TeoriaComputacion_6

January 28, 2020

Teoría de la Computación

Gramáticas de Contexto Libre

Prof. Wladimir Rodriguez

wladimir.rodriguez@outlook.com

Departamento de Computación

0.1 Contenido

- Árbol de derivación.
- Ambigüedad.
- Algoritmos de Simplificación de Gramáticas:
- Eliminación de Símbolos y Producciones Inútiles.
- Eliminación de Producciones Nulas.
- Eliminación de Producciones Unitarias.
- Formas Normales:
  - Forma Normal de Chomsky.
  - Forma Normal de Greibach.

0.2 Gramáticas de Contexto Libre

- Una gramática $G = (V, T, P, S)$ se dice que es de contexto libre o de tipo 2 si y solo si todas las producciones tienen la forma:

$$A \to \alpha$$

donde $A \in V$ y $\alpha \in (V \cup T)^*$.

- Los lenguajes generados por estas gramáticas se llaman también de contexto libre o de tipo 2.

0.3 Arbol de Derivación

- $S \to a\ b\ c$
- $S \to (S + S)$

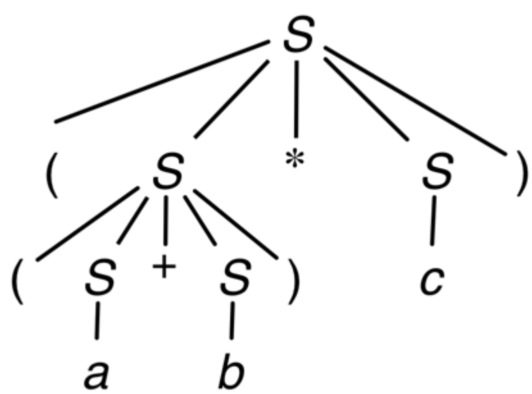
- $S \to (S{*}S)$
- Esta es una gramática libre de contexto: En la parte izquierda de las producciones solo aparece una variable. Al lenguage generado por esta gramática pertenece la palabra $((a+b){*}c)$. Solo hay que aplicar la siguiente cadena de producciones

$$S \Rightarrow (S{*}S) \Rightarrow ((S+S){*}S) \Rightarrow ((a+S){*}S) \Rightarrow ((a+b){*}S) \Rightarrow ((a+b){*}c)$$

0.3.1 Derivación:

$$S \Rightarrow (S{*}S) \Rightarrow ((S+S){*}S) \Rightarrow ((a+S){*}S) \Rightarrow ((a+b){*}S) \Rightarrow ((a+b){*}c)$$

0.3.2 Árbol:



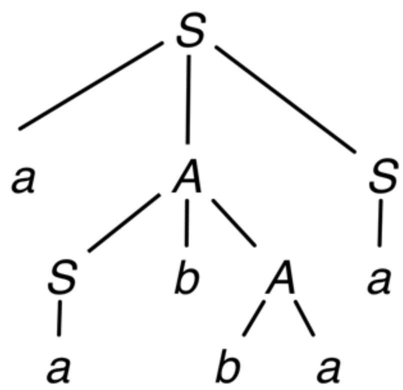
0.4 Construcción

- Cada nodo del árbol va a contener un símbolo.
- En el nodo raíz se pone el símbolo inicial S.
- Se efectúa una ramificación del árbol por cada producción que se aplique: Si a la variable de un nodo, A, se le aplica una determinada regla $A \to \alpha$, entonces para cada símbolo que aparezca en α se añade un hijo con el símbolo correspondiente, situados en el orden de izquierda a derecha.
- Este proceso se repite para todo paso de la derivación.
- Si la parte derecha es una cadena vacía, entonces se añade un solo hijo, etiquetado con ϵ.
- En cada momento, leyendo los nodos de izquierda a derecha se lee la palabra generada.

0.5 Ejemplo

$$S \to aAS, \qquad S \to a, \qquad A \to SbA, \qquad A \to SS, \qquad A \to ba$$

- La palabra $aabbaa$ tiene asociado el árbol:

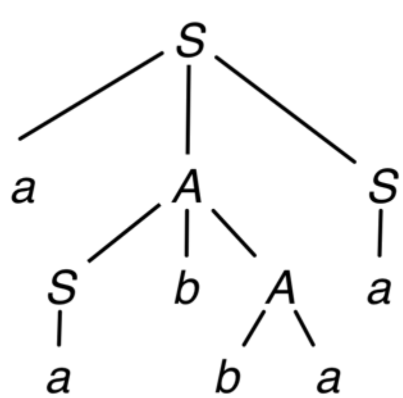


0.6 Árboles y Derivaciones

- Un árbol de derivación puede proceder de dos cadenas de derivación distintas.
  - Se llama derivación **por la izquierda** asociada a un árbol a aquella en la que siempre se deriva primero la primera variable (más a la izquierda) que aparece en la palabra.
  - Se llama derivación **por la derecha** asociada a un árbol a aquella en la que siempre se deriva primero la última variable (más a la derecha) que aparece en la palabra.

0.7 Ejemplo

- Dado el árbol de la palabra *aabbaa*



- Derivación por la izquierda:

$$S \Rightarrow aAS \Rightarrow aSbAS \Rightarrow aabAS \Rightarrow aabbaS \Rightarrow aabbaa$$

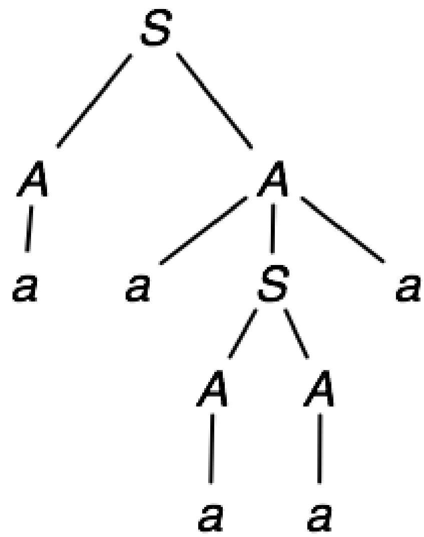
- Derivación por la derecha

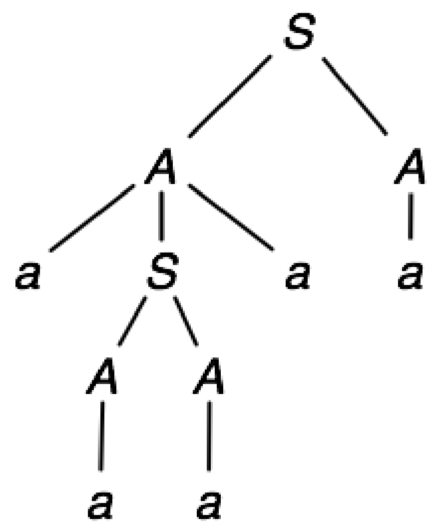
$$S \Rightarrow aAS \Rightarrow aAa \Rightarrow aSbAa \Rightarrow aSbbaa \Rightarrow aabbaa$$

0.8 Gramática Ambigua

- Una gramática se dice ambigua si existe una palabra con dos árboles de derivación distintos.

- Ejemplo: La gramática $S \rightarrow AA, A \rightarrow aSa, A \rightarrow a$ es ambigua, ya que la palabra $aaaaa$ tiene los dos arboles de derivación siguientes:

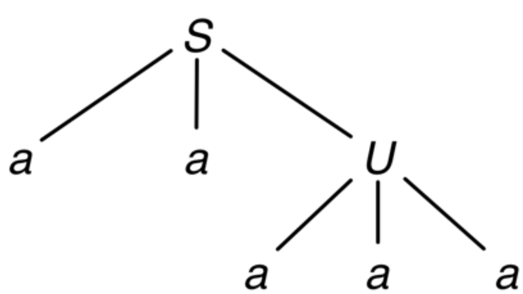




0.9 Lenguaje Inherentemente Ambiguo

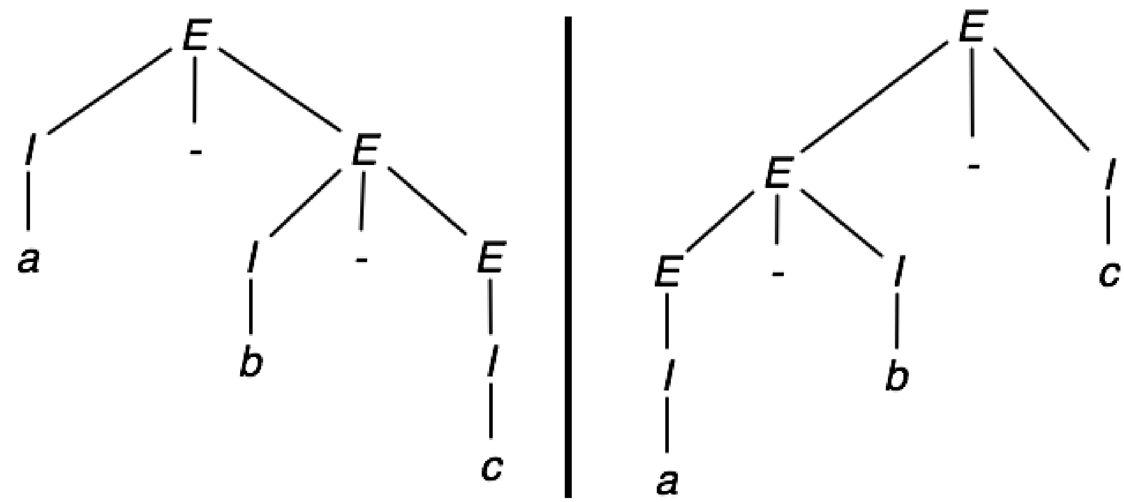
- Un lenguaje de tipo 2 es inherentemente ambiguo si toda gramática que lo genera es ambigua.
- Ejemplo: El lenguaje generado por la gramática anterior $S \rightarrow AA, A \rightarrow aSa, A \rightarrow a$, no es inherentemente ambiguo.
- Este lenguaje es $\{a^{2+3i} : i\ 0\}$ y puede ser generado por la gramática: $S \rightarrow aa, S \rightarrow aaU, U \rightarrow aaaU, U \rightarrow aaa$, que no es ambigua.

- Unico árbol para a^5:



0.10 Ejemplo 1

- $E \rightarrow I, E \rightarrow I - E, E \rightarrow E - I, I \rightarrow a\ b\ c\ d$ es ambigua, ya que la palabra $a - b - c$ admite dos árboles de derivación distintos:

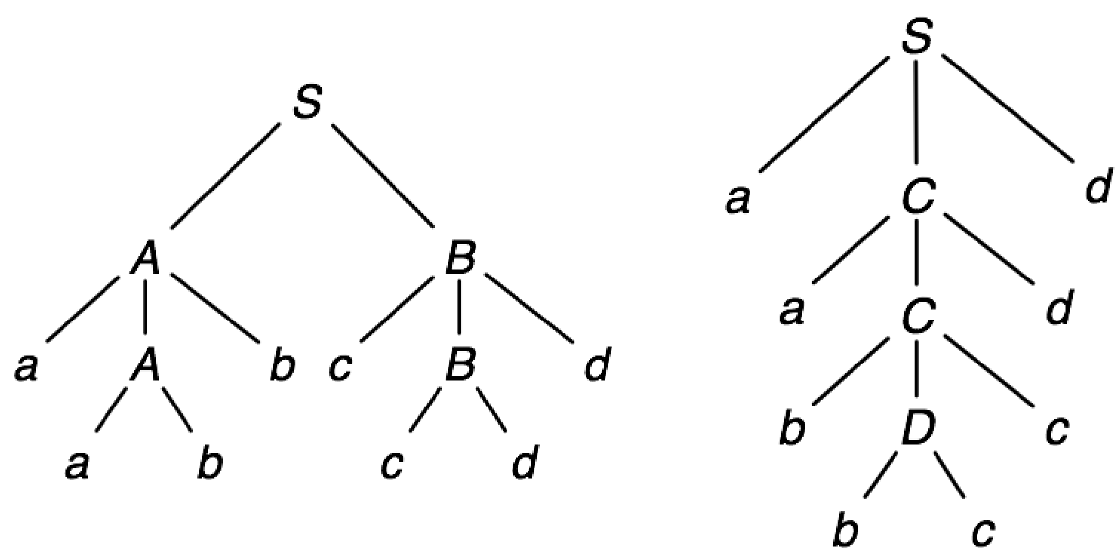


- Eliminando la producción $E \to I{-}E$ la gramática deja de ser ambigua.

0.11 Ejemplo 2

- Lenguaje:
$$L = \{a^n b^n c^m d^m : n \geq 1, m \geq 1\} \cup \{a^n b^m c^m d^n : n \geq 1, m \geq 1\}$$
- Gramática:

  $S \to AB, A \to ab, A \to aAb, B \to cd, B \to cBd, S \to aCd, C \to aCd, C \to bDc, C \to bc, D \to bDc, D \to b$
- La palabra *aabbccdd* tiene dos árboles de derivación distintos:



0.12 Símbolos y Producciones Inútiles

- Un símbolo $X \in (V \cup T)$ se dice útil si y solo si existe una cadena de derivaciones en G tal que

$$S \Rightarrow^* X \Rightarrow^* w \in T^*$$

- Una producción se dice útil si y solo si todos sus símbolos son útiles. Esto es equivalente a que pueda usarse en la derivación de alguna palabra del lenguaje asociado a la gramática.
- Eliminando todos los símbolos y producciones inútiles el lenguaje generado por la gramática no cambia.

0.13 Algoritmo

- El algoritmo para eliminar los símbolos y producciones inútiles consta de dos pasos:
    1. Eliminar las variables desde las que no se puede llegar a una palabra de T y las producciones en las que aparezcan.
    2. Eliminar aquellos símbolos que no sean alcanzables desde el símbolo inicial, S, y las producciones en las que estos aparezcan.

0.14 Orden de los Algoritmos

- Es importante aplicar los algoritmos anteriores en el orden especificado.

$$S \to AB, \qquad S \to a, \qquad A \to a$$

- En el primer paso se elimina B y la producción $S \to AB$.
- Entonces en el segundo se elimina la variable A y la producción $A \to a$.

- Si aplicamos primero el segundo algoritmo, entonces no se elimina nada.
- Al aplicar después el primero de los algoritmos se elimina B y la producción $S \to AB$.
- Donde todavía nos queda la variable inútil A.

$$S \to a, \qquad A \to a$$

0.15 Primera Parte

- Se diseña un algoritmo calculando V_t , conjunto de variables que se pueden subtituir por símbolos terminales.
- **Condición Básica**: Si $A \to u$, y $u \in T^*$, entonces $A \in V_t$
- **Condición Recursiva**: Si $A \to \beta_1 \cdots \beta_k$ y cada β_j está en $T \cup V_t$, entonces $A \in V_t$.

1. $Vt = 0$
2. Para cada producción de la forma $A \to w$, A se introduce en V_t.
3. Mientras V_t cambie
    1. Para cada producción $B \to \alpha$
        1. Si todas las variables de α pertenecen a V_t
            1. B se introduce en V_t
4. Eliminar las variables que esten en V y no en V_t
5. Eliminar todas las producciones donde aparezca una variable de las eliminadas en el paso anterior

0.16 Ejemplo

$S \rightarrow gAe,$	$S \rightarrow aYB,$	$S \rightarrow cY$	$A \rightarrow bBY$
$A \rightarrow ooC$	$B \rightarrow dd$	$B \rightarrow D$	$C \rightarrow jVB$
$C \rightarrow gi$	$D \rightarrow n$	$U \rightarrow kW$	$V \rightarrow baXXX$
$V \rightarrow oV$	$W \rightarrow c$	$X \rightarrow fV$	$Y \rightarrow Yhm$

- $V_t = \{\}$

$S \rightarrow gAe,$	$S \rightarrow aYB,$	$S \rightarrow cY$	$A \rightarrow bBY$
$A \rightarrow ooC$	$\boxed{B \rightarrow dd}$	$B \rightarrow D$	$C \rightarrow jVB$
$C \rightarrow gi$	$D \rightarrow n$	$U \rightarrow kW$	$V \rightarrow baXXX$
$V \rightarrow oV$	$W \rightarrow c$	$X \rightarrow fV$	$Y \rightarrow Yhm$

- $V_t = \{\}$

$S \rightarrow gAe,$	$S \rightarrow aYB,$	$S \rightarrow cY$	$A \rightarrow bBY$
$A \rightarrow ooC$	$B \rightarrow dd$	$B \rightarrow D$	$C \rightarrow jVB$
$C \rightarrow gi$	$D \rightarrow n$	$U \rightarrow kW$	$V \rightarrow baXXX$
$V \rightarrow oV$	$W \rightarrow c$	$X \rightarrow fV$	$Y \rightarrow Yhm$

- $V_t = \{B,\}$

$S \rightarrow gAe,$	$S \rightarrow aYB,$	$S \rightarrow cY$	$A \rightarrow bBY$
$A \rightarrow ooC$	$B \rightarrow dd$	$B \rightarrow D$	$C \rightarrow jVB$
$\boxed{C \rightarrow gi}$	$D \rightarrow n$	$U \rightarrow kW$	$V \rightarrow baXXX$
$V \rightarrow oV$	$W \rightarrow c$	$X \rightarrow fV$	$Y \rightarrow Yhm$

- $V_t = \{B,\}$

$$
\begin{array}{llll}
S \rightarrow gAe, & S \rightarrow aYB, & S \rightarrow cY & A \rightarrow bBY \\
A \rightarrow ooC & B \rightarrow dd & B \rightarrow D & C \rightarrow jVB \\
C \rightarrow gi & D \rightarrow n & U \rightarrow kW & V \rightarrow baXXX \\
V \rightarrow oV & W \rightarrow c & X \rightarrow fV & Y \rightarrow Yhm
\end{array}
$$

- $V_t = \{B, C\}$

$$
\begin{array}{llll}
S \rightarrow gAe, & S \rightarrow aYB, & S \rightarrow cY & A \rightarrow bBY \\
A \rightarrow ooC & B \rightarrow dd & B \rightarrow D & C \rightarrow jVB \\
C \rightarrow gi & \boxed{D \rightarrow n} & U \rightarrow kW & V \rightarrow baXXX \\
V \rightarrow oV & W \rightarrow c & X \rightarrow fV & Y \rightarrow Yhm
\end{array}
$$

- $V_t = \{B, C\}$

$$
\begin{array}{llll}
S \rightarrow gAe, & S \rightarrow aYB, & S \rightarrow cY & A \rightarrow bBY \\
A \rightarrow ooC & B \rightarrow dd & B \rightarrow D & C \rightarrow jVB \\
C \rightarrow gi & D \rightarrow n & U \rightarrow kW & V \rightarrow baXXX \\
V \rightarrow oV & W \rightarrow c & X \rightarrow fV & Y \rightarrow Yhm
\end{array}
$$

- $V_t = \{B, C, D\}$

$$
\begin{array}{llll}
S \rightarrow gAe, & S \rightarrow aYB, & S \rightarrow cY & A \rightarrow bBY \\
A \rightarrow ooC & B \rightarrow dd & B \rightarrow D & C \rightarrow jVB \\
C \rightarrow gi & D \rightarrow n & U \rightarrow kW & V \rightarrow baXXX \\
V \rightarrow oV & \boxed{W \rightarrow c} & X \rightarrow fV & Y \rightarrow Yhm
\end{array}
$$

- $V_t = \{B, C, D\}$

$S \to gAe,$ $S \to aYB,$ $S \to cY$ $A \to bBY$

$A \to ooC$ $B \to dd$ $B \to D$ $C \to jVB$

$C \to gi$ $D \to n$ $U \to kW$ $V \to baXXX$

$V \to oV$ $W \to c$ $X \to fV$ $Y \to Yhm$

- $V_t = \{B, C, D, W\}$

$\boxed{S \to gAe,}$ $S \to aYB,$ $S \to cY$ $A \to bBY$

$A \to ooC$ $B \to dd$ $B \to D$ $C \to jVB$

$C \to gi$ $D \to n$ $U \to kW$ $V \to baXXX$

$V \to oV$ $W \to c$ $X \to fV$ $Y \to Yhm$

- $V_t = \{B, C, D, W\}$

$S \to gAe,$ $\boxed{S \to aYB,}$ $S \to cY$ $A \to bBY$

$A \to ooC$ $B \to dd$ $B \to D$ $C \to jVB$

$C \to gi$ $D \to n$ $U \to kW$ $V \to baXXX$

$V \to oV$ $W \to c$ $X \to fV$ $Y \to Yhm$

- $V_t = \{B, C, D, W\}$

$S \to gAe,$ $S \to aYB,$ $\boxed{S \to cY}$ $A \to bBY$

$A \to ooC$ $B \to dd$ $B \to D$ $C \to jVB$

$C \to gi$ $D \to n$ $U \to kW$ $V \to baXXX$

$V \to oV$ $W \to c$ $X \to fV$ $Y \to Yhm$

- $V_t = \{B, C, D, W\}$

$S \rightarrow gAe,$	$S \rightarrow aYB,$	$S \rightarrow cY$	$\boxed{A \rightarrow bBY}$
$A \rightarrow ooC$	$B \rightarrow dd$	$B \rightarrow D$	$C \rightarrow jVB$
$C \rightarrow gi$	$D \rightarrow n$	$U \rightarrow kW$	$V \rightarrow baXXX$
$V \rightarrow oV$	$W \rightarrow c$	$X \rightarrow fV$	$Y \rightarrow Yhm$

- $V_t = \{B, C, D, W\}$

$S \rightarrow gAe,$	$S \rightarrow aYB,$	$S \rightarrow cY$	$A \rightarrow bBY$
$\boxed{A \rightarrow ooC}$	$B \rightarrow dd$	$B \rightarrow D$	$C \rightarrow jVB$
$C \rightarrow gi$	$D \rightarrow n$	$U \rightarrow kW$	$V \rightarrow baXXX$
$V \rightarrow oV$	$W \rightarrow c$	$X \rightarrow fV$	$Y \rightarrow Yhm$

- $V_t = \{B, C, D, W\}$

$S \rightarrow gAe,$	$S \rightarrow aYB,$	$S \rightarrow cY$	$A \rightarrow bBY$
$A \rightarrow ooC$	$B \rightarrow dd$	$B \rightarrow D$	$C \rightarrow jVB$
$C \rightarrow gi$	$D \rightarrow n$	$U \rightarrow kW$	$V \rightarrow baXXX$
$V \rightarrow oV$	$W \rightarrow c$	$X \rightarrow fV$	$Y \rightarrow Yhm$

- $V_t = \{B, C, D, W, A\}$

$S \rightarrow gAe,$	$S \rightarrow aYB,$	$S \rightarrow cY$	$A \rightarrow bBY$
$A \rightarrow ooC$	$B \rightarrow dd$	$B \rightarrow D$	$C \rightarrow jVB$
$C \rightarrow gi$	$D \rightarrow n$	$\boxed{U \rightarrow kW}$	$V \rightarrow baXXX$
$V \rightarrow oV$	$W \rightarrow c$	$X \rightarrow fV$	$Y \rightarrow Yhm$

- $V_t = \{B, C, D, W, A\}$

$$
\begin{array}{llll}
S \rightarrow gAe, & S \rightarrow aYB, & S \rightarrow cY & A \rightarrow bBY \\
A \rightarrow ooC & B \rightarrow dd & B \rightarrow D & C \rightarrow jVB \\
C \rightarrow gi & D \rightarrow n & U \rightarrow kW & V \rightarrow baXXX \\
V \rightarrow oV & W \rightarrow c & X \rightarrow fV & Y \rightarrow Yhm
\end{array}
$$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, U\}$

$$
\begin{array}{llll}
S \rightarrow gAe, & S \rightarrow aYB, & S \rightarrow cY & A \rightarrow bBY \\
A \rightarrow ooC & B \rightarrow dd & B \rightarrow D & C \rightarrow jVB \\
C \rightarrow gi & D \rightarrow n & U \rightarrow kW & \boxed{V \rightarrow baXXX} \\
V \rightarrow oV & W \rightarrow c & X \rightarrow fV & Y \rightarrow Yhm
\end{array}
$$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, U\}$

$$
\begin{array}{llll}
S \rightarrow gAe, & S \rightarrow aYB, & S \rightarrow cY & A \rightarrow bBY \\
A \rightarrow ooC & B \rightarrow dd & B \rightarrow D & C \rightarrow jVB \\
C \rightarrow gi & D \rightarrow n & U \rightarrow kW & V \rightarrow baXXX \\
\boxed{V \rightarrow oV} & W \rightarrow c & X \rightarrow fV & Y \rightarrow Yhm
\end{array}
$$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, U\}$

$$
\begin{array}{llll}
S \rightarrow gAe, & S \rightarrow aYB, & S \rightarrow cY & A \rightarrow bBY \\
A \rightarrow ooC & B \rightarrow dd & B \rightarrow D & C \rightarrow jVB \\
C \rightarrow gi & D \rightarrow n & U \rightarrow kW & V \rightarrow baXXX \\
V \rightarrow oV & W \rightarrow c & \boxed{X \rightarrow fV} & Y \rightarrow Yhm
\end{array}
$$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, U\}$

$S \to gAe,$	$S \to aYB,$	$S \to cY$	$A \to bBY$
$A \to ooC$	$B \to dd$	$B \to D$	$C \to jVB$
$C \to gi$	$D \to n$	$U \to kW$	$V \to baXXX$
$V \to oV$	$W \to c$	$X \to fV$	$\boxed{Y \to Yhm}$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, U\}$

$\boxed{S \to gAe,}$	$S \to aYB,$	$S \to cY$	$A \to bBY$
$A \to ooC$	$B \to dd$	$B \to D$	$C \to jVB$
$C \to gi$	$D \to n$	$U \to kW$	$V \to baXXX$
$V \to oV$	$W \to c$	$X \to fV$	$Y \to Yhm$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, U\}$

$S \to gAe,$	$S \to aYB,$	$S \to cY$	$A \to bBY$
$A \to ooC$	$B \to dd$	$B \to D$	$C \to jVB$
$C \to gi$	$D \to n$	$U \to kW$	$\boxed{V \to baXXX}$
$V \to oV$	$W \to c$	$X \to fV$	$Y \to Yhm$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, S\}$

$S \to gAe,$	$S \to aYB,$	$S \to cY$	$A \to bBY$
$A \to ooC$	$B \to dd$	$B \to D$	$C \to jVB$
$C \to gi$	$D \to n$	$U \to kW$	$V \to baXXX$
$\boxed{V \to oV}$	$W \to c$	$X \to fV$	$Y \to Yhm$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, S\}$

$$\begin{array}{llll}
S \rightarrow gAe, & S \rightarrow aYB, & S \rightarrow cY & A \rightarrow bBY \\
A \rightarrow ooC & B \rightarrow dd & B \rightarrow D & C \rightarrow jVB \\
C \rightarrow gi & D \rightarrow n & U \rightarrow kW & V \rightarrow baXXX \\
V \rightarrow oV & W \rightarrow c & \boxed{X \rightarrow fV} & Y \rightarrow Yhm
\end{array}$$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, S\}$

$$\begin{array}{llll}
S \rightarrow gAe, & S \rightarrow aYB, & S \rightarrow cY & A \rightarrow bBY \\
A \rightarrow ooC & B \rightarrow dd & B \rightarrow D & C \rightarrow jVB \\
C \rightarrow gi & D \rightarrow n & U \rightarrow kW & V \rightarrow baXXX \\
V \rightarrow oV & W \rightarrow c & X \rightarrow fV & \boxed{Y \rightarrow Yhm}
\end{array}$$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, S\}$

$$\begin{array}{llll}
S \rightarrow gAe, & S \rightarrow aYB, & S \rightarrow cY & A \rightarrow bBY \\
A \rightarrow ooC & B \rightarrow dd & B \rightarrow D & C \rightarrow jVB \\
C \rightarrow gi & D \rightarrow n & U \rightarrow kW & \boxed{V \rightarrow baXXX} \\
V \rightarrow oV & W \rightarrow c & X \rightarrow fV & Y \rightarrow Yhm
\end{array}$$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, S\}$

$$\begin{array}{llll}
S \rightarrow gAe, & S \rightarrow aYB, & S \rightarrow cY & A \rightarrow bBY \\
A \rightarrow ooC & B \rightarrow dd & B \rightarrow D & C \rightarrow jVB \\
C \rightarrow gi & D \rightarrow n & U \rightarrow kW & V \rightarrow baXXX \\
\boxed{V \rightarrow oV} & W \rightarrow c & X \rightarrow fV & Y \rightarrow Yhm
\end{array}$$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, S\}$

$$S \to gAe, \quad S \to aYB, \quad S \to cY \quad A \to bBY$$
$$A \to ooC \quad B \to dd \quad B \to D \quad C \to jVB$$
$$C \to gi \quad D \to n \quad U \to kW \quad V \to baXXX$$
$$V \to oV \quad W \to c \quad \boxed{X \to fV} \quad Y \to Yhm$$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, S\}$

$$S \to gAe, \quad S \to aYB, \quad S \to cY \quad A \to bBY$$
$$A \to ooC \quad B \to dd \quad B \to D \quad C \to jVB$$
$$C \to gi \quad D \to n \quad U \to kW \quad V \to baXXX$$
$$V \to oV \quad W \to c \quad X \to fV \quad \boxed{Y \to Yhm}$$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, S\}$

$$S \to gAe, \quad S \to aYB, \quad S \to cY \quad A \to bBY$$
$$A \to ooC \quad B \to dd \quad B \to D \quad C \to jVB$$
$$C \to gi \quad D \to n \quad U \to kW \quad V \to baXXX$$
$$V \to oV \quad W \to c \quad X \to fV \quad Y \to Yhm$$

- $V_t = \{B, C, D, W, A, S\}$ $\qquad V - V_t = \{V, X, Y\}$

$$S \to gAe,$$
$$A \to ooC \quad B \to dd \quad B \to D$$
$$C \to gi \quad D \to n \quad U \to kW$$
$$W \to c$$

0.17 Segunda Parte

- Realizamos una búsqueda recursiva a partir del símbolo inicial S de todos los símbolos que se pueden alcanzar a partir de el.

$$S \to aAd, \qquad S \to fX, \qquad A \to b, \qquad A \to CEd, \qquad \cdots$$

- $V_S =$ conjunto de variables obtenidas
- $T_S =$ conjunto símbolos terminales obtenidos
- $J =$ conjunto variables por analizar

1. $J = \{S\}, V_S = \{S\}, T_S = \emptyset$
2. Mientras $J \neq \emptyset$
    1. Extraer un elemento de $J : A, (J = J - \{A\})$.
    2. Para cada produccion de la forma $A \to \alpha$
        1. Para cada variable B en α
            1. Si B no está en V_S añadir B a J y a V_S
        2. Poner todos los símbolos terminales de α en T_S
3. Eliminar todas las variables que no estén en V_S y todos los símbolos terminales que no estén en T_S.
4. Eliminar todas las producciones donde aparezca un símbolo o variable de los eliminados en el paso anterior.

$$S \longrightarrow gAe,$$

$$A \longrightarrow ooC \qquad B \longrightarrow dd \qquad B \longrightarrow D$$

$$C \longrightarrow gi \qquad D \longrightarrow n \qquad U \longrightarrow kW$$

$$W \longrightarrow c$$

$V_s = \{S\} J = \{S\} T_s = \{\}$Variable analizada:

$$\boxed{S \rightarrow gAe,}$$

$$A \rightarrow ooC \qquad B \rightarrow dd \qquad B \rightarrow D$$

$$C \rightarrow gi \qquad D \rightarrow n \qquad U \rightarrow kW$$

$$W \rightarrow c$$

$V_s = \{S\} J = \{\} T_s = \{\}$Variable analizada: S

$$S \rightarrow gAe,$$

$$A \rightarrow ooC \qquad B \rightarrow dd \qquad B \rightarrow D$$

$$C \rightarrow gi \qquad D \rightarrow n \qquad U \rightarrow kW$$

$$W \rightarrow c$$

$V_s = \{S, A\} J = \{A\} T_s = \{g, e\}$Variable analizada:

$$S \rightarrow gAe,$$

$$\boxed{A \rightarrow ooC} \qquad B \rightarrow dd \qquad B \rightarrow D$$

$$C \rightarrow gi \qquad D \rightarrow n \qquad U \rightarrow kW$$

$$W \rightarrow c$$

$V_s = \{S, A\} J = \{\} T_s = \{g, e\}$Variable analizada: A

$$S \longrightarrow gAe,$$

$$A \longrightarrow ooC \qquad B \longrightarrow dd \qquad B \longrightarrow D$$

$$C \longrightarrow gi \qquad D \longrightarrow n \qquad U \longrightarrow kW$$

$$W \longrightarrow c$$

$V_s = \{S, A, C\} J = \{C\} T_s = \{g, e, o\}$Variable analizada:

$$S \longrightarrow gAe,$$

$$A \longrightarrow ooC \qquad B \longrightarrow dd \qquad B \longrightarrow D$$

$$\boxed{C \longrightarrow gi} \qquad D \longrightarrow n \qquad U \longrightarrow kW$$

$$W \longrightarrow c$$

$V_s = \{S, A, C\} J = \{\} T_s = \{g, e, o\}$Variable analizada: C

$$S \rightarrow gAe,$$

$$A \rightarrow ooC \qquad B \not\rightarrow dd \qquad B \not\rightarrow D$$

$$C \rightarrow gi \qquad D \not\rightarrow n \qquad U \not\rightarrow kW$$

$$W \not\rightarrow c$$

$$V_s = \{S, A, C\} J = \{\} T_s = \{g, e, o, i\} \text{Variable analizada:}$$

- Unica posible derivación: $S \Rightarrow gAe \Rightarrow gooCe \Rightarrow googie$
- Lenguaje generado: $\{googie\}$

0.18 Lenguaje Vacío

- Si el lenguaje generado por una gramática es vacío, esto se detecta en que la variable S resulta inútil en el primer algoritmo. En ese caso se pueden eliminar directamente todas las producciones, pero no el símbolo S.
- Ejemplo:

$$S \rightarrow aSb, \qquad S \rightarrow bcD, \qquad S \rightarrow cSE,$$

$$E \rightarrow aDb, \qquad F \rightarrow abc, \qquad E \rightarrow abF$$

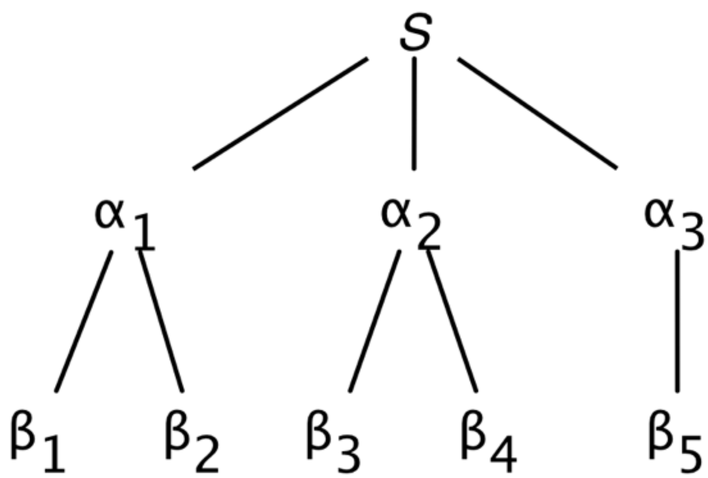
- $V_t = \{F, E\}, \qquad L(G) = \emptyset$

0.19 Formas Normales

- Definen unas características que deben de verificar todas las producciones de una gramática.
  - Producciones nulas
  - Producciones unitarias
  - Forma normal de Chomsky
  - Forma normal de Greibach

0.20 Motivación: El problema de la Pertenencia

- **Problema**: Dada una gramática independiente del contexto G y una palabra u, ¿pertenece u a $L(G)$?



- Si la palabra es generada, nos sale en esta búsqueda. Si la palabra no es generada, ¿hasta qué profundidad tenemos que generar para convencernos de que no se puede?

0.21 Producciones Nulas

- $A \to \epsilon$
- Algoritmo que dada una gramática G, construye una gramática G_n sin producciones nulas y tal que $L(G_n) = L(G) - \{\epsilon\}$.
- Si tenemos,

$$A \to \epsilon, \qquad D \to aABcD \Rightarrow aABc \Rightarrow aBc$$

- Añadimos $D \to aBc$
- Si también $B \to \epsilon$, entonces habría que añadir

$$D \to aBc, \qquad D \to aAc, \qquad D \to ac$$

0.22 Variables Anulables

- Si tenemos $C \to AB$, $A \to \epsilon$, $B \to \epsilon$, habría que añadir, al quitar las producciones nulas:

$$C \to A, \qquad C \to B, \qquad C \to \epsilon$$

- Y después habría que eliminar $C \to \epsilon$
- Nosotros vamos a calcular desde el principio todas las variables, E, tales que en algún momento aparece $E \to \epsilon$. Estas variables se dicen anulables. Son variables tales que $E \Rightarrow^*$
- Después vamos a eliminar todas las producciones nulas y a añadir las producciones que compensen esta eliminación.

0.23 Algoritmo (1)

- H es el conjunto de las variables anulables

- Cálculo de Variables Anulables:

1. $H =$
2. Para cada produccion $A \to \epsilon$, se hace $H = H \cup \{A\}$
3. Mientras H cambie
   1. Para cada produccion $B \to A_1 A_2 \cdots A_n$,
      donde $A_i \in H$ para todo $i = 1, \cdots, n$, se hace $H = H \cup \{B\}$

0.24 Algoritmo (2)

- Eliminar y Añadir:

  1. Se eliminan todas las producciones nulas de la gramática
  2. Para cada produccion de la gramática de la forma $A \to \alpha_1, \cdots \alpha_n$, donde $\alpha_i \in V \cup T$.
     1. Se añaden todas las producciones de la forma
        $A \to \beta_1, \cdots \beta_n$, donde $\beta_i = \alpha_i$ si $\alpha_i \in H$ y $(\beta_i = \alpha_i) \vee (\beta_i = \epsilon)$ si $\alpha \in H$
        y no todos los β_i puedan ser nulos al mismo tiempo

0.25 Palabra Vacía

- Si G generaba inicialmente la palabra nula, entonces la nueva gramática no la genera.
- Se puede saber si se pierde la palabra vacía comprobando si $S \in H$.
- Si tenemos una gramática G, podemos construir una gramática G_v con una sola producción nula y que genera el mismo lenguaje que G más la palabra vacía. Para ello se añade una nueva variable, S_v, que pasa a ser el símbolo inicial de la nueva gramática, G_v. También se añaden dos producciones:

$$S_v \to S, \qquad S_v \to \epsilon$$

0.26 Ejemplo

- Eliminar las producciones nulas de la siguiente gramática:

$$S \longrightarrow ABb, \quad S \longrightarrow ABC, \quad C \longrightarrow abC,$$

$$B \longrightarrow bB, \quad B \longrightarrow \varepsilon, \quad A \longrightarrow aA,$$

$$A \longrightarrow \varepsilon, \quad C \longrightarrow AB$$

- Cálculo de $H = \{\}$

$$
\begin{array}{lll}
S \longrightarrow ABb, & S \longrightarrow ABC, & C \longrightarrow abC, \\
B \longrightarrow bB, & \boxed{B \longrightarrow \varepsilon,} & A \longrightarrow aA, \\
\boxed{A \longrightarrow \varepsilon,} & C \longrightarrow AB &
\end{array}
$$

- Cálculo de $H = \{A, B\}$

$$
\begin{array}{lll}
S \longrightarrow ABb, & S \longrightarrow ABC, & C \longrightarrow abC, \\
B \longrightarrow bB, & B \longrightarrow \varepsilon, & A \longrightarrow aA, \\
A \longrightarrow \varepsilon, & \boxed{C \longrightarrow AB} &
\end{array}
$$

- Cálculo de $H = \{A, B, C\}$

$$
\begin{array}{lll}
S \longrightarrow ABb, & \boxed{S \longrightarrow ABC,} & C \longrightarrow abC, \\
B \longrightarrow bB, & B \longrightarrow \varepsilon, & A \longrightarrow aA, \\
A \longrightarrow \varepsilon, & C \longrightarrow AB &
\end{array}
$$

- Cálculo de $H = \{A, B, C, S\}$

$$S \to ABb, \quad S \to ABC, \quad C \to abC,$$

$$B \to bB, \quad B \cancel{\to} \varepsilon, \quad A \to aA,$$

$$A \cancel{\to} \varepsilon, \quad C \to AB$$

- Cálculo de $H = \{A, B, C, S\}$
- Al ser S anulable la palabra vacía puede generarse mediante esta gramática.

0.27 Ejemplo: Segunda Parte

$$S \to ABb, \quad S \to ABC, \quad C \to abC, \quad B \to bB,$$

$$A \to aA, \quad C \to AB$$

$$H = \{A, B, C, S\}$$

$$\boxed{S \to ABb,} \quad S \to ABC, \quad C \to abC, \quad B \to bB,$$

$$A \to aA, \quad C \to AB \quad \boxed{S \to Ab,} \boxed{S \to Bb,}$$

$$\boxed{S \to b,}$$

$$H = \{A, B, C, S\}$$

$S \to ABb,$	$\boxed{S \to ABC,}$	$C \to abC,$	$B \to bB,$
$A \to aA,$	$C \to AB,$	$S \to Ab,$	$S \to Bb,$
$S \to b,$	$\boxed{S \to AB,}$	$\boxed{S \to AC,}$	$\boxed{S \to BC,}$
$\boxed{S \to A,}$	$\boxed{S \to B,}$	$\boxed{S \to C,}$	

$$H = \{A, B, C, S\}$$

$S \to ABb,$	$S \to ABC,$	$\boxed{C \to abC,}$	$B \to bB,$
$A \to aA,$	$C \to AB,$	$S \to Ab,$	$S \to Bb,$
$S \to b,$	$S \to AB,$	$S \to AC,$	$S \to BC,$
$S \to A,$	$S \to B,$	$S \to C,$	$\boxed{C \to ab,}$

$$H = \{A, B, C, S\}$$

$S \to ABb,$	$S \to ABC,$	$C \to abC,$	$\boxed{B \to bB,}$
$A \to aA,$	$C \to AB,$	$S \to Ab,$	$S \to Bb,$
$S \to b,$	$S \to AB,$	$S \to AC,$	$S \to BC,$
$S \to A,$	$S \to B,$	$S \to C,$	$C \to ab,$
$\boxed{B \to b,}$			

$$H = \{A, B, C, S\}$$

$$
\begin{array}{llll}
S \to ABb, & S \to ABC, & C \to abC, & B \to bB, \\
\boxed{A \to aA,} & C \to AB, & S \to Ab, & S \to Bb, \\
S \to b, & S \to AB, & S \to AC, & S \to BC, \\
S \to A, & S \to B, & S \to C, & C \to ab, \\
B \to b, & \boxed{A \to a,} & &
\end{array}
$$

$$H = \{A, B, C, S\}$$

$$
\begin{array}{llll}
S \to ABb, & S \to ABC, & C \to abC, & B \to bB, \\
A \to aA, & \boxed{C \to AB,} & S \to Ab, & S \to Bb, \\
S \to b, & S \to AB, & S \to AC, & S \to BC, \\
S \to A, & S \to B, & S \to C, & C \to ab, \\
B \to b, & A \to a, & \boxed{C \to B,} & \boxed{C \to A,}
\end{array}
$$

$$H = \{A, B, C, S\}$$

$$S \to ABb, \quad S \to ABC, \quad C \to abC, \quad B \to bB,$$
$$A \to aA, \quad C \to AB, \quad S \to Ab, \quad S \to Bb,$$
$$S \to b, \quad S \to AB, \quad S \to AC, \quad S \to BC,$$
$$S \to A, \quad S \to B, \quad S \to C, \quad C \to ab,$$
$$B \to b, \quad A \to a, \quad C \to B, \quad C \to A,$$

$$H = \{A, B, C, S\}$$

0.28 Producciones Unitarias

$$A \to B, \qquad A, B \in V$$

- Si queremos eliminar $A \to B$, perdemos la posibilidad de

$$A \Rightarrow B \Rightarrow \alpha$$

- Para eliminar $A \to B$, añadimos todas las producciones $A \to \alpha$ donde $B \to \alpha$ es una producción
- Si tenemos $B \to C$ introduciríamos una unitaria que habría que eliminar después. Para poder eliminar todas de una vez calculamos, H : conjunto de parejas (A, B) tales que B derivable a partir de A.

0.29 Algoritmo

1. $H =$
2. Para toda producción de la forma $A \to B$, la pareja (A, B) se introduce en H.
3. Mientras H cambie
    1. Para cada dos parejas $(A, B), (B, C) \in H$
        1. Si la pareja $(A, C) \notin H$
           (A, C) se introduce en H
4. Se eliminan las producciones unitarias
5. Para cada pareja $(B, A) \in H$
    1. Para cada producción $A \in \alpha$
        1. Se añade una producción $B \in \alpha$

0.30 Ejemplo

$$S \longrightarrow aBc, \qquad S \longrightarrow A, \qquad A \longrightarrow aAb,$$

$$A \longrightarrow B, \qquad A \longrightarrow cd, \qquad B \longrightarrow ccBS,$$

$$B \longrightarrow dc,$$

- Cálculo de $H = \{\}$

$$S \longrightarrow aBc, \qquad \boxed{S \longrightarrow A,} \qquad A \longrightarrow aAb,$$

$$\boxed{A \longrightarrow B,} \qquad A \longrightarrow cd, \qquad B \longrightarrow ccBS,$$

$$B \longrightarrow dc,$$

- Cálculo de $H = \{(S, A), (A, B)\}$

$$S \longrightarrow aBc, \qquad S \longrightarrow A, \qquad A \longrightarrow aAb,$$

$$A \longrightarrow B, \qquad A \longrightarrow cd, \qquad B \longrightarrow ccBS,$$

$$B \longrightarrow dc,$$

- Cálculo de $H = \{(S, A), (A, B), (S, B)\}$

$$S \rightarrow aBc, \qquad S \cancel{\rightarrow} A, \qquad A \rightarrow aAb,$$

$$A \cancel{\rightarrow} B, \qquad A \rightarrow cd, \qquad B \rightarrow ccBS,$$

$$B \rightarrow dc,$$

- Cálculo de $H = \{(S, A), (A, B), (S, B)\}$

$$S \rightarrow aBc, \qquad A \rightarrow aAb, \qquad A \rightarrow cd,$$

$$B \rightarrow ccBS, \qquad B \rightarrow dc,$$

- Cálculo de $H = \{(S, A), (A, B), (S, B\}$

$$S \rightarrow aBc, \qquad \boxed{A \rightarrow aAb,} \qquad \boxed{A \rightarrow cd,}$$

$$B \rightarrow ccBS, \qquad B \rightarrow dc, \qquad \boxed{S \rightarrow aAb,}$$

$$\boxed{S \rightarrow cd,}$$

- Cálculo de $H = \{(S, A), (A, B), (S, B)\}$

$$S \rightarrow aBc, \qquad A \rightarrow aAb, \qquad A \rightarrow cd,$$

$$\boxed{B \rightarrow ccBS,} \qquad \boxed{B \rightarrow dc,} \qquad S \rightarrow aAb,$$

$$S \rightarrow cd, \qquad \boxed{A \rightarrow ccBS,} \qquad \boxed{A \rightarrow dc,}$$

- Cálculo de $H = \{(S, A), (A, B), (S, B)\}$

$$
\begin{array}{lll}
S \to aBc, & A \to aAb, & A \to cd, \\
\boxed{B \to ccBS, \quad B \to dc,} & & S \to aAb, \\
S \to cd, & A \to ccBS, & A \to dc, \\
\boxed{S \to ccBS, \quad S \to dc,} & &
\end{array}
$$

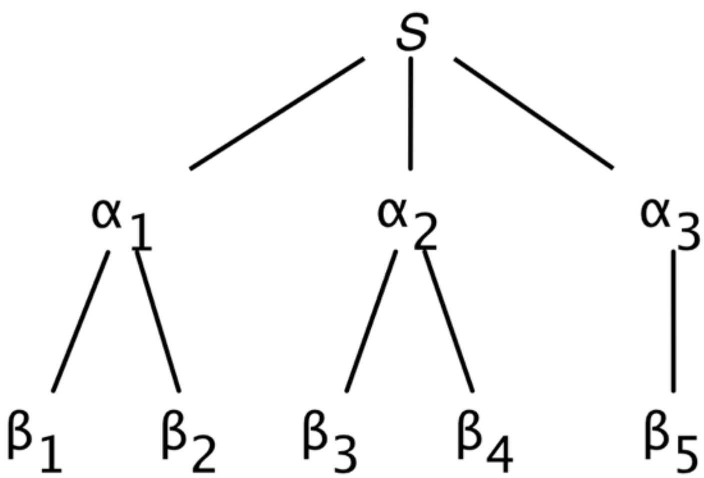
- Cálculo de $H = \{(S, A), (A, B), (S, B)\}$
- Esta es la gramática resultante:

$$
\begin{array}{lll}
S \to aBc, & A \to aAb, & A \to cd, \\
B \to ccBS, & B \to dc, & S \to aAb, \\
S \to cd, & A \to ccBS, & A \to dc, \\
S \to ccBS, & S \to dc, &
\end{array}
$$

- Cálculo de $H = \{(S, A), (A, B), (S, B)\}$

0.31 El problema de la Pertenencia

- **Problema**: Dada una gramática independiente del contexto G y una palabra u, ¿pertenece u a $L(G)$?



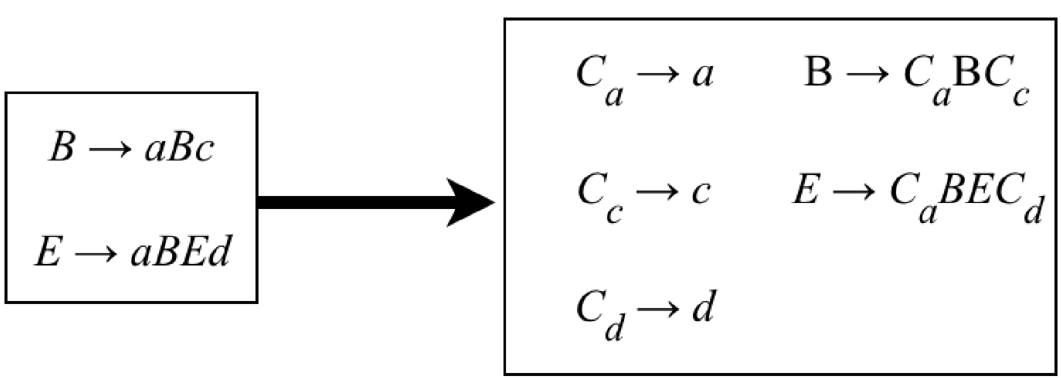
- Si la palabra es generada, nos sale en esta búsqueda. Si la palabra no es generada, ¿hasta qué profundidad tenemos que generar para convencernos de que no se puede?
- $2n-1$ (en cada paso o sacamos al menos un nuevo símbolo terminal (n) o aumenta al menos en 1 la longitud ($n-1$))

0.32 Forma Normal de Chomsky

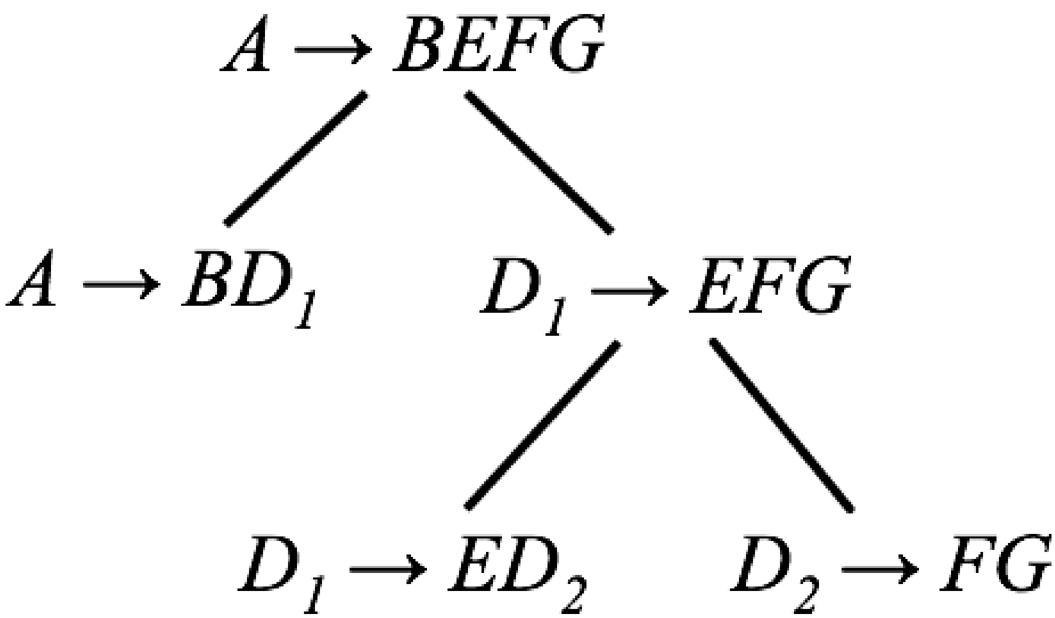
- Todas las producciones tienen la forma

$$A \to BC, \qquad A \to a,$$

  donde $A, B, C \in V, a \in T$.
- El algoritmo se aplica a gramáticas sin producciones nulas ni unitarias
- Hay dos operaciones básicas:
- Eliminar terminales en producciones que no sean $A \to a$
- Eliminar producciones con una longitud en la parte derecha mayor de 2
- **Paso 1**: Eliminar terminales en producciones que no sean $A \to a$:



- **Paso 2**: Eliminar producciones con una longitud en la parte derecha mayor de 2:



0.33 Algoritmo

1. Para cada producción $A \to \alpha_1 \cdots \alpha_n, \quad \alpha_i \in (V\ T), \quad n \geq 2$
    1. Para cada α_i, si α_i es terminal: $\alpha_i = a \in T$
        1. Se añade la producción $C_a \to a$
        2. Se cambia α_i por C_a en $A \to \alpha_1 \cdots \alpha_n$
2. Para cada producción de la forma $A \to B_1 \cdots B_m, \quad m \geq 3$
    1. Se añaden $(m-2)$ variables $D_1, D_2, \cdots, D_{m-2}$
       (distintas para cada producción)
    2. La producción $A \to B_1 \cdots B_m$ se reemplaza por

$$A \to B_1 D_1, \quad D_1 \to B_2 D_2, \quad \cdots, \quad D_{m-2} \to B_{m-1} B_m$$

0.34 Ejemplo

$$
\begin{array}{llll}
S \to bA, & S \to aB, & A \to bAA, & A \to AS, \\
A \to a, & B \to aBB & B \to bS, & B \to b
\end{array}
$$

$$\Bigg\downarrow$$

$$
\begin{array}{llll}
S \to C_bA, & S \to C_aB, & A \to C_bAA, & A \to AS, \\
A \to a, & B \to C_aBB, & B \to C_bS, & B \to b \\
C_a \to a & C_b \to b & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
S \to C_bA, & S \to C_aB, & \boxed{A \to C_bAA,} & A \to AS, \\
A \to a, & B \to C_aBB, & B \to C_bS, & B \to b \\
C_a \to a & C_b \to b & \boxed{A \to C_bD_1,} & \boxed{D_1 \to AA,}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
S \to C_bA, & S \to C_aB, & & A \to AS, \\
A \to a, & B \to C_aBB, & B \to C_bS, & B \to b \\
C_a \to a & C_b \to b & A \to C_bD_1, & D_1 \to AA,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
S \rightarrow C_b A, & S \rightarrow C_a B, & & A \rightarrow AS, \\
A \rightarrow a, & \boxed{B \rightarrow C_a BB,} & B \rightarrow C_b S, & B \rightarrow b \\
C_a \rightarrow a & C_b \rightarrow b & A \rightarrow C_b D_1, & D_1 \rightarrow AA, \\
\boxed{B \rightarrow C_a E_1,} & \boxed{E_1 \rightarrow BB,} & &
\end{array}
$$

- Resultado:

$$
\begin{array}{llll}
S \rightarrow C_b A, & S \rightarrow C_a B, & & A \rightarrow AS, \\
A \rightarrow a, & & B \rightarrow C_b S, & B \rightarrow b \\
C_a \rightarrow a & C_b \rightarrow b & A \rightarrow C_b D_1, & D_1 \rightarrow AA, \\
B \rightarrow C_a E_1, & E_1 \rightarrow BB, & &
\end{array}
$$