最优化方法* 作业

Optimization Methods *(Graduate, 2020)*

[*] 指导老师: 张利军. TAs: 卢世银, 宛袁玉

张逸凯 171840708

南京大学 计算机科学与技术系 大四

zykhelloha@gmail.com

摘要

-

说明: 我没有在课程名单里(没有正式选课).

因为保研 LAMDA, 先修研究生课程, 同样地做作业考试, 等研究生时再选课并登分.
上述情况已经获得老师同意. 多多包涵!

* 谢谢老师和助教哥的耐心批改.

张逸凯 171840708 | 17大四计科

凸优化 第1次作业

1. a) $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ 是 Euclidean 范数

证明 $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

证：记 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$; $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$

利用柯西不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$\|x+y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^2+y_i^2+2x_iy_i)}$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^2+y_i^2) + 2\sqrt{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2}}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

$$= \|x\| + \|y\| \qquad \square$$

(b) 同理,

$$\|x+y\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2+y_i^2+2x_iy_i) \qquad (*)$$

Young 不等式 由题意,取 $p=q=\frac{1}{2}$, 则有 $ab \le \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$

不妨令 $a=\sqrt{\varepsilon}x_i$, $b=\frac{y_i}{\sqrt{\varepsilon}}$

我们有 $2x_iy_i \le \varepsilon x_i^2 + \frac{1}{\varepsilon}y_i^2$

$\therefore$ $(*)$式 $\le \sum_{i=1}^n \left[(x_i^2+y_i^2) + (\varepsilon x_i^2 + \frac{1}{\varepsilon}y_i^2)\right]$

$$= (1+\epsilon)\|x\|^2 + (1+\frac{1}{\varepsilon})\|y\|^2 \qquad \square$$

2. distance $\{x \in R^n \mid a^T x = b\}$

$\{x \in R^n \mid a^T x = c\}$

解：在两超平面上各取两点 x_1，x_2

其中 $\begin{cases} x_1 = \frac{b}{\|a\|_2^2} a \\ x_2 = \frac{c}{\|a\|_2^2} a \end{cases}$

$\overrightarrow{x_1 x_2} = \frac{c-b}{\|a\|_2^2} a$ ⊥ 两超平面，∴ x_1，x_2 之间为解

即 $\|x_1 - x_2\|_2 = \frac{|b-c|}{\|a\|_2^2} \cdot \|a\|_2 = \frac{|b-c|}{\|a\|_2}$

3. 凸集 $\Longleftrightarrow$ 与任何直线的 intersection 都凸

证："$\Rightarrow$"：

∵ 直线也是凸集

交集具有保凸性

∴ 与直线的交集都凸，成立

"$\Leftarrow$"

记集合 S，$\forall x_1, x_2 \in S$，直线 l 过 x_1，x_2

则有 $l \cap S$ 是凸的

即 $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in l \cap S$，$\forall x_1, x_2 \in l \cap S$，$0 \le \theta \le 1$

又 $l \cap S \subset S$ ∴ 上式对 S 成立

即 S 是凸集

□

4. Convex cone

K是凸锥, $K^* = \{y \mid x^T y > 0, \forall x \in K\}$

(a) K^*是凸的 (even K is not covex)

证:

K^*是半空间的交, 半空间是凸的

$\therefore K^*$是凸的

(b) 子空间 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 的对偶锥是 $V^+ = \{y \mid y^T v = 0, \forall v \in V\}$

证: V关于加法和数乘封闭

假设 $t \in V$, s.t $y^T t > 0$

则 $-t \in V$, 但 $y^T(-t) < 0$, 矛盾

结合对偶锥定义知:

$$V^+ = \{y \mid y^T v = 0, \forall v \in V\}$$

(c) 由书 例 2.23

自对偶

锥 $\mathbb{R}_n^+$ 的对偶是本身

证明:

$$y^T x \geq 0, \forall x \succeq 0 \implies y \succeq 0$$

反之假设 $y_k < 0$, 则对应 x_k 取正, $x_{i \neq k}$ 取0

即矛盾

综上所述, 得证.

□

5. Convex sets

a) $P=\{x\in\mathbb{R}^n: Ax\le b, A\in\mathbb{R}^{m\times n}, b\in\mathbb{R}^m\}$ 凸.

证：如上多面体是由m个半空间的交定义的

不妨令 $a_i\in\mathbb{R}^n$

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

则第i个半空间为 $a_i x\le b_i$

由半空间凸，~~交集~~保凸得：

多面体凸.

b) $A(S)=\{Ax: x\in S\}$ 保凸

证：令 $x_1,x_2\in A(S)$ 且 $x_1=Ax_1'$，$x_2=Ax_2'$

则对 $\forall\theta\in[0,1]$

$$\theta x_1+(1-\theta)x_2=\theta Ax_1'+(1-\theta)Ax_2' = A(\theta x_1'+(1-\theta)x_2')$$

又∵ S 凸 ∴ $\theta x_1'+(1-\theta)x_2'\in S$

∴ $A(\theta x_1'+(1-\theta)x_2')\in A(S)$

由定义 $A(S)$ 是凸的

□

c) 类似上题证明，我们有

令 $x_1, x_2 \in A^{-1}(S)$

即 $Ax_1 \in S$，$Ax_2 \in S$

由S的凸性，对 $\forall \theta \in [0,1]$

有 $\theta A x_1 + (1-\theta) A x_2 \in S$

$\Rightarrow A(\theta x_1 + (1-\theta) x_2) \in S$

即 $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in A^{-1}(S)$

$\therefore A^{-1}(S)$ 是凸的. □