① a) Sean $x = a + t_1 d$, $y = a + t_2 d$; $x, y \in \mathcal{L}(a,d)$

$$\Rightarrow (1-t)(a+t_1 d) + t(a+t_2 d) = a + t_1 d - \cancel{at} - t t_1 d + \cancel{at} + t t_2 d$$

$$= a + t_1 d - t t_1 d + t t_2 d$$

$$= a + \underbrace{(t_1 - t t_1 + t t_2)}_{t'} d$$

$$= a + t' d$$

$\therefore$ $\mathcal{L}(a,d)$ es convexo.

b) Sean $x, y \in \mathcal{H}(d,c)$, Nota: $x + t(y-x) = (1-t)x + ty$

$$\Rightarrow \langle (1-t)x + ty, d \rangle = \langle (1-t)x, d \rangle + \langle ty, d \rangle$$

$$= (1-t)\langle x, d \rangle + t \langle y, d \rangle$$

$$= (1-t)c + ct$$

$$= c$$

$\therefore$ $\mathcal{H}(d,c)$ es convexo

c) Sean: $x, y \in \mathcal{B}(a,r)$

$$|(1-t)x + ty - a| = |(1-t)x + ty - ((1-t)a + at)|$$

$$= |(1-t)x - (1-t)a + ty - ta|$$

$$= |(1-t)(x-a) + t(y-a)|$$

$$\leq |(1-t)(x-a)| + |t(y-a)|$$

$$= (1-t)|x-a| + t|y-a|$$

$$< (1-t)r + tr$$

$$< r$$

$\therefore$ $\mathcal{B}(a,r)$ es convexo

② $f(x) = \ln(1+e^x)$

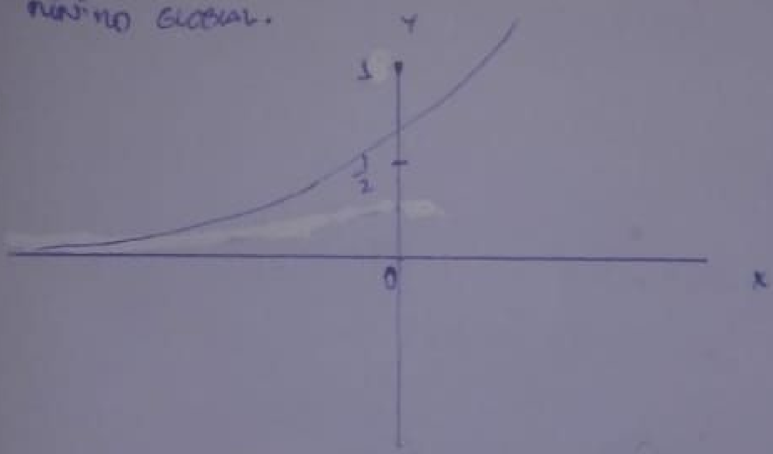
a) VEAMOS SI $f''(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

$\therefore$ f ES CONVEXA

b) $\ln(1+e^x)$ ES MONÓTONA CRECIENTE, POR LO TANTO NO TIENE MÍNIMO GLOBAL.

c)



③ $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & , x<1 \\ 2 & , x=1 \end{cases}$

a) VEAMOS SI $f''(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \langle -\infty, 1]$

1° $\lim\limits_{x^- \to 1} f(x) = \lim\limits_{x^- \to 1} x^2 - 1 = 0$, PERO $f(1) = 2$

$\therefore$ NO EXISTE DERIVADA EN EL PUNTO 1

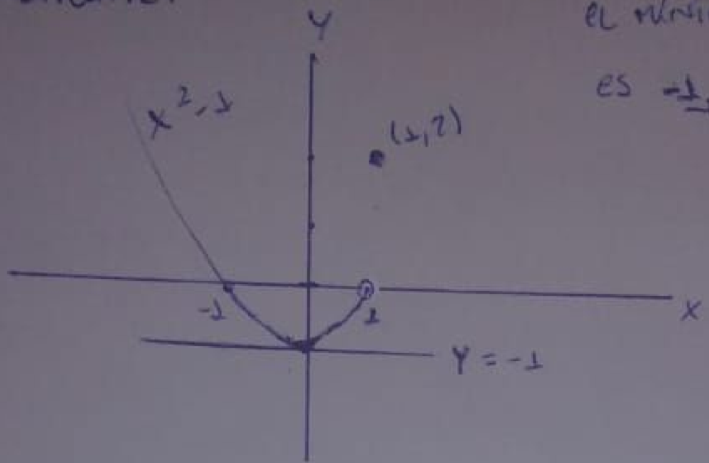
2° $f'(x) = 2x$, $\forall\, x \in \langle -\infty, 1\rangle$

$f''(x) = 2$, $\forall\, x \in \langle -\infty, 1\rangle$

$\therefore$ f ES CONVEXA $\forall\, x \in \langle -\infty, 1\rangle$

b) Gráficamente:

c)



El mínimo global es -1.

(4) $f(x) = x + \frac{4}{x}$, Dom $f = \langle 0, \infty \rangle$

a) $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$

$f''(x) = \frac{8}{x^3}$, luego: para $x = -1$ $f''(x) < 0$

$\therefore$ no es convexa.

b) $1 - \frac{4}{x^2} = 0$

$1 = \frac{4}{x^2}$

$x^2 = 4$

$x = 2$

$f''(2) = 1$

$\therefore$ 4 es el mínimo global.

$\parallel$

$f(2)$

c)