. Si $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale par la proposition précédente il en est de même de la suite $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ définie par :

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} H_k \Delta M_k & \text{pour } n > 0 \end{cases}$$

et cela pour toute suite prévisible $(H_n)_{0\leq n\leq N}$, d'où $\mathbb{E}\left[X_N\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right] = 0$.

A l'inverse, si pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, N\}$, à tout événement A $\mathcal{F}_j$-mesurable on peut choisir la suite $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ définie par

$$H_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } \; n \neq j+1 \\ \mathbb{1}_A & \text{pour } \; n = j+1 \end{cases}$$

Alors, on peut constater que la suite est $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ est une suite prévisible et l'égalité ci-dessus nous donne que pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, N\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \Delta M_{j+1}\right] \quad \text{comme } \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_j\right] = \mathbb{1}_A, \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \, \mathbb{E}\left[M_{j+1} - M_j \mid \mathcal{F}_j\right]\right] \\ &= \mathbb{P}(A)\Big(\mathbb{E}\left[M_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right] - M_j\Big) = 0 \end{aligned}$$

d'où le fait, comme cela est vrai pour tout A qui soit $\mathcal{F}_j$-mesurable, que $\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n$ et donc finalement que $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ soit une martingale. □

Ceci étant dit, nous pouvons revenir dans le cadre des marchés financiers et introduire la notion de stratégie autofinancée :

Définition 2.2.4 *(Stratégie autofinancée)* On dit d'une stratégie qu'elle est *auto-financée* si elle vérifie la relation suivante,

$$\forall n \in \{1, \ldots, N-1\}, \phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n.$$

Proposition 2.2.5
Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) La stratégie ϕ est autofinancée.

ii) Pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$,

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{k=1}^{n} \phi_k \cdot (S_k - S_{k-1}) = V_0(\phi) + \sum_{k=1}^{n} \phi_k \cdot \Delta S_k.$$

iii) Pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{k=1}^{n} \phi_k \cdot \left(\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1}\right) = V_0(\phi) + \sum_{k=1}^{n} \phi_k \cdot \Delta \tilde{S}_k.$$

Démonstration. Pour i) $\Leftrightarrow$ ii) Si une stratégie est autofinancée, on a :

$$\begin{aligned} V_n(\phi) &= \phi_n \cdot S_n = \sum_{k=0}^{n} \phi_k \cdot S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k \cdot S_k = \sum_{k=0}^{n} \phi_k \cdot S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \phi_{k+1} \cdot S_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \phi_k \cdot S_k - \sum_{k=1}^{n} \phi_k \cdot S_{k-1} = \phi_0 \cdot S_0 + \sum_{k=1}^{n} \phi_k \cdot (S_k - S_{k-1}) \\ &= V_0(\phi) + \sum_{k=1}^{n} \phi_k \cdot \Delta S_k. \end{aligned}$$

Pour i) $\Leftrightarrow$ iii) Si on a $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$ alors $\beta_n(\phi_n \cdot S_n) = \beta_n(\phi_n \cdot S_n)$ et donc $\phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_{n+1} \cdot \tilde{S}_n$. Réciproquement, Si $\phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_{n+1} \cdot \tilde{S}_n$ comme $\beta_n = 1/S_n^0$ avec $S_n^0 > 0$ (par définition de S_n^0) alors, $\beta_n^{-1}(\phi_n \cdot \tilde{S}_n) = \phi_n \cdot S_n$ et donc $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$.

Donc $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n \Leftrightarrow \phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_{n+1} \cdot \tilde{S}_n$ et en remplaçant S_n par $\tilde{S}_n$, on obtient le résultat.

□

On a alors que, pour une stratégie autofinancée, sa valeur de portefeuille est entièrement déterminée par ses conditions initiales, la valeur de son portefeuille au temps 0 et le processus $\left(\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d\right)_{0 \leq n \leq N}$ sur les actifs risqués, et donc par la gestion du portefeuille au cours du temps. Cela nous donne la proposition suivante :

Proposition 2.2.6
Pour tout processus prévisible $\phi = \left(\left(\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d\right)\right)_{0 \leq n \leq N}$ et pour toute variable aléatoire V_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable, il existe un unique processus prévisible $\left(\phi_n^0\right)_{0 \leq n \leq N}$ tel que la stratégie $\phi = \left(\phi^0, \ldots, \phi^d\right)$ soit autofinancée et de condition initiale V_0.

Démonstration. On a, d'après la proposition 2.2.5 et la définition $\tilde{V}_n(\phi)$, que si ϕ est autofinancée :

$$\tilde{V}_n(\phi) = \phi_n^0 + \sum_{k=1}^{d} \phi_n^k \tilde{S}_n^k = V_0 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d} \phi_j^k (\tilde{S}_j^k - \tilde{S}_{j-1}^k)$$

Alors, $\forall n \in \{1, \ldots, N\}$, ϕ_n^0 est entièrement déterminé par la valeur du processus sur les actifs risqués au temps $n-1$ et la condition initiale V_0 et d'où l'unicité. En effet on a l'égalité :

$$\phi_n^0 \quad = \quad V_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta\tilde{S}_j - \phi_n \cdot \tilde{S}_n = V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j \cdot \Delta\tilde{S}_j - \phi_{n-1} \cdot \tilde{S}_{n-1}.$$

De plus, cette égalité nous donne que ϕ_n^0 est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable, et comme V_0 est $\mathcal{F}_0$ mesurable, le processus est prévisible. Ce qui conclut la preuve. □

Dans la suite, on s'intéresse à la notion de stratégie admissible, il s'agit de stratégie particulière :

Définition 2.2.7 *(Stratégie admissible)* On dit d'une stratégie de gestion qu'elle est admissible si elle est autofinancée et la valeur en portefeuille $V_n(\phi) \geq 0$ pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

2.2.3 Arbitrage et marchés viables

Dans notre quête de la compréhension des marchés financiers par les mathématiques, il est important de s'intéresser à la nature du marché que nous souhaitons étudier. Nous sommes, dans cette partie, dans la situation de la partie 2.2.1.

Définition 2.2.8 *(Stratégie d'arbitrage)* Une stratégie d'arbitrage est une stratégie autofinancée, positive ou nulle, de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle.

Remarque. Grâce à une stratégie d'arbitrage, un investisseur pourrait, en partant d'un capital nul, faire des bénéfices. Cette situation, bien qu'attrayante, est souvent exclue des modèles. On parle alors de marché viable.

Définition 2.2.9 *(marché viable)* On dit qu'un marché est viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.

On peut alors donner une définition équivalente :

Théorème 2.2.10 (probabilité risque neutre)
Un marché est viable si et seulement s'il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les suites $\left(\tilde{S}_n^k\right)_{0 \leq n \leq N}$ sont des martingales pour tous $0 \leq k \leq d$. On appelle alors $\mathbb{P}^*$ probabilité risque neutre.

Démonstration. S'il existe une telle probabilité $\mathbb{P}^*$, alors si $\phi = (\phi_n)_{0\leq n\leq N}$ est une stratégie autofinancée,

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0 + \sum_{k=1}^{n} \phi_n \cdot \Delta\tilde{S}_k.$$

par la proposition 2.2.2, comme $(\phi_n)_{0\leq n\leq N}$ est une suite prévisible et que $\left(\tilde{S}_n, \mathcal{F}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale, alors, $\left(\tilde{V}_n(\phi)\right)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale pour la probabilité $\mathbb{P}^*$. Donc,

$$\mathbb{E}^*\left[\tilde{V}_N(\phi)\right] = \mathbb{E}^*\left[V_0(\phi)\right].$$

Or, si la stratégie $(\phi_n)_{0\leq n\leq N}$ est admissible, alors $\mathbb{E}^*\left[\tilde{V}_N(\phi)\right] = 0$ et comme $\tilde{V}_n(\phi) \geq 0$ pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, donc par les propriétés de l'espérance $\tilde{V}_n(\phi) = 0$ pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$.

La réciproque est par contre plus laborieuse. Soit Γ le cône convexe des variables aléatoires positives et dont la probabilité d'être strictement positive est non nulle. On va montrer que le marché est viable si et seulement si pour toute stratégie admissible ϕ on a $V_0(\phi) = 0 \Rightarrow \tilde{V}_N(\phi) \notin \Gamma$. Cela revient à dire que toutes les stratégies d'arbitrage n'appartiennent pas à Γ.

On associe à tout processus prévisible, $(\phi_n)_{0\leq n\leq N} = \left(\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d\right)$, le processus :

$$\tilde{G}_n(\phi) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k \cdot \Delta\tilde{S}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\phi_k^1 \Delta\tilde{S}_k^1 + \cdots + \phi_k^d \Delta\tilde{S}_k^d\right) \tag{2.1}$$

On peut remarquer qu'il s'agit du processus des gains cumulés, en effet, on a $\tilde{G}_n(\phi) = \tilde{V}_n(\phi) - V_0(\phi)$ et cela pour toute stratégie autofinancée d'actifs risqués $\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d$ par (2.2.5). Or d'après la proposition (2.2.6), il existe un unique processus $\left(\phi_n^0\right)_{0\leq n\leq N}$ tel que la stratégie $\left(\phi_n^0, \phi_n\right)$ soit une stratégie autofinancée avec la condition initiale V_0 qui ici vaut 0. Donc $\tilde{G}_n$ est une stratégie autofinancée ce qui implique, comme nous sommes dans un marché viable, que sa valeur finale $\tilde{G}_N(\phi) = 0$, car il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.

Nous avons en réalité un résultat plus fort qui, sans l'hypothèse de positivité de $\tilde{G}_n(\phi)$, nous donne que $\tilde{G}_n(\phi) \notin \Gamma$.

Lemme 2.2.11
Si le marché est viable, tout processus prévisible $\left(\phi^1, \ldots, \phi^d\right)$ *vérifie :*

$$\tilde{G}_N(\phi) \notin \Gamma$$

Démonstration. On prend $\tilde{G}_N(\phi) \in \Gamma$, dans ce cas si $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$ pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, il est clair que le marché n'est pas viable donc contradiction, comme dit précédemment. Si toutefois nous n'avons plus l'hypothèse $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$, nous pouvons introduire l'entier $n = \sup\left\{k \mid \mathbb{P}\left(\tilde{G}_n(\phi) < 0\right) > 0\right\}$, le plus grand instant où le processus peut atteindre des valeur négatives. On a alors,

$$n \leq N-1, \quad \mathbb{P}\left(\tilde{G}_n(\phi) < 0\right) > 0 \text{ et } \forall m > n, \quad \tilde{G}_m(\phi) \geq 0.$$

Si on prend le processus, ψ que l'on définit par

$$\psi_k(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq n \\ \mathbb{1}_A(\omega)\,\phi_k(\omega) & \text{si } j > n \end{cases}$$

où $A = \left\{\tilde{G}_n(\phi) < 0\right\}$, l'événement $\tilde{G}_n$ est négatif. Avec cette définition, le processus ψ est un processus prévisible. En effet, ϕ est prévisible et on peut constater que A est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Alors en écrivant la transformée du processus ψ par $\tilde{G}_n$, on a :

$$\tilde{G}_k(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq n \\ \mathbb{1}_A\left(\tilde{G}_k(\phi) - \tilde{G}_n(\phi)\right) & \text{si } j > n \end{cases}$$

Sachant cela, on voit que le processus extrait $\tilde{G}(\psi)$ vérifie $\tilde{G}_k(\psi) \geq 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ et que pour $\tilde{G}_N(\psi) > 0$ si A est vérifié. Et donc le le processus $\tilde{G}_n(\psi)$ est une stratégie d'arbitrage ce qui contredit la viabilité du marché et conclu la preuve du lemme. □

Revenons maintenant à la preuve du théorème. Si on pose $\mathcal{V}$ l'ensemble des variables aléatoires qui sont de la forme $\tilde{G}_N(\phi)$, avec ϕ un processus prévisible à valeur dans $\mathbb{R}^d$, alors $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^\Omega$ de toutes les variables aléatoires définie sur Ω et à valeurs réelles.

Grâce au lemme précédent, nous savons que $\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$ et donc si on prend le convexe compact $\mathcal{C} = \{X \in \Gamma \mid \Sigma_\omega X(\omega) = 1\}$ contenu dans Γ, il ne s'intersecte pas avec $\mathcal{V}$. Nous allons utiliser une des conséquences du théorème de séparation des convexes :

Théorème 2.2.12
Soit $\mathcal{C}$ un convexe compact et soit V un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, disjoint de $\mathcal{C}$. Il existe une forme linéaire ξ sur $\mathbb{R}^n$, vérifiant les deux conditions suivantes :

i) $\forall x \in \mathcal{C}, \quad \xi(x) > 0$

ii) $\forall x \in V, \quad \xi(x) = 0$

Ce qui revient à dire que le sous-espace vectoriel V est contenu dans un hyperplan qui ne rencontre pas $\mathcal{C}$.

Nous ne le démontrerons pas ce théorème car celui-ci sort du domaine de notre étude, toutefois, on peut en trouver une preuve rapide ainsi que le théorème de séparation des convexes que nous allons utiliser dans [2, p.167].

Celui-ci implique dans notre situation qu'il existe une suite $(\lambda_\omega)_{\omega \in \Omega}$ vérifiant :

i) $\forall X \in \mathcal{C}, \quad \sum_\omega \lambda_\omega X(\omega) > 0$

ii) Pour tout ϕ prévisible

$$\sum_\omega \lambda_\omega \tilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0$$

En prenant des X bien choisis, on peut voir que le point i) nous donne que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\lambda_\omega > 0$. Alors, en prenant la probabilité $\mathbb{P}^*$ que l'on définie par

$$\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda_\omega}{\Sigma_{\omega'} \lambda_{\omega'}}$$

celle-ci est équivalente à $\mathbb{P}$, car si $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = 0$ on a $\lambda_\omega = 0$ et donc que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0$.

En prenant la notation $\mathbb{E}^*$ pour l'espérance sous cette nouvelle probabilité, on a que par le point ii) que pour tout processus prévisible (ϕ_n) à valeur dans $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}^*\left[\sum_{k=1}^{N} \phi_k \Delta \tilde{S}_k\right] = 0.$$

Donc on a pour tout processus réel $(\phi_n)_{0 \leq n \leq N}$ et tout $j \in \{0, 1, \ldots, d\}$,

$$\mathbb{E}^*\left[\sum_{k=1}^{N} \phi_k^j \Delta \tilde{S}_k^j\right] = 0$$

Ce qui, d'après la proposition (2.2.3), nous donne que la suite $\left(\tilde{S}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ est bien une martingale sous la probabilité $\mathbb{P}^*$ et finalement conclut la preuve de la réciproque. □

Remarque. La notion de probabilité risque neutre est celle qui nous permettra de nous minimiser les pertes et même, dans les cas des marchés complets que nous allons aborder en suivant, de nous couvrir financièrement parfaitement.

2.3 Option européenne et marchés complets

Pour simuler les options américaines, il est nécessaire de comprendre la notion de marché complet. L'étude des options européennes dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein est un bon cas d'école pour comprendre cette notion. Nous en donnons une définition et nous passerons à une application dans la partie suivante.

2.3.1 Marchés complets

On définit une option européenne de valeur d'achat K et d'échéance N par la donnée d'une variable aléatoire $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N$-mesurable qui nous permet de représenter le profit si nous exercions l'option de l'actif 1. Nous nous rétreindrons au cas où nous sommes dans un "*call*" et donc $h = \left(S_N^1 - K\right)_+$. Il est alors intéressant de remarquer que la variable aléatoire h ne dépend que de S_N.

Définition 2.3.1 *(actif simulable)* On dit que l'actif conditionnel défini par h est simulable (ou atteignable) s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'instant N est égale à h.

Remarque. Cela revient à dire que la probabilité d'obtenir la valeur h à l'instant N est non nulle. Concrètement, il suffit qu'il existe une stratégie autofinancée dont la valeur au temps N est égale à h.

Définition 2.3.2 *(marché complet)* On dit qu'un marché est complet si tout actif conditionnel est simulable.

Cette définition nous permet de caractériser simplement le fait qu'un marché soit complet ou non. Toutefois, il existe une définition équivalente, et que nous utiliserons par la suite, des marchés complets grâce à la notion de probabilité risque neutre :

Théorème 2.3.3
Un marché viable est complet si et seulement s'il existe une unique probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ sous laquelle les suites des prix actualisés des actifs sont des martingales.

Démonstration. Tout d'abord supposons que le marché soit viable et complet. Alors pour toute variable aléatoire h, $\mathcal{F}_N$-mesurable et positive est simulable, c'est à dire que l'on peut créer une stratégie admissible ϕ tel que $V_N(\phi) = h$. Comme ϕ est admissible, elle est autofinancée donc on a la formule de la proposition (2.2.5) :

$$\frac{h}{S_N^0} = \tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{k=1}^{n} \phi_k \cdot \Delta\tilde{S}_k.$$

Alors, dans ce cas, si $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sont deux probabilités sous lesquelles les suites des prix actualisés sont des martingales. Alors la suite des $\left(\tilde{V}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_1$ et, en même temps, une martingale sous $\mathbb{P}_2$, donc :

$$\mathbb{E}_1\left[\tilde{V}_N(\phi)\right] = \mathbb{E}_1\left[V_0(\phi)\right] = V_0(\phi) = \mathbb{E}_2\left[V_0(\phi)\right] = \mathbb{E}_2\left[\tilde{V}_N(\phi)\right]$$

grâce à la convention de la partie 2.2.1, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Donc on a :

$$\mathbb{E}_1\left[\frac{h}{S_N^0}\right] = \mathbb{E}_2\left[\frac{h}{S_N^0}\right]$$

Ce qui nous donne que, sur la tribu $\mathcal{F}_N$, on a $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ or la tribu $\mathcal{F}_N = \mathcal{A}$ et, donc, il y a unicité de la probabilité sous laquelle les suites des prix actualisés sont des martingales.

Réciproquement, supposons maintenant que le marché soit viable mais non complet et montrons que l'unicité de la probabilité sous laquelle les suites des prix actualisés est mise en défaut.

En faisant la négation de la définition de marché complet, cela veut dire qu'il existe une variable aléatoire $h \geq 0$ non simulable. On note $\tilde{\mathcal{V}}$ l'espace des variables aléatoires qui sont de la forme :

$$U_0 + \sum_{n=1}^{N} \phi_n \cdot \Delta\tilde{S}_n,$$

avec U_0 qui est $\mathcal{F}_0$-mesurable et le processus $(\phi_n)_{0\leq n\leq N} = \left(\left(\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$ prévisible à valeur dans $\mathbb{R}^d$. D'après la proposition (2.2.6) et ce qui a été dit plus tôt il résulte que la variable aléatoire h/S_n^0 n'est pas dans $\tilde{\mathcal{V}}$. Donc $\tilde{\mathcal{V}}$ est un sous-espace strict de l'espace des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ que l'on note $\mathcal{O}$.

Alors, soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les suites des prix actualisés sont des martingales, en munissant $\mathcal{O}$ du produit scalaire naturel sous la probabilité $\mathbb{E}^*$ $\langle X, Y\rangle \mapsto \mathbb{E}^*\left[\, XY\,\right]$, on a, grâce à l'analyse hilbertienne, l'existence d'une variable aléatoire $X \in \mathcal{O}$ non nulle telle que $\langle X, Y\rangle = 0$ pour tout $Y \in \tilde{\mathcal{V}}$.

Posons pour $\omega \in \Omega$:

$$\mathbb{P}^{**}\left(\{\omega\}\right) = \left(1 + \frac{X\left(\omega\right)}{2\left\|X\right\|_\infty}\right)\mathbb{P}^*\left(\{\omega\}\right),$$

avec la convention usuelle $\left\|X\right\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega}\left|X(\omega)\right|$. Cette probabilité, ainsi définie, est équivalente à la probabilité à $\mathbb{P}$ et bien distincte de $\mathbb{P}^*$. De plus,

$$\mathbb{E}^{**}\left[\sum_{n=1}^{N} \phi_n \cdot \Delta\tilde{S}_n\right] = 0$$

pour tout processus $(\phi_n)_{0\leq n\leq N}$ prévisible.

Donc par la proposition (2.2.3), la suite des prix actualisés est alors une martingale sous la probabilité $\mathbb{P}^{**}$ ce qui met en défaut l'unicité et conclut la preuve. $\square$

2.3.2 Actifs conditionnels dans les marchés complets

Nous nous mettons dans la situation où le marché est viable et complet. On note $\mathbb{P}^*$ la probabilité risque neutre sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Soit un actif conditionnel défini par une variable aléatoire h qui est $\mathcal{F}_N$-mesurable et soit ϕ une stratégie admissible simulant h.

La suite $\left(\tilde{V}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$ (en tant que transformée de martingale) et donc $V_0(\phi) = \mathbb{E}^*\left[\,\tilde{V}_N\,\right]$, d'où :

$$V_0(\phi) = \mathbb{E}^*\left[\frac{h}{S_N^0}\right] \text{ et } V_n(\phi) = S_n^0\, \mathbb{E}^*\left[\frac{h}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n\right], \quad n \in \{0, 1, \ldots, N\}$$

On peut donc voir que toute stratégie admissible simulant h est complètement déterminée par h. On appelle alors valeur de l'option au temps n la valeur $V_n(\phi)$.

Si, à l'instant 0, nous achetons une option au prix $\mathbb{E}^*\left[\frac{h}{S_N^0}\right]$, nous avons la possibilité en suivant une stratégie admissible ϕ de gagner la valeur attendue h à l'instant N. Nous serons donc couverts parfaitement, nous n'aurons pas perdu d'argent lors de cette manœuvre.

2.4 Modèle Cox-Ross-Rubinstein : Options européennes

Dans le modèle Cox-Ross-Rubinstein, que l'on peut retrouver parfois sous l'abréviation **CRR**, nous sommes dans un modèle discret où il n'y a qu'un seul actif à risque de prix S_n à l'instant $n \leq N$ et un actif sans risque avec un rendement r entre deux instants, on peut alors écrire $S_n^0 = (1+r)^n$.

Comme dans toutes modélisations, nous devons faire certaines hypothèses. Celles-ci sont les suivantes :

— Le temps est discret et d'horizon fini N.

— Il n'y a pas de frais lors des transactions.

— Les investissements se répartissent uniquement sur deux actifs, l'un non risqué $\left(S_n^0\right)_{0\leq n\leq N}$, que nous noterons pour faciliter la lecture $(I_n)_{0\leq n\leq N}$ et l'autre risqué $(S_n)_{0\leq n\leq N}$.

— Entre deux instants successifs, le prix de l'option ne peut varier qu'entre deux rapport de prix par rapport au précédent, cela s'apparente un taux d'intérêt aléatoire.

— La stratégie de gestion de l'investisseur n'est basée que sur les cours actuels et passés de l'option risquée.

— Il n'y a pas d'apport ou de retrait d'argent dans le portefeuille de l'investisseur (autofinancé) et s'impose une valeur en portefeuille positive ou nulle : il s'impose une stratégie admissible.

2.4.1 Évolution des prix

Afin de modéliser ce modèle, on s'intéresse à un marché constitué des deux actifs précédents, dont :

— Comme précédemment, le taux d'intérêt de l'actif sans risque $I_0 = 1$ sera noté r

— L'actif risqué S_n aura, quant à lui, un taux d'intérêt suivant ρ, une variable aléatoire à valeur dans $\{d, u\}$, où $-1 < d < u$. Les lettres d et u ne sont pas prises au hasard, celles-ci correspondent respectivement au mots anglais *down* et *up* que nous utiliserons dans notre code mis en annexe et qui traduisent si le prix de l'actif décroit ou croit. On note $(\rho_n)_{0\leq n\leq N}$ la suite des valeurs cette variable aléatoire ρ au cours du temps.

Ainsi, l'évolution des valeurs des actifs est pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$:

$$\begin{cases} I_{n+1} &= (1+r) \times I_n \\ S_{n+1} &= (1+\rho_n) \times S_n \end{cases} \tag{2.2}$$

Nous pouvons alors remarquer que, sous ces hypothèses, $(\rho_n)_{0\leq n\leq N}$ prend ses valeurs dans $\Omega = \{d, u\}^N$. On note aussi $\left(\tilde{S}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ la suite des actifs actualisés comme précédemment.

On prend comme filtration naturellement $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$ pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, il s'agit de la filtration qui nous regroupe l'information qui est connue au temps n. Nous définissons $\mathbb{P}$, à équivalence près, comme la probabilité pour qui tous les singletons de Ω ont une probabilité non nulle.

2.4.2 Propriétés du marché CRR

Proposition 2.4.1
Ce modèle de marché est un marché viable si et seulement si $r \in \,]d, u[$.

Démonstration. On peut remarquer que la suite $\left(\tilde{S}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale si et seulement si $\mathbb{E}\left[\,\rho_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\,\right] = r$. En effet, comme $\mathbb{E}\left[\,\tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_n\,\right] = \tilde{S}_n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\,\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\,\right] = \tilde{S}_n \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\left[\,\frac{\tilde{S}_{n+1}}{\tilde{S}_n} \mid \mathcal{F}_n\,\right] = 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\,\frac{(1+\rho_{n+1})}{(1+r)} \mid \mathcal{F}_n\,\right] = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\left[\,\rho_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\,\right] = r \end{aligned}$$

Supposons le marché viable, alors, l'existence de la probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ du théorème (2.2.10) nous donne

$$\mathbb{E}^*\left[\,\rho_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\,\right] = r \tag{2.3}$$

et comme $(\rho_n)_{0\leq n\leq N}$ prend ses valeurs dans Ω, on a $r \in \,]d, u[$.

Réciproquement, supposons $r \notin \,]d, u[$ avec $r \leq d$. Nous allons montrer qu'il existe une stratégie d'arbitrage. En effet, si on emprunte à l'instant 0 la somme S_0 d'actif risqué, en revendant ces actifs à l'échéance N et en remboursant l'emprunt initial, on obtient un bénéfice $S_N - S_0\,(1+r)^N \geq 0$ qui est toujours positif ou nul. De plus, comme $S_N \geq S_0(1+d)^N$ le bénéfice est strictement positif avec une probabilité non nulle ce qui nous donne une stratégie d'arbitrage. De même si $r \geq u$ en réalisant les opérations inverses, on obtient un profit $S_0(1+r)^N - S_N > 0$ avec un probabilité non nulle.

Donc si $r \notin \,]d,u[$, on peut trouver une stratégie d'arbitrage et cela met en défaut la viabilité du marché. $\square$

Proposition 2.4.2
Avec l'hypothèse, $r \in \,]d,u[$. Ce modèle de marché est complet si et seulement si ρ suit la loi de paramètre p avec $\mathbb{P}(\rho = u) = p$ et $\mathbb{P}(\rho = d) = 1-p$, avec $p = (r-d)/(u-d)$.

Démonstration. Comme on a l'hypothèse $r \in \,]d,u[$, le marché est viable. On sait que ρ_n ne prend que deux valeurs, on a, grâce à l'équation (2.3) et en écrivant les indicatrices des événements,

$$\begin{cases} \mathbb{P}^*\left(\rho_{n+1} = d \mid \mathcal{F}_n\right) + \mathbb{P}^*\left(\rho_{n+1} = u \mid \mathcal{F}_n\right) & = 1 \\ d\,\mathbb{P}^*\left(\rho_{n+1} = d \mid \mathcal{F}_n\right) + u\,\mathbb{P}^*\left(\rho_{n+1} = u \mid \mathcal{F}_n\right) & = r \end{cases} \tag{2.4}$$

Alors, pour tout $n \in \{0,1,\ldots,N-1\}$,

$$\mathbb{P}^*\left(\rho_{n+1} = u \mid \mathcal{F}_n\right) = \frac{r-d}{u-d}$$

et en raisonnant par récurrence, l'équation précédente nous donne l'indépendance et l'équidistributivité de la loi et celle-ci détermine alors entièrement $\mathbb{P}^*$ de façon unique. Et donc le marché est viable et complet. $\square$

2.4.3 Estimation des prix

Ce modèle est principalement utilisé pour évaluer le bon prix d'une option : le *prime*.

En effet, en notant C_n et P_n les valeurs à l'instant n d'un *call* et d'un *put* européen de prix S_n, K son prix d'exercice à l'échéance N, on retrouve une relation dite de parité *call/put* :

$$\begin{aligned} C_n - P_n &= (1+r)^{-(N-n)}\,\mathbb{E}^*\left[\overbrace{(S_N-K)_+ - (K-S_N)_+}^{\text{événements incompatibles : l'un vaut 0}} \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= (1+r)^{-(N-n)}\left(\mathbb{E}^*\left[S_N \mid \mathcal{F}_n\right] - K\right) \qquad \text{(car } K \text{ est une constante)} \\ &= (1+r)^{-(N-n)}\,\mathbb{E}^*\left[\tilde{S}_N\,(1+r)^N \mid \mathcal{F}_n\right] - (1+r)^{-(N-n)}\,K \\ &= (1+r)^n\,\tilde{S}_n - (1+r)^{-(N-n)}\,K \qquad \text{(car } \left(\tilde{S}_n\right)_{0\leq n\leq N} \text{ est une martingale)} \\ &= S_n - (1+r)^{-(N-n)}\,K \end{aligned}$$

De plus, on peut écrire C_n sous la forme d'une fonction qui dépende de n et varie en fonction de S_n, que l'on notera $c(n,S_n)$. Cette fonction s'exprime en fonction de x comme :

$$c(n,x) = (1+r)^{-(N-n)}\sum_{k=0}^{N-n}\binom{N-n}{k}p^k\,(1-p)^{(N-n)-k}\left(x\,(1+u)^k\,(1+d)^{(N-n)-k} - K\right)_+ \tag{2.5}$$

Remarque. Cette fonction permet de juger la valeur d'une option en connaissant le prix à l'instant présent et au regard du temps restant avant l'exercice. Il s'agit, moralement, d'une sorte d'espérance et c'est d'ailleurs pour cela que l'on peut reconnaitre la formule de l'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(N-n,p)$ dans l'expression de $c(n,x)$.

Exemple 2.4.3 On peut par exemple, avec les notations précédentes et grâce au code mis en annexe, estimer la valeur d'un *call* européen avec les paramètres : $down = -0.2$, $up = 0.2$, $K = 10$€, $S_0^1 = 10$€, avec un intérêt $intrest = 0.1$ et $N = 3$. On peut alors tracer les arbres binomiaux de la figure 2.3.

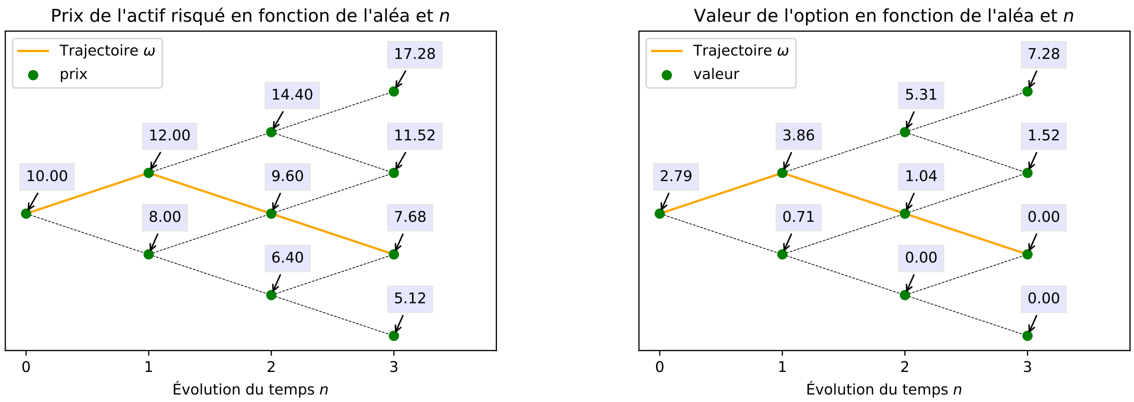


FIGURE 2.3 – À gauche, est tracé l'arbre binomial des prix pour notre option en *call* et, à droite, ses valeurs à chaque instant.

Ainsi, on peut voir les valeurs de l'option en fonction du temps n et la suite des prix de l'option $\left(S_n^1\right)_{0\leq n\leq 3}$ à chaque instants. Il apparaît alors que le *prime* de cette option soit de $2,79$€ au temps 0.

2.4.4 Stratégie de couverture

On peut alors voir, grâce à la fonction c, que la stratégie de gestion qui nous couvre parfaitement lors d'un *call* est définie par une quantité d'actif risqué $H_n^1 = \Delta^1(n, S_{n-1})$, où Δ^1 s'exprime en fonction de c.

En effet, si on note $H_n^0 = \Delta^0\left(n, S_{n-1}\right)$ la quantité d'actif sans risque I_0 dans le portefeuille simulant le *call*, au temps n et,

$$c(n, S_n) = H_n^0 I_0 \left(1+r\right)^n + H_n^1 S_n$$

Comme H_n^0 est connue à l'instant $n-1$ et que H_n^1 ne dépend que de S_{n-1} et de n, on a H_n^0 et H_n^1 qui sont $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurables. Alors, comme $S_n = S_{n-1}\left(1+\rho_n\right)$, $\rho_n \in \{a, b\}$, avec l'égalité précédente on obtient le système :

$$\begin{cases} H_n^0 I_0 \left(1+r\right)^n + H_n^1 S_{n-1}\left(1+d\right) = c\left(n, S_{n-1}\left(1+d\right)\right) & (1) \\ H_n^0 I_0 \left(1+r\right)^n + H_n^1 S_{n-1}\left(1+u\right) = c\left(n, S_{n-1}\left(1+u\right)\right) & (2) \end{cases}$$

Ce qui nous permet en réalisant $(2) - (1)$ de déterminer de manière unique la composition du portefeuille de notre stratégie de couverture au temps n, pour l'actif sans risque :

$$\Delta^0(n, S_{n-1}) = H_n^0 = \frac{\left(1+u\right)c\left(n, \left(1+d\right)S_{n-1}\right) - \left(1+d\right)c\left(n, \left(1+u\right)S_{n-1}\right)}{\left(u-d\right)\left(1+r\right)^n I_0} \tag{2.6}$$

et pour l'actif risqué :

$$\Delta^1(n, S_{n-1}) = H_n^1 = \frac{c\left(n, \left(1+u\right)S_{n-1}\right) - c\left(n, \left(1+d\right)S_{n-1}\right)}{\left(u-d\right)S_{n-1}}. \tag{2.7}$$

Faisons un exemple simple pour comprendre ce que ces quantités représentent et à quoi correspond la notion de stratégie de couverture.

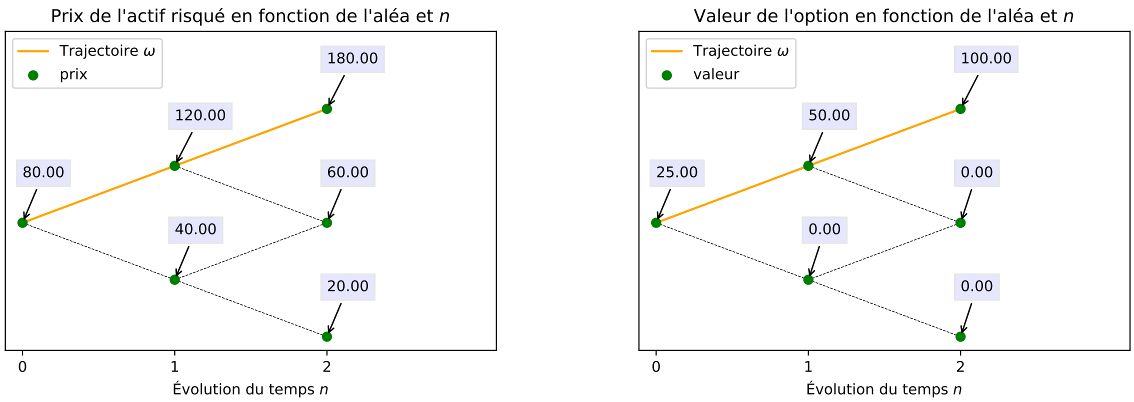


FIGURE 2.4 – À gauche, est tracé l'arbre binomial des prix pour notre option en *call* et, à droite, ses valeurs à chaque instant.

Exemple 2.4.4 Nous allons prendre une option en *call* dont les paramètres sont $K = 80$, $S_0^1 = 80$, $down = -0.5$, $up = 0.5$, $interest = 0$ et une échéance $N = 2$. Nous obtenons alors les graphiques :

Alors, si on calcule les valeurs H_n^0 et H_n^1 pour cette trajectoire nous pouvons dresser le tableau suivant :

n	Prix	Valeur	Quantité d'actif sans risque	Part d'actif risqué
0	80	25	-25	5/8
1	120	50	-50	5/6

Reconstruisons ce tableau, au temps 0, le vendeur du *call* touche le *prime* qui est fixé à 25€ (grâce aux formules précédentes). En résolvant le système 2.4.4 dans notre cas nous obtenons,

$$\begin{cases} H_0^0 + 120H_0^1 = 50 \\ H_0^0 + 40H_0^1 \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0^0 = -25 & (1) \\ H_0^1 = \frac{5}{8} & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) nous donne qu'il doit acheter une quantité 5/8 d'actif risqué au prix S_1^0, le vendeur emprunte alors 25€ ($H_0^0 = 25 - 5/8 \times 80 = -25$€ les valeurs sont négatives, donc il s'agit d'un emprunt). S'il fait cela au temps 1, la valeur de son portefeuille vaudra soit :

— si l'option *up* : $5/8 \times 120 = 75$€ (ce qui aurait permis de racheter l'option à sa valeur, ici 50, et de rembourser l'emprunt contracté si l'acheteur avait pu exercé),

— si l'option *down* : $5/8 \times 40 = 25$€ (ce qui lui aurait permis de rembourser l'emprunt à cet instant).

Comme l'option est *européenne*, l'acheteur ne peut pas encore exercer et ne pourra le faire qu'au temps suivant. Dans notre situation, celle de la trajectoire, le prix de l'option *up*, ce qui nous donne le système :

$$\begin{cases} H_1^0 + 180H_1^1 = 100 \\ H_1^0 + 60H_1^1 \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1^0 = -50 \\ H_1^1 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Comme précédemment, le vendeur de l'option modifie la quantité d'actif risqué, mais cette fois, il faut qu'il rachète $5/6 - 5/8 = 10/48$ d'actif risqué au prix unitaire de $S_1^1 = 120$€ et donc au prix $10/48 \times 120 = 25$. Il doit alors réemprunter 25€ supplémentaire qui vont alors porter son emprunt à 50€. Si le prix de l'option au temps 2 :

— *up* : la valeur du portefeuille du vendeur est de $5/6 * 180 - 50 = 150 - 50 = 100$€ qui est la valeur de l'option $180 - K = 180 - 80 = 100$€ et dans ce cas l'acheteur exerce son option au prix 100€ et il nous reste 50€ pour rembourser l'emprunt.

— *down* : la valeur du portefeuille du vendeur est de $5/6 * 60 - 50 = 0$€ qui est encore une fois la valeur de l'option. L'acheteur ne l'exercera pas car elle n'est pas rentable et en revendant ses parts il peut rembourser son emprunt.

Nous avons donc pu voir que le vendeur de l'option est dans la capacité de modifier son portefeuille, sans en changer la valeur, tout en se couvrant parfaitement. Nous avons, en même temps montré que cette stratégie de couverture était indépendante du temps d'exercice, il s'agit d'une stratégie de couverture dite dynamique.

Remarque. Dans notre exemple, l'emprunt était idéal, car il n'y avait pas d'intérêt. Revenons maintenant à l'exemple 2.4.3, où il y a un intérêt non nul, nous avons vu que le prime de notre option est $2,79$€. Essayons maintenant de trouver la stratégie de couverture pour la trajectoire ω. On a $\omega = \{up, down, down\}$, on peut regrouper les informations dans le tableau :

n	Prix	Valeur	Quantité d'actif sans risque	Part d'actif risqué
0	10.00	2.79	-5.083	0.7872
1	12.00	3.86	-6.206	0.8901
2	9.60	1.04	-2.284	0.396

Cette fois, les parts d'actifs risqués ne sont plus de simple fractions, cela est dû au fait que l'intérêt est non nul. Toutefois, en procédant au même raisonnement que précédemment, le vendeur du *call* pourra se couvrir parfaitement, et ce même malgré l'intérêt sur l'emprunt.

Chapitre 3

Options Américaines

La particularité des options américaines vis à vis des options européennes est le fait que celles-ci peuvent être exercées à tout instant avant l'échéance. Elle sont donc naturellement plus difficiles à modéliser que les options européennes. En reprenant les notations précédentes, si $(S_n)_{0\leq n\leq N}$ représente le prix de l'option au cours du temps, on peut poser la suite $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ comme celle qui représente le profit que nous permet de réaliser l'exercice de l'option à chaque instant. On rappelle, qu'à l'instant n, dans le cas d'un *call*, celui-ci vaut $Z_n = (S_n - K)_+$; dans le cas d'un *put* $Z_n = (Z_n - S_n)_+$.

Pour définir la valeur de l'option américaine associée à notre processus $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$, il est pertinent de raisonner par récurrence inverse. En effet, c'est à l'instant N que nous avons le plus d'informations sur l'option. C'est pourquoi l'utilisation de l'enveloppe de Snell est toute indiquée et nous verrons que celle-ci nous permet de déterminer la date d'exercice optimale pour exercer son option.

Nous nous plaçons, dans ce chapitre, dans un modèle de marché viable et complet construit sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}, \mathbb{P})$. Nous noterons aussi $\mathbb{P}^*$ l'unique probabilité sous laquelle les prix des actifs actualisés $\left(\tilde{S}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ sont des martingales.

3.1 Exercice et couverture des options américaines

3.1.1 Prix des options américaines

Nous pouvons définir la valeur d'une option américaine comme

$$\begin{cases} U_N = Z_N & (1) \\ U_n = \max\left(Z_n, S_n^0\ \mathbb{E}^*\left[\frac{U_{n+1}}{S_{n+1}^0} \mid \mathcal{F}_n\right]\right) \quad \forall n \leq N-1 & (2) \end{cases} \tag{3.1}$$

En effet, il évident est qu'au temps N, la valeur de l'option est Z_N et donc $U_N = Z_N$. De plus, la somme, qui est disponible à l'instant $N-1$ permet d'obtenir à l'instant N la richesse Z_N l'instant d'après, est la valeur d'une stratégie admissible de valeur finale Z_N. Comme nous l'avons vu dans la section 2.3.2, celle-ci vaut $Z_{N-1} = S_n^0\ \mathbb{E}^*\left[Z_N/S_N^0 \mid \mathcal{F}_{N-1}\right]$. Et il est donc intuitif de prendre comme valeur de l'option au temps $N-1$ la quantité :

$$U_{N-1} = \max\left(Z_N, S_N^0\ \mathbb{E}^*\left[\frac{U_N}{S_{N+1}^0} \mid \mathcal{F}_n\right]\right)$$

et ainsi, de proche en proche, on obtient la formule (3.1).

3.1.2 Stratégie de couverture

Sachant cela, la suite des valeurs actualisées de l'option $\left(\tilde{U}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ définie pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ par $\tilde{U}_n = U_n/S_n^0$ est alors l'enveloppe de Snell du processus $\left(\tilde{Z}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ sous la probabilité $\mathbb{P}^*$.

En regroupant cela avec notre étude de l'enveloppe de Snell du premier chapitre nous obtenons que :

$$\tilde{U}_n = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}^* \left[\tilde{Z}_\nu \mid \mathcal{F}_n \right]$$

alors, en revenant à l'expression sans actualisation,

$$U_n = S_n^0 \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}^* \left[\frac{Z_\nu}{S_\nu^0} \mid \mathcal{F}_n \right]$$

Or, l'enveloppe de Snell est une sur-martingale, et d'après le théorème (1.2.1) de décomposition de Doob, nous avons,

$$\tilde{U}_n = \tilde{M}_n - \tilde{A}_n,$$

où $\left(\tilde{M}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ est une martingale sous la probabilité $\mathbb{P}^*$ et $\left(\tilde{A}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ un processus prévisible presque sûrement décroissant nul en 0.

De plus, comme le marché est complet, par 2.3.2, il existe une stratégie autofinancée ϕ qui vérifie

$$V_n(\phi) = S_N^0 \, \tilde{M}_N,$$

et donc $\tilde{V}_N(\phi) = \tilde{M}_n(\phi)$. Comme la suite $\left(\tilde{V}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ est elle aussi une $\mathbb{P}^*$-martingale on a :

$$\tilde{V}_n(\phi) = \mathbb{E}^* \left[\tilde{V}_N(\phi) \mid \mathcal{F}_n \right] = \mathbb{E}^* \left[\tilde{M}_N \mid \mathcal{F}_n \right] = \tilde{M}_n.$$

Par conséquent, :

$$\tilde{U}_n = \tilde{V}_n(\phi) - \tilde{A}_n$$

et donc :

$$U_n = V_n(\phi) - \tilde{A}_n S_n^0 := V_n(\phi) - A_n$$

En vendant son option à $U_0 = V_0(\phi)$, le vendeur de l'option peut produire une richesse à l'instant n égale à V_n. Or, en regardant l'expression de U_n, on peut constater que $Z_n \leq U_n \leq V_n(\phi)$ pour tout n et, donc, se couvrir parfaitement. Ce qui prouve le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 (couverture)
Le vendeur d'une option américaine peut se couvrir parfaitement.

Remarque. Nous verrons plus loin que, dans le cas des modèles de marché C.R.R, la stratégie de couverture pour une option américaine se détermine de la même manière que pour une option européenne.

3.1.3 Exercice optimal

Maintenant, dans la situation de l'acheteur de l'option, on peut déterminer les moments optimaux pour exercer l'option.

Théorème 3.1.2 (exercice optimal)
Les dates d'exercice optimal sont les temps d'arrêt optimaux de $\left(\tilde{Z}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ *sous la loi* $\mathbb{P}^*$.

Démonstration. On peut commencer par remarquer que la date d'exercice d'une option n'est évidemment pas définie en fonction du temps à venir. Il s'agit donc d'un temps d'arrêt.

Si ν est une date d'exercice. Alors, si $U_\nu > Z_\nu$ l'exercice n'est pas recommandé car on échange l'option de valeur U_ν contre une valeur Z_ν inférieure. C'est pourquoi une des dates d'exercice optimal est un temps τ tel que $U_\tau = Z_\tau$.

Si on prend comme temps d'exercice, le temps d'arrêt de la proposition (1.3.9) avec notre décomposition de Doob précédente :

$$\tau_{max}^* = \begin{cases} N & \text{si} \quad A_N = 0 \\ \inf\{0 \leq n \leq N-1 \mid A_{n+1} \neq 0\} & \text{si} \quad A_N \neq 0. \end{cases}$$

où τ_{max}^* est notre plus grand temps d'arrêt optimal. Alors, on peut vendre l'option pour une valeur $\tilde{U}_{\tau_{max}^*} = \tilde{V}_{\tau_{max}^*}(\phi) - \tilde{A}_{\tau_{max}^*} = \tilde{V}_{\tau_{max}^*}(\phi)$ car $\tilde{A}_{\tau_{max}^*} = 0$. Si l'on exerce après cette date, à $N \geq \nu > \tau_{max}^*$ par exemple, le profit devient $\tilde{V}_\nu(\phi) - \tilde{A}_\nu < \tilde{V}_\nu(\phi)$ car $\tilde{A}_\nu > 0$. Donc une date de temps d'exercice optimal se situe avant τ_{max}^*.

Enfin, si $\nu \leq \tau_{max}^*$, $\left(\tilde{U}_n^\nu\right)_{0 \leq n \leq N}$ est une martingale car d'après la définition de τ_{max}^* , $\tilde{A}_\nu = 0$. Et donc d'après le théorème (1.3.8), il s'agit d'un temps d'arrêt optimal. □

3.2 Modèle Cox-Ross-Rubinstein : Options Américaines

Revenons au modèle CRR, mais cette fois dans le cadre des options américaines, nous allons voir que celui-ci peut toujours s'appliquer dans cette situation.

Nous nous plaçons, comme dans le chapitre précédent, dans un modèle de marche viable et complet c'est à dire $d < r < u$. On va évaluer les valeurs d'une option dans le cas d'un *put*, on note le prix au temps n de celle-ci P_n, on reprend les notations du chapitre précédent.

Proposition 3.2.1
Le prix P_n d'un put *américain, à l'instant n et d'échéance N, peut s'écrire comme fonction de n et de S_n :*

$$P_n = \begin{cases} P_{am}(N, S_N) = (K - S_N)_+ \\ P_{am}(n, S_n) = \max\left((K - S_n)_+, \frac{f(n+1, S_n)}{1+r}\right) & \forall n \leq N-1 \end{cases}$$

où, pour $p = (r-d)/(u-d)$, la fonction f est définie par,

$$f(n+1, x) = pP_{am}\Big(n+1, x(1+u)\Big) + (1-p)\, P_{am}\Big(n+1, x\,(1+d)\Big).$$

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence descendante. On a bien le prix d'un *put* américain à l'échéance qui vaut $P_{am}(N, S_N) = (K - S_N)_+$. Supposons, l'hypothèse vrai au rang n, on va montrer l'équation

$$P_{am}(n, x) = \max\left((K - x)_+\,, \frac{f\,(n+1, x)}{1+r}\right)$$

est vraie au rang $n-1$. En effet, grâce à la valeur des options américaines vue dans le système (3.1)(2),

$$P_{am}(n-1, S_{n-1}) = \max\left((K - S_{n-1})_+, S_{n-1}^0\ \mathbb{E}^*\left[\frac{P_n}{S_n^0} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]\right)$$

Concentrons nous sur,

$$S_{n-1}^0\ \mathbb{E}^*\left[\frac{P_n}{S_n^0} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] = \frac{\mathbb{E}^*\Big[\,(K - (1+\rho_n)\, S_{n-1})_+ \mid \mathcal{F}_{n-1}\Big]}{(1+r)}$$

Nous sommes dans un modèle de marché complet. Soit $\mathbb{P}^*$ l'unique loi telle que la valeur actualisée de l'actif soit une martingale et $\mathbb{E}^*$ l'espérance sous cette probabilité. On peut alors écrire,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*\Big[\,(K - (1+\rho_n)\, S_{n-1})_+ \mid \mathcal{F}_{n-1}\Big] &= \mathbb{E}^*\left[\,1+\rho_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right](K - S_{n-1})_+ \\ &= \mathbb{E}^*\Big[\,(1+d)\,\mathbb{1}_{\{\rho_n = d\}} + (1+u)\,\mathbb{1}_{\{\rho_n = u\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\Big]\,(K - S_{n-1})_+ \\ &= \Big(\,(1+d)\,\mathbb{P}^*\,(\rho_n = d) + (1+u)\,\mathbb{P}^*\,(\rho_n = u)\,\Big)\,(K - S_{n-1})_+ \\ &= \Big(\,(1+d)\,(1-p) + (1+u)\,p\Big)\,(K - S_{n-1})_+ \end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned} P_{am}(n-1, S_{n-1}) &= \max\left((K - S_{n-1})_+, \frac{\Big((1+d)\,(1-p) + (1+u)\,p\Big)\,(K - S_{n-1})_+}{(1+r)}\right) \\ &= \max\left((K - S_{n-1})_+, \frac{f\,(n, S_{n-1})}{1+r}\right) \end{aligned}$$

De même, pour tout $n \leq N-2$, si on suppose l'hypothèse vérifiée au rang $n+1$, en remplaçant la valeur de P_N par la valeur P_{n+1} et en réalisant la même démarche de calcul on obtient le résultat attendu, cela est dû au fait que $f(n+1, S_n)$ soit $\mathcal{F}_n$-mesurable.

□

Dans le cas du *call*, le résultat est presque le même, il suffit juste de remplacer le prix du *put* $(K - S_n)_+$ par celui d'un *call* : $(S_n - K)_+$ ce qui nous donne que le prix C_n d'un *call* américain à l'instant n et d'échéance N est

$$C_n = \begin{cases} C_{am}(N, S_N) = \ (S_N - K)_+ \\ C_{am}(n, S_n) \ \ = \ \max\left((S_N - K)_+, \frac{f(n+1, S_n)}{1+r}\right) & \forall n \leq N-1 \end{cases}$$

où, f et p sont identiques à ceux de la proposition précédente.

Remarque. On pourrait montrer, et cela ce vérifie rapidement sur des exemples, que les valeurs des options américaines sont les mêmes que celles des options européennes pour les *calls* de même paramètres. Cela est dû au fait que la suite des valeurs $\left(\tilde{C}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ est une sur-martingale sous $\mathbb{P}^*$. Toutefois, cela n'est plus le vrai dans le cas des *puts*.

Exemple 3.2.2 Nous pouvons alors tracer un arbre binomial pour évaluer la valeur d'une option américaine en *put* (avec les paramètres et arbres, ci-dessous) et dont le *prime* est $0,95$€.

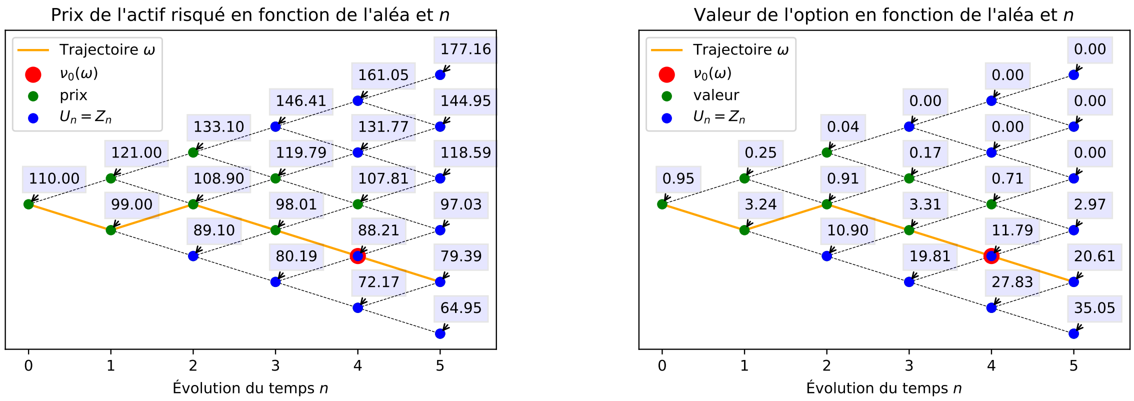


FIGURE 3.1 – Paramètres : $N = 5$, $S_1^0 = 110$, $K = 100$, $down = -0.1$, $up = 0.2$, $intrest = 0.05$

Comment interpréter ces graphiques ? Nous allons les étudier de deux points de vue, de l'acheteur et du vendeur (attention ceux-ci sont inversés par rapport à notre étude dans le cas des options européennes car nous avions un *call* et ici un *put*).

3.2.1 Stratégie de couverture

Dans notre exemple, si nous prenons le point de vue de le délivreur de l'option. Celui-ci va chercher à se couvrir et donc a établir une stratégie de couverture, nous avons vu que celle-ci existait au théorème (3.1.1). Pour la construire, il suffit en fait de reproduire la même méthode que dans le cas des options européennes. En effet, nous avons vu dans l'exemple 2.4.4 que notre couverture était dynamique et donc nous couvrait indépendamment du moment d'exercice de l'acheteur de l'option (qui, ici, est le vendeur). On rappelle que les quantités d'actifs sont déterminées par les formules, pour l'actif sans risque :

$$\Delta^0(n, S_{n-1}) = H_n^0 = \frac{(1+u)\, c\,(n, (1+d)\, S_{n-1}) - (1+d)\, c\,(n, (1+u)\, S_{n-1})}{(u-d)\,(1+r)^n\, I_0} \tag{3.2}$$

et pour l'actif risqué :

$$\Delta^1(n, S_{n-1}) = H_n^1 = \frac{c\,(n, (1+u)\, S_{n-1}) - c\,(n, (1+d)\, S_{n-1})}{(u-d)\, S_{n-1}}. \tag{3.3}$$

Supposons que le prix de notre actif varie comme la trajectoire ω, nous pouvons rassembler les informations dans le tableau suivant :

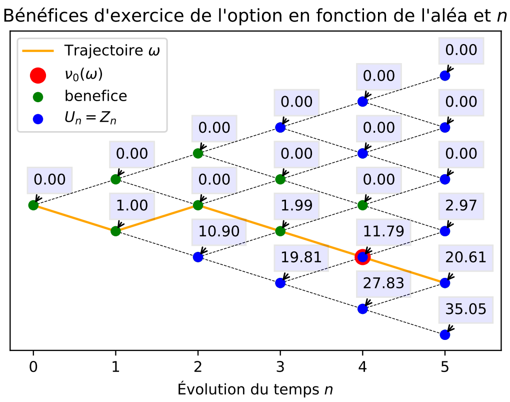
n	Prix	Valeur	Quantité d'actif sans risque	Part d'actif risqué
0	110	0.95	6.678703	-0.056462
1	99	3.24	7.642314	-0.172742
2	108.9	0.91	9.696788	-0.092302
3	98.01	3.31	29.187652	-0.322514
4	88.21	11.79	78.352617	-1.000000

Cette fois-ci, les quantités d'actif sans risque sont positives et les part d'actif risqué sont négatives. Cela correspond au fait que, cette fois, l'acheteur va prêter de l'argent et va vendre des parts de l'actif risqué. Alors, en possédant ces quantités d'actif sans risque et en vendant ces parts d'actif risqué à chaque instant, le détenteur de l'option en *put* peut se couvrir parfaitement.

3.2.2 Exercice optimal

Si, maintenant, on place du point de vue de l'acquéreur de l'option. Nous allons vouloir déterminer le temps optimal pour notre exercice afin de maximiser les gains.

Il est intéressant, dans ce cas, de tracer un graphique supplémentaire à mettre en parallèle des deux autres :



Nous avons vu, dans la partie précédente, qui couvrait le cas général, que le premier temps d'arrêt optimal est le premier instant où les suites $(U_n)_{0 \le n \le N}$ et $(Z_n)_{0 \le n \le N}$ sont égales. Celles-ci représentent respectivement les valeurs de l'option et le prix d'exercice, d'où l'intervention du dernier graphique. Comme précédemment, écrivons le tableau regroupant ces informations,

n	Prix	Valeur	Bénéfice d'exercice
0	110	0.95	0.00
1	99	3.24	1.00
2	108.9	0.91	0.00
3	98.01	3.31	1.99
4	88.21	11.79	11.79
5	79.39	20.61	20.61

Alors, nous comprenons mieux la légende, le temps $\nu_0(\omega) = 4$ est un temps d'arrêt optimal et celui-ci est bien le premier instant où bénéfice et valeur coïncident, et justifie l'appellation ν_0. Nous remarquons, de plus, que le temps d'arrêt optimal maximal τ^*_{max} du chapitre 1 est, dans cet exemple, le temps $n = 5$ car il correspond au plus grand temps où $U_n = Z_n$.

Une autre manière de voir les temps d'arrêt optimaux est d'écrire la matrice binaire $U_n = Z_n$ retournée par le code et mettre en avant la trajectoire, par exemple en orange, dans la matrice. On a, alors, tous le temps d'arrêt optimal minimal, pour la trajectoire, qui est représenté par le $\boxed{1}$:

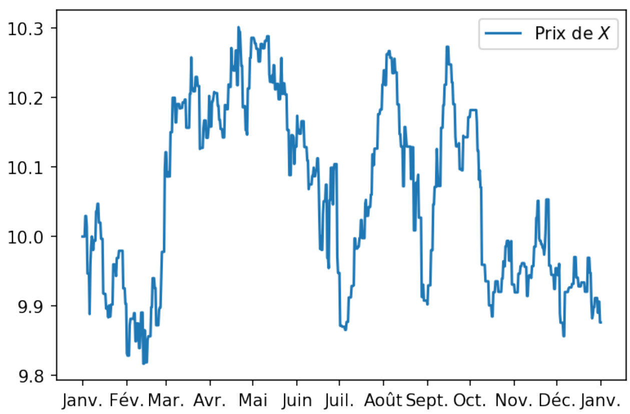
$$M_{\{U_n=Z_n\}} = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 1. & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 1. & \boxed{1}. & 0. & 1. & 1. & 0. \\ 1. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. \end{bmatrix}$$

Annexe - Code

[1]:
```
import numpy as np
import scipy.stats as stat
import matplotlib.pyplot as plt
import math as math
import scipy.special as special
import pandas as pd
```

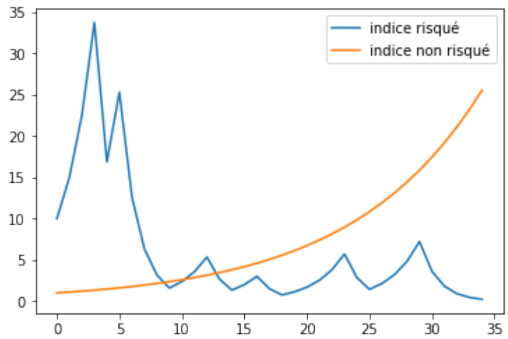
Évolution du prix d'une option suivant un processus de Poisson

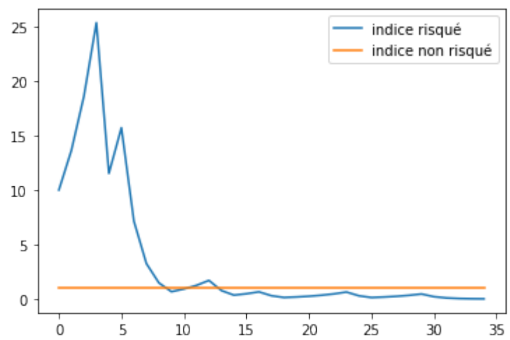
[2]:
```
T=365                                   #La durée sur laquelle on simule
P0 = 10                                 #La valeur initiale de l'option
lam = 2                                 #Intensité du processus
sigm = 0.03                             #Ampleur de la variation du prix
P = np.array([P0])

        # Création de la simulation

    # On crée le Processus nous indiquant les moments de fluctuation du prix de l'option
Poi = stat.poisson.rvs(mu = lam*T)
Pro_Poi = np.floor((stat.uniform.rvs(size = Poi)*(T+1)))
N = np.sort(Pro_Poi)

    # Création de l'évolution des prix par rapport au temps
for t in range(0,Poi-1):
    P = np.append(P, (N[t+1]-N[t])*stat.norm.rvs(loc =0,scale = sigm)+P[t])


    # Variation du processus au cours du temps

x= np.linspace(0,T,Poi)

plt.figure(dpi=150)
plt.plot(x,P, label='Prix de $X$')
plt.xticks(np.cumsum([0,31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31]),labels=['Janv.','Fév.', 'Mar.', 'Avr.', 'Mai',␣
↪'Juin', 'Juil.', 'Août', 'Sept.', 'Oct.', 'Nov.', 'Déc.','Janv.'])
plt.legend()
plt.savefig(format='pdf',fname='Evolution.pdf', transparent = True)
plt.show()
```



Actifs actualisés ou non

[3]:
```python
N = 35                  # Durée de simulation
S0 = 10                 # Prix initial de l'actif risqué
r = 0.1                 # Taux d'intérêt fixe
proba = 1/2             # La tendance de l'action à monter ou à baisser
b = 0.5                 # 1+b est le rapports entre deux temps si bénéfices
a = -0.5                # 1+a est le rapports entre deux temps si pertes

S1 = np.array([S0])     # Création de l'actif risqué de valeur initiale S0

for i in range(1,N):
    u = stat.bernoulli.rvs(proba)*(b - a) + a
    S1 = np.append(S1, S1[i-1]*(1+u))

X = np.arange(N)

plt.plot(X,S1,label='indice risqué')
plt.plot(X,(1+r)**X, label='indice non risqué')
plt.legend()
plt.savefig(fname='non_actualise.pdf', format="pdf", transparent=True)
plt.show()

plt.plot(X,S1/((1+r)**X), label='indice risqué' )
plt.plot(X,np.ones(N), label='indice non risqué')
plt.legend()
plt.savefig(fname='actualise.pdf', format="pdf", transparent=True)
plt.show()
```





Modèle Cox-Rox-Rubinstein

[4]:
```python
'''

    Ce code a un but pédagogique, il est orienté objet afin de mettre en avant tous les calculs et un code associé pour les éléments du mémoire et de manière indépendante. Il n'est donc pas optimal en complexité et on remarquera que de nombreuses boucles auraient pu (dû) être épargnées si cela n'avait pas été voulu.

    En programmation objet, on définit des classes qui contiennent en elles les méthodes que l'on va utiliser. D'abord, on crée un objet avec les paramètres (entrées) requis et on appelle les méthodes grâce à la commande : " NOM_OBJECT.NOM_METHODE() ". On peut aussi appeler des propriétés au sein de l'objet avec la commande : " NOM_OBJECT.NOM_PROPRIETE ".


'''
                            # La classe qui regroupe les options du modèle C.R.R

    # Début de la classe mère

class option_CRR:

    def __init__(self, N, S0, K, up, down, intrest, call ):
```

```
        # Les entrées
        self.N = N                         # Échéance
        self.S0 = S0                       # S_0
        self.K = K                         # Prix d'exercice à N
        self.up = up                       # La variation up au temps n+1 : S_{n+1} = S_{n}(1+up)
        self.down = down                   # La variation down au temps n+1 : S_{n+1} = S_{n}(1+down)
        self.intrest = intrest             # Intérêt de l'actif sans risque
        self.call = call                   # Type d'option : Call ou Put

        # Les données que l'on calcule
        self.p_up = (self.intrest - self.down)/(self.up - self.down)           # Proba de up
        self.p_down = 1 -self.p_up                                             # Proba de down
        (self.arbre_binomial, self.X, self.Y) = self.creation_arbre_binomial()  # Arbre binomial
        self.arbre_prix = self.creation_arbre_prix()                           # Arbre des prix
        self.arbre_benefice = self.creation_arbre_benefice()                   # Arbre des bénéfices
        self.arbre_valeur = self.creation_arbre_valeur()                       # Arbre des valeurs
        self.arbre_binaire = self.creation_arbre_binaire()                     # Arbre du moment d'exercice
        (self.trajectoire_a_tracer, self.trajectoire) = self.trajectoire_aléatoire()
        self.type = self.type()


    ## Fonctions pour les calculs

        # On crée notre arbre binomial générique
    def creation_arbre_binomial(self):
        arbre_binomial = np.zeros([self.N+1,self.N+1])
        arbre_binomial[self.N]= np.arange(self.N+1)-self.N/2
        for i in reversed(range(self.N)):
            for j in reversed(range(i+1)):
                if j <=i:
                    arbre_binomial[i,j] = (arbre_binomial[i+1,j] + arbre_binomial[i+1,j+1])/2
        X = np.array([])
        Y = np.array([])
        for i in range(self.N+1):
            X = np.append(X, np.ones(i+1)*(i))
            Y = np.append(Y, arbre_binomial[i,:i+1])
        return arbre_binomial, X, Y

        # On crée l'arbre de l'évolution des prix en fonction de l'aléa et du temps
    def creation_arbre_prix(self):
        arbre_prix = np.zeros([self.N+1,self.N+1])
        for i in range(self.N+1):
            for j in range(i+1):
                arbre_prix[i,j] = self.S0*((1+self.down)**(i-j))*((1+self.up)**j)
        return arbre_prix

        # Opérateur qui donne la valeur d'un exercice en fonction d'un call ou put
    def exercice(self, S, K):
        if self.call :
            return (S-K).clip(min=0)
        return (K-S).clip(min=0)

        # Fonction qui retourne le prime c'est-à-dire le prix juste de l'option.
    def prime(self):
        print('La juste valeur de l\'option au temps 0 est : {:.2f}€.'.format(self.arbre_valeur[0,0]))

        # Fonction c(n,x) pour détérminer la valeur d'un call à l'instant n
    def c(self, n, x):
        sum = 0
        for i in range (self.N -n+1):
            sum = special.comb(self.N -n,i)* (self.p_up**i) * (self.p_down**(self.N - n -i)) * max((x *␣
↪(1+self.up)**i *(1+self.down)**(self.N -n - i))-self.K,0) +sum
        return (1+self.intrest)**(-(self.N - n)) *sum

        # Fonction p(n,x) pour détérminer la valeur d'un put à l'instant n
    def p(self, n, x):
        sum = 0
        for i in range (self.N -n+1):
            sum = special.comb(self.N -n,i)* (self.p_up**i) * (self.p_down**(self.N - n -i)) * max(self.K - (x␣
↪* (1+self.up)**i *(1+self.down)**(self.N -n - i)),0) +sum
        return (1+self.intrest)**(-(self.N - n)) *sum

        # Calcul de la quantité d'actif sans risque à l'instant n
    def Delta_0(self,n,x):
```

```python
        if self.call:
            return ((1+self.up) * self.c(n, (1+self.down) * x) - (1+self.down) * self.c(n, (1+self.up) *x))/
↪((self.up - self.down) * (1 + self.intrest)**n )
        else :
            return ((1+self.up) * self.p(n, (1+self.down) * x) - (1+self.down) * self.p(n, (1+self.up) *x))/
↪((self.up - self.down) * (1 + self.intrest)**n )

        # Calcul de la quantité d'actif risqué au temps n en fonction du prix au temps n-1
    def Delta_1(self,n,x):
        if self.call :
            return (self.c(n,(1+self.up) * x) - self.c(n,(1+self.down)*x))/ ((self.up - self.down) * x)
        else :
            return (self.p(n,(1+self.up) * x) - self.p(n,(1+self.down)*x))/ ((self.up - self.down) * x)

        # Stratégie de couverture de la trajectoire associée à l'option
    def strategie_couverture(self):
        strategie_sans_risque = np.array([])
        strategie_risque = np.array([])
        for i in range(self.N):
            x = self.arbre_prix[self.trajectoire[i]]
            strategie_sans_risque = np.append(strategie_sans_risque, self.Delta_0(i+1,x))
            strategie_risque = np.append(strategie_risque, self.Delta_1(i+1,x))
        return strategie_sans_risque, strategie_risque


    ## Fonctions pour le plot

        # On détermine quel graphe on va tracer en fonction des entrées
    def _type_plot(self,type_plot):
        if   type_plot == 'valeur':                          # type == 'XXX'
            self.plot_etiquette(self.arbre_valeur)      # On plot les étiquettes de arbre_XXX
            return 'Valeur'                        # On retourne un morceau du titre pour le graphe
        elif type_plot == 'benefice':
            self.plot_etiquette(self.arbre_benefice)
            return 'Bénéfices d\'exercice'
        elif type_plot == 'prix':
            self.plot_etiquette(self.arbre_prix)
            return 'Prix'
        else :
            print('Mauvaise entrée pour type_plot.')     # On ne peut pas plot sinon

        # Fonction pour plot les étiquettes
    def plot_etiquette(self,array):
        _etiquette = np.array([])
        for i in range(self.N+1):
            _etiquette = np.append(_etiquette, array[i,:i+1])
        for i in range(len(self.X)):
            plt.annotate('{:.2f}'.format(_etiquette[i]),xy=(self.X[i],self.Y[i]),xytext =(self.X[i],self.
↪Y[i]+0.4),bbox = dict(facecolor='blue', alpha=0.1),arrowprops=dict(arrowstyle='->'),zorder = 5)



        # Fonction qui trace le maillage (les branches) de l'arbre
    def plot_maillage(self,array):
        for i in range(self.N):
            for j in range(i+1):
                plt.plot([i,i+1],[array[i,j],array[i+1,j]],color='black',ls ='--',linewidth=0.5,zorder=-8)
                plt.plot([i,i+1],[array[i,j],array[i+1,j+1]],color='black',ls ='--',linewidth=0.5,zorder=-8)

        # Fonction qui génère juste une trajectoire aléatoire qui se déplace dans l'arbre
    def trajectoire_aléatoire(self):
        trajectoire = [(0,0)]
        trajectoire_a_tracer = []
        for i in range(1,self.N+1):
            u = stat.bernoulli.rvs(0.5)
            trajectoire.append((i,u + trajectoire[-1][1]))
        for i in trajectoire:
            trajectoire_a_tracer.append(self.arbre_binomial[i])
        return trajectoire_a_tracer, trajectoire


        # Fonction qui plot le résultat
    def plot_arbre_binomial(self,dpi=120,maillage=True,etiquette=True,type_plot='prix',trajectoire=False, save␣
↪=False):
```

```
        plt.figure(dpi=dpi)
        if maillage :
            self.plot_maillage(self.arbre_binomial)
        if etiquette :
            label_titre = self._type_plot(type_plot)
        else:
            label_titre = 'Arbre binomial'
        if trajectoire :
            plt.plot(np.arange(self.N+1),self.trajectoire_a_tracer,color='orange', label='Trajectoire␣
↪$\\omega$',zorder=0)
            if self.type != 'européenne':
                (X_nu_0, Y_nu_0) = self.temps_arret_optimal_trajectoire()
                plt.scatter(X_nu_0, self.arbre_binomial[X_nu_0, Y_nu_0], color='r',linewidth=5,␣
↪label='$\\nu_0(\\omega)$',zorder=4)
        plt.scatter(self.X, self.Y, color ='green', label='$U_n \\neq Z_n$'if self.type == 'américaine' else␣
↪'{}'.format(type_plot), zorder = 2 )
        if self.type != 'européenne':
            self.plot_exercice_optimal()
        plt.xlabel('Évolution du temps $n$')
        plt.xticks(np.arange(self.N+1))
        left,right = plt.xlim()
        plt.xlim(right=right+2/(self.N))
        plt.yticks([])
        bottom, top = plt.ylim()
        plt.ylim(bottom=bottom,top=top*((self.N+1)/(self.N)))
        plt.title('{} de l\'option en fonction de l\'aléa et $n$'.format(label_titre))
        plt.legend(loc=2)
        if save == True:
            plt.savefig(format='pdf', fname='arbre_{}{}.pdf'.format(type_plot, '_t' if trajectoire == True else␣
↪''))
        plt.show()

        # Fonction qui plot tous les graphiques
    def plot_all(self, dpi=120, trajectoire =False, maillage = True, etiquette = True, save=False ):
        for i in ['prix','benefice','valeur']:
            self.plot_arbre_binomial(type_plot=i,trajectoire = trajectoire, save = save,␣
↪etiquette=etiquette,maillage=maillage,dpi=dpi)

        # Fonction qui sort un tableau avec le contenu du portefeuille de couverture
    def plot_strategie(self):
        df = pd.DataFrame({'n' : np.arange(0,self.N)})
        df = pd.concat([df, pd.DataFrame({'Actif sans risque ({})'.format('emprunt' if self.call else 'prêt') :␣
↪self.strategie_couverture()[0]})], axis=1)
        df = pd.concat([df, pd.DataFrame({'Proportion actif risqué' : self.strategie_couverture()[1]})],␣
↪axis=1)
        return df

        # Fonction qui print toutes les informations
    def print_all(self, graph = True, dpi = 120):
        self.prime()
        print()
        print('Arbre valeur :')
        print(self.arbre_valeur)
        print()
        print('---')
        print()
        print('Arbre prix :')
        print(self.arbre_prix)
        print()
        print('---')
        print()
        print('Arbre binaire :')
        print(self.arbre_binaire)
        print()
        print('---')
        print()
        print('Arbre bénéfice :')
        print(self.arbre_benefice)
        print()
        print('---')
        print()
        print('Stratégie de Couverture :')
        print(self.plot_strategie())
        if graph :
```

```python
            print()
            print('---')
            print('Graphiques :')
            self.plot_all(dpi = dpi, trajectoire = True, save=False)

    # Fin de la classe mère

        #----------------------------------------------------------------------------------------------------#

                    # La sous-classe des options européennes

    # Début de la classe fille : option européenne

class option_europeene(option_CRR):

    def type(self):
        return 'européenne'

        # On crée l'arbre des bénéfices
    def creation_arbre_benefice(self):
        arbre_benefice = np.zeros_like(self.arbre_prix)
        # On ne peut exercer qu'à l'échéance donc les bénéfices sont sur la dernière ligne
        if self.call :
            arbre_benefice[self.N] = (self.arbre_prix[self.N] - self.K).clip(min=0)
        else:
            arbre_benefice[self.N] = (self.K - self.arbre_prix[self.N]).clip(min=0)
        return arbre_benefice


        # On crée l'arbre des valeurs de l'option en fonction de l'aléa et du temps
    def creation_arbre_valeur(self):
        arbre_valeur = np.zeros_like(self.arbre_benefice)
        if self.call :
            arbre_valeur[self.N] = (self.arbre_prix[self.N] - K).clip(min = 0)
        else :
            arbre_valeur[self.N] = (K - self.arbre_prix[self.N]).clip(min = 0)
        for i in reversed(range(self.N)):
                for j in reversed(range(i+1)):
                    arbre_valeur[i,j] = (arbre_valeur[i+1,j] * self.p_down + arbre_valeur[i+1,j+1] * self.
↪p_up)/(1+self.intrest)
        return arbre_valeur

        # On crée l'arbre binaire pour s'avoir s'il faut exercer : 1 = Oui, 0 = Non
    def creation_arbre_binaire(self):
        # On  aurait pu faire le code ci-dessous mais l'arbre binaire n'a pas d'intérêt pour l'option euro
        '''arbre_binaire = np.zeros_like(self.arbre_valeur)
        # On ne peut exercer qu'à l'échéance donc on ne regarde que la dernière ligne
        for j in range(self.N+1):
            arbre_binaire[self.N,j] = (self.arbre_benefice[self.N,j] == self.arbre_valeur[self.N,j])
        return arbre_binaire'''
        return 'Il n\'a pas d\'intérêt pour une option européenne.'

    # Fin de la classe fille : option européenne

        #----------------------------------------------------------------------------------------------------#

                    # La sous-classe des options américaines

    #Début de la classe fille : option américaine

class option_americaine(option_CRR):

    def type(self):
        return 'américaine'

        # On crée l'arbre des bénéfices d'exercice de l'option en fonction de l'aléa et du temps
    def creation_arbre_benefice(self):
        arbre_benefice = np.zeros_like(self.arbre_prix)
        # On applique l'opérateur 'exercice' à chaque instant
        for i in range(self.N+1):
            for j in range(i+1):
                arbre_benefice[i,j] = self.exercice(self.arbre_prix[i,j],K)
        return arbre_benefice
```

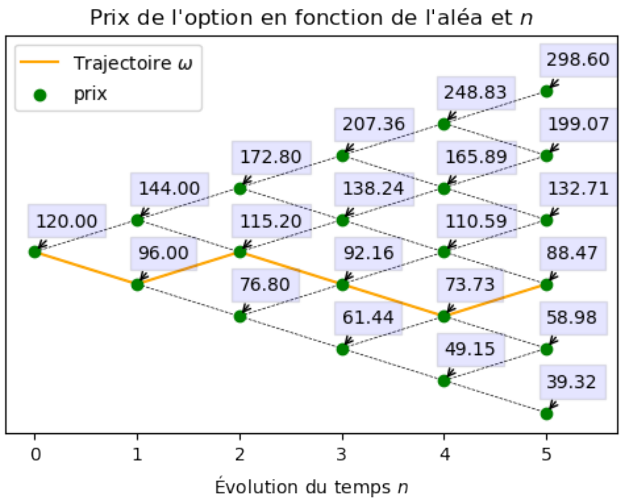
```
        # On crée l'arbre des valeurs de l'option en fonction de l'aléa et du temps
    def creation_arbre_valeur(self):
        arbre_valeur = np.zeros_like(self.arbre_benefice)
        if self.call :
            arbre_valeur[self.N] = (self.arbre_prix[self.N] - K).clip(min = 0)
        else :
            arbre_valeur[self.N] = (K - self.arbre_prix[self.N]).clip(min = 0)
        # On calcule la valeur d'une option américaine par récurrence inverse et comparaison avec les bénéfices ␣
↪
        for i in reversed(range(self.N)):
            for j in reversed(range(i+1)):
                valeur_i_j = (arbre_valeur[i+1,j] * self.p_down + arbre_valeur[i+1,j+1] * self.p_up)/(1+self.
↪intrest)
                arbre_valeur[i,j] = max(valeur_i_j, self.arbre_benefice[i,j])
        return arbre_valeur

        # On crée l'arbre binaire pour s'avoir s'il faut exercer : 1 = Oui, 0 = Non
    def creation_arbre_binaire(self):
        arbre_binaire = np.zeros_like(self.arbre_valeur)
        # On peut exercer à chaque instant
        for i in range(self.N+1):
            for j in range(i+1):
                arbre_binaire[i,j] = (self.arbre_benefice[i,j] == self.arbre_valeur[i,j])
        return arbre_binaire


    def temps_arret_optimal_trajectoire(self): #determine le temps d'arrêt optimal pour la trajectoire
        for i in self.trajectoire:
            if self.arbre_binaire[i] ==1:
                return i

        # Fonction qui détermine les points qui sont optimaux pour l'exercice
    def plot_exercice_optimal(self):
        X_ = np.array([])
        Y_ = np.array([])
        for i in range(self.N+1):
            for j in range(i+1) :
                if self.arbre_binaire[i,j] == 1: # Si U_n = Z_n on ajoute le point pour le plot
                    X_ = np.append(X_, i)
                    Y_ = np.append(Y_, self.arbre_binomial[i,j])
        plot.scatter(X_,Y_, color='blue', label='$U_n = Z_n$' ,zorder = 5)

    # Fin de la classe fille : option américaine
```

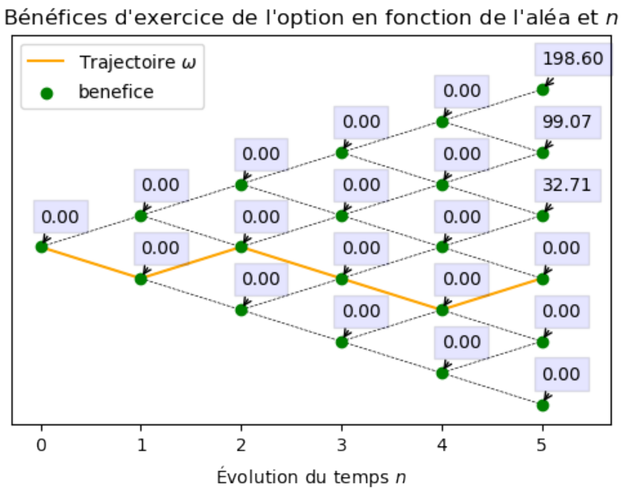
Rendu : option européenne

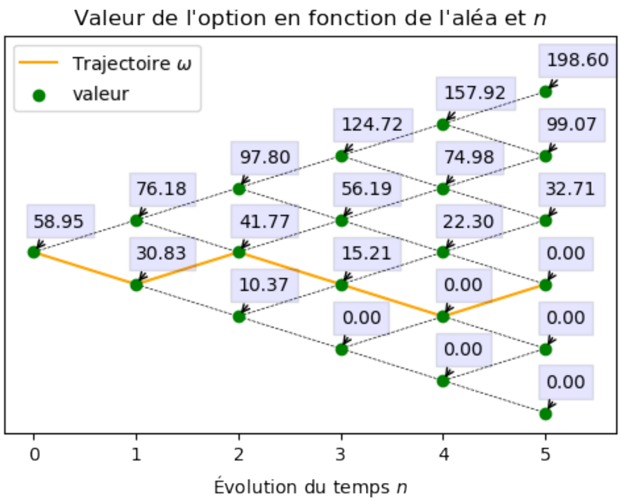
[5]:
```
S0 = 120                #prix initial de l'actif risqué
K = 100                 #prix d'exercice à l'échance
down = -.2              #baisse du prix
up = .2                 #montée du prix
intrest = 0.1           #taux d'intérêt fixe
N = 5                   #Echéance
call = True

option_euro = option_europeene(N=N, S0=S0, K=K, down=down, up=up , intrest=intrest, call=call)
option_euro.print_all(graph = True, dpi = 100)
```

```
La juste valeur de l'option au temps 0 est : 58.95€.

Arbre valeur :
[[ 58.94676997   0.           0.           0.           0.             0.        ]
 [ 30.83442046  76.17712246   0.           0.           0.             0.        ]
 [ 10.36791886  41.76784373  97.80383171   0.           0.             0.        ]
 [  0.          15.20628099  56.1907438  124.7153719    0.             0.        ]
 [  0.           0.          22.30254545  74.97890909 157.92290909     0.        ]
 [  0.           0.           0.          32.7104      99.0656       198.5984    ]]

---

Arbre prix :
[[120.      0.      0.      0.      0.      0.    ]
 [ 96.    144.      0.      0.      0.      0.    ]
```

```
 [ 76.8     115.2     172.8       0.        0.        0.     ]
 [ 61.44     92.16    138.24    207.36      0.        0.     ]
 [ 49.152    73.728   110.592   165.888   248.832     0.     ]
 [ 39.3216   58.9824   88.4736  132.7104  199.0656  298.5984]]

---

Arbre binaire :
Il n'a pas d'intérêt pour une option européenne.

---

Arbre bénéfice :
[[  0.        0.        0.        0.        0.        0.     ]
 [  0.        0.        0.        0.        0.        0.     ]
 [  0.        0.        0.        0.        0.        0.     ]
 [  0.        0.        0.        0.        0.        0.     ]
 [  0.        0.        0.        0.        0.        0.     ]
 [  0.        0.        0.       32.7104   99.0656  198.5984]]

---

Stratégie de Couverture :
   n  Actif sans risque (emprunt)  Proportion actif risqué
0  0                   -54.409985                 0.944640
1  1                   -43.332174                 0.817706
2  2                   -50.159763                 0.889420
3  3                   -30.465877                 0.604995
4  4                     0.000000                 0.000000

---
Graphiques :
```



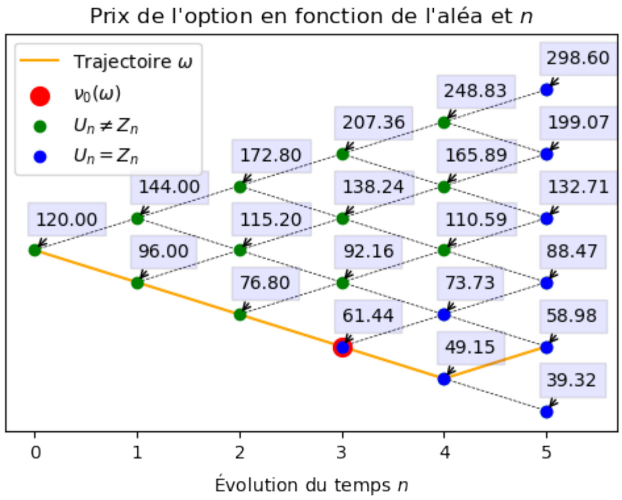


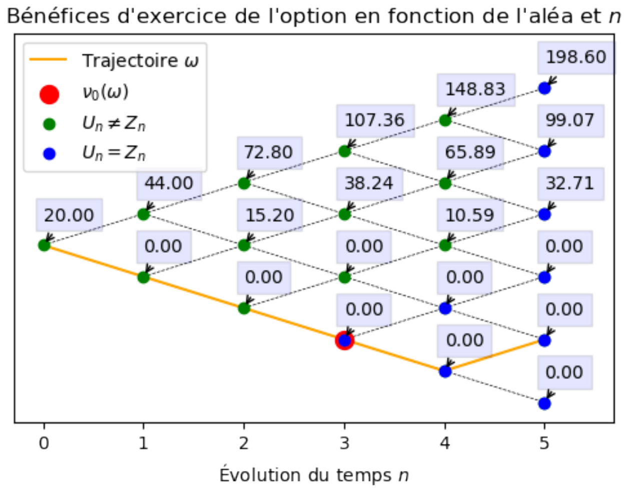


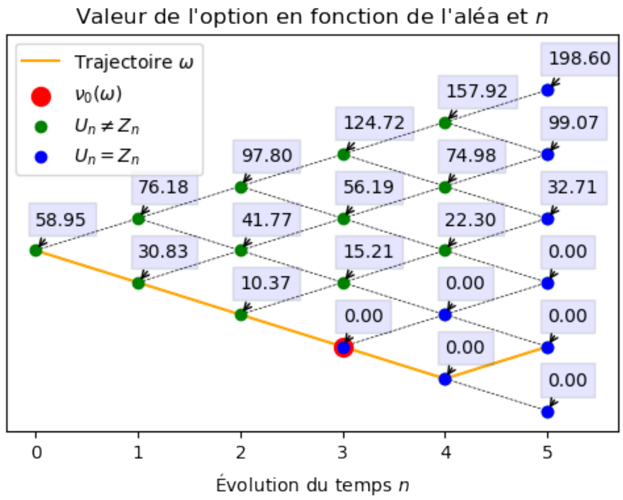
Rendu : option américaine

[6]:
```python
S0 = 120                #prix initial de l'actif risqué
K = 100                 #prix d'exercice à l'échance
down = -.2              #baisse du prix
up = .2                 #montée du prix
intrest = 0.1           #taux d'intérêt fixe
N =   5                 #Echéance
call = True

option_amer= option_americaine(N=N, S0=S0, K=K,down=down, up=up , intrest=intrest, call=call)
option_amer.print_all(graph =True, dpi = 100)
```

```
La juste valeur de l'option au temps 0 est : 58.95€.

Arbre valeur :
[[ 58.94676997   0.           0.           0.           0.           0.        ]
 [ 30.83442046  76.17712246   0.           0.           0.           0.        ]
 [ 10.36791886  41.76784373  97.80383171   0.           0.           0.        ]
 [  0.          15.20628099  56.1907438  124.7153719    0.           0.        ]
 [  0.           0.          22.30254545  74.97890909 157.92290909   0.        ]
 [  0.           0.           0.          32.7104      99.0656     198.5984    ]]

---

Arbre prix :
[[120.       0.       0.       0.       0.       0.    ]
 [ 96.     144.       0.       0.       0.       0.    ]
 [ 76.8    115.2    172.8      0.       0.       0.    ]
 [ 61.44    92.16   138.24   207.36     0.       0.    ]
 [ 49.152   73.728  110.592  165.888  248.832    0.    ]
 [ 39.3216  58.9824  88.4736 132.7104 199.0656 298.5984]]

---

Arbre binaire :
[[0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [1. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [1. 1. 0. 0. 0. 0.]
 [1. 1. 1. 1. 1. 1.]]

---

Arbre bénéfice :
[[ 20.       0.       0.       0.       0.       0.    ]
 [  0.      44.       0.       0.       0.       0.    ]
 [  0.      15.2     72.8      0.       0.       0.    ]
 [  0.       0.      38.24   107.36     0.       0.    ]
 [  0.       0.      10.592   65.888  148.832    0.    ]
 [  0.       0.       0.      32.7104  99.0656 198.5984]]

---

Stratégie de Couverture :
   n  Actif sans risque (emprunt)  Proportion actif risqué
0  0                   -54.409985                 0.944640
1  1                   -43.332174                 0.817706
2  2                   -22.849408                 0.494996
3  3                     0.000000                 0.000000
4  4                     0.000000                 0.000000

---
Graphiques :
```


Prix de l'option en fonction de l'aléa et n
Trajectoire ω
$\nu_0(\omega)$
$U_n \neq Z_n$
$U_n = Z_n$
120.00
144.00
96.00
172.80
115.20
76.80
207.36
138.24
92.16
61.44
248.83
165.89
110.59
73.73
49.15
298.60
199.07
132.71
88.47
58.98
39.32
0
1
2
3
4
5
Évolution du temps n


Bénéfices d'exercice de l'option en fonction de l'aléa et n
Trajectoire ω
$\nu_0(\omega)$
$U_n \neq Z_n$
$U_n = Z_n$
20.00
44.00
0.00
72.80
15.20
0.00
107.36
38.24
0.00
0.00
148.83
65.89
10.59
0.00
0.00
198.60
99.07
32.71
0.00
0.00
0.00
0
1
2
3
4
5
Évolution du temps n


Valeur de l'option en fonction de l'aléa et n
Trajectoire ω
$\nu_0(\omega)$
$U_n \neq Z_n$
$U_n = Z_n$
58.95
76.18
30.83
97.80
41.77
10.37
124.72
56.19
15.21
0.00
157.92
74.98
22.30
0.00
0.00
198.60
99.07
32.71
0.00
0.00
0.00
0
1
2
3
4
5
Évolution du temps n

Bibliographie

[1] Philippe Barbe, Michel Ledoux, and Daniel Guin. *Probabilité (L3M1)*. EDP Sciences, Les Ulis, France, 2007. OCLC : 778435794.

[2] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses. OCLC : 800811180.