

Stanisław Betley, Józef Chaber, Elżbieta Pol i Roman Pol

# TOPOLOGIA I

wykłady i zadania

październik 2020

## WSTĘP.

Materiał w skrypcie odpowiada programowi zajęć z Topologii I w trzecim semestrze studiów na Wydziale MIM Uniwersytetu Warszawskiego i jest oparty na naszych doświadczeniach z wykładów i ćwiczeń do tego przedmiotu.

Program dopuszcza dużą różnorodność w rozłożeniu akcentów na poszczególne tematy i przedstawiony materiał jest wynikiem wypośrodkowania naszych poglądów na te kwestie, początkowo dość rozbieżnych. Mamy nadzieję, że to wyważenie różnych punktów widzenia przyniesie pożytek użytkownikom skryptu.

Od momentu powstania pierwszej wersji skryptu sylabus wykładu z topologii na wydziale MIM był wielokrotnie modyfikowany. Te zmiany czasami nie znajdowały natychmiastowego odzwierciedlenia w układzie materiału w skrypcie. Jednak zawsze dokładaliśmy starań aby materiał zawarty w pierwszych sześciu rozdziałach pokrywał program przedmiotu opisany w sylabusach, choć niekoniecznie w dokładnie tej samej kolejności. Ostatnia istotna merytoryczna modyfikacja skryptu polegała między innymi na rozszerzeniu Uzupełnień (część 7) tak, aby obejmowały one także dodatkowy materiał, możliwy do omówienia na potoku „gwiazdkowym”.

Istotną częścią skryptu są zadania. Staraliśmy się dobrać je tak, aby (z ewentualną wskazówką) nie były zbyt złożone. Znaczną ich część należy jednak traktować jako materiał uzupełniający. Naszą ocenę tego, co daje się dokładnie omówić na ćwiczeniach, sygnalizujemy opatrując pewne z tych zadań symbolem ♠. Z tych zadań układaliśmy, prowadząc ćwiczenia, zestawy dla studentów i dawaliśmy podobne zadania na kolokwiach i egzaminach.

Istnieje obszerna literatura w języku polskim, dotycząca różnych aspektów problematyki, w którą wprowadza kurs Topologii I (niektóre z tych pozycji wymieniamy poniżej). Nasz skrypt, pisany z myślą o zajęciach kursowych, nie zastąpi oczywiście kontaktu z żadną z tych znakomitych książek.

## WYBRANE POZYCJE Z LITERATURY W JĘZYKU POLSKIM.

R.Engelking, K.Sieklucki, *Wstęp do topologii*, Warszawa 1986.

K.Jänich, *Topologia*, Warszawa 1991.

C.Kosniowski, *Wprowadzenie do topologii algebraicznej*, Poznań 1999.

K.Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 2004.

J.Mioduszewski, *Wykłady z topologii. Topologia przestrzeni euklidesowych*, Katowice 1994.

## SPIS TREŚCI

1. Przestrzenie metryczne i przestrzenie topologiczne	1
1.1. Metryki i topologia przestrzeni metrycznej.	1
1.2. Przestrzenie topologiczne.	3
1.3. Ciągłość przekształceń.	7
1.4. Iloczyny skończone przestrzeni topologicznych.	10
1.5. Iloczyny przeliczalne przestrzeni topologicznych.	11
1.6. Twierdzenie Tietzego o przedłużaniu przekształceń.	11
1.7. Ośrodkowość.	13
2. Zwartość	14
2.1. Przestrzenie zwarte.	14
2.2. Przekształcenia ciągłe przestrzeni zwartych.	17
2.3. Zbiór Cantora.	18
2.4. Iloczyn skończony przestrzeni zwartych.	19
2.5. Iloczyn przeliczalny przestrzeni zwartych.	20
3. Zupełność	21
3.1. Przestrzenie metryczne zupełne.	21
3.2. Twierdzenie Banacha o punkcie stałym.	23
3.3. Twierdzenie Baire'a.	24
3.4. Zupełność + całkowita ograniczoność = zwartość.	25
3.5. Twierdzenie Ascoliiego - Arzeli.	26
4. Spójność	27
4.1. Przestrzenie spójne.	27
4.2. Przestrzenie łukowo spójne.	29
4.3. Składowe.	30
5. Przestrzenie ilorazowe	30
5.1. Topologia ilorazowa.	30
5.2. Przyklejanie przestrzeni wzdłuż przekształcenia.	32
6. Homotopie	33
6.1. Homotopia przekształceń i pętli.	34
6.2. Pętle w $S^1$ .	35
6.3. Grupa podstawowa przestrzeni.	38
6.4. Homotopijna równoważność.	41
7. Uzupełnienia	41
7.1. Otwarty zbiór wypukły w $\mathbb{R}^n$ jest homeomorficzny z $\mathbb{R}^n$ .	41
7.2. Strzałka i kwadrat leksykograficzny.	42
7.3. Dowolne iloczyny kartezjańskie i twierdzenie Tichonowa.	43
7.4. Przestrzeń ultrafiltrów.	45
7.5. Twierdzenie Jordana o rozcinaniu płaszczyzny.	46
7.6. Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.	49
7.7. Przedłużanie przekształceń ciągłych w sfery.	51
7.8. Przestrzenie normalne i przestrzenie parazwarte.	55
7.9. Homotopijna niezmienniczość grupy podstawowej.	59
7.10. Nakrycia i podnoszenie przekształceń ciągłych.	60
8. Zadania	62

## 1. PRZESTRZENIE METRYCZNE I PRZESTRZENIE TOPOLOGICZNE

**1.1. Metryki i topologia przestrzeni metrycznej.** Metryka pozwala mierzyć odległość między punktami przestrzeni. Interesować nas będą jednak nie same metryki, a wyznaczone przez nie rodziny zbiorów otwartych – topologie.

**Definicja 1.1.1.** *Metryką na zbiorze  $X$  nazywa się funkcję  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  spełniającą następujące warunki:*

- (1)  $d(x, y) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = y$ ,
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$ , dla  $x, y \in X$ ,
- (3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , dla  $x, y, z \in X$ .

Parę  $(X, d)$  nazywamy przestrzenią metryczną.

Z własności (3), nazywanej nierównością trójkąta, warunku symetrii (2), oraz (1) wynika, że dla  $x, y \in X$ ,  $0 = d(x, x) \leq 2d(x, y)$ , a więc metryka przyjmuje tylko wartości nieujemne.

Elementy przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  nazywać będziemy punktami, a liczbę  $d(x, y)$  odległością między punktami  $x, y \in X$ .

**Przykład 1.1.2.** Wprowadzimy przestrzenie euklidesowe  $(\mathbb{R}^n, d_e)$ . Punktami  $\mathbb{R}^n$  są ciągi  $n$ -elementowe liczb rzeczywistych, a odległość między  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  jest określona formułą

$$(4) \quad d_e(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}.$$

Sprawdźmy, że  $d_e$  jest metryką. Uzasadnienia wymaga jedynie nierówność trójkąta (3). Pokażemy najpierw, że dla  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ ,

$$(5) \quad d_e(a, b) \leq d_e(a, \mathbf{0}) + d_e(\mathbf{0}, b).$$

Po podniesieniu do kwadratu obu stron, (5) przekształca się w nierówność Cauchy'ego

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Przypomnijmy uzasadnienie (6): przyjmując  $A = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ ,  $B = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ ,  $s_i = \frac{|a_i|}{A}$ ,  $t_i = \frac{|b_i|}{B}$ , mamy  $\sum_{i=1}^n s_i^2 = 1 = \sum_{i=1}^n t_i^2$ , a ponieważ  $2s_i t_i \leq s_i^2 + t_i^2$ , po zsumowaniu tych nierówności stronami dostaniemy (6).

Aby przejść od (5) do ogólnej sytuacji, zauważmy, że metryka euklidesowa jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia, a więc dla dowolnych  $a, b, c \in \mathbb{R}^n$  mamy  $d_e(a, b) = d_e(a - c, b - c) \leq d_e(a - c, \mathbf{0}) + d_e(\mathbf{0}, b - c) = d_e(a, c) + d_e(c, b)$ .

Kulą w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  o środku w punkcie  $a \in X$  i promieniu  $r > 0$  nazywamy zbiór

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

**Definicja 1.1.3.** *W przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ , zbiór  $U \subset X$  jest otwarty, jeśli dla każdego  $x \in U$  istnieje  $r > 0$  takie, że  $B(x, r) \subset U$ . Rodzinę  $\mathcal{T}(d)$  wszystkich zbiorów otwartych w  $(X, d)$  nazywamy topologią tej przestrzeni metrycznej albo topologią generowaną przez metrykę  $d$ .*

**Uwaga 1.1.4.** (A) W przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ , jeśli  $b \in B(a, r)$ , to zgodnie z nierównością trójkąta, dla  $s = r - d(a, b)$ , mamy  $B(b, s) \subset B(a, r)$ . W szczególności, kule  $B(a, r)$  są otwarte w przestrzeni  $(X, d)$ .

(B) Dopełnienie  $X \setminus F$  zbioru skończonego  $F$  w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  jest otwarte. Istotnie, jeśli  $x \in X \setminus F$  i  $r = \min\{d(x, y) : y \in F\}$ , to  $B(x, r) \subset X \setminus F$ .

Własności topologii przestrzeni metrycznej, które wyróżnimy w następującym twierdzeniu, posłużą nam w dalszej części do określenia ogólnych przestrzeni topologicznych.

**Twierdzenie 1.1.5.** *Topologia  $\mathcal{T}(d)$  przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  ma następujące własności:*

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}(d)$ ,
- (ii) przecięcie skończenie wielu elementów  $\mathcal{T}(d)$  jest elementem  $\mathcal{T}(d)$ ,
- (iii) suma dowolnie wielu elementów  $\mathcal{T}(d)$  jest elementem  $\mathcal{T}(d)$ .

**Dowód.** Ponieważ  $x \notin \emptyset$  dla każdego  $x \in X$ , warunek określający zbiory otwarte w  $(X, d)$  jest spełniony dla  $\emptyset$ . Jest też jasne, że  $X \in \mathcal{T}(d)$ .

Sprawdźmy (ii). Niech  $U_1, U_2 \in \mathcal{T}(d)$ . Dla dowolnego  $x \in U_1 \cap U_2$  istnieją  $r_i > 0$  takie, że  $B(x, r_i) \subset U_i$ , a więc  $B(x, r) \subset U_1 \cap U_2$ , dla  $r = \min(r_1, r_2)$ . Zatem  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}(d)$ , a stąd (ii) wynika przez indukcję.

Niech  $V = \bigcup \mathcal{U}$  będzie sumą rodziny  $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}(d)$ . Jeśli  $x \in V$ , to  $x \in U$  dla pewnego  $U \in \mathcal{U}$ , a więc istnieje  $r > 0$  takie, że  $B(x, r) \subset U \subset V$ . Zatem  $V \in \mathcal{T}(d)$ , co dowodzi (iii).

**Przykład 1.1.6.** (A) Metryki na tym samym zbiorze, o różnych własnościach geometrycznych, mogą generować tę samą topologię. Dla ilustracji, rozpatrzmy w  $\mathbb{R}^n$  metryki

$$d_s(a, b) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|, \quad d_m(a, b) = \max_i |a_i - b_i|,$$

gdzie  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$ . Kule w przestrzeniach metrycznych  $(\mathbb{R}^n, d_e)$ ,  $(\mathbb{R}^n, d_s)$ , oraz  $(\mathbb{R}^n, d_m)$  mają różny kształt, ale metryki  $d_e$ ,  $d_s$  i  $d_m$  generują tę samą topologię,  $\mathcal{T}(d_e) = \mathcal{T}(d_s) = \mathcal{T}(d_m)$ .

Wynika to z prostych nierówności  $d_e \leq \sqrt{n}d_m$ ,  $d_m \leq d_s$ , oraz nierówności  $d_s \leq \sqrt{n}d_e$ , która jest konsekwencją nierówności Cauchy'ego (6) w 1.1.2.

(B) Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i  $\delta > 0$ . Wówczas funkcja  $d_\delta(x, y) = \min\{d(x, y), \delta\}$  jest metryką w  $X$ , generującą tę samą topologię, co metryka  $d$ . Wynika to stąd, że w obu przestrzeniach metrycznych  $(X, d)$  i  $(X, d_\delta)$  kule o promieniach  $< \delta$  są identyczne.

**Przykład 1.1.7.** (A) Funkcja  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona formułami  $d(x, y) = |x| + |y|$ , dla  $x \neq y$ , oraz  $d(x, x) = 0$ , jest metryką. Metryka  $d$  generuje w  $\mathbb{R}$  topologię  $\mathcal{T}(d)$  różną od topologii euklidesowej, tzn. generowanej przez metrykę  $d_e(x, y) = |x - y|$ . W przestrzeni  $(\mathbb{R}, d)$  kula o środku w punkcie  $x \neq 0$  i promieniu  $r = |x|$  składa się jedynie z punktu  $x$ , a zatem  $\{x\}$  jest zbiorem otwartym w tej przestrzeni. Ponieważ kula w  $(\mathbb{R}, d)$  o środku w zerze i promieniu  $r$  jest przedziałem  $(-r, r)$ , wynika stąd, że  $\mathcal{T}(d)$  składa się ze wszystkich podzbiorów  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , oraz wszystkich zbiorów zawierających pewien przedział  $(-r, r)$ .

(B) Niech  $\mathbb{R}^\infty$  będzie zbiorem ciągów liczb rzeczywistych  $(x_1, x_2, \dots)$  o prawie wszystkich (tzn. wszystkich, poza skończenie wieloma) współrzędnymi równymi zeru. Będziemy identyfikować  $\mathbb{R}^n$  ze zbiorem punktów  $(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$  w  $\mathbb{R}^\infty$ . Metryki  $d_e$  i  $d_s$  w  $\mathbb{R}^\infty$  określamy formułami

$$d_e(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2}, \quad d_s(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i|,$$

gdzie  $a = (a_1, a_2, \dots)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots)$  (na  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\infty$  metryki  $d_e$  i  $d_s$  pokrywają się z metrykami wprowadzonymi w 1.1.2 i 1.1.6 (A)). Pokażemy, że  $d_e$  i  $d_s$  generują różne topologie w  $\mathbb{R}^\infty$ . Istotnie, niech  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$  i niech  $B_s(\mathbf{0}, 1)$  będzie kulą w  $(\mathbb{R}^\infty, d_s)$  o środku w  $\mathbf{0}$  i promieniu 1. Sprawdzimy, że  $B_s(\mathbf{0}, 1) \not\subset \mathcal{T}(d_e)$ . Załóżmy przeciwnie i niech  $B_e(\mathbf{0}, r) \subset B_s(\mathbf{0}, 1)$ , gdzie  $B_e(\mathbf{0}, r)$  jest kulą w  $(\mathbb{R}^\infty, d_e)$  o środku w  $\mathbf{0}$  i promieniu  $r > 0$ . Ustalmy  $n$  takie, że  $\frac{1}{n} < r^2$  i niech  $a = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$  będzie punktem mającym dokładnie  $n$  współrzędnych niezerowych. Wówczas  $d_e(a, \mathbf{0}) = \sqrt{n \cdot (\frac{1}{n})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}} < r$ , skąd  $a \in B_e(\mathbf{0}, r)$ , ale  $d_s(a, \mathbf{0}) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$ , czyli  $a \notin B_s(\mathbf{0}, 1)$ , a więc doszliśmy do sprzeczności.

Zakończymy tę część uwagą dotyczącą topologii podprzestrzeni przestrzeni metrycznych.

**Uwaga 1.1.8.** Niech  $(X, d_X)$  będzie przestrzenią metryczną i niech  $Y \subset X$ . Wówczas obcięcie  $d_Y = d_X|_{Y \times Y}$  metryki  $d_X$  do  $Y$  jest metryką, generującą w  $Y$  topologię  $\mathcal{T}(d_Y)$ , której elementy są śladami zbiorów otwartych w  $(X, d_X)$  na  $Y$ , tzn.  $\mathcal{T}(d_Y) = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}(d_X)\}$ . Aby się o tym upewnić, wystarczy zauważyć, że dla  $y \in Y$  kula w przestrzeni  $(Y, d_Y)$  o środku w  $y$  i promieniu  $r$  jest przecięciem z  $Y$  kuli w  $(X, d_X)$  o środku w  $y$  i promieniu  $r$ .

**Przykład 1.1.9.** Niech  $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}$  i niech  $d_Y$  będzie obcięciem do  $Y$  metryki euklidesowej w  $\mathbb{R}$ . Topologia  $\mathcal{T}(d_Y)$  składa się ze wszystkich podzbiorów  $Y$ , które albo nie zawierają zera, albo ich dopełnienie do  $Y$  jest skończone.

Zauważmy, że obcięcie do  $Y$  metryki z Przykładu 1.1.7 (A) generuje tę samą topologię.

**1.2. Przestrzenie topologiczne.** Własności wyróżnione w Twierdzeniu 1.1.5 przyjmujemy za określenie topologii w przestrzeniach bez metryki.

**Definicja 1.2.1.** Rodzina  $\mathcal{T}$  podzbiorów zbioru  $X$  jest topologią w  $X$ , jeśli

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ,
- (ii) przecięcie skończenie wielu elementów  $\mathcal{T}$  jest elementem  $\mathcal{T}$ ,
- (iii) suma dowolnie wielu elementów  $\mathcal{T}$  jest elementem  $\mathcal{T}$ .

Parę  $(X, \mathcal{T})$  nazywamy przestrzenią topologiczną, elementy zbioru  $X$  punktami tej przestrzeni, a elementy rodziny  $\mathcal{T}$  zbiorami otwartymi w  $(X, \mathcal{T})$ .

Jeśli dla przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  można określić metrykę  $d$  na  $X$ , dla której  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ , mówimy, że przestrzeń  $(X, \mathcal{T})$  jest metryzowalna. Istnieje wiele ważnych przestrzeni topologicznych, które nie są metryzowalne. Jedną z nich wskażemy w następującym przykładzie (zob. także Uzupełnienie 7.3.2).

**Przykład 1.2.2.** Niech  $(\mathbb{R}^\infty, d_e)$  będzie przestrzenią opisaną w Przykładzie 1.1.7 (B). Przestrzeń  $\mathbb{R}^\infty$  jest sumą podprzestrzeni  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n \subset \dots$  i niech  $\mathcal{T}_n$  będzie topologią w  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  (tym samym symbolem oznaczamy tu metrykę na  $\mathbb{R}^\infty$  i jej obcięcie do  $\mathbb{R}^n$ ). Niech

$$\mathcal{T}_\infty = \{U \subset \mathbb{R}^\infty : U \cap \mathbb{R}^n \in \mathcal{T}_n, \text{ dla } n = 1, 2, \dots\}.$$

Rodzina  $\mathcal{T}_\infty$  jest topologią w  $\mathbb{R}^\infty$ . Pokażemy, że przestrzeń  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{T}_\infty)$  nie jest metryzowalna. Załóżmy przeciwnie, że  $\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T}(d)$  dla pewnej metryki  $d$  na  $\mathbb{R}^\infty$  i niech  $B(\mathbf{0}, \frac{1}{n})$  będzie kulą w  $(\mathbb{R}^\infty, d)$  o środku w punkcie  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$  i promieniu  $\frac{1}{n}$ . Zgodnie z określeniem  $\mathcal{T}_\infty$ ,  $B(\mathbf{0}, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{R}^n$  jest zbiorem otwartym w przestrzeni euklidesowej  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  zawierającym zero, można więc wybrać  $p_n = (0, 0, \dots, 0, r_n, 0, \dots) \in B(\mathbf{0}, \frac{1}{n})$ , gdzie  $r_n \neq 0$  jest  $n$ -tą współrzędną  $p_n$ . Zbiór  $A = \{p_1, p_2, \dots\}$  ma skończone przecięcie z każdą przestrzenią  $\mathbb{R}^n$ , zatem  $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{T}_n$ , dla  $n = 1, 2, \dots$  (zob. 1.1.4 (B)), a więc  $\mathbb{R}^\infty \setminus A \in \mathcal{T}_\infty$ . Z drugiej strony,  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^\infty \setminus A$ , ale każda kula w  $(\mathbb{R}^\infty, d)$  o środku w zerze zawiera pewną kulę  $B(\mathbf{0}, \frac{1}{n})$ , a więc przecina  $A$ . Mamy zatem  $\mathbb{R}^\infty \setminus A \in \mathcal{T}_\infty \setminus \mathcal{T}(d)$ , sprzecznie z założeniem.

**Przykład 1.2.3.** Niech  $X$  będzie ustalonym zbiorem. Wśród wszystkich topologii, jakie można określić na zbiorze  $X$ , dwie skrajne to antydyskretna  $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, X\}$ , oraz dyskretna  $\mathcal{T}_d$ , złożona ze wszystkich podzbiorów zbioru  $X$ . Jeśli  $X$  zawiera co najmniej dwa punkty, to przestrzeń  $(X, \mathcal{T}_a)$  nie jest metryzowalna, bo wówczas, dla dowolnego  $x \in X$ ,  $X \setminus \{x\} \notin \mathcal{T}_a$ , zob. Uwaga 1.1.4 (B). Topologia  $\mathcal{T}_d$  jest generowana przez metrykę dyskretną w  $X$ , w której odległość między różnymi punktami jest zawsze równa 1.

Zarówno przy wprowadzaniu topologii, jak i badaniu jej własności, użyteczne są pewne podrodziny rodziny wszystkich zbiorów otwartych.

**Definicja 1.2.4.** Rodzinę  $\mathcal{B}$  podzbiorów otwartych przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  nazywamy bazą topologii  $\mathcal{T}$ , jeśli dla dowolnego  $U \in \mathcal{T}$  i  $x \in U$  istnieje  $B \in \mathcal{B}$  spełniające  $x \in B \subset U$ .

**Przykład 1.2.5.** Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i niech  $A \subset X$  będzie zbiorem takim, że każda kula w  $(X, d)$  zawiera element  $A$ . Wówczas rodzina  $\mathcal{B} = \{B(a, \frac{1}{n}) : a \in A, n = 1, 2, \dots\}$  jest bazą topologii  $\mathcal{T}(d)$ .

Baza topologii jednoznacznie wyznacza tę topologię: zbiór jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą pewnej rodziny zbiorów z bazy. Opiszemy teraz metodę generowania topologii przy pomocy rodzin mających dwie własności przysługujące każdej bazie.

**Twierdzenie 1.2.6.** Niech  $\mathcal{B}$  będzie rodziną podzbiorów zbioru  $X$  spełniającą warunki

$$(i) \cup \mathcal{B} = X,$$

(ii) dla dowolnych  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  i  $x \in B_1 \cap B_2$  istnieje  $B \in \mathcal{B}$  takie, że  $x \in B \subset B_1 \cap B_2$ .

Wówczas rodzina  $\mathcal{T}$  zbiorów  $U \subset X$  takich, że jeśli  $x \in U$ , to  $x \in B \subset U$  dla pewnego  $B \in \mathcal{B}$ , jest topologią w  $X$ .

**Dowód.** Warunki (i) oraz (iii) w Definicji 1.2.1 są spełnione w sposób widoczny, a warunek (ii) wynika z własności (ii) rodziny  $\mathcal{B}$ .

**Uwaga 1.2.7.** Rodzina  $\mathcal{B}$  podzbiorów zbioru  $X$  spełniająca warunki (i) i (ii) Twierdzenia 1.2.6 jest bazą topologii  $\mathcal{T}$  opisanej w tym twierdzeniu. Będziemy mówić, że baza  $\mathcal{B}$  generuje topologię  $\mathcal{T}$ .

**Przykład 1.2.8.** Niech  $(X, <)$  będzie zbiorem zawierającym co najmniej dwa elementy, z wyróżnionym porządkiem liniowym. Rodzina przedziałów  $\{y : y < x\}$ ,  $\{y : x < y\}$ , oraz  $\{z : x < z < y\}$  spełnia warunki (i) i (ii) Twierdzenia 1.2.6. Topologię generowaną przez tę bazę będziemy oznaczać symbolem  $\mathcal{T}(<)$ .

Jeśli  $<$  jest zwykłym porządkiem na prostej rzeczywistej  $\mathbb{R}$ , to  $\mathcal{T}(<)$  jest topologią euklidesową.

Niech  $<$  będzie porządkiem leksykograficznym w kwadracie  $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ , tzn.  $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$  jeśli  $x_1 < x_2$ , lub też  $x_1 = x_2$  i  $y_1 < y_2$ . Przestrzeń topologiczną  $(I^2, \mathcal{T}(<))$  nazywa się kwadratem leksykograficznym. Kwadrat leksykograficzny nie jest przestrzenią metryzowalną (zob. Uzupełnienie 7.2 (A)).

Podzbiór przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  można rozpatrywać w naturalny sposób jako przestrzeń topologiczną, bo dla  $Y \subset X$ , rodzina  $\{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$  śladów na  $Y$  zbiorów otwartych w  $X$  jest topologią w  $Y$ , zob. 1.2.1. Przyjęta przez nas poniżej definicja podprzestrzeni jest zgodna z tym, co opisaliśmy w Uwadze 1.1.8 dla przestrzeni metrycznych.

**Definicja 1.2.9.** Niech  $(X, \mathcal{T}_X)$  będzie przestrzenią topologiczną i niech  $Y \subset X$ . Przestrzeń topologiczną  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ , gdzie  $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}_X\}$ , nazywamy podprzestrzenią przestrzeni  $(X, \mathcal{T}_X)$ , a  $\mathcal{T}_Y$  - topologią indukowaną w  $Y$ .

**Przykład 1.2.10.** Niech  $(I^2, \mathcal{T}(<))$  będzie kwadratem leksykograficznym i niech  $S = (0, 1] \times \{0\}$ . Topologia indukowana  $\mathcal{T}(<)_S$  na  $S$  jest generowana przez bazę złożoną ze zbiorów  $(a, b] \times \{0\}$ , gdzie  $0 < a < b \leq 1$ .

Zbiór liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  z topologią generowaną przez bazę złożoną z odcinków  $(a, b]$  nazywa się strzałką. Podprzestrzeń  $(0, 1]$  strzałki można więc utożsamiać z podprzestrzenią  $(0, 1] \times \{0\}$  kwadratu leksykograficznego. Strzałka nie jest metryzowalna, zob. Uzupełnienie 7.2 (A).

W przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ , dla każdej pary różnych punktów  $x_1, x_2 \in X$  istnieją rozłączne zbiory otwarte  $U_1, U_2$  takie, że  $x_i \in U_i$  - wystarczy przyjąć  $U_i = B(x_i, r/2)$ , gdzie  $r = d(x_1, x_2)$ .

**Definicja 1.2.11.** Przestrzeń topologiczną  $(X, \mathcal{T})$  nazywamy przestrzenią Hausdorffa, jeśli dla każdej pary różnych punktów  $x_1, x_2 \in X$  istnieją  $U_i \in \mathcal{T}$  takie, że  $x_i \in U_i$ , oraz  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

Przestrzenie niemetryzowalne opisane w przykładach 1.2.2 i 1.2.10 są przestrzeniami Hausdorffa.

**Przykład 1.2.12.** Niech  $X$  będzie zbiorem nieskończonym. Topologia  $\mathcal{T} = \{U \subset X : U = \emptyset, \text{ lub } X \setminus U \text{ jest zbiorem skończonym}\}$  nazywa się topologią Zariskiego w  $X$ . W przestrzeni  $(X, \mathcal{T})$  każde dwa niepuste zbiory otwarte mają niepuste przecięcie, w szczególności przestrzeń  $(X, \mathcal{T})$  nie jest Hausdorffa.



**Definicja 1.2.13.** *Otoczeniem punktu  $a$  w przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  nazywamy zbiór  $V$  taki, że dla pewnego  $U \in \mathcal{T}$ ,  $a \in U \subset V$ .*

W przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  otoczeniami punktu  $a$  są zbiory zawierające pewną kulę o środku w  $a$ .

**Definicja 1.2.14.** *Niech  $(X, \mathcal{T})$  będzie przestrzenią topologiczną i  $A \subset X$ . Domknięcie  $\overline{A}$  zbioru  $A$  jest zbiorem punktów  $x \in X$  takich, że każde otoczenie  $x$  przecina  $A$ .*

W przestrzeniach metrycznych, często jest wygodnie opisywać domknięcie zbioru przy użyciu ciągów zbieżnych.

**Definicja 1.2.15.** *W przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ , ciąg punktów  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  jest zbieżny do punktu  $x_0$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ , jeśli  $d(x_n, x_0) \rightarrow 0$ .*

**Twierdzenie 1.2.16.** *W przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ , warunek  $x_0 \in \overline{A}$  jest równoważny temu, że istnieje ciąg punktów  $x_n \in A$  taki, że  $x_n \rightarrow x_0$ .*

**Dowód.** Niech  $x_0 \in \overline{A}$ . Kula  $B(x_0, \frac{1}{n})$  jest otoczeniem  $x_0$ , istnieje więc  $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}) \cap A$ . Ponieważ  $d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ .

Na odwrót, załóżmy, że  $x_n \rightarrow x_0$  dla pewnego ciągu  $x_n \in A$ . Niech  $V$  będzie otoczeniem  $x_0$  i niech  $B(x_0, r) \subset V$ . Wówczas, jeśli  $d(x_0, x_n) < r$ , to  $x_n \in V$ . Tak więc każde otoczenie punktu  $x_0$  przecina  $A$ .

**Definicja 1.2.17.** *Zbiór  $A$  w przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  jest domknięty, jeśli  $\overline{A} = A$ .*

**Twierdzenie 1.2.18.** *Niech  $(X, \mathcal{T})$  będzie przestrzenią topologiczną. Wówczas*

- (i)  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ,
- (ii) zbiór  $A \subset X$  jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie jest otwarte,
- (iii)  $\overline{A} = \bigcap \{F : F \text{ jest zbiorem domkniętym w } X \text{ zawierającym } A\}$ .

**Dowód.** (i) Inkluzja  $\supset$  wynika stąd, że zbiór jest zawsze zawarty w swoim domknięciu. Aby uzasadnić przeciwną inkluzję, ustalmy  $x_0 \in \overline{\overline{A}}$ . Niech  $V$  będzie otoczeniem  $x_0$  i niech dla  $U \in \mathcal{T}$ ,  $x_0 \in U \subset V$ . Ponieważ  $U$  jest otoczeniem  $x_0$ , istnieje  $y \in U \cap \overline{A}$ , a ponieważ  $U$  jest otoczeniem  $y$ ,  $U \cap A \neq \emptyset$ . Tak więc, dowolne otoczenie  $x_0$  przecina  $A$ , czyli  $x_0 \in \overline{A}$ .

(ii) Jeśli  $X \setminus A$  jest zbiorem otwartym,  $X \setminus A$  jest otoczeniem każdego punktu  $x \notin A$ , rozłącznym z  $A$ , skąd  $\overline{A} = A$ . Jeśli  $\overline{A} = A$  i  $x \notin A$ , można wybrać otoczenie punktu  $x$  rozłączne z  $A$ , a więc istnieje  $U_x \in \mathcal{T}$  takie, że  $x \in U_x \subset X \setminus A$ . Zatem  $X \setminus A = \bigcup \{U_x : x \in X \setminus A\}$  jest zbiorem otwartym.

(iii) Jeśli  $F$  jest zbiorem domkniętym zawierającym  $A$ , to  $\overline{A} \subset \overline{F} = F$ , co dowodzi inkluzji  $\subset$ . Ponieważ, zgodnie z (i),  $\overline{A}$  jest zbiorem domkniętym zawierającym  $A$ , mamy też inkluzję przeciwną.

**Uwaga 1.2.19.** (A) Z definicji topologii, oraz własności (ii) w Twierdzeniu 1.2.18 wynika natychmiast, że skończone sumy i dowolne przecięcia zbiorów domkniętych w przestrzeni topologicznej są zbiorami domkniętymi. Zmieniając punkt widzenia, zauważmy, że jeśli w zbiorze  $X$  wyróżniona jest rodzina zbiorów  $\mathcal{F}$  zawierająca  $\emptyset, X$  i zamknięta ze względu na operacje skończonych sum i dowolnych przecięć, to  $\mathcal{T} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$  jest topologią w  $X$  i  $\mathcal{F}$  jest rodziną zbiorów domkniętych w przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$ .

(B) Zauważmy, że jeśli  $Y \subset X$  i  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  jest podprzestrzenią przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}_X)$ , to zbiór  $A \subset Y$  jest domknięty w  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A = Y \cap B$  dla pewnego zbioru  $B$  domkniętego w  $(X, \mathcal{T}_X)$ .

Wynika to natychmiast z 1.2.18 (ii) i 1.2.9.

W szczególności, jeśli  $Y$  jest zbiorem domkniętym w  $(X, \mathcal{T}_X)$ , to każdy zbiór domknięty w  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  jest też domknięty w przestrzeni  $X$ .

**Definicja 1.2.20.** *Wnętrzem  $\text{Int}A$  zbioru  $A$  w przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  nazywamy zbiór punktów, których pewne otoczenia są zawarte w  $A$ .*

**Uwaga 1.2.21.** Z definicji otoczeń 1.2.13 wynika, że wnętrze  $\text{Int}A$  jest sumą zbiorów otwartych zawartych w  $A$ , jest więc największym, w sensie inkluzji, otwartym podzbiorem zbioru  $A$ . Łatwo też sprawdzić, że  $\text{Int}A = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ .

**1.3. Ciągłość przekształceń.** Klasyczna  $(\varepsilon - \delta)$ -definicja ciągłości funkcji rzeczywistej  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  przenosi się na przypadek przekształceń  $f : X \rightarrow Y$  między przestrzeniami metrycznymi  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  w następujący sposób:

$$(1) \quad \forall_{a \in X} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta > 0} \quad \forall_{x \in X} \quad d_X(a, x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Część formuły (1) otrzymaną przez pominięcie pierwszych trzech kwantyfikatorów można zapisać w postaci  $f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \varepsilon)$  lub też  $B_X(a, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(a), \varepsilon))$ , gdzie  $B_X(a, \delta)$ ,  $B_Y(f(a), \varepsilon)$  są kulami w  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$ , odpowiednio. Zastępując kule otoczeniami, można rozszerzyć pojęcie ciągłości na przekształcenia między dowolnymi przestrzeniami topologicznymi.

Przyjmujemy jednak jako definicję ciągłości przekształceń inny równoważny warunek (zob. Twierdzenie 1.3.2), mający prostsze sformułowanie.

**Definicja 1.3.1.** *Przekształcenie  $f : X \rightarrow Y$  przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}_X)$  w  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  jest ciągłe, jeśli dla każdego  $U \in \mathcal{T}_Y$ ,  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ .*

**Twierdzenie 1.3.2.** *Dla przekształcenia  $f : X \rightarrow Y$  przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}_X)$  w  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  następujące warunki są równoważne:*

- (i)  *$f$  jest przekształceniem ciągłym,*
- (ii) *jeśli zbiór  $F$  jest domknięty w  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ , to  $f^{-1}(F)$  jest zbiorem domkniętym w  $(X, \mathcal{T}_X)$ ,*
- (iii)  *$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ , dla każdego  $A \subset X$ ,*
- (iv) *dla każdego  $a \in X$  i otoczenia  $U$  punktu  $f(a)$  w  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  istnieje otoczenie  $V$  punktu  $a$  w  $(X, \mathcal{T}_X)$  takie, że  $f(V) \subset U$ .*

**Dowód.** (i)  $\implies$  (iv) Niech  $a \in X$  i niech  $U$  będzie otoczeniem  $f(a)$  w  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ . Wybierzmy  $W \in \mathcal{T}_Y$  takie, że  $f(a) \in W \subset U$ . Wówczas  $V = f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_X$  jest otoczeniem punktu  $a$  i  $f(V) \subset U$ .

(iv)  $\implies$  (iii) Niech  $a \in \overline{A}$ . Mamy sprawdzić, że  $f(a) \in \overline{f(A)}$ . Wybierzmy dowolne otoczenie  $U$  punktu  $f(a)$  w  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ . Na mocy (iv) istnieje otoczenie  $V$  punktu  $a$  w  $(X, \mathcal{T}_X)$  takie, że  $f(V) \subset U$ . Ponieważ  $a \in \overline{A}$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$ , skąd  $U \cap f(A) \supset f(V \cap A) \neq \emptyset$ .

(iii)  $\implies$  (ii) Niech  $F$  będzie zbiorem domkniętym w  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  i  $A = f^{-1}(F)$ . Z (iii),  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{F} = F$ , skąd  $\overline{A} \subset f^{-1}(F) = A$ . Tak więc  $\overline{A} = A$ , czyli zbiór  $A$  jest domknięty.

(ii)  $\implies$  (i) Wynika to natychmiast z faktu, że zbiory domknięte są dopełnieniami zbiorów otwartych, zob. 1.2.18, (ii).

**Uwaga 1.3.3.** Jeśli w przestrzeni  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  jest wyróżniona baza  $\mathcal{B}$  generująca topologię  $\mathcal{T}_Y$ , to dla dowodu ciągłości przekształcenia  $f : X \rightarrow Y$ , gdzie  $(X, \mathcal{T}_X)$  jest przestrzenią topologiczną, wystarczy sprawdzić, że  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$  dla każdego  $U \in \mathcal{B}$ . Wynika to natychmiast z Definicji 1.3.1 i faktu, że każdy zbiór otwarty jest sumą pewnej podrodziny rodziny  $\mathcal{B}$ .

**Uwaga 1.3.4.** Ciągłość przekształcenia  $f : X \rightarrow Y$  przestrzeni metrycznej  $(X, d_X)$  w przestrzeń metryczną  $(Y, d_Y)$  jest równoważna warunkowi, że jeśli  $x_n \rightarrow x_0$ , to  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ , zob. 1.2.15.

Istotnie, zgodnie z Twierdzeniem 1.2.16, ten warunek zapewnia własność (iii) w Twierdzeniu 1.3.2. Na odwrót, jeśli  $f$  jest przekształceniem ciągłym,  $x_n \rightarrow x_0$  i  $\varepsilon > 0$ , to zgodnie z 1.3.2 (iv), dla pewnego otoczenia  $V$  punktu  $x_0$ , obraz  $f(V)$  jest zawarty w kuli o środku w  $f(x_0)$  i promieniu  $\varepsilon$ , a ponieważ prawie wszystkie wyrazy  $x_n$  leżą w  $V$ ,  $d_Y(f(x_0), f(x_n)) < \varepsilon$ , dla prawie wszystkich  $n$ . Zatem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

**Uwaga 1.3.5.** (A) Dla ustalonego  $a \in X$ , własność (iv) w 1.3.2 definiuje ciągłość przekształcenia  $f$  w punkcie  $a$ . Dla przekształcenia między przestrzeniami metrycznymi, ciągłość w punkcie  $a$  jest więc opisana formułą (1), z pominięciem kwantyfikatora  $\forall_{a \in X}$ .

(B) Niech  $f_n, f : X \rightarrow Y$  będą przekształceniami przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  w przestrzeń metryczną  $(Y, d)$  takimi, że  $\gamma_n = \sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in X\} \rightarrow 0$ . Wówczas, jeśli wszystkie przekształcenia  $f_n$  są ciągłe w punkcie  $a \in X$  (ze względu na topologię  $\mathcal{T}(d)$  w  $Y$ ), to także  $f$  jest ciągłe w tym punkcie.

Istotnie, niech  $U$  będzie otoczeniem punktu  $f(a)$  w przestrzeni  $(Y, \mathcal{T}(d))$  i niech  $B(f(a), r) \subset U$ . Ustalmy  $n$  takie, że  $\gamma_n < r/3$  i korzystając z ciągłości  $f_n$  w  $a$  wybierzmy otoczenie  $V$  punktu  $a$  w  $(X, \mathcal{T})$  takie, że  $f_n(V) \subset B(f_n(a), r/3)$ . Wówczas, dla  $x \in V$ ,  $d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f(a)) < 3 \cdot \frac{r}{3} = r$ , a zatem  $f(V) \subset U$ .

Wprowadzimy teraz przekształcenia pozwalające na utożsamianie przestrzeni ze względu na własności, które można opisać w terminach topologii tych przestrzeni.

**Definicja 1.3.6.** *Przekształcenie  $f : X \rightarrow Y$  przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}_X)$  w  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  jest homeomorfizmem, jeśli  $f$  jest różnowartościowe,  $f(X) = Y$  oraz oba przekształcenia  $f$  i  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  są ciągłe. Jeśli  $f$  jest homeomorfizmem przestrzeni  $(X, \mathcal{T}_X)$  na podprzestrzeń  $(f(X), (\mathcal{T}_Y)_{f(X)})$  przestrzeni  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ , mówimy, że  $f$  jest zanurzeniem homeomorficznym.*

**Uwaga 1.3.7.** Z Definicji 1.3.1 wynika natychmiast, że złożenie przekształceń ciągłych jest ciągłe. W szczególności, złożenie homeomorfizmów jest homeomorfizmem.

**Przykład 1.3.8.** (A) Każde dwa otwarte zbiory wypukłe w przestrzeni euklidesowej  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  (rozpatrywane jako podprzestrzenie) są homeomorficzne, zob. Uzupełnienie 7.1.

Jednakże, każde ciągłe przekształcenie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  płaszczyzny w prostą ma nieprzeliczalną warstwę. Aby to sprawdzić, rozpatrzmy funkcje  $f_x(y) = f(x, y)$ , dla  $x \in \mathbb{R}$ . Funkcja  $f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, więc  $f_x(\mathbb{R})$  jest przedziałem. Jeśli jeden z tych przedziałów redukuje się do punktu,  $f_x(\mathbb{R}) = \{r\}$ , mamy  $f^{-1}(r) = \{x\} \times \mathbb{R}$ . W przeciwnym razie, zawsze istnieje liczba wymierna  $q_x \in f_x(\mathbb{R})$ . Dla pewnej liczby wymiernej  $q$  zbiór  $\{x : q_x = q\}$  jest nieprzeliczalny, a więc warstwa  $f^{-1}(q)$  jest nieprzeliczalna.

(B) Przekształcenie  $f(t) = (\cos t, \sin t)$  odcinka  $[0, 2\pi)$  na prostej euklidesowej na okrąg  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  (z topologią podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej) jest ciągłą bijekcją, ale nie jest homeomorfizmem. Istotnie, dla  $a_n = (\cos(2\pi - \frac{1}{n}), \sin(2\pi - \frac{1}{n}))$ ,  $a_n \rightarrow f(0)$ , ale  $f^{-1}(a_n) \not\rightarrow 0$ . Zauważmy też, że nie istnieje ciągłe i różnowartościowe przekształcenie  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Załóżmy przeciwnie i rozpatrzmy złożenie  $g \circ f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ . Przekształcenie  $g \circ f$  jest ciągłe i różnowartościowe, a więc jest albo rosnące, albo malejące. W pierwszym przypadku  $g \circ f(0) < g(a_1) < g(a_2) < \dots$ , bo  $g(a_n) = g \circ f(2\pi - \frac{1}{n})$ , oraz  $g(a_n) \rightarrow g \circ f(0)$ , co jest niemożliwe. Podobnie do sprzeczności dochodzi się, jeśli  $g \circ f$  maleje.

Zakończymy tę część obserwacją dotyczącą dwóch typowych operacji: obcięcia i kombinacji przekształceń.

**Uwaga 1.3.9.** (A) Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie przekształceniem ciągłym przestrzeni  $(X, \mathcal{T}_X)$  w przestrzeń  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  i niech  $Z \subset X$ . Wówczas obcięcie  $f|_Z : Z \rightarrow Y$  jest przekształceniem ciągłym, gdzie w  $Z$  rozpatruje się topologię podprzestrzeni przestrzeni  $X$ . Ponadto  $f|_Z$  jest ciągłe jako przekształcenie z  $Z$  na podprzestrzeń  $f(Z)$  przestrzeni  $Y$ .

Istotnie, zbiory otwarte w  $f(Z)$  są postaci  $W = U \cap f(Z)$ , gdzie  $U \in \mathcal{T}_Y$ , a  $(f|_Z)^{-1}(W) = f^{-1}(U) \cap Z$  jest zbiorem otwartym w  $Z$ , bo  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ .

(B) Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie przekształceniem przestrzeni  $(X, \mathcal{T}_X)$  w  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ . Jeśli  $X = F_1 \cup \dots \cup F_m$ , gdzie każdy ze zbiorów  $F_i$  jest domknięty i każde obcięcie  $f|_{F_i} : F_i \rightarrow Y$  jest ciągłe, to przekształcenie  $f$  jest ciągłe.

Istotnie, dla dowolnego zbioru domkniętego  $F$  w  $Y$ , zbiór  $A_i = f^{-1}(F) \cap F_i$  jest domknięty w przestrzeni  $(F_i, \mathcal{T}_{F_i})$ , a ponieważ  $F_i$  jest zbiorem domkniętym w  $(X, \mathcal{T}_X)$ , zbiór  $A_i$  jest też domknięty w  $X$ , zob. 1.2.19 (B). Zatem  $f^{-1}(F) = A_1 \cup \dots \cup A_m$  jest zbiorem domkniętym w  $X$ .

Podobnie sprawdza się, że jeśli  $X = \bigcup_{s \in S} U_s$ ,  $U_s \in \mathcal{T}_X$  i obcięcia  $f|_{U_s} : U_s \rightarrow Y$  są ciągłe, to  $f$  jest przekształceniem ciągłym.

#### 1.4. Iloczyny skończone przestrzeni topologicznych.

**Definicja 1.4.1.** Niech  $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , będą przestrzeniami topologicznymi. Rodzina  $\mathcal{B}$  iloczynów kartezjańskich  $V_1 \times \dots \times V_n$  zbiorów otwartych  $V_i \in \mathcal{T}_i$  spełnia warunki (i), (ii) w 1.2.6, a więc jest bazą pewnej topologii w iloczynie kartezjańskim  $X_1 \times \dots \times X_n$ . Przestrzeń  $(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{T})$  z topologią  $\mathcal{T}$  generowaną przez bazę  $\mathcal{B}$  nazywamy iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych  $(X_i, \mathcal{T}_i)$ .

**Twierdzenie 1.4.2.** Niech  $\mathcal{T}_i$ , dla  $i = 1, 2, \dots, n$ , będzie topologią w  $X_i$  generowaną przez metrykę  $d_i$ . Wówczas topologia w iloczynie kartezjańskim  $(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{T})$  przestrzeni  $(X_i, \mathcal{T}_i)$  jest generowana przez metrykę  $d(a, b) = \max_i d_i(a_i, b_i)$ , gdzie  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

**Dowód.** Kule w przestrzeni metrycznej  $(X_1 \times \dots \times X_n, d)$  mają postać

$$(1) B(a, r) = B_1(a_1, r) \times \dots \times B_n(a_n, r),$$

gdzie  $a = (a_1, \dots, a_n)$  i  $B_i(a_i, r)$  jest kulą w przestrzeni  $(X_i, d_i)$  o środku w  $a_i$  i promieniu  $r$ . Wynika stąd, że  $\mathcal{T}(d) \subset \mathcal{T}$ . Niech teraz  $U \in \mathcal{T}$  i  $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ . Istnieją  $V_i \in \mathcal{T}_i$  takie, że  $a \in V_1 \times \dots \times V_n \subset U$  i niech  $B_i(a_i, r_i) \subset V_i$ . Przyjmując  $r = \min\{r_i : i = 1, \dots, n\}$  mamy wówczas, zgodnie z (1),  $B(a, r) \subset U$ . To dowodzi, że  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(d)$ .

**Uwaga 1.4.3.** Z 1.1.6 (A) i 1.4.2 wynika w szczególności, że topologia euklidesowa w  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  jest identyczna z topologią iloczynu kartezjańskiego prostych euklidesowych.

**Uwaga 1.4.4.** Metryka  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą na kwadracie kartezjańskim przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(d))$ . Z nierówności trójkąta można bowiem wyprowadzić, że  $|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y, y_0)$ .

**Uwaga 1.4.5.** Niech  $(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{T})$  będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych  $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , i niech  $p_i : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_i$  będą rzutowaniami,  $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ .

(A) Rzutowania  $p_i$  są ciągłe. Istotnie, jeśli  $U \in \mathcal{T}_i$ , to  $p_i^{-1}(U) = X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \dots \times X_n \in \mathcal{T}$ .

(B) Niech  $f : Z \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$  będzie przekształceniem określonym na przestrzeni topologicznej  $(Z, \mathcal{T}_Z)$ . Przekształcenie  $f$  jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie złożenia  $p_i \circ f : Z \rightarrow X_i$  są ciągłe.

Z (A) dostajemy natychmiast, że z ciągłości  $f$  wynika ciągłość każdego złożenia  $p_i \circ f$ . Dla wykazania przeciwnej implikacji, zgodnie z 1.3.3 i 1.4.1 wystarczy sprawdzić, że ciągłość złożenia  $p_i \circ f$  zapewnia otwartość przeciwobrazów  $f^{-1}(V_1 \times \dots \times V_n)$ , dla dowolnych  $V_i \in \mathcal{T}_i$ , co wynika z formuły  $f^{-1}(V_1 \times \dots \times V_n) = (p_1 \circ f)^{-1}(V_1) \cap \dots \cap (p_n \circ f)^{-1}(V_n)$ .

### 1.5. Iloczyny przeliczalne przestrzeni topologicznych.

**Definicja 1.5.1.** Niech  $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , będzie ciągiem przestrzeni topologicznych. Rodzina  $\mathcal{B}$  iloczynów kartezjańskich  $V_1 \times \dots \times V_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots$ , gdzie  $V_i \in \mathcal{T}_i$ , jest bazą pewnej topologii w iloczynie kartezjańskim  $X_1 \times X_2 \times \dots$ . Przestrzeń  $(X_1 \times X_2 \times \dots, \mathcal{T})$  z topologią  $\mathcal{T}$  generowaną przez bazę  $\mathcal{B}$  nazywamy iloczynem kartezjańskim ciągu przestrzeni  $(X_i, \mathcal{T}_i)$ .

Przypomnijmy, zob. Przykład 1.1.6 (B), że jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną, to metryka  $\min(d, 1)$  generuje w  $X$  tę samą topologię, co metryka  $d$ .

**Twierdzenie 1.5.2.** Jeśli topologia  $\mathcal{T}_i$  w przestrzeni  $X_i$  jest generowana przez metrykę  $d_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , to topologia w iloczynie kartezjańskim  $(X_1 \times X_2 \times \dots, \mathcal{T})$  tego ciągu przestrzeni jest generowana przez metrykę  $d = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \min(d_i, 1)$ .

**Dowód.** Pokażemy najpierw, że  $\mathcal{T}(d) \subset \mathcal{T}$ . Wystarczy sprawdzić, że dla dowolnej kuli  $B(a, r)$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots)$ , istnieje element  $B$  bazy  $\mathcal{B}$  opisanej w 1.5.1, taki, że  $a \in B \subset B(a, r)$ . Niech  $B_i(a_i, s)$  oznacza kulę w  $(X_i, d_i)$  o środku w  $a_i$  i promieniu  $s$ . Wybierzmy  $n$  takie, że  $2^{-n} < \frac{r}{2}$ . Wówczas, dla  $B = B_1(a_1, \frac{r}{2}) \times \dots \times B_n(a_n, \frac{r}{2}) \times X_{n+1} \times \dots$ ,  $B \subset B(a, r)$ .

Ustalmy teraz  $U \in \mathcal{T}$  i  $a = (a_1, a_2, \dots) \in U$ . Istnieją  $V_i \in \mathcal{T}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , takie, że  $a \in V_1 \times \dots \times V_n \times X_{n+1} \times \dots \subset U$  i niech  $B_i(a_i, r_i) \subset V_i$ ,  $r_i < 1$ . Wówczas, dla  $r = \min\{2^{-i}r_i : i = 1, \dots, n\}$ ,  $B(a, r) \subset B_1(a_1, r_1) \times \dots \times B_n(a_n, r_n) \times X_{n+1} \times \dots \subset U$ . To pokazuje, że  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(d)$ .

**Uwaga 1.5.3.** Topologia w iloczynie kartezjańskim rozpatrywanym w 1.5.2 jest też generowana przez metrykę  $\max\{\min(d_i, 2^{-i}) : i = 1, 2, \dots\}$ , zob. 1.1.6 (B), nieco bliższą metryce określonej w 1.4.2.

**1.6. Twierdzenie Tietzego o przedłużaniu przekształceń.** Mówiąc o ciągłości przekształcenia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  w prostą rzeczywistość bez dodatkowych wyjaśnień, będziemy mieli na myśli ciągłość ze względu na topologię euklidesową w  $\mathbb{R}$ .

W przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ , z każdym niepustym zbiorem  $A \subset X$  można wiązać funkcję

$$(1) \quad d_A(x) = \inf\{d(x, z) : z \in A\},$$

mierzącą odległość punktów od tego zbioru. Sprawdzimy, że

$$(2) \quad |d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y).$$

Dla dowolnego  $z \in A$ ,  $d_A(y) \leq d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$ . Stąd, z (1),  $d_A(y) \leq d(y, x) + d_A(x)$ , czyli  $d_A(y) - d_A(x) \leq d(y, x)$ . Wobec symetrii założeń, także  $d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y)$ , otrzymujemy więc (2).

Własność (2) zapewnia ciągłość funkcji  $d_A$ , zob. warunek (1) w 1.3.

**Uwaga 1.6.1.** Niech  $W$  będzie zbiorem otwartym w przestrzeni metryzowalnej  $(X, \mathcal{T})$ . Istnieje wówczas funkcja ciągła  $\varphi : X \rightarrow [0, +\infty)$  taka, że  $W = \{x \in X : \varphi(x) > 0\}$ . Istotnie, dla  $W \neq X$  przyjmijmy  $\varphi = d_{X \setminus W}$ , gdzie metryka  $d$  generuje topologię  $\mathcal{T}$ .

**Twierdzenie 1.6.2** (o rozkładach jedynki). *Niech  $(X, \mathcal{T})$  będzie przestrzenią metryzowalną i niech  $X = W_1 \cup \dots \cup W_m$ , gdzie  $W_i$  są zbiorami otwartymi. Istnieją wówczas funkcje ciągłe  $\lambda_i : X \rightarrow [0, 1]$  takie, że  $\{x : \lambda_i(x) > 0\} \subset W_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , oraz  $\sum_{i=1}^m \lambda_i(x) = 1$ , dla  $x \in X$ .*

**Dowód.** Niech  $\varphi_i$  będzie funkcją opisaną w Uwadze 1.6.1 dla  $W = W_i$ ,  $\sigma = \sum_{i=1}^m \varphi_i$ . Zauważmy, że jeśli  $x \in W_i$ , to  $\varphi_i(x) > 0$ , a więc  $\sigma > 0$ . Przyjmując  $\lambda_i = \frac{\varphi_i}{\sigma}$  otrzymujemy funkcje z żądanymi własnościami.

Twierdzenie Tietzego o przedłużaniu (Wniosek 1.6.5) wyprowadzimy z twierdzenia Hahna o wpisywaniu funkcji ciągłej między parą funkcji półciągłych.

Funkcja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  na przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  jest półciągła z góry (z dołu), jeśli zbiory  $\{x : f(x) < r\}$  ( $\{x : f(x) > r\}$ ) są otwarte.

**Przykład 1.6.3.** Niech  $f : A \rightarrow [a, b]$  będzie funkcją ciągłą na podprzestrzeni  $(A, \mathcal{T}_A)$  przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$ ,  $\bar{A} = A$  i niech

$$u(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jeśli } x \in A, \\ a, & \text{jeśli } x \notin A, \end{cases} \quad w(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jeśli } x \in A, \\ b, & \text{jeśli } x \notin A. \end{cases}$$

Wówczas funkcja  $u$  jest półciągła z góry, a funkcja  $w$  jest półciągła z dołu.

**Twierdzenie 1.6.4** (Hahn). *Niech  $u, w : X \rightarrow [a, b]$  będą funkcjami na przestrzeni metryzowalnej  $(X, \mathcal{T})$  takimi, że*

$$(i) \quad u \leq w,$$

$$(ii) \quad u \text{ jest półciągła z góry, } w \text{ jest półciągła z dołu.}$$

*Istnieje wówczas funkcja ciągła  $f : X \rightarrow [a, b]$  taka, że  $u \leq f \leq w$ .*

**Dowód.** (A) Wykażemy najpierw słabszą tezę, że jeśli  $u, w$  spełniają warunki (i) i (ii), to dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieje funkcja ciągła  $g : X \rightarrow [a, b]$  taka, że  $u - \varepsilon \leq g \leq w + \varepsilon$ .

W tym celu, dla ustalonego  $\varepsilon > 0$ , pokryjmy  $[a, b]$  przedziałami  $(a_i, b_i)$  o długościach  $< \varepsilon$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Z (ii), zbiory

$$(3) \quad W_i = \{x : u(x) < b_i\} \cap \{x : w(x) > a_i\}$$

są otwarte. Jeśli  $[u(x), w(x)] \cap (a_i, b_i) \neq \emptyset$ , to  $x \in W_i$ , a więc  $X = W_1 \cup \dots \cup W_m$ . Niech  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  będzie rozkładem jedynki opisanym w 1.6.2. Funkcję ciągłą  $g$  określamy formułą

$$(4) \quad g(x) = \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i(x), \text{ gdzie } c_i = \frac{a_i + b_i}{2}.$$

Jeśli  $x \in W_i$ , to z (3),  $u(x) - \varepsilon \leq c_i \leq w(x) + \varepsilon$ , a ponieważ z (4),  $g(x)$  jest kombinacją wypukłą punktów  $c_i$ , którym odpowiadają zbiory  $W_i$  zawierające  $x$ , także  $u(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq w(x) + \varepsilon$ .

(B) Niech  $u, w$  spełniają założenia twierdzenia. Korzystając z (A) określimy indukcyjnie funkcje półciągłe z góry  $u_i : X \rightarrow [a, b]$ , funkcje półciągłe z dołu  $w_i : X \rightarrow [a, b]$ , oraz funkcje ciągłe  $g_i : X \rightarrow [a, b]$  takie, że

$$(5) \quad u = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_i \leq \dots \leq w_i \leq w_1 \leq w_0 = w,$$

$$(6) \quad g_i - 1/i \leq u_i \leq w_i \leq g_i + 1/i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Jeśli  $u_{i-1}, w_{i-1}$  są już określone, (A) zapewnia istnienie funkcji ciągłej  $g_i : X \rightarrow [a, b]$  takiej, że  $u_{i-1} - 1/i \leq g_i \leq w_{i-1} + 1/i$ . Przyjmijmy  $u_i = \max\{g_i - 1/i, u_{i-1}\}$ ,  $w_i = \min\{g_i + 1/i, w_{i-1}\}$  i zauważmy, że  $u_i \leq w_i$ , bo  $g_i - 1/i \leq w_{i-1}$  oraz  $g_i + 1/i \geq u_{i-1}$ .

Z (5) i (6) wynika, że ciągi funkcji  $u_i, w_i$  zbiegają punktowo do wspólnej granicy  $f : X \rightarrow [a, b]$ , przy czym, z (6),  $|f(x) - g_i(x)| \leq 1/i$ , dla  $x \in X, i = 1, 2, \dots$ . Z (5),  $u \leq f \leq w$ , a ciągłość funkcji  $f$  wynika z Uwagi 1.3.5.

**Wniosek 1.6.5** (Twierdzenie Tietzego). *Niech  $f : A \rightarrow [a, b]$  będzie funkcją ciągłą określoną na podprzestrzeni domkniętej przestrzeni metryzowalnej  $(X, \mathcal{T})$ . Istnieje wówczas funkcja ciągła  $\bar{f} : X \rightarrow [a, b]$  taka, że  $\bar{f}(x) = f(x)$  dla  $x \in A$ .*

**Dowód.** Przedłużenie  $f$  do funkcji ciągłej na  $X$  otrzymujemy natychmiast z twierdzenia 1.6.4, wpisując funkcję ciągłą między funkcje półciągłe opisane w Przykładzie 1.6.3.

**Uwaga 1.6.6.** Każdą funkcję ciągłą  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  określoną na podprzestrzeni domkniętej przestrzeni metryzowalnej  $(X, \mathcal{T})$  można przedłużyć do funkcji ciągłej  $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Istotnie, z Uwagi 1.4.5 (B) wynika, że wystarczy sprawdzić, że każdą funkcję ciągłą  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  można przedłużyć do funkcji ciągłej  $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Składając  $f$  z homeomorfizmem  $\arctg : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ , możemy rozpatrywać funkcję przyjmującą wartości w przedziale  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Wniosek 1.6.5 zapewnia istnienie funkcji ciągłych  $g : X \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ , oraz  $h : X \rightarrow [0, 1]$  takich, że  $g(x) = f(x)$ , dla  $x \in A$ , oraz  $h$  przyjmuje wartość 1 na  $A$  i 0 na  $g^{-1}(\{-\pi/2, \pi/2\})$ . Wówczas iloczyn  $\bar{f} = g \cdot h$  jest ciągłym przedłużeniem  $f$  przyjmującym wartości w przedziale  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

W Zadaniu 1.44 podajemy formułę opisującą operację przedłużania funkcji pochodzącą z książki J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Twierdzenie 4.5.1. Formuła odwołuje się do metryki w przestrzeni  $X$ , podczas gdy podany przez nas dowód przenosi się na ogólniejsze klasy przestrzeni, w których spełniona jest teza Twierdzenia 1.6.2.

**1.7. Ośrodkowość.** Przestrzenie metryzowalne, których topologia ma przeliczalną bazę, stanowią niezwykle ważną klasę przestrzeni. Dla przestrzeni metryzowalnych, istnienie bazy przeliczalnej jest równoważne własności, którą opiszemy poniżej.

**Definicja 1.7.1.** (A) *Zbiór  $A$  w przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  jest gęsty, jeśli  $\bar{A} = X$ .*

(B) *Przestrzeń topologiczna  $(X, \mathcal{T})$  jest ośrodkowa, jeśli zawiera przeliczalny podzbiór gęsty.*

Przestrzenie euklidesowe są ośrodkowe, bo zbiór punktów w  $\mathbb{R}^n$  o wszystkich współrzędnych wymiernych jest przeliczalny i gęsty w  $(\mathbb{R}^n, d_e)$ . Podobnie uzasadnia się ośrodkowość przestrzeni opisanych w 1.1.7 (B). Przestrzeń określona w 1.1.7 (A) nie jest ośrodkowa: dla każdego  $A \subset \mathbb{R}$  w tej przestrzeni metrycznej,  $\bar{A} \subset A \cup \{0\}$ .

Jeśli topologia  $\mathcal{T}$  w  $X$  ma przeliczalną bazę  $\mathcal{B}$ , to wybierając z każdego niepustego zbioru  $B \in \mathcal{B}$  punkt  $a_B$ , otrzymamy przeliczalny gęsty podzbiór  $X$ . Istnienie przeliczalnej bazy implikuje więc ośrodkowość. Dla przestrzeni metryzowalnych prawdziwa jest implikacja odwrotna.



**Twierdzenie 1.7.2.** *Topologia metryzowalnej przestrzeni ośrodkowej ma przeliczalną bazę.*

**Dowód.** Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i niech  $A$  będzie przeliczalnym zbiorem gęstym w  $(X, \mathcal{T}(d))$ . Wówczas baza topologii  $\mathcal{T}(d)$  opisana w Przykładzie 1.2.5 jest przeliczalna.

**Wniosek 1.7.3.** *Wszystkie podprzestrzenie przestrzeni euklidesowych są ośrodkowe.*

**Dowód.** Jeśli  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{T}_X$  jest topologią  $X$  generowaną przez metrykę euklidesową  $d_e$  na  $X$ , a  $\mathcal{B}$  jest przeliczalną bazą topologii euklidesowej  $\mathbb{R}^n$ , to  $\{B \cap X : B \in \mathcal{B}\}$  jest przeliczalną bazą  $\mathcal{T}_X$ , zob. 1.1.8.

Przestrzeń opisana w Przykładzie 1.2.2 jest ośrodkowa, ale, jak wynika z rozumowania podanego w 1.2.2, topologia tej przestrzeni nie ma bazy przeliczalnej.

**Przykład 1.7.4.** Niech  $(C_b(X), d_{\sup})$  będzie przestrzenią ograniczonych funkcji ciągłych  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  na przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  z metryką

$$d_{\sup}(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}.$$

(A) Przestrzeń  $(C_b([0, 1]), d_{\sup})$  jest ośrodkowa, bo zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa o aproksymacji, zbiór wielomianów o współczynnikach wymiernych (rozpatrywanych jako funkcje na  $[0, 1]$ ) jest gęsty w tej przestrzeni.

(B) Przestrzeń  $(C_b(\mathbb{R}), d_{\sup})$  nie jest ośrodkowa. Dla uzasadnienia, rozpatrzmy rodzinę  $\mathcal{S}$  wszystkich niepustych podzbiorów liczb naturalnych  $\mathbb{N}$  i z każdym  $S \in \mathcal{S}$  zwiążmy funkcję  $f_S \in C_b(\mathbb{R})$  określoną formułą  $f_S(x) = \min\{d_S(x), 1\}$ , gdzie  $d_S(x) = \inf\{|x - z| : z \in S\}$ , zob. (1) w 1.6. Jeśli  $n \in S \setminus T$ ,  $S, T \in \mathcal{S}$ , to  $f_S(n) = 0$ ,  $f_T(n) = 1$ , a więc  $d_{\sup}(f_S, f_T) = 1$ .

Niech  $A \subset C_b(\mathbb{R})$  będzie zbiorem gęstym. Dla każdego  $S \in \mathcal{S}$  istnieje  $g_S \in A$  takie, że  $d_{\sup}(f_S, g_S) < 1/2$ . Wówczas, dla  $S \neq T$ ,  $S, T \in \mathcal{S}$ ,  $g_S \neq g_T$ , a więc zbiór  $A$  jest nieprzeliczalny, bo  $\mathcal{S}$  jest zbiorem nieprzeliczalnym.

## 2. ZWARTOŚĆ

**2.1. Przestrzenie zwarte.** Wprowadzając pojęcie zwartości, wskażemy najpierw w Twierdzeniu 2.1.4 trzy własności, które są równoważne w klasie przestrzeni metryzowalnych, a następnie pierwszą z nich przyjmujemy jako definicję zwartości w klasie przestrzeni Hausdorffa, zob. 1.2.11. Dwie pozostałe własności opisane w tym twierdzeniu są bardzo użyteczne dla przestrzeni metryzowalnych, ale poza tą klasą przestrzeni okazują się istotnie różne (zob. Zadanie 7.26 (A), (C)) i są mniej przydatne niż wyróżniona przez nas własność pokryciowa.

**Definicja 2.1.1.** *Niech  $(X, \mathcal{T})$  będzie przestrzenią topologiczną.*

(A) *Rodzina zbiorów  $\mathcal{U}$  jest otwartym pokryciem zbioru  $A \subset X$ , jeśli  $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$  i  $A \subset \bigcup \mathcal{U}$ .*

(B) *Punkt  $a \in X$  jest punktem skupienia ciągu  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  w  $X$ , jeśli każde otoczenie  $a$  zawiera wyrazy  $a_n$  dla nieskończenie wielu indeksów  $n$ .*

**Uwaga 2.1.2.** W przestrzeni metryzowalnej  $(X, \mathcal{T})$ , punkt  $a$  jest punktem skupienia ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy pewien podciąg tego ciągu jest zbieżny do  $a$ , tzn. istnieje ściśle rosnąca funkcja  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  taka, że  $a_{\varphi(n)} \rightarrow a$ .

Istotnie, jeśli  $a$  jest punktem skupienia ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  i metryka  $d$  generuje topologię  $\mathcal{T}$ , możemy wybrać indeksy  $\varphi(1) < \varphi(2) < \dots$  takie, że  $d(a, a_{\varphi(n)}) < \frac{1}{n}$ . Wówczas  $a_{\varphi(n)} \rightarrow a$ .

**Lemat 2.1.3.** Niech  $A$  będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ ,  $\mathcal{U}$  otwartym (w topologii  $\mathcal{T}(d)$ ) pokryciem  $A$  i założmy, że z każdego ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  punktów w  $A$  można wybrać podciąg zbieżny do pewnego  $a \in A$ . Wówczas istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że dla każdego  $a \in A$ , kula  $B(a, \delta)$  leży w pewnym elemencie  $\mathcal{U}$ .

**Dowód.** Przypuśćmy, że taka liczba  $\delta > 0$  nie istnieje. Wówczas dla każdego  $n \geq 1$  istnieje  $a_n \in A$  takie, że  $B(a_n, 1/n)$  nie leży w żadnym elemencie  $\mathcal{U}$ . Pokażemy, że żaden punkt  $a \in A$  nie jest granicą podciągu ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ .

Ustalmy  $a \in A$ ,  $U \in \mathcal{U}$  zawierające  $a$  i  $r > 0$  takie, że  $B(a, r) \subset U$ . Jeśli  $a_n \in B(a, r/2)$ , to  $B(a_n, r/2) \subset U$  i z definicji  $a_n$  mamy  $1/n > r/2$ . Zatem  $a_n \notin B(a, r/2)$  dla  $n \geq 2/r$ , więc żaden podciąg  $(a_n)_{n=1}^\infty$  nie jest zbieżny do  $a$ .

Liczbę  $\delta > 0$  opisaną w lemacie nazywa się *liczbą Lebesgue'a* pokrycia  $\mathcal{U}$  zbioru  $A \subset X$ . W dowodzie Twierdzenia 2.1.4 będziemy korzystali z istnienia liczby Lebesgue'a dla pokrycia całej przestrzeni  $X$ .

**Twierdzenie 2.1.4.** Dla przestrzeni metryzowalnej  $(X, \mathcal{T})$  następujące warunki są równoważne:

- (i) z każdego otwartego pokrycia przestrzeni  $X$  można wybrać pokrycie skończone,
- (ii) z każdego ciągu punktów w  $X$  można wybrać podciąg zbieżny w tej przestrzeni,
- (iii) każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych w  $X$  ma niepuste przecięcie.

**Dowód.** (ii)  $\implies$  (i) Niech  $\mathcal{U}$  będzie otwartym pokryciem przestrzeni  $X$ . Ustalmy w  $X$  metrykę  $d$  generującą topologię w  $X$  i niech  $\delta > 0$  będzie liczbą Lebesgue'a pokrycia  $\mathcal{U}$ , zob. 2.1.3. Dążąc do sprzeczności, założmy, że przestrzeni  $X$  nie można pokryć skończenie wieloma elementami  $\mathcal{U}$ .

Każda kula  $B(x, \delta)$  leży w pewnym elemencie  $\mathcal{U}$ , więc zgodnie z założeniem o  $\mathcal{U}$ , przestrzeń  $X$  nie jest sumą skończenie wielu takich kul. Możemy zatem wybrać w  $X$  ciąg punktów  $(a_n)_{n=1}^\infty$  taki, że dla  $n = 2, 3, \dots$ ,  $a_n \notin \bigcup_{m < n} B(a_m, \delta)$ . Niech  $a \in X$  będzie dowolnym punktem. Ponieważ dla  $m < n$  mamy  $d(a_m, a_n) \geq \delta$ , kula  $B(a, \delta/2)$  zawiera co najwyżej jeden wyraz ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ . Punkt  $a$  nie może więc być granicą żadnego podciągu tego ciągu.

(i)  $\implies$  (iii) Niech  $F_1 \supset F_2 \supset \dots$  będą domkniętymi, niepustymi zbiorami w przestrzeni  $(X, \mathcal{T})$ . Założmy przeciwnie, że  $\bigcap_i F_i = \emptyset$ . Wówczas rodzina zbiorów otwartych  $\mathcal{U} = \{X \setminus F_i : i = 1, 2, \dots\}$  pokrywa  $X$ , bo  $\bigcup \mathcal{U} = X \setminus \bigcap_i F_i$ . Z (i), dla pewnego  $n$  mamy  $X = (X \setminus F_1) \cup \dots \cup (X \setminus F_n) = X \setminus F_n$ , a więc otrzymujemy sprzeczność.

(iii)  $\implies$  (ii) Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty$  będzie ciągiem punktów w przestrzeni  $X$  i niech  $F_i = \{a_n : n \geq i\}$ . Ponieważ  $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ , warunek (iii) zapewnia istnienie  $a \in \bigcap_{i=1}^\infty F_i$ . Każde otoczenie punktu  $a$  przecina każdy zbiór  $\{a_n : n \geq i\}$ , co oznacza, że  $a$  jest punktem skupienia ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , a więc, zgodnie z 2.1.2, pewien podciąg tego ciągu zbiega do  $a$ .

**Definicja 2.1.5.** *Przestrzeń metryzowalna jest zwarta, jeśli spełnia którykolwiek z równoważnych warunków w Twierdzeniu 2.1.4.*

**Uwaga 2.1.6.** Jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną,  $A \subset X$  i  $A$  jest zwarty w topologii generowanej przez metrykę  $d$  na  $A$ , to zgodnie z Lematem 2.1.3, dla dowolnego pokrycia otwartego zbioru  $A$  w  $X$  istnieje liczba Lebesgue’a.

**Przykład 2.1.7.** Domknięty odcinek  $[a, b]$  na prostej euklidesowej jest zwarty.

Istotnie, jeśli  $(a_n)_{n=1}^\infty$  jest ciągiem punktów z  $[a, b]$ , to  $c = \sup\{r \in [a, b] : [r, b] \text{ zawiera nieskończenie wiele wyrazów } a_n\}$  jest punktem skupienia tego ciągu, a więc jest granicą pewnego podciągu tego ciągu, zob. 2.1.2.

**Uwaga 2.1.8.** Iloczyn kartezjański skończenie wielu zwartych przestrzeni metryzowalnych  $(X_i, \mathcal{T}(d_i))$ ,  $i = 1, \dots, m$ , jest przestrzenią zwartą.

Jest to szczególny przypadek twierdzenia, które udowodnimy w 2.4, warto jednak podać także jego bezpośrednie uzasadnienie. Odwołując się do indukcji, można ograniczyć się do iloczynu kartezjańskiego dwóch przestrzeni  $X_1 \times X_2$ . Niech  $a_n = (x_n, y_n) \in X_1 \times X_2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Korzystając z własności (ii) w Twierdzeniu 2.1.4, można określić funkcję rosnącą  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  taką, że  $x_{\varphi(n)} \rightarrow x_0$ , a następnie, dla podciągu  $(y_{\varphi(n)})_{n=1}^\infty$ , funkcję rosnącą  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \varphi(\mathbb{N})$  taką, że  $y_{\psi(n)} \rightarrow y_0$ . Wówczas  $a_{\psi(n)} \rightarrow (x_0, y_0)$ .

**Definicja 2.1.9.** *Przestrzeń topologiczna  $(X, \mathcal{T})$  jest zwarta, jeśli jest przestrzenią Hausdorffa i z każdego otwartego pokrycia tej przestrzeni można wybrać pokrycie skończone.*

**Przykład 2.1.10.** Kwadrat leksykograficzny określony w 1.2.8 jest przestrzenią zwartą, która nie jest metryzowalna, zob. Uzupełnienie 7.2

Przestrzeń z Przykładu 1.2.12 ma wprawdzie własność pokryciową wymaganą w 2.1.9, nie jest jednak Hausdorffa, a więc nie jest zwarta.

Na zakończenie tej części, rozpatrzmy zwartość podprzestrzeni przestrzeni Hausdorffa. Zauważmy, że każda podprzestrzeń przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa – wynika to natychmiast z określenia topologii podprzestrzeni 1.2.9.

**Definicja 2.1.11.** *Zbiór  $K$  w przestrzeni Hausdorffa  $(X, \mathcal{T})$  jest zwarty, jeśli podprzestrzeń  $(K, \mathcal{T}_K)$  jest zwarta.*

Z definicji topologii indukowanej na podzbiorze wynika, że zwartość podprzestrzeni  $(K, \mathcal{T}_K)$  przestrzeni Hausdorffa  $(X, \mathcal{T})$  oznacza, że jeśli  $\mathcal{U}$  jest otwartym pokryciem zbioru  $K$ , to dla pewnej rodziny skończonej  $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ ,  $K \subset \bigcup \mathcal{W}$ .

**Uwaga 2.1.12.** Zauważmy też, że jeśli  $(X, \mathcal{T})$  jest przestrzenią zwartą i  $K$  jest zbiorem domkniętym w tej przestrzeni, to  $K$  jest zbiorem zwartym.

Istotnie, jeśli  $K \subset \bigcup \mathcal{U}$  i  $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ , to  $\mathcal{U} \cup \{X \setminus K\}$  jest otwartym pokryciem przestrzeni  $X$ , istnieje więc rodzina skończona  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \cup \{X \setminus K\}$  pokrywająca  $X$  i  $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$  jest skończonym pokryciem zbioru  $K$ .

**Twierdzenie 2.1.13.** *Zbiór zwarty w przestrzeni Hausdorffa jest domknięty.*

**Dowód.** Niech  $K$  będzie zbiorem zwartym w przestrzeni Hausdorffa  $(X, \mathcal{T})$  i niech  $a \notin K$ . Dla każdego  $x \in K$  wybierzmy parę rozłącznych zbiorów otwartych  $V(x), W(x) \in \mathcal{T}$  takich, że  $a \in V(x)$  i  $x \in W(x)$ . Ze zwartości  $K$ , można wybrać  $x_1, \dots, x_n \in K$  tak, aby  $K \subset W(x_1) \cup \dots \cup W(x_n) = W$ . Wówczas  $V = V(x_1) \cap \dots \cap V(x_n)$  jest otoczeniem  $a$  rozłącznym z  $W$ , a więc i z  $K$ . Zatem  $a \notin \bar{K}$ , co pokazuje, że  $\bar{K} = K$ .

Dla przestrzeni metryzowalnej  $(X, \mathcal{T}(d))$ , można to twierdzenie uzasadnić nieco prościej, odwołując się do warunku (iii) w 2.1.4: jeśli  $K$  jest zwarty i  $a \in \bar{K}$ , to dla ciągu  $F_n = \overline{B(a, 1/n)} \cap K$  niepustych zbiorów domkniętych w przestrzeni  $(K, \mathcal{T}(d)_K)$  mamy  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$  i  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset \{a\}$ , zatem  $a \in K$ .

Będziemy mówić, że zbiór w przestrzeni metrycznej jest ograniczony, jeśli leży w pewnej kuli w tej przestrzeni.

**Wniosek 2.1.14.** *Podzbiór przestrzeni euklidesowej  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.*

**Dowód.** Niech  $A$  będzie zbiorem zwartym w  $(\mathbb{R}^n, d_e)$ . Domkniętość  $A$  wynika z 2.1.13. Dla dowodu ograniczoności zauważmy, że rodzina kul  $B(\mathbf{0}, 1), B(\mathbf{0}, 2), \dots$  pokrywa  $A$  i wybierając z tego pokrycia pokrycie skończone, mamy  $A \subset B(\mathbf{0}, n)$  dla pewnego  $n$ .

Na odwrót, każdy zbiór ograniczony  $A$  w  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  leży w pewnej kostce  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ , która jest zwarta, na mocy Uwagi 2.1.8. Jeśli  $\bar{A} = A$ , wynika stąd zwartość  $A$ , zob. Uwaga 2.1.12.

## 2.2. Przekształcenia ciągłe przestrzeni zwartych.

**Twierdzenie 2.2.1.** *Przekształcenie ciągle  $f : X \rightarrow Y$  przestrzeni Hausdorffa  $(X, \mathcal{T}_X)$  w przestrzeń Hausdorffa  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  przeprowadza zbiory zwarte w  $X$  na zbiory zwarte w  $Y$ .*

**Dowód.** Niech  $K$  będzie zbiorem zwartym w przestrzeni  $(X, \mathcal{T}_X)$  i niech  $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_Y$  będzie otwartym pokryciem jego obrazu  $f(K)$ . Rodzina  $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{T}_X$  pokrywa  $K$ , a więc ze zwartości,  $K \subset f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_m)$ , dla pewnych  $U_i \in \mathcal{U}$ . Wówczas  $f(K) \subset U_1 \cup \dots \cup U_m$ .

**Wniosek 2.2.2** (Twierdzenie Weierstrassa). *Niech  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą na przestrzeni Hausdorffa  $(X, \mathcal{T})$ . Dla każdego zbioru zwartego  $K \subset X$  istnieją punkty  $a, b \in K$  takie, że  $f(a) = \sup f(K)$ ,  $f(b) = \inf f(K)$ .*

**Dowód.** Zgodnie z 2.2.1, zbiór  $f(K)$  jest zwarty, a więc jest domknięty i ograniczony na prostej euklidesowej, zob. 2.1.14. Zatem  $\sup f(K)$  i  $\inf f(K)$  są elementami  $f(K)$ , co oznacza istnienie punktów  $a$  i  $b$  opisanych we Wniosku.

Jak zauważyliśmy w 1.3.8 (B), ciągła bijekcja nie musi być homeomorfizmem. Dodatkowe założenie zwartości zmienia jednak sytuację.

**Wniosek 2.2.3.** *Ciągle i różnowartościowe przekształcenie przestrzeni zwartej na przestrzeń Hausdorffa jest homeomorfizmem.*

**Dowód.** Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie ciągłą bijekcją, gdzie  $(X, \mathcal{T}_X)$  jest przestrzenią zwartą, a  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  jest przestrzenią Hausdorffa. Mamy wykazać, że przekształcenie odwrotne  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  jest ciągłe, to znaczy, jeśli  $F \subset X$  jest zbiorem domkniętym, to  $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$  jest zbiorem domkniętym w  $Y$ . Z domkniętości  $F$  w przestrzeni zwartej  $X$  wynika zwartość  $F$ , zatem  $f(F)$  jest zbiorem zwartym w przestrzeni Hausdorffa  $Y$ , a więc domkniętym w  $Y$ , zob. 2.1.13.

Zakończymy tę część twierdzeniem dotyczącym przestrzeni metrycznych. Do tego kręgu zagadnień wrócimy jeszcze w części 3.4.

Jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną, mówiąc o zwartości w tej przestrzeni będziemy mieli na myśli topologię  $\mathcal{T}(d)$  generowaną przez metrykę  $d$ .

**Twierdzenie 2.2.4.** *Każde przekształcenie ciągle  $f : X \rightarrow Y$  zwartej przestrzeni metrycznej  $(X, d_X)$  w przestrzeń metryczną  $(Y, d_Y)$  jest jednostajnie ciągle, tzn.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a, b \in X \quad d_X(a, b) < \delta \implies d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon.$$

**Dowód.** Kule w przestrzeniach  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  oznaczать będziemy odpowiednio symbolami  $B_X(x, r)$  i  $B_Y(y, r)$ .

Ustalmy  $\varepsilon > 0$  i niech  $\delta > 0$  będzie liczbą Lebesgue'a dla pokrycia

$$\mathcal{U} = \{f^{-1}(B_Y(y, \varepsilon/2)) : y \in Y\} \subset \mathcal{T}(d_X)$$

przestrzeni zwartej  $X$ , zob. 2.1.6. Każda kula  $B_X(a, \delta)$  jest zawarta w pewnym elemencie  $\mathcal{U}$ , a więc jej obraz leży w pewnej kuli  $B_Y(y, \varepsilon/2)$ . Wynika stąd, że jeśli  $d_X(a, b) < \delta$ , to  $d_Y(f(a), f(b)) < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$ .

**2.3. Zbiór Cantora.** Rodzina  $\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$  przedziałów domkniętych na prostej euklidesowej  $\mathbb{R}$  jest systemem diadycznym, jeśli:

- (1)  $\mathcal{D}_n$  składa się z  $2^n$  parami rozłącznych przedziałów domkniętych,
- (2) każdy przedział z  $\mathcal{D}_n$  zawiera dokładnie dwa przedziały z  $\mathcal{D}_{n+1}$ ,
- (3) maksimum długości przedziałów z  $\mathcal{D}_n$  dąży do zera.

Zbiorem Cantora wyznaczonym przez system diadyczny  $\mathcal{D}$  nazywamy zbiór

- (4)  $C = \bigcap_n C_n$ , gdzie  $C_n = \bigcup \mathcal{D}_n$ .

Ponieważ  $C_n$  jest sumą skończonej wielu przedziałów domkniętych,  $C$  jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, a więc zbiór Cantora jest zwarty. Zauważmy, że

- (5)  $\text{Int} C = \emptyset$ ,

bo dla dowolnego nietrywialnego przedziału otwartego  $(a, b)$ , na mocy (3) można wskazać  $n$  takie, że przedziały z  $\mathcal{D}_n$  mają długość  $< b - a$  i wówczas  $(a, b) \setminus C \supset (a, b) \setminus C_n \neq \emptyset$ .

Pokażemy, że

- (6) zbiór Cantora jest homeomorficzny z  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ,

gdzie  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  jest przestrzenią ciągów zero - jedynkowych z metryką określoną formułą

- (7)  $d(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |t_i - s_i|$ ,  $t = (t_1, t_2, \dots)$ ,  $s = (s_1, s_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

W tym celu ustalmy, indukcyjnie ze względu na długość ciągów, wzajemnie jednoznaczność odpowiedniość  $(t_1, \dots, t_n) \rightarrow C(t_1, \dots, t_n)$  między skończonymi ciągami zero - jedynkowymi i przedziałami z systemu diadycznego  $\mathcal{D}$  tak, że  $C(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{D}_n$  i  $C(t_1, \dots, t_n, 0)$ ,  $C(t_1, \dots, t_n, 1)$  są rozłącznymi przedziałami z  $\mathcal{D}_{n+1}$  zawartymi w  $C(t_1, \dots, t_n)$ , zob. (2).

Z (1), (2) i (4) wynika, że z każdym punktem  $x \in C$  można związać jednoznacznie ciąg  $(t_1, t_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  taki, że

$$(8) \quad x \in C(t_1) \cap C(t_1, t_2) \cap C(t_1, t_2, t_3) \cap \dots$$

i niech

$$(9) \quad f(x) = t, \text{ gdzie } t = (t_1, t_2, \dots) \text{ spełnia (8).}$$

Funkcja  $f : C \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  jest różnowartościowa, bo jeśli  $x, y \in C$  są różne, to zgodnie z (3), dla dostatecznie dużego  $n$ , należą do różnych przedziałów z  $\mathcal{D}_n$ , a więc ciągi  $f(x)$  i  $f(y)$  różnią się na pierwszych  $n$  miejscach.

Ponieważ dla dowolnego ciągu  $(t_1, t_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ,  $C(t_1) \supset C(t_1, t_2) \supset \dots$ , istnieje punkt  $x \in C$  spełniający (8), a więc  $f(C) = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

Zgodnie z 2.2.3, dla uzasadnienia (6) wystarczy sprawdzić ciągłość  $f$ .

Ustalmy dowolne  $a \in C$ ,  $\varepsilon > 0$ , niech  $2^{-n} < \varepsilon$  i niech  $V$  będzie dopełnieniem sumy przedziałów z  $\mathcal{D}_n$ , nie zawierających  $a$ . Wówczas, dla odcinka  $C(t_1, \dots, t_n)$  z  $\mathcal{D}_n$  zawierającego  $a$ , mamy  $V \cap C = C(t_1, \dots, t_n) \cap C$ , zob. (4). Jeśli więc  $x \in V \cap C$ , to z (8) i (9) wynika, że ciągi  $f(a)$  i  $f(x)$  mają na pierwszych  $n$  miejscach współrzędne  $t_1, \dots, t_n$ , a zatem z (7),  $d(f(a), f(x)) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} \leq 2^{-n} < \varepsilon$ . To pokazuje ciągłość przekształcenia  $f$  i kończy uzasadnienie (6).

Z (6) wynika, że każde dwa zbiory Cantora wyznaczone przez systemy diadyczne są homeomorficzne. Zauważmy także, że jeśli zbiór Cantora jest wyznaczony przez system diadyczny  $\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ , oraz  $J \in \mathcal{D}_n$ , to  $J \cap C$  jest zbiorem Cantora wyznaczonym przez system diadyczny  $\mathcal{E} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_m$ , gdzie  $\mathcal{E}_m = \{J \cap K : K \in \mathcal{D}_{n+m}\}$ , a więc zbiór  $J \cap C$  jest homeomorficzny z  $C$ .

Klasycznym przykładem zbioru Cantora jest zbiór liczb z odcinka  $[0, 1]$ , które w rozwinięciu trójkowym nie mają współczynnika 1,

$$(10) \quad C = \{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{3^i} : t_i \in \{0, 2\} \text{ dla } i = 1, 2, \dots\}.$$

Zbiór  $C$  jest wyznaczony przez system diadyczny  $\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ , gdzie  $\mathcal{D}_0 = \{[0, 1]\}$ , a przedziały z  $\mathcal{D}_{n+1}$  otrzymuje się dzieląc każdy przedział z  $\mathcal{D}_n$  na trzy równe części i pomijając środkowy przedział z tego podziału.

**2.4. Iloczyn skończony przestrzeni zwartych.** Ważną rolę w matematyce odgrywa twierdzenie, że iloczyn przestrzeni zwartych jest zwarty. W tej części podamy dowód tego faktu dla iloczynów skończonych. Nieco bardziej złożone rozumowanie dotyczące iloczynów przeliczalnych zamieszczamy w części 2.5, a w pełnej ogólności, twierdzenie o iloczynach przestrzeni zwartych omówione jest w Uzupełnieniach 7.3.4.

**Uwaga 2.4.1.** Iloczyn kartezjański  $(X \times Y, \mathcal{T})$  przestrzeni Hausdorffa  $(X, \mathcal{T}_X)$  i  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  jest przestrzenią Hausdorffa. Istotnie, niech  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2) \in X \times Y$  będą różnymi punktami. Jeśli  $a_1 \neq b_1$ , wybierzmy zbiory rozłączne  $U, W \in \mathcal{T}_X$  takie, że  $a_1 \in U$ ,  $b_1 \in W$ . Wówczas  $U \times Y$ ,  $W \times Y$  są rozłącznymi zbiorami otwartymi w iloczynie kartezjańskim,  $a \in U \times Y$ ,  $b \in W \times Y$ . Podobnie wybieramy rozłączne zbiory otwarte zawierające  $a$  i  $b$ , jeśli  $b_1 \neq b_2$ .

**Twierdzenie 2.4.2.** *Iloczyn kartezjański skończenie wielu przestrzeni zwartych jest przestrzenią zwartą.*

**Dowód.** Powołując się na indukcję, wystarczy wykazać to twierdzenie dla iloczynu dwóch przestrzeni. Niech  $(X \times Y, \mathcal{T})$  będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni zwartych  $(X, \mathcal{T}_X)$  i  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ . Zgodnie z 2.4.1, iloczyn  $(X \times Y, \mathcal{T})$  jest przestrzenią Hausdorffa.

Niech  $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$  będzie otwartym pokryciem iloczynu  $X \times Y$  i niech

$$(13) \quad \mathcal{V} = \{V \in \mathcal{T}_X : V \times Y \text{ można pokryć skończenie wieloma elementami } \mathcal{U}\}.$$

Pokażemy, że

$$(14) \quad X = \bigcup \mathcal{V}.$$

Ustalmy  $x \in X$ . Dla każdego  $y \in Y$  wybierzmy  $U(y) \in \mathcal{U}$  takie, że  $(x, y) \in U(y)$ , a następnie  $V(y) \in \mathcal{T}_X$  i  $W(y) \in \mathcal{T}_Y$ , dla których  $(x, y) \in V(y) \times W(y) \subset U(y)$ . Ze zwartości  $Y$ ,  $Y \subset W(y_1) \cup \dots \cup W(y_m)$ , dla pewnych  $y_i \in Y$ . Dla  $V = V(y_1) \cap \dots \cap V(y_m)$  mamy  $V \times Y \subset U(y_1) \cup \dots \cup U(y_m)$ , a zatem  $V \in \mathcal{V}$ , zob. (13). Tak więc  $x \in V \subset \bigcup \mathcal{V}$ , skąd wobec dowolności  $x$  wynika (14).

Ponieważ  $\mathcal{V}$  jest otwartym pokryciem przestrzeni zwartej  $X$ , przestrzeń  $X$  można pokryć skończenie wieloma elementami z  $\mathcal{V}$ , a zatem zgodnie z (13),  $X \times Y$  można pokryć skończenie wieloma elementami z  $\mathcal{U}$ .

## 2.5. Iloczyn przeliczalny przestrzeni zwartych.

**Twierdzenie 2.5.1.** *Iloczyn kartezjański  $(X_1 \times X_2 \times \dots, \mathcal{T})$  przestrzeni zwartych  $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , jest przestrzenią zwartą.*

**Dowód.** Podobnie, jak w Uwadze 2.4.1, łatwo sprawdza się, że iloczyn przeliczalnie wielu przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa.

Zbiory postaci  $W = V_1 \times \dots \times V_n$ , gdzie  $V_i \in \mathcal{T}_i$ , nazywać będziemy otwartymi  $n$ -kostkami.

Dążąc do sprzeczności założmy, że istnieje otwarte pokrycie  $\mathcal{U}$  iloczynu  $X_1 \times X_2 \times \dots$ , z którego nie można wybrać pokrycia skończonego i wybierzmy indukcyjnie punkty  $a_n \in X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  takie, że

- ( $\star$ ) <sub>$n$</sub>  dla każdej otwartej  $n$ -kostki  $W$  zawierającej  $(a_1, \dots, a_n)$ , zbiór  $W \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots$  nie jest pokryty skończenie wieloma elementami z  $\mathcal{U}$ .

Gdyby dla pewnego  $n \geq 0$  nie można było wybrać kolejnego punktu  $a_{n+1}$ , oznaczałoby to, że dla każdego  $x \in X_{n+1}$  istnieje otwarta  $n$ -kostka  $W_x$  zawierająca  $(a_1, \dots, a_n)$ , oraz zbiór  $V_x \in \mathcal{T}_{n+1}$  zawierający  $x$  takie, że iloczyn  $W_x \times V_x \times X_{n+2} \times \dots$  można pokryć skończenie wieloma elementami z  $\mathcal{U}$ . Ponieważ przestrzeń  $X_{n+1}$  jest zwarta,  $X_{n+1} = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}$ , dla pewnych  $x_i \in X_{n+1}$ , otrzymalibyśmy więc otwartą  $n$ -kostkę  $W = W_{x_1} \cap \dots \cap W_{x_m}$  zawierającą  $(a_1, \dots, a_n)$ , dla której warunek ( $\star$ ) <sub>$n$</sub>  jest naruszony.

Rozpatrzmy teraz punkt  $a = (a_1, a_2, \dots)$  i niech  $U \in \mathcal{U}$  zawiera  $a$ . Istnieje wówczas otwarta  $n$ -kostka  $W$  taka, że  $a \in W \times X_{n+1} \times \dots \subset U$ . W szczególności  $(a_1, \dots, a_n) \in W$ , co przeczy warunkowi ( $\star$ ) <sub>$n$</sub> .

## 3. ZUPEŁNOŚĆ

Pojęcie zupełności odgrywa podstawową rolę w analizie matematycznej. Jest to, w odróżnieniu od większości omawianych przez nas pojęć, własność metryki, a nie topologii przez nią generowanej.

Dwie bardzo ważne dla zastosowań konsekwencje zupełności to twierdzenie Banacha o punkcie stałym, wyrażone w terminach metryki, oraz twierdzenie Baire'a, dotyczące topologii generowanych przez metryki zupełne.

Każda metryka generująca topologię przestrzeni zwartej jest zupełna. Z kolei zupełna i całkowicie ograniczona przestrzeń jest zwarta. Ważnym wnioskiem z tego ostatniego faktu jest twierdzenie Ascoliego - Arzeli, opisujące zbiory zwarte w przestrzeniach funkcji ciągłych.

## 3.1. Przestrzenie metryczne zupełne.

**Definicja 3.1.1.** Ciąg punktów  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  nazywamy ciągiem Cauchy'ego, jeśli

$$(1) \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

**Uwaga 3.1.2.** Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną.

(A) Każdy ciąg zbieżny w  $(X, d)$  jest ciągiem Cauchy'ego.

(B) Jeśli ciąg Cauchy'ego  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  ma punkt skupienia  $x_0$ , to  $x_n \rightarrow x_0$ .

Istotnie, rozpatrzmy dowolną kulę  $B(x_0, r)$ . Z warunku (1), istnieje  $n_0$  takie, że  $d(x_n, x_m) < \frac{r}{2}$ , dla  $n, m \geq n_0$ , a ponieważ  $x_0$  jest punktem skupienia ciągu  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ , można wybrać indeks  $m \geq n_0$ , dla którego  $d(x_0, x_m) < \frac{r}{2}$ . Zatem, dla  $n \geq n_0$ ,  $x_n \in B(x_0, r)$ .

**Definicja 3.1.3.** Przestrzeń metryczna  $(X, d)$  jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest zbieżny.

**Twierdzenie 3.1.4.** Przestrzenie euklidesowe  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  są zupełne.

**Dowód.** Ciąg Cauchy'ego w  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  jest ograniczony, a ponieważ w przestrzeniach euklidesowych domknięcia zbiorów ograniczonych są zwarte, zob. Wniosek 2.1.14, ciąg ten ma punkt skupienia, a więc jest zbieżny na mocy 3.1.2 (B).

Następująca obserwacja dotyczy podprzestrzeni przestrzeni zupełnych.

**Twierdzenie 3.1.5.** Niech  $(X, d_X)$  będzie przestrzenią metryczną,  $Y \subset X$  i niech  $d_Y$  będzie obcięciem metryki  $d_X$  do  $Y$ . Wówczas:

(i) jeśli przestrzeń  $(Y, d_Y)$  jest zupełna, to zbiór  $Y$  jest domknięty w  $(X, d_X)$ ,

(ii) jeśli przestrzeń  $(X, d_X)$  jest zupełna i zbiór  $Y$  jest domknięty w  $(X, d_X)$ , to przestrzeń  $(Y, d_Y)$  jest zupełna.

**Dowód.** (i) Niech  $y_0 \in \bar{Y}$  i niech  $y_n \rightarrow y_0$  dla pewnego ciągu punktów  $y_n \in Y$ , zob. 1.2.16. Ciąg  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  jest ciągiem Cauchy'ego w  $(X, d_X)$ , a więc i w  $(Y, d_Y)$ , zatem z zupełności  $(Y, d_Y)$  istnieje punkt  $y \in Y$  taki, że  $d_Y(y_n, y) \rightarrow 0$ . Wówczas  $y = y_0$ , a więc  $y_0 \in Y$ .

(ii) Niech  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  będzie ciągiem Cauchy'ego w  $(Y, d_Y)$ . Metryka  $d_X$  pokrywa się z  $d_Y$  na  $Y$ , więc jest to też ciąg Cauchy'ego w  $(X, d_X)$  i z zupełności,  $y_n \rightarrow y$  dla pewnego  $y \in X$ . Ponieważ  $y \in \bar{Y} = Y$ , ciąg  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  jest zbieżny w przestrzeni  $(Y, d_Y)$ .



Zatem zbiór  $C$  zawiera pewne punkty postaci  $(r, 1)$  i  $(s, -1)$ , co przeczy temu, że  $\text{diam} C \leq 1$ .

**Twierdzenie 4.2.4.** *Spójny, otwarty zbiór w przestrzeni euklidesowej  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  jest łukowo spójny.*

**Dowód.** Zauważmy, że w przestrzeni euklidesowej  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  każdy punkt  $b \in B(a, r)$  można połączyć z  $a$  drogą  $f(t) = (1-t)a + tb$ ,  $t \in [0, 1]$ , której obraz leży w kuli  $B(a, r)$ .

Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$  będzie spójnym zbiorem otwartym w  $(\mathbb{R}^n, d_e)$ , ustalmy  $p \in U$  i niech  $W$  będzie zbiorem punktów  $q \in U$ , które można połączyć z  $p$  drogą w  $U$ . Mamy pokazać, że  $W = U$ .

Jeśli  $q \in W$ ,  $B(q, r) \subset U$  i  $x \in B(q, r)$ , to ponieważ istnieją drogi w  $U$  łączące  $p$  z  $q$ , oraz  $q$  z  $x$ , istnieje też droga w  $U$  łącząca  $p$  z  $x$ . Zatem  $B(q, r) \subset W$ , skąd wynika otwartość zbioru  $W$ .

Podobnie, jeśli  $q \in U \setminus W$  i  $B(q, r) \subset U$ , żadnego punktu  $x \in B(q, r)$  nie można połączyć z  $p$  drogą w  $U$ , bo wówczas drogą w  $U$  można byłoby połączyć  $p$  i  $q$ , wbrew wyborowi  $q$ . Zatem  $B(q, r) \subset U \setminus W$ , co pokazuje, że także zbiór  $U \setminus W$  jest otwarty.

Ze spójności  $U$  wynika, że oba zbiory  $W$  i  $U \setminus W$  nie mogą być niepuste i ponieważ  $p \in W$ , mamy  $U \setminus W = \emptyset$ , czyli  $U = W$ .

**4.3. Składowe.** Niech  $(X, \mathcal{T})$  będzie przestrzenią topologiczną. Dla ustalonego  $a \in X$ , zgodnie z 4.1.6, suma wszystkich spójnych podzbiorów przestrzeni  $X$ , zawierających  $a$ , jest zbiorem spójnym. Jest to maksymalny, ze względu na inkluzję, zbiór spójny w  $X$  zawierający punkt  $a$ .

**Definicja 4.3.1.** *Składową przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  nazywamy zbiór spójny  $S$  w  $X$  taki, że żaden zbiór w  $X$ , zawierający w istotny sposób  $S$ , nie jest spójny.*

Tak więc, każdy punkt przestrzeni topologicznej należy do pewnej składowej, przy czym różne składowe przestrzeni są zbiorami rozłącznymi. Ponieważ domknięcie zbioru spójnego jest spójne, zob. 4.1.8, składowe są zbiorami domkniętymi.

**Definicja 4.3.2.** *Składową łukowej spójności przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  nazywamy maksymalny, w sensie inkluzji, łukowo spójny podzbiór  $X$ .*

Składowe łukowej spójności są parami rozłączne i pokrywają całą przestrzeń. Składowe łukowej spójności nie muszą być domknięte. Ilustruje to przestrzeń  $T$  opisana w 4.1.9, gdzie składową łukowej spójności zawierającą punkt  $(1, \sin 1)$  jest zbiór  $S$ , który nie jest domknięty w  $T$ .

## 5. PRZESTRZENIE ILORAZOWE

**5.1. Topologia ilorazowa.** Niech  $\sim$  będzie relacją równoważności w zbiorze  $X$ . Symbolem  $X/\sim$  oznaczamy zbiór klas abstrakcji  $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$  elementów  $X$  ze względu na relację  $\sim$  i niech  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  będzie przekształceniem ilorazowym  $\pi(x) = [x]$ .

Jeśli relacja równoważności  $\sim$  jest określona w zbiorze punktów przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$ , w zbiorze  $X/\sim$  określamy topologię ilorazową

$$\mathcal{T}/\sim = \{U \subset X/\sim : \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}.$$

Jest to najsilniejsza (tzn. zawierająca najwięcej podzbiorów zbioru  $X/\sim$ ) topologia w  $X/\sim$ , dla której przekształcenie ilorazowe  $\pi$  jest ciągłe.

**Uwaga 5.1.1.** Niech  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  będzie przekształceniem ilorazowym przestrzeni  $(X, \mathcal{T})$  na przestrzeń ilorazową  $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ .

(A) Dla każdego przekształcenia  $f : X/\sim \rightarrow Y$  w przestrzeń topologiczną  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ , ciągłość  $f$  jest równoważna ciągłości złożenia  $f \circ \pi : X \rightarrow Y$ .

Ponieważ złożenie przekształceń ciągłych jest ciągłe, wystarczy sprawdzić, że z ciągłości  $f \circ \pi$  wynika ciągłość  $f$ . Niech  $U \in \mathcal{T}_Y$ . Wówczas  $\pi^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ \pi)^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ , a więc  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}/\sim$ .

(B) Niech  $u : X \rightarrow Y$  będzie ciągłym przekształceniem na przestrzeń Hausdorffa  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  takim, że  $u(x) = u(y)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \sim y$  (tzn. warstwy  $u$  pokrywają się z klasami abstrakcji w relacji  $\sim$ ). Wówczas, jeśli  $(X, \mathcal{T})$  jest przestrzenią Hausdorffa i dla pewnego zbioru zwartego  $K \subset X$ ,  $\pi(K) = X/\sim$ , to naturalna bijekcja  $f : X/\sim \rightarrow Y$ ,  $f(\pi(x)) = u(x)$ , jest homeomorfizmem.

Istotnie,  $f \circ \pi = u$  jest przekształceniem ciągłym, a więc z (A) dostajemy ciągłość bijekcji  $f$ . Ponieważ  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  jest Hausdorffa, ciągłość bijekcji  $f$  zapewnia, że także  $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$  jest przestrzenią Hausdorffa, a ponieważ  $\pi(K) = X/\sim$ , przestrzeń ilorazowa jest zwarta, zob. 2.2.1. Z wniosku 2.2.3 wynika, że  $f$  jest homeomorfizmem.

**Przykład 5.1.2.** Niech  $\sim$  będzie relacją równoważności na prostej euklidesowej  $(\mathbb{R}, d_e)$  określoną formułą  $x \sim y$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x - y$  jest liczbą całkowitą. Sprawdźmy, że przestrzeń ilorazowa  $(\mathbb{R}/\sim, \mathcal{T}(d_e)/\sim)$  jest homeomorficzna z okręgiem  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  na płaszczyźnie euklidesowej.

Istotnie, funkcja  $u : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  określoną formułą  $u(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  przyjmuje te same wartości w  $s$  i  $t$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $s \sim t$ , oraz  $\pi([0, 1]) = \mathbb{R}/\sim$ , a więc wystarczy odwołać się do 5.1.1 (B).

**Przykład 5.1.3.** Płaszczyzna rzutowa  $\mathbb{P}^2$  jest przestrzenią  $(S^2/\sim, \mathcal{T}(d_e)/\sim)$  otrzymaną ze sfery euklidesowej  $S^2 = \{a \in \mathbb{R}^3 : d_e(a, \mathbf{0}) = 1\}$  przez utożsamienie punktów antypodycznych:  $a \sim b$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a = b$  lub  $a = -b$ .

Płaszczyznę rzutową można zanurzyć w  $\mathbb{R}^4$ . Rozpatrzmy w tym celu funkcję  $u : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  określoną formułą  $u(a) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$ , gdzie  $a = (x, y, z)$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Można sprawdzić, że klasy abstrakcji w relacji  $\sim$  pokrywają się z warstwami  $u$ , tzn.  $u$  przyjmuje na parze różnych punktów  $a, b$  te same wartości wtedy i tylko wtedy, gdy  $a = -b$ . Ponieważ sfera  $S^2$  jest zwarta, z 5.1.1 (B) wnosimy, że płaszczyzna rzutowa jest homeomorficzna z podprzestrzenią  $u(S^2)$  przestrzeni euklidesowej  $(\mathbb{R}^4, d_e)$ .

Niech  $A$  będzie zbiorem punktów w przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T})$  i niech, dla  $x, y \in X$ ,  $x \sim y$ , jeśli  $x = y$  lub  $x, y \in A$ . Przestrzeń ilorazową  $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$  nazywać będziemy przestrzenią otrzymaną z  $X$  przez sklejenie zbioru  $A$  do punktu i oznaczać będziemy symbolem  $(X/A, \mathcal{T}/A)$ .

Jeśli  $X \subset \mathbb{R}^m$  jest zwartą podprzestrzenią,  $A \subset X$  jest zbiorem domkniętym i  $\mathcal{T}(d_e)$  jest topologią euklidesową w  $X$ , to przestrzeń  $(X/A, \mathcal{T}(d_e)/A)$  można zanurzyć w  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

Istotnie, przekształcenie  $u : X \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  określone formułą, zob. 1.6 (1),

$$(1) \quad u(x) = (d_A(x)x, d_A(x))$$

jest ciągle i  $u$  ma jedyną wartość niejednopunktową  $u^{-1}(\mathbf{0}) = A$ , a więc, zgodnie z Uwagą 5.1.1 (B), przestrzenie  $X/A$  i  $u(X)$  są homeomorficzne.

Bez założenia zwartości, sklepanie zbioru do punktu w przestrzeni metryzowalnej może jednak prowadzić do przestrzeni niemetryzowalnej.

**Przykład 5.1.4.** Niech  $(\mathbb{R}/\mathbb{N}, \mathcal{T}(d_e)/\mathbb{N})$  będzie przestrzenią otrzymaną z prostej euklidesowej  $\mathbb{R}$  przez sklepanie zbioru liczb naturalnych  $\mathbb{N}$  do punktu. Wykażemy, że ta przestrzeń nie jest metryzowalna.

Założmy przeciwnie, że pewna metryka  $d$  generuje topologię  $\mathcal{T}(d_e)/\mathbb{N}$  i niech  $B_n$  będzie kulą w przestrzeni metrycznej  $(\mathbb{R}/\mathbb{N}, d)$  o środku w punkcie  $\pi(1)$  i promieniu  $\frac{1}{n}$ , gdzie  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{N}$  jest przekształceniem ilorazowym. Zbiór otwarty  $\pi^{-1}(B_n)$  zawiera  $\mathbb{N}$ , można więc wybrać  $r_n \in \pi^{-1}(B_n) \cap (n, n + \frac{1}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Zbiór  $W = \mathbb{R} \setminus \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$  jest otwarty w  $\mathbb{R}$  i  $\pi^{-1}(\pi(W)) = W$ , zatem  $\pi(W) \in \mathcal{T}(d_e)/\mathbb{N} = \mathcal{T}(d)$ . Z drugiej strony,  $\pi(1) \in \pi(W)$ , ale  $\pi(r_n) \in B_n \setminus \pi(W)$ , dla  $n \in \mathbb{N}$ , co pokazuje, że żadna kula o środku w  $\pi(1)$  nie leży w  $\pi(W)$  i  $\pi(W) \notin \mathcal{T}(d)$ . Doszliśmy więc do sprzeczności.

Przykład 5.1.4 ilustruje też rolę założenia o istnieniu zbioru zwartego  $K$  w Uwadze 5.1.1 (B), do której odwoływaliśmy się w tej części kilkakrotnie. Istotnie, niech  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie przekształceniem ciągłym określonym formułą (1), gdzie  $A = \mathbb{N}$ . Wówczas  $u(s) = u(t)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\pi(s) = \pi(t)$ . Jednakże przestrzeń  $u(\mathbb{R})$  nie jest homeomorficzna z  $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ , bo jest przestrzenią metryzowalną.

**5.2. Przyklejanie przestrzeni wzdłuż przekształcenia.** Niech  $(X, \mathcal{T}_X)$  i  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  będą przestrzeniami topologicznymi z rozłącznymi zbiorami punktów,  $X \cap Y = \emptyset$ . Sumą prostą tych przestrzeni nazywamy przestrzeń  $(X \cup Y, \mathcal{T}_{X \oplus Y})$ , gdzie topologia  $\mathcal{T}_{X \oplus Y}$  jest rodziną wszystkich sum  $U \cup V$ ,  $U \in \mathcal{T}_X$ ,  $V \in \mathcal{T}_Y$ . Przestrzenie  $(X, \mathcal{T}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  są podprzestrzeniami ich sumy prostej, przy czym oba zbiory  $X, Y$  są otwarte (a więc i domknięte) w sumie prostej.

Założmy teraz dodatkowo, że  $K \subset X$  i  $f : K \rightarrow Y$  jest ciągłym przekształceniem określonym na podprzestrzeni  $(K, \mathcal{T}_K)$  przestrzeni  $(X, \mathcal{T}_X)$ .

Określmy w  $X \cup Y$  relację równoważności  $\sim_f$ , która utożsamia punkty należące do  $K$  z ich obrazami przy  $f$ , nie utożsamiając innych punktów. Dokładniej, klasy abstrakcji w relacji  $\sim_f$  są postaci  $f^{-1}(a) \cup \{a\}$ , dla  $a \in f(K)$ , oraz  $\{a\}$ , dla  $a \in (X \setminus K) \cup (Y \setminus f(K))$ .

Przestrzeń  $(X \cup Y / \sim_f, \mathcal{T}_{X \oplus Y} / \sim_f)$  będziemy oznaczali symbolem  $(X \cup_f Y, \mathcal{T}_f)$  i niech  $\pi_f : X \cup Y \rightarrow X \cup_f Y$  będzie przekształceniem ilorazowym. Mówimy, że przestrzeń  $(X \cup_f Y, \mathcal{T}_f)$  powstaje w wyniku przyklejenia  $Y$  do  $X$  wzdłuż przekształcenia  $f$ .

**Przykład 5.2.1.** Rozpatrzmy półsfery

$$S_+^2 = \{(s \cos t, s \sin t, \sqrt{1-s^2}) : s \in [0, 1], t \in [0, 2\pi]\},$$

okrąg

$$K = \{(\cos t, \sin t, 0) : t \in [0, 2\pi]\} \subset S_+^2,$$

oraz przekształcenie

$$f : K \rightarrow S^1, \quad f(\cos t, \sin t, 0) = (\cos 2t, \sin 2t)$$

na okrąg jednostkowy  $S^1$  na płaszczyźnie euklidesowej. Przestrzeń  $S_+^2 \cup_f S^1$  (gdzie  $S_+^2$  i  $S^1$  rozpatruje się z topologią euklidesową) jest homeomorficzna z płaszczyzną rzutową  $\mathbb{P}^2$  opisaną w Przykładzie 5.1.3. Aby się o tym przekonać zauważmy, że  $S_+^2 \subset S^2$ . Niech  $\sim$  oznacza obcięcie relacji równoważności na  $S^2$  rozpatrywanej w 5.1.3 do  $S_+^2$  i niech  $u : S_+^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  będzie obcięciem do  $S_+^2$  przekształcenia ilorazowego sklejającego punkty antypodyczne sfery. Z 5.1.1 (B) przestrzeń ilorazowa  $(S_+^2/\sim, \mathcal{T}(d_e)/\sim)$  jest homeomorficzna z  $\mathbb{P}^2$ . Z drugiej strony, ta przestrzeń jest homeomorficzna z  $S_+^2 \cup_f S^1$ , bo nietrywialne klasy abstrakcji relacji  $\sim$  pokrywają się z warstwami  $f$ ,  $K$  jest zwarty i  $f(K) = S^1$ , więc przekształcenie ilorazowe  $\pi : S_+^2 \rightarrow S_+^2/\sim$  przedłuża się do  $\bar{\pi} : S_+^2 \cup S^1 \rightarrow S_+^2/\sim$  takiego, że warstwy  $\bar{\pi}$  pokrywają się z klasami abstrakcji relacji  $\sim_f$ .

Jeśli  $K \subset X$  i  $f : K \rightarrow \{*\}$ , gdzie  $* \notin X$ , to przestrzeń  $X \cup_f \{*\}$  można utożsamiać z przestrzenią  $X/K$  otrzymaną z  $X$  przez sklejenie  $K$  do punktu. Następujące twierdzenie jest więc uogólnieniem obserwacji z 5.1 związanych z formułą (1), a Przykład 5.1.4 ilustruje rolę zwartości w tym twierdzeniu.

**Twierdzenie 5.2.2.** *Niech  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^n$  będą rozłącznymi zwartymi podprzestrzeniami przestrzeni euklidesowych, niech  $K$  będzie domkniętym podzbiorem  $X$  i niech  $f : K \rightarrow Y$  będzie przekształceniem ciągłym. Wówczas przestrzeń  $(X \cup_f Y, \mathcal{T}_f)$  zanurza się homeomorficznie w przestrzeń euklidesową  $\mathbb{R}^{n+m+1}$ .*

**Dowód.** Na mocy twierdzenia Tietzego (zob. 1.6.6),  $f$  można przedłużyć do przekształcenia ciągłego  $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Przypomnijmy, że  $d_K(x) = \inf\{d(x, z) : z \in K\}$  jest funkcją ciągłą, zob. 1.6 (2). Określmy przekształcenie ciągłe  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}$  formułą, zob. 5.1 (1),

$$(1) \quad g(x) = (\bar{f}(x), d_K(x)x, d_K(x))$$

i niech

$$(2) \quad Z = (Y \times \{\mathbf{0}\}) \cup g(X) \subset \mathbb{R}^{n+m+1}.$$

Pokażemy, że przestrzeń  $(X \cup_f Y, \mathcal{T}_f)$  jest homeomorficzna z podprzestrzenią  $Z$  przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^{n+m+1}$ . W tym celu rozpatrzmy przekształcenie  $u : X \cup Y \rightarrow Z$  na  $Z$ , określone formułą

$$u(a) = \begin{cases} g(a), & \text{jeśli } a \in X, \\ (a, \mathbf{0}), & \text{jeśli } a \in Y. \end{cases}$$

Zauważmy, że dla  $a, b \in X \cup Y$ , warunek  $u(a) = u(b)$  jest równoważny warunkowi  $\pi_f(a) = \pi_f(b)$ .

Ponieważ  $g$  jest przekształceniem ciągłym, oraz  $X$  i  $Y$  są zbiorami domkniętymi w  $X \cup Y$ ,  $u$  też jest przekształceniem ciągłym, zob. 1.3.9 (B). Ponadto, suma prosta przestrzeni zwartych jest zwarta, a więc z Uwagi 5.1.1 (B) wnosimy, że przestrzenie  $X \cup_f Y$  i  $Z$  są homeomorficzne.

## 6. HOMOTOPIE

Homotopia między przekształceniami  $f$  i  $g$  oznacza, że  $g$  można otrzymać z  $f$  w wyniku ciągłej deformacji, zależącej od parametru  $t \in I$ , gdzie  $I = [0, 1]$ .

Przestrzeń, dla której identyczność jest homotopijna z przekształceniem stałym, nazywamy przestrzenią ściągłą. Zbiory wypukłe są ściągłe, ale żadna sfera euklidesowa  $S^n$  nie jest ściągła, zob. Wniosek 6.2.6 i Uzupełnienia 7.6.6.

Pokażemy, jak z nieściągłości okręgu  $S^1$  można wyprowadzić zasadnicze twierdzenie algebry, zob. 6.2.7.

Pętle w przestrzeni  $X$  zaczepione w punkcie  $a$  – to drogi w  $X$  zaczynające się i kończące w  $a$ . Homotopia między pętlami  $\alpha$  i  $\beta$  zaczepionymi w  $a$  jest ciągłą deformacją od  $\alpha$  do  $\beta$ , nie poruszającą punktu zaczepienia. Pojęcie to pozwala przyporządkować przestrzeni  $X$  z wyróżnionym punktem  $a$  ważny obiekt – grupę podstawową  $\pi_1(X, a)$ , której elementami są klasy homotopii pętli w  $X$  zaczepionych w  $a$ . Jeśli przestrzeń  $X$  jest łukowo spójna, wybór punktu zaczepienia jest nieistotny i mówimy o grupie podstawowej  $\pi_1(X)$  przestrzeni. Pokażemy, że grupa  $\pi_1(S^1)$  jest izomorficzna z  $\mathbb{Z}$ .

Pojęcie homotopii prowadzi do homotopijnej równoważności, która klasyfikuje przestrzenie bardziej elastycznie, niż relacja homeomorfizmu, zachowując jednak, w obrębie danej klasy równoważności, ważne własności topologiczne. W szczególności, łukowo spójne, homotopijnie równoważne przestrzenie mają izomorficzne grupy podstawowe, zob. Uzupełnienia 7.9.3.

### 6.1. Homotopia przekształceń i pętli.

**Definicja 6.1.1.** *Przekształcenia ciągłe  $f, g : X \rightarrow Y$  przestrzeni  $(X, \mathcal{T}_X)$  w  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  są homotopijne, jeśli istnieje przekształcenie ciągłe  $H : X \times I \rightarrow Y$  – homotopia łącząca  $f$  z  $g$ , takie, że  $f(x) = H(x, 0)$  i  $g(x) = H(x, 1)$ , dla  $x \in X$ . Piszemy wówczas  $f \sim g$ .*

Homotopia  $H : X \times I \rightarrow Y$  łącząca  $f$  z  $g$  określa rodzinę przekształceń  $f_t : X \rightarrow Y$ ,  $f_t(x) = H(x, t)$ , zależącą w sposób ciągły od punktu  $x$  i parametru  $t$ , przy czym  $f_0 = f$  i  $f_1 = g$ . Homotopia  $H$  określa również rodzinę dróg  $h_x : I \rightarrow Y$ ,  $h_x(t) = H(x, t)$  łączących  $f(x)$  z  $g(x)$  dla  $x \in X$ .

**Definicja 6.1.2.** *Przestrzeń topologiczna  $(X, \mathcal{T})$  jest ściągalna, jeśli identyczność jest homotopijna z przekształceniem stałym  $\varepsilon_a(x) = a$ , dla pewnego  $a \in X$ .*

**Przykład 6.1.3.** Wypukła podprzestrzeń  $X$  przestrzeni euklidesowej  $(\mathbb{R}^n, d_e)$  jest ściągalna. Istotnie, dla  $a \in X$ ,  $H(x, t) = (1 - t)x + ta$ ,  $(x, t) \in X \times I$ , jest homotopią łączącą  $id_X$  z  $\varepsilon_a$ .

**Uwaga 6.1.4.** (A) Przestrzeń ściągalna jest łukowo spójna, bo jeśli homotopia  $H : X \times I \rightarrow X$  łączy  $id_X$  z  $\varepsilon_a$ , to  $h_x(t) = H(x, t)$ ,  $t \in I$ , jest drogą w  $X$  od punktu  $x$  do  $a$ , a zatem każde dwa punkty w  $X$  można połączyć drogą.

(B) W przestrzeni łukowo spójnej  $X$ , dla dowolnych  $a, b \in X$ ,  $\varepsilon_a \sim \varepsilon_b$ . Aby to sprawdzić, wystarczy wybrać drogę  $h : I \rightarrow X$  od  $a$  do  $b$  i określić homotopię  $H : X \times I \rightarrow X$  łączącą  $\varepsilon_a$  z  $\varepsilon_b$  formułą  $H(x, t) = h(t)$ .

Ponieważ przestrzenie ściągalne są łukowo spójne, jeśli  $id_X \sim \varepsilon_a$  dla pewnego  $a \in X$ , to  $id_X \sim \varepsilon_b$  dla każdego  $b \in X$ . Wynika to z 6.1.4 i z części (A) kolejnej uwagi.

**Uwaga 6.1.5.** (A) Dla ustalonych przestrzeni topologicznych  $X, Y$ , relacja homotopii w zbiorze  $C(X, Y)$  przekształceń ciągłych z  $X$  w  $Y$  jest relacją równoważności.

Zwrotność  $f \sim f$  jest jasna, a symetria wynika z obserwacji, że jeśli homotopia  $H : X \times I \rightarrow Y$  łączy  $f$  z  $g$ , to  $\bar{H}(x, t) = H(x, 1 - t)$  jest homotopią łączącą  $g$