Restauración de Imágenes

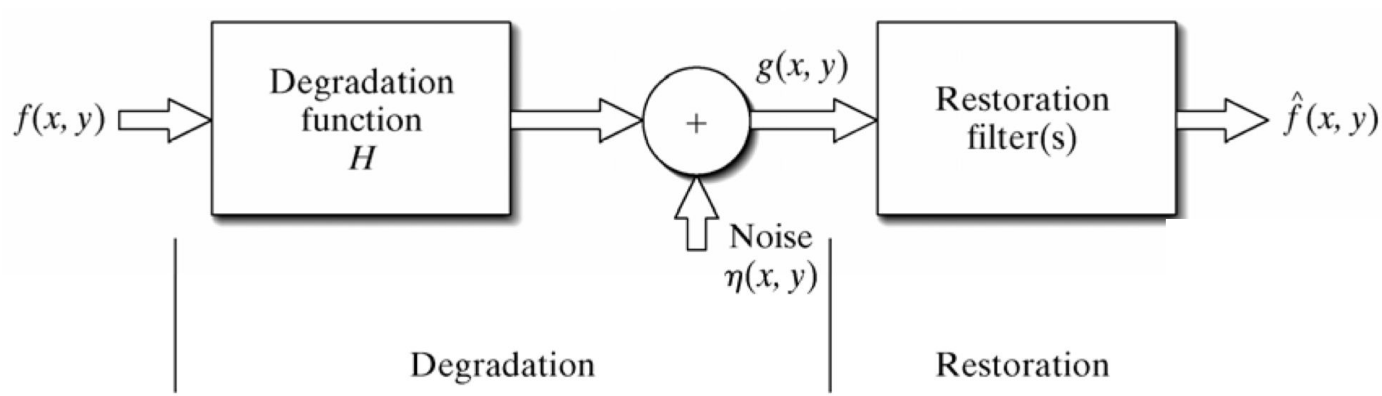
Gabriela Cajamarca

- Es posible capturar una imágen exactamente como aparece en el mundo real?

Restauración de Imágenes

Proceso por el cual se intenta reconstruir o recuperar una imagen que ha sido degradada, usando conocimiento **a priori** del proceso de degradación. Las técnicas de restauración se basan en modelos del proceso de degradación y en la aplicación del proceso inverso para recuperar la imagen original.

Modelo del Proceso de Restauración



- Si H es un proceso lineal y espacialmente invariante, entonces

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$

- Donde g es la imagen degradada g(x,y), algún conocimiento de la función de degradación H, y f (x, y) la función original

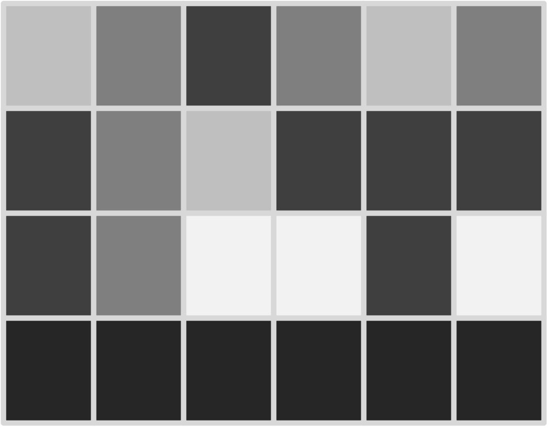
Modelación de una línea degradada Movimiento Uniforme Horizontal

Para un movimiento de n pixeles, se podría pensar que un pixel en $\mathbf{g}$ es el promedio de n pixeles contiguos de $\mathbf{f}$.

$$g_i = h_1 f_i + h_2 f_{i+1} + \ldots + h_n f_{i+n-1}, \text{ para } i = 1, \ldots, N.$$

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F



Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3			

h

1/3	1/3	1/3

Average: (4+6+9) / 3 = 6.33

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7		

Average: (6+9+6) / 3 = 7

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7	6.3	

Average: (9+6+4) / 3 = 6.33

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7	6.3	5.3

Average: (6+4+6) / 3 = 6.33

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7	6.3	5.3
6.3	6.3	7.3	9
5.7	3.3	4.3	4.3
10	10	10	10

Ejemplo para un movimiento de 3 pixeles

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

M = 6

G

6.3	7	6.3	5.3
6.3	6.3	7.3	9
5.7	3.3	4.3	4.3
10	10	10	10

N = 4

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

G

6.3	7	6.3	5.3
6.3	6.3	7.3	9
5.7	3.3	4.3	4.3
10	10	10	10

F

4	6	9	6	4	6
9	6	4	9	9	9
9	6	2	2	9	2
10	10	10	10	10	10

M

G

6.3	7	6.3	5.3
6.3	6.3	7.3	9
5.7	3.3	4.3	4.3
10	10	10	10

N

h

1/3	1/3	1/3

n

$$N = M-n+1$$
$$M = N+n-1$$

Si F tiene M columnas y el filtro tiene n elementos ¿cuántas columnas tiene G?

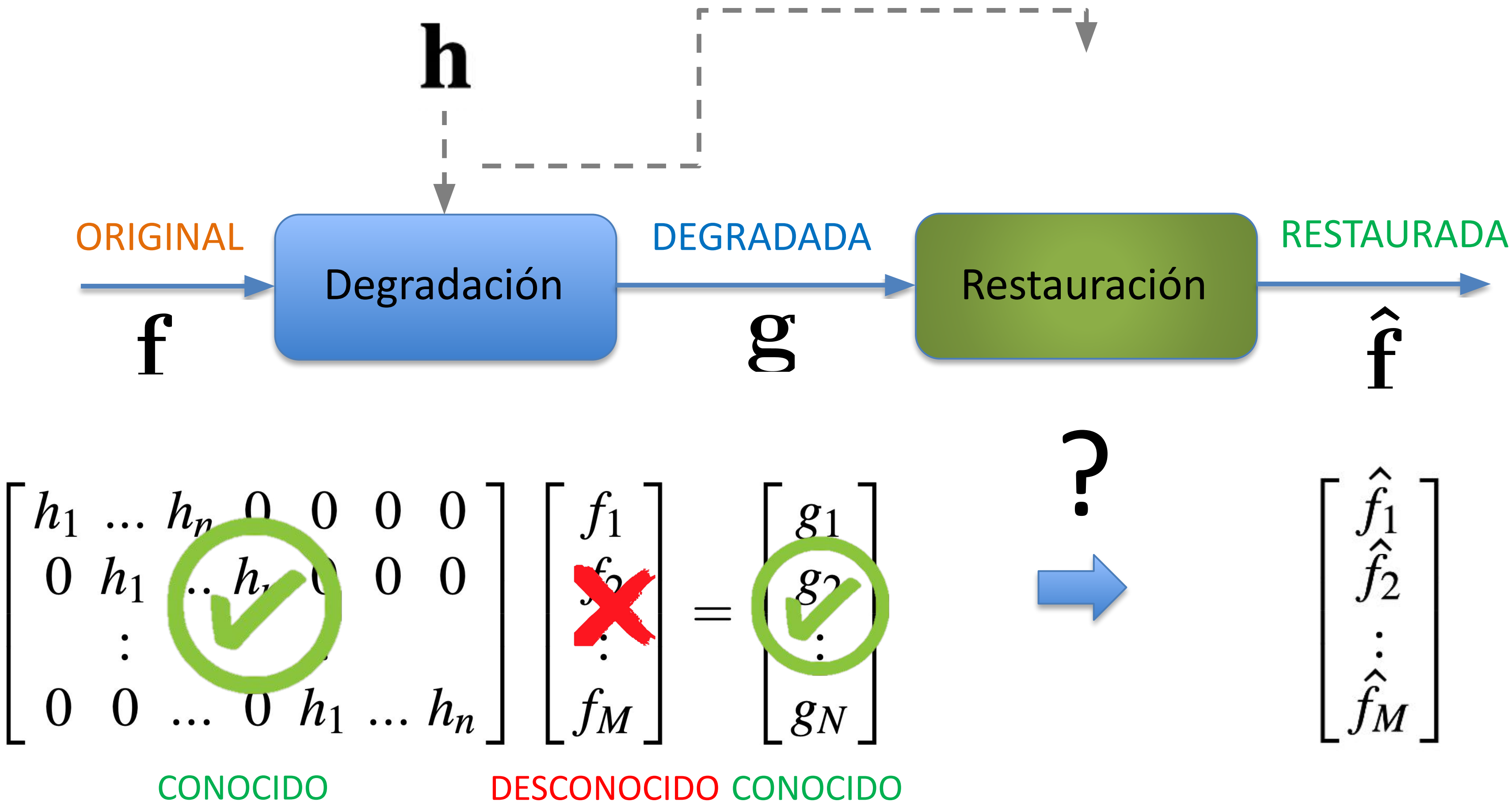
Modelación de una línea degradada
Movimiento Uniforme Horizontal

Para un movimiento de n pixeles, se podría pensar que un pixel en $\mathbf{g}$ es el promedio de n pixeles de $\mathbf{f}$.

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} * \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

$$h_i = 1/n$$

(modelo) ORIGINAL DEGRADADA



h
ORIGINAL
Degradación
DEGRADADA
Restauración
RESTAURADA
f
g
f̂
?
CONOCIDO
DESCONOCIDO
CONOCIDO

PREGUNTA: Conociendo $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h}$, ¿cómo obtener $\hat{\mathbf{f}}$?

El problema consiste en resolver este sistema
de N ecuaciones con M incógnitas

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

Pero $M > N$ ya que: $M = N + n - 1$

Hay más icógnitas que ecuaciones !!!

PREGUNTA: Conociendo $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h}$, ¿cómo obtener $\hat{\mathbf{f}}$?

Como hay N ecuaciones con M incógnitas con $M > N$, existen infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

La pregunta entonces sería ¿<u>cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración</u>?

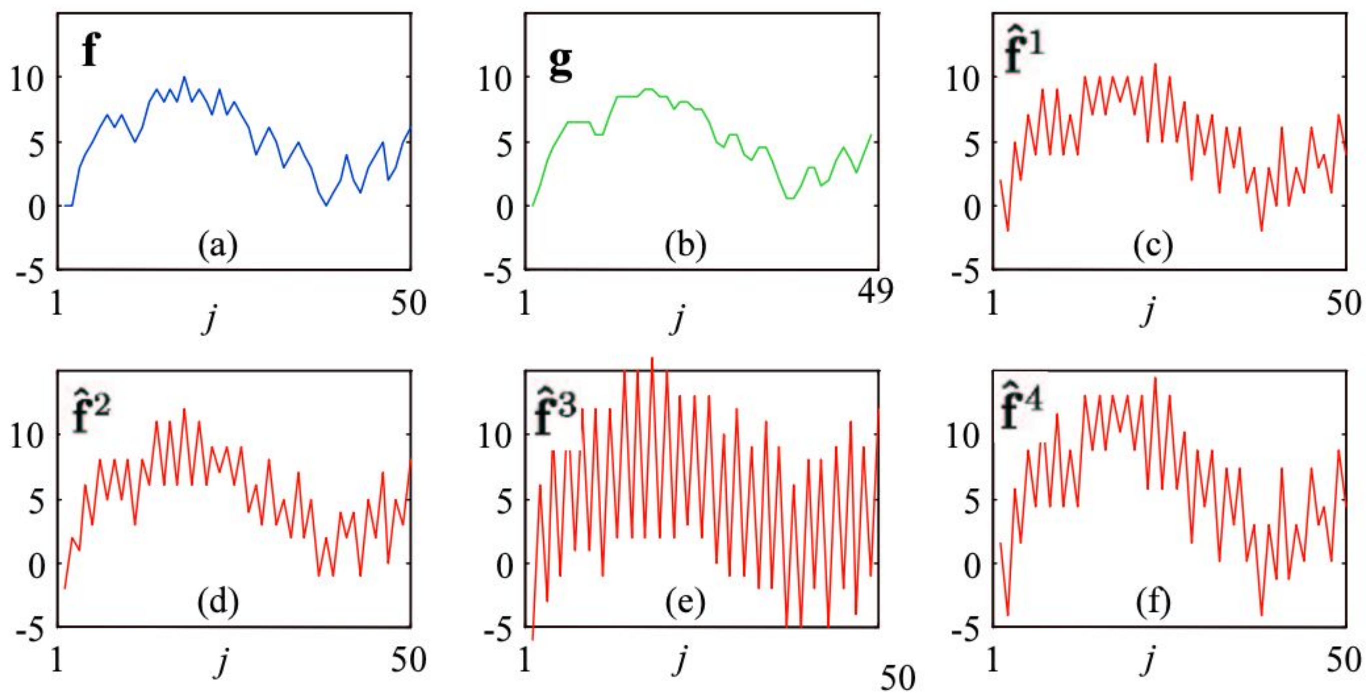


Figura 3: Restauración de una fila $\mathbf{f}$: a) fila original, b) fila degradada con $n = 2$, c), d) e) y f) cuatro posibles soluciones que satisfacen $\mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$ [7].

Como hay N ecuaciones con M incógnitas con $M > N$, existen infinitas soluciones

$$
\begin{bmatrix}
h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\
 & \vdots & & & \vdots & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}
$$

La pregunta entonces sería ¿cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración?

Es necesario contar con un criterio adicional para eliminar el rizado.

Como hay N ecuaciones con M incógnitas con $M > N$, existen infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

La pregunta entonces sería ¿cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración?

Es necesario contar con un criterio adicional para eliminar el rizado.

Entonces la solución $\hat{\mathbf{f}}$ debe satisfacer:

1) $\mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$

Como hay N ecuaciones con M incógnitas con $M > N$, existen infinitas soluciones

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

La pregunta entonces sería ¿cuál de estas infinitas soluciones podemos escoger para que sea una buena restauración?

Es necesario contar con un criterio adicional para eliminar el rizado.

Entonces la solución $\hat{\mathbf{f}}$ debe satisfacer:

1) $\mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$

2) $\mathrm{rizado}(\hat{\mathbf{f}}) \to \min$

Formulación del problema:

1) Se tiene una señal $\mathbf{g}$ de M elementos que ha sido producida por un proceso de degradación de la señal $\mathbf{f}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{Hf} = \mathbf{g} = \begin{bmatrix} h_1 & \ldots & h_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & \ldots & h_n & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & h_1 & \ldots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$$

2) Se debe encontrar la señal original a partir de $\mathbf{g}$ y de $\mathbf{H}$ usando un algoritmo de optimización planteado de la siguiente manera:

$$||\hat{\mathbf{f}}|| \rightarrow \min \quad \text{sujeto a } \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$$

La estimación de $\mathbf{f}$ es $\hat{\mathbf{f}}$.

Solución del Problema: (1/2)

$$||\hat{\mathbf{f}}|| \rightarrow \min \qquad \text{sujeto a} \quad \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$$

Usando multiplicadores de Lagrange: con $(\mathbf{W} = \mathbf{I})$

$$V(\mathbf{f}) = \lambda \parallel \mathbf{Hf} - \mathbf{g} \parallel^2 + \parallel \mathbf{f} \parallel^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} V(\mathbf{f}) = 2\lambda \mathbf{H}^\mathsf{T}(\mathbf{Hf} - \mathbf{g}) + 2\mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{W}\mathbf{f} = \mathbf{0};$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \underbrace{\lambda \left[\lambda \mathbf{H}^\mathsf{T}\mathbf{H} + \mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{W}\right]^{-1} \mathbf{H}^\mathsf{T}}_{\mathbf{A}} \mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{g}$$

$\mathbf{A}$ no depende de $\mathbf{g}$.

Solución del Problema: (2/2)

$$||\hat{\mathbf{f}}|| \rightarrow \min \qquad \text{sujeto a} \quad \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$$

:

Solución para una fila de la imagen

$$\boxed{\hat{\mathbf{f}} = \underbrace{\lambda \left[\lambda \mathbf{H}^{\mathsf{T}}\mathbf{H} + \mathbf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{W}\right]^{-1} \mathbf{H}^{\mathsf{T}}}_{\mathbf{A}} \mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{g}}$$

Para un movimiento horizontal de la imagen, las señales son vectores-fila, es necesario entonces calcular la transpuesta:

$$\hat{\mathbf{f}}^{\mathsf{T}} = [\mathbf{A}\mathbf{g}]^{\mathsf{T}} = \mathbf{g}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{G}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}}$$

Solución para toda la imagen