TeoriaComputacion_7

January 28, 2020

Teoría de la Computación

Autómatas con Pila

Prof. Wladimir Rodriguez

wladimir.rodriguez@outlook.com

Departamento de Computación

0.1 Contenido

- Autómatas con Pila: definición.
- Criterios de aceptación.
- Autómatas con pila deterministas.
- Lenguajes independientes del contexto deterministas.
- Equivalencia de autómatas y gramáticas.

0.2 Autómatas con Pila

- Un autómata con pila no determinista (APND) es una septupla $(Q, A, B, \delta, q_0, Z_0, F)$ en la que
  - Q es un conjunto finito de estados
  - A es un alfabeto de entrada
  - B es un alfabeto para la pila
  - δ es la función de transición

$$\delta : Q \times (A \cup \{\epsilon\}) \times B \to (Q \times B^*)$$

  - q_0 es el estado inicial
  - Z_0 es el símbolo inicial de la pila
  - F es el conjunto de estados finales

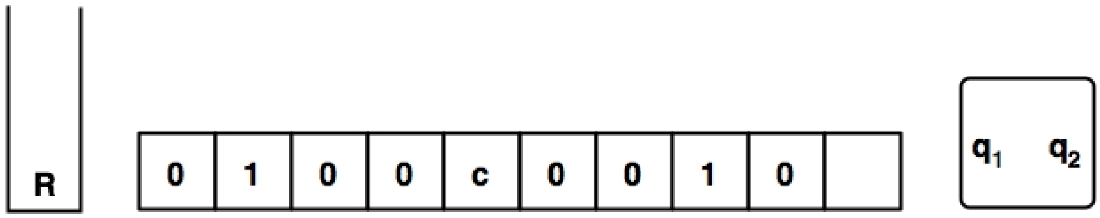
0.3 Ejemplo

- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}\delta(q_1, 0,$

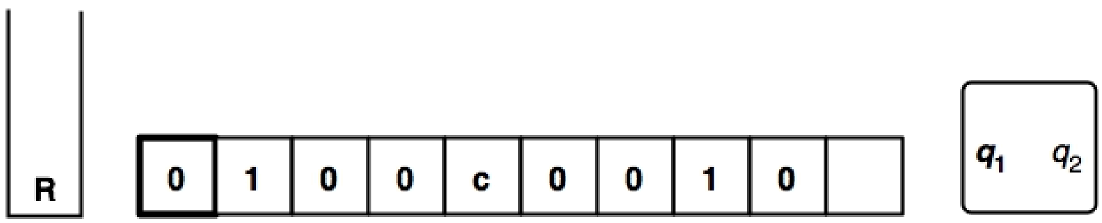
- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}\delta(q_1, 0,$



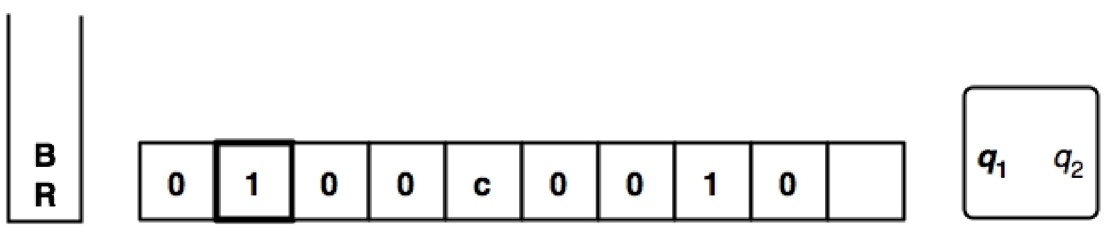
- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}\delta(q_1, 0,$



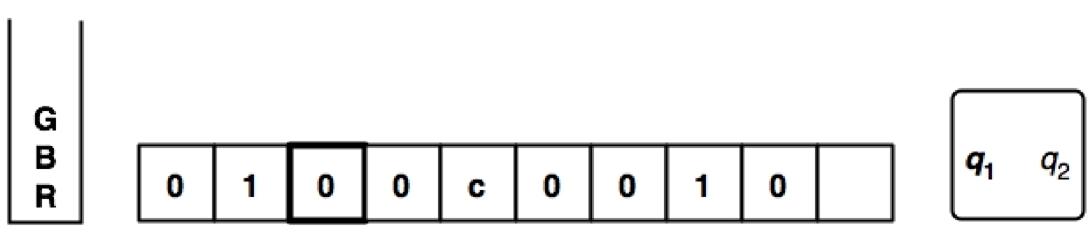
- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}\delta(q_1, 0,$



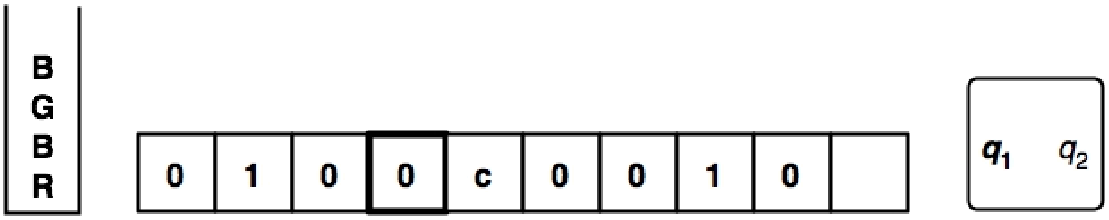
- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}\delta(q_1, 0,$



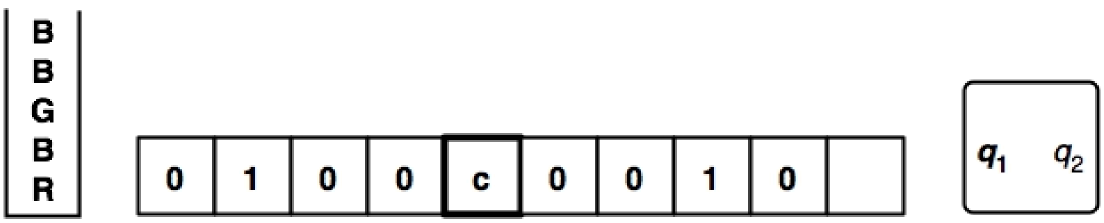
- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} \qquad \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} \qquad \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}\delta(q_1, 0,$



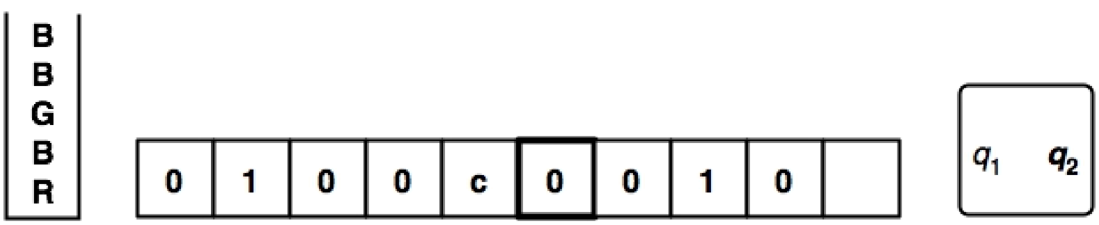
- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} \qquad \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} \qquad \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}\delta(q_1, 0,$



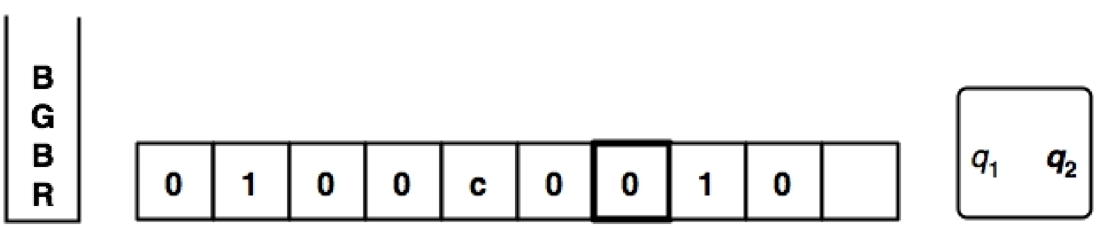
- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} \qquad \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} \qquad \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}\delta(q_1, 0,$



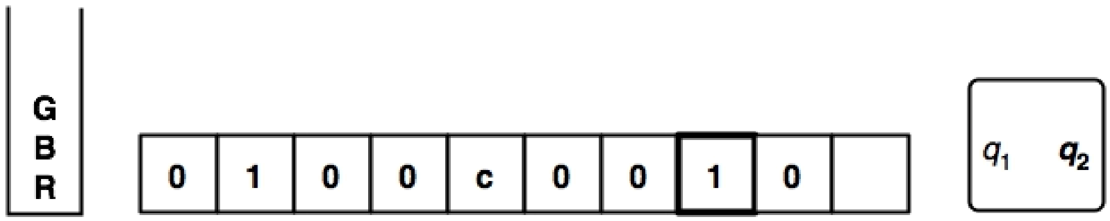
- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} \qquad \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} \qquad \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}\delta(q_1, 0,$



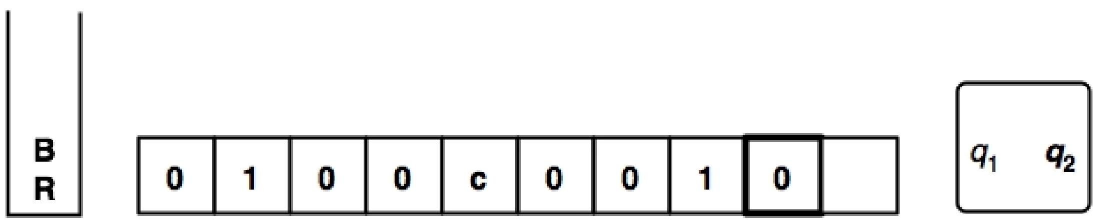
- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$\delta(q_1, 0,$



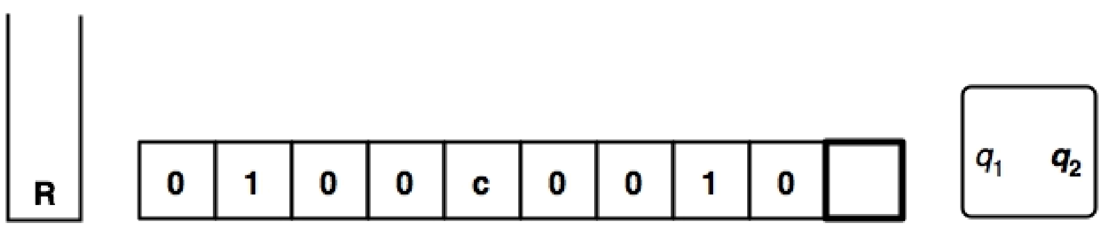
- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$\delta(q_1, 0,$



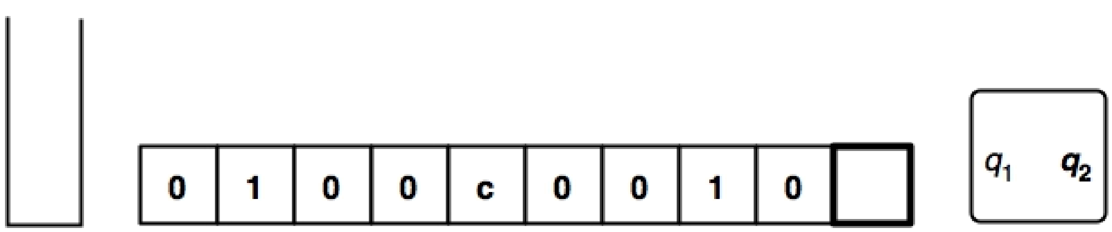
- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$\delta(q_1, 0,$



- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$\delta(q_1, 0,$



0.4 Lenguaje Aceptado

- Se llama descripción instantánea o configuración de un autómata con pila a una tripleta

$$(q, u, \alpha) \in Q \times A^* \times B^*$$

- en la que q es el estado en el se encuentra el autómata, u es la parte de la cadena de entrada que queda por leer y α el contenido de la pila (el primer símbolo es el tope de la pila).
- Se dice que de la configuración $(q, au, Z\alpha)$ se puede llegar mediante un paso de cálculo a la configuración $(p, u, \beta\alpha)$ y se escribe $(q, au, Z\alpha) \vdash (p, u, \beta\alpha)$ si y solo si $(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$ donde a puede ser cualquier símbolo de entrada o la cadena vacía
- Si C_1 y C_2 son dos configuraciones, se dice que se puede llegar de C_1 a C_2 mediante una sucesión de pasos de cálculo y se escribe $C_1 \vdash^* C_2$ si y solo si existe una sucesión de configuraciones $T_1, \cdots, T_n$ tales que

$$C_1 = T_1 \vdash T_2 \vdash \cdots \vdash T_{n-1} \vdash T_n = C_2$$

- Si M es un $APND$ y $u \in A$ se llama configuración inicial correspondiente a esta entrada a (q_0, u, Z_0) donde q_0 es el estado inicial y Z_0 el símbolo inicial de la pila
- En el caso del autómata con pila del ejemplo anterior tenemos

$$(q_1, 011c110, R) \vdash (q_1, 11c110, BR) \vdash (q_1, 1c110, GBR) \vdash (q_1, c110, GGBR) \vdash (q_2, 110, GGBR) \vdash (q_2, 10, GBR) \vdash (q$$

- Existen dos criterios para determinar el lenguaje aceptado por un APND:
  - Lenguaje aceptado por estados finales

$$L(M) = \{w \in A^* : (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \epsilon, \Upsilon), p \in F, \Upsilon \in B^*\}$$

  - Lenguaje aceptado por la pila vacía

$$N(M) = \{w \in A^* : (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \epsilon, \epsilon), p \in Q\}$$

0.5 Construir Autómatas con Pila

$$L = \{0^i 1^i : i \geq 0\} \quad \text{por pila vacía}$$

- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{R, X\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ - $\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\}$ - $\delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\}$ - $\delta(q_1, \epsilon, R) = \{(q_1, \epsilon)\}$ - $\delta(q_1, 1, X) = \{(q_2, \epsilon)\}$ - $\delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, \epsilon)\}$ - $\delta(q_2, \epsilon, R) = \{(q_1, \epsilon)\}$

$$L = \{0^i 1^i : i \geq 0\} \quad \text{por estados finales}$$

- $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{R, X\}, \delta, q_1, R, \{q_3\})$ - $\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\}$ - $\delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\}$ - $\delta(q_1, \epsilon, R) = \{(q_3, \epsilon)\}$ - $\delta(q_1, 1, X) = \{(q_2, \epsilon)\}$ - $\delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, \epsilon)\}$ - $\delta(q_2, \epsilon, R) = \{(q_3, \epsilon)\}$

$$L = \{0^i 1^j : i \geq j \geq 0\} \quad \text{por pila vacía}$$

- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{R, X\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ - $\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\}$ - $\delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\}$ - $\delta(q_1, \epsilon, R) = \{(q_1, \epsilon)\}$ - $\delta(q_1, 1, X) = \{(q_2, \epsilon)\}$ - $\delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, \epsilon)\}$ - $\delta(q_2, \epsilon, R) = \{(q_2, \epsilon)\}$ - $\delta(q_2, \epsilon, X) = \{(q_2, \epsilon)\}$

$$L = \{wcw^{-1} : w \in \{0, 1\}^*\} \quad \text{por pila vacía}$$

- $M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{B, R, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ - $\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ - $\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ - $\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$ - $\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\}$ - $\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\}$ - $\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \epsilon)\}$ - $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$ - $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$ - $\delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$ - $\delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$ - $\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \epsilon)\}$ - $\delta(q_2, \epsilon, R) = \{(q_2, \epsilon)\}$

0.5.1 cantidad de 0 = cantidad de 1, por pila vacía

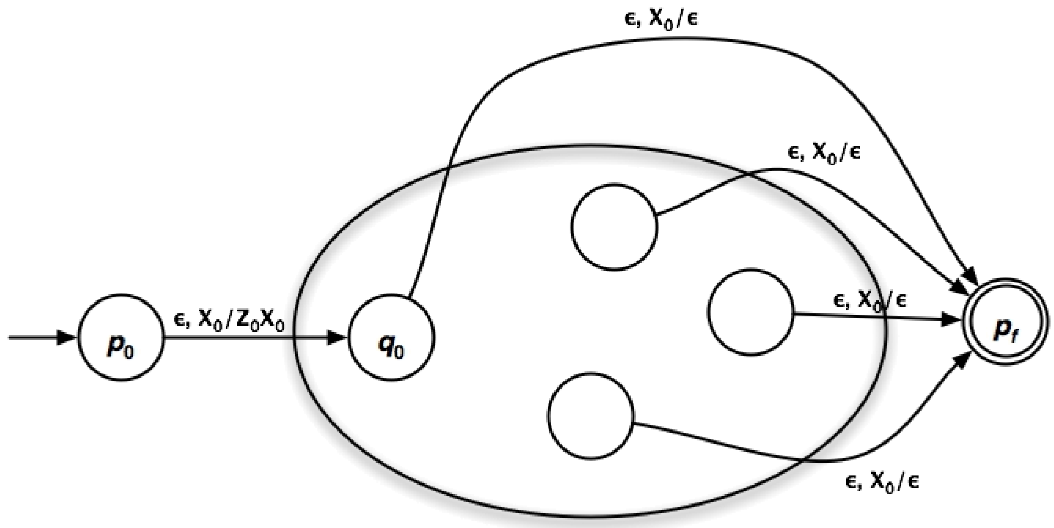
- $M = (\{q_1\}, \{0, 1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$
  - $\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\}$
  - $\delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\}$
  - $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YR)\}$
  - $\delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY)\}$
  - $\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \epsilon)\}$
  - $\delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, \epsilon)\}$
  - $\delta(q_1, \epsilon, R) = \{(q_1, \epsilon)\}$

0.5.2 cantidad de 0 $\leq$ cantidad de 1, por pila vacía

- $M = (\{q_1\}, \{0, 1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$
  - $\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\}$
  - $\delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\}$
  - $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YR)\}$
  - $\delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY)\}$
  - $\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \epsilon)\}$
  - $\delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, \epsilon)\}$
  - $\delta(q_1, \epsilon, R) = \{(q_1, \epsilon)\}$
  - $\delta(q_1, \epsilon, Y) = \{(q_1, \epsilon)\}$

0.6 De Pila Vacía a Estado Final

El conjunto de los lenguajes que son aceptados por algún autómata a pila por estado final es el mismo que el conjunto de los lenguajes que son aceptados por algún autómata a pila por vaciado de pila.



0.7 Nuevo Autómata a Pila por Estado Final

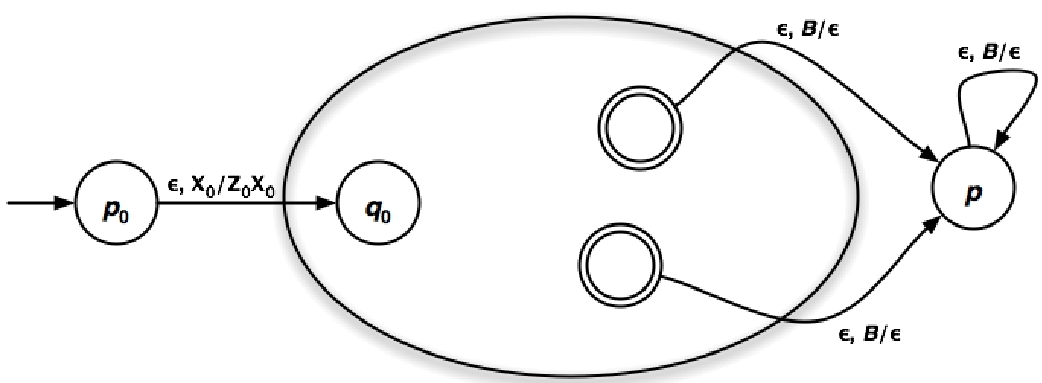
- La especificación del autómata a pila por estado final P_F es como sigue:

$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, A, B \cup \{X_0\}, \delta_f, p_0, X_0, \{p_f\}$$

- Donde δ_f es igual a δ mas:
  - $\delta_f(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$
  - $\delta_f(q, \epsilon, X_0)$ contiene (p_f, ϵ) para todo estado $q \in Q$

0.8 De Estado Final a Pila Vacía

- Tomamos un autómata a pila P_F que acepta un lenguaje L por estado final, y construimos otro autómata a pila P_N que acepta L por pila vacía.



0.9 Nuevo Autómata a Pila por Pila Vacía

- La especificación del autómata a pila por pila vacia P_N es como sigue:

$$P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, A, B \cup \{X_0\}, \delta, p_0, X_0, \emptyset)$$

- Donde δ_n es igual a δ mas:
  - $\delta_f(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$
  - Para todos los estados de aceptación $q \in F$ y símbolos de pila $Y \in B$ o $Y = X_0$, $\delta_n(q, \epsilon, Y)$ contiene (p, ϵ)
  - Para todos los símbolos de pila $Y \in B$ o $Y = X_0$, $\delta_n(p, \epsilon, Y) = \{(p, \epsilon)\}$

0.10 De Gramática a Autómata a Pila

- Dada una gramática $G = (V, T, P, S)$, construimos el autómata a pila P que acepta $L(G)$ por pila vacía como sigue:

$$P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S)$$

- donde la función de transición δ se define mediante:
  - Para cada variable A,
    $\delta(q, \epsilon, A) = \{(q, \beta)\}$ $A \in \beta$ es una producción de P }
  - Para cada símbolo terminal a, $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$

0.11 Ejemplo

- Dada $G = (\{E, I\}, T, P, E)$, donde
- $T = \{+, *, (,), a, b, 0, 1\}$, y
- P es

$$I \to a\ b\ Ia\ Ib\ I0\ I1E \to I\ E * E\ E + E\ (E)$$

- δ es
  - $\delta(q, \epsilon, I) = \{(q, a), (q, b), (q, Ia), (q, Ib), (q, I0), (q, I1)\}$
  - $\delta(q, \epsilon, E) = \{(q, I), (q, E * E), (q, E + E), (q, (E))\}$
  - $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$; $\quad \delta(q, b, b) = \{(q, \epsilon)\}$ $\quad \delta(q, 0, 0) = \{(q, \epsilon)\}$;
  - $\delta(q, 1, 1) = \{(q, \epsilon)\}$; $\quad \delta(q, (, () = \{(q, \epsilon)\}$; $\quad \delta(q,),)) = \{(q, \epsilon)\}$;
  - $\delta(q, +, +) = \{(q, \epsilon)\}$; $\quad \delta(q, *, *) = \{(q, \epsilon)\}$;

0.12 De Autómata a Pila a Gramática

- Dado un Autómata a Pila $M = (Q, A, B, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ cuyo lenguaje aceptado por vaciado de pila es $L(M)$ existe una Gramática de Contexo Libre $G = (V, T, P, S)$ que genera $L(M)$:
  - Si $(p, \epsilon) \in \delta(q, a, X)$, se añade la producción $[pXq] \to a$
  - Si $(p, \epsilon) \in \delta(q, \epsilon, X)$, se añade la producción $[pXq] \to \epsilon$
  - Si $(r, Y_1Y_2 \cdots Y_k) \in \delta(q, a, X)$, con $a \in A \cup \{\epsilon\}$ y $k \geq 1$, se añaden todas las producciones de la forma

$$[qXr_k] \to a[r_1Y_1r_2][r_2Y_2r_3] \cdots [r_{k-1}Y_kr_k] \in P$$

    para todas las secuencias posibles $r_1, r_2, \cdots, r_{k-1}$ de estados de Q.

– $S \rightarrow [q_0 Z_0 p] \in P$ para todo $p \in Q$

0.13 Ejemplo

Autómata
$\delta(q_0, 1, A) = \{(q_0, 1A)\}$
$\delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\}$
$\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_1, \lambda)\}$
$\delta(q_1, 0, 1) = \{(q_1, \lambda)\}$
$\delta(q_1, \lambda, A) = \{(q_1, \lambda)\}$

Gramática	
$S \rightarrow [q_0 A q_0] \mid [q_0 A q_1]$	$[q_0 1 q_0] \rightarrow 1[q_0 1 q_1][q_1 1 q_0]$
$[q_0 A q_0] \rightarrow 1[q_0 1 q_0][q_0 A q_0]$	$[q_0 1 q_1] \rightarrow 1[q_0 1 q_0][q_0 1 q_1]$
$[q_0 A q_0] \rightarrow 1[q_0 1 q_1][q_1 A q_0]$	$[q_0 1 q_1] \rightarrow 1[q_0 1 q_1][q_1 1 q_1]$
$[q_0 A q_1] \rightarrow 1[q_0 1 q_0][q_0 A q_1]$	$[q_0 1 q_1] \rightarrow 0$
$[q_0 A q_1] \rightarrow 1[q_0 1 q_1][q_1 A q_1]$	$[q_1 1 q_1] \rightarrow 0$
$[q_0 1 q_0] \rightarrow 1[q_0 1 q_0][q_0 1 q_0]$	$[q_1 A q_1] \rightarrow \lambda$