LAPORAN INTEGRASI NUMERIK

```
METODE NUMERIK - INTEGRASI NUMERIK
===================================

Program ini menyelesaikan dua integral menggunakan empat metode numerik:
1. Trapezoidal Rule
2. Romberg Integration
3. Adaptive Integration (Simpson)
4. Gaussian Quadrature

SOAL YANG DISELESAIKAN:
-----------------------
Soal 1: ∫₀^(π/2) cos(x) dx
Soal 2: ∫₀¹ x² dx

Setiap metode akan dijelaskan dengan langkah-langkah matematis yang detail.
```

METODE 1: TRAPEZOIDAL RULE

TEORI TRAPEZOIDAL RULE
======================

Formula Dasar:

$\int_a^b f(x)\,dx \approx h/2\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

dimana:

- $h = (b - a) / n$ (lebar subinterval)
- $x_i = a + i \cdot h$ (titik-titik partisi)
- n = jumlah subinterval

Ide Geometris:

Metode ini mengaproksimasi area di bawah kurva dengan trapesium.
Setiap subinterval $[x_i, x_{i+1}]$ diaproksimasi dengan trapesium yang memiliki:

- Tinggi = $h = x_{i+1} - x_i$
- Sisi sejajar = $f(x_i)$ dan $f(x_{i+1})$
- Luas trapesium = $h/2\,[f(x_i) + f(x_{i+1})]$

Error Analysis:

Error = $-((b-a)^3/12n^2) \cdot f''(\xi)$ untuk $\xi \in [a,b]$
Error berkurang sebanding dengan $1/n^2$ (orde $O(h^2)$)

Hubungan dengan Romberg:

Trapezoidal rule dengan $n=2^i$ menghasilkan $R(i,0)$ dalam tabel Romberg:

- $R(0,0)$: $n = 1$ (2^0)
- $R(1,0)$: $n = 2$ (2^1)
- $R(2,0)$: $n = 4$ (2^2)
- dst.

SOAL 1: $\int_0^{(\pi/2)} \cos(x)\,dx$ - TRAPEZOIDAL RULE

LANGKAH-LANGKAH PERHITUNGAN:
============================

Diketahui:

$f(x) = \cos(x)$

$a = 0$, $b = \pi/2 \approx 1.570796$

Nilai eksak $= \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1.0$

LEVEL 0: $R_{0,0}$ (n=1, satu interval)

$h = (\pi/2 - 0)/1 = 1.570796$

Titik evaluasi:

$x_0 = 0.000000$, $f(x_0) = \cos(0.0000) = 1.000000$

$x_1 = 1.570796$, $f(x_1) = \cos(1.5708) = 0.000000$

$$
\begin{aligned}
R_{0,0} &= h/2\ [f(x_0) + f(x_1)] \\
&= 1.570796/2 \times [1.000000 + 0.000000] \\
&= 0.785398 \times 1.000000 \\
&= 0.785398163397448
\end{aligned}
$$

Error $= |0.785398 - 1.0| = 2.146018\text{e-}01$

LEVEL 1: $R_{1,1}$ (n=2, dua interval)

$h = (\pi/2 - 0)/2 = 0.785398$

Titik evaluasi:

$x_0 = 0.000000$, $f(x_0) = \cos(0.0000) = 1.000000$

$x_1 = 0.785398$, $f(x_1) = \cos(0.7854) = 0.707107$

$x_2 = 1.570796$, $f(x_2) = \cos(1.5708) = 0.000000$

$$
\begin{aligned}
R_{1,1} &= h/2\ [f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)] \\
&= 0.785398/2 \times [1.000000 + 2\times0.707107 + 0.000000] \\
&= 0.392699 \times 2.414214 \\
&= 0.948059448968520
\end{aligned}
$$

Error $= |0.948059 - 1.0| = 5.194055\text{e-}02$

METODE 2: ROMBERG INTEGRATION

TEORI ROMBERG INTEGRATION
=========================

Romberg integration adalah metode ekstrapolasi Richardson yang diterapkan pada Trapezoidal Rule untuk meningkatkan akurasi.

Formula Rekursif:

$R(i,0)$ = Trapezoidal rule dengan $n = 2^i$

$$R(i,j) = R(i,j-1) + [R(i,j-1) - R(i-1,j-1)] / (4^j - 1)$$

Struktur Tabel Romberg:
----

	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4
i=0	R(0,0)				
i=1	R(1,0)	R(1,1)			
i=2	R(2,0)	R(2,1)	R(2,2)		
i=3	R(3,0)	R(3,1)	R(3,2)	R(3,3)	
i=4	R(4,0)	R(4,1)	R(4,2)	R(4,3)	R(4,4)

Penjelasan Kolom:

- j=0: Hasil Trapezoidal Rule (orde h^2)
- j=1: Ekstrapolasi pertama → Simpson's Rule (orde h^4)
- j=2: Ekstrapolasi kedua → Boole's Rule (orde h^6)
- j=3: Ekstrapolasi ketiga (orde h^8)
- j=4: Ekstrapolasi keempat (orde h^{10})

Kelebihan:
----

1. Konvergensi sangat cepat (eksponensial)
2. Memberikan estimasi error otomatis
3. Akurasi tinggi dengan evaluasi fungsi yang relatif sedikit

Perhitungan R(i,0) untuk i > 0:

Menggunakan formula rekursif untuk menghindari perhitungan ulang:

$h = (b - a) / 2^i$

$R(i,0) = R(i-1,0)/2 + h \times \Sigma f(a + (2k-1)h)$ untuk k=1 hingga 2^(i-1)

SOAL 1: ROMBERG INTEGRATION - PERHITUNGAN

```
PERHITUNGAN TABEL ROMBERG untuk ∫₀^(π/2) cos(x) dx
==================================================

KOLOM 0: Trapezoidal Rule dengan n = 2ⁱ

R(0,0) = (π/2)/2 × [f(0) + f(π/2)]
       = 0.785398 × [1.0 + 0.0]
       = 0.785398163397448

R(1,0) menggunakan formula rekursif:
h = π/4, titik baru: π/4
R(1,0) = R(0,0)/2 + h × f(π/4)
       = 0.392699 + 0.392699 × 0.707107
       = 0.948059448968520

R(2,0), R(3,0), R(4,0) dihitung serupa dengan n=4, 8, 16

EKSTRAPOLASI (Kolom j≥1):

R(i,j) = R(i,j-1) + [R(i,j-1) - R(i-1,j-1)] / (4ʲ - 1)

Contoh: R(1,1) (Simpson's Rule)
R(1,1) = R(1,0) + [R(1,0) - R(0,0)] / (4¹ - 1)
       = 0.9480594490 + [0.948059 - 0.785398] / 3
       = 0.9480594490 + 0.0542204285
       = 1.002279877492210

Contoh: R(2,1)
R(2,1) = R(2,0) + [R(2,0) - R(1,0)] / 3
       = 0.9871158010 + 0.0130187840
       = 1.000134584974194

Contoh: R(2,2)
R(2,2) = R(2,1) + [R(2,1) - R(1,1)] / (4² - 1)
       = 1.0001345850 + [1.000135 - 1.002280] / 15
       = 1.0001345850 + -0.0001430195
       = 0.999991565472993

HASIL TERBAIK: R(4,4) = 0.999999999998017
Error = 1.982858e-12
```

SOAL 1: TABEL ROMBERG LENGKAP

TABEL ROMBERG LENGKAP:

==

i\j	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4
i=0	0.785398163397	-	-	-	-
i=1	0.948059448969	1.002279877492	-	-	-
i=2	0.987115800973	1.000134584974	0.999991565473	-	-
i=3	0.996785171886	1.000008295524	0.999999876227	1.000000008144	-
i=4	0.999196680485	1.000000516685	0.999999998095	1.000000000030	0.999999999998

INTERPRETASI:

- Diagonal utama menunjukkan hasil dengan akurasi meningkat
- R(4,4) memiliki akurasi tertinggi dengan error 1.98e-12
- Setiap ekstrapolasi meningkatkan orde akurasi sebesar $O(h^2)$

METODE 3: ADAPTIVE INTEGRATION

```
TEORI ADAPTIVE INTEGRATION
==========================

Adaptive Integration adalah metode yang secara otomatis menyesuaikan ukuran
subinterval berdasarkan perilaku fungsi untuk mencapai toleransi error tertentu.

Formula Simpson's Rule:
-----------------------
Untuk interval [a,b] dengan midpoint c = (a+b)/2:

S = (b-a)/6 × [f(a) + 4f(c) + f(b)]

Algoritma Adaptive:
-------------------
1. Hitung S untuk seluruh interval [a,b]
2. Bagi interval menjadi dua: [a,c] dan [c,b]
3. Hitung S_left dan S_right untuk masing-masing subinterval
4. Hitung S2 = S_left + S_right
5. Jika |S2 - S| ≤ 15·tol, terima S2 + (S2-S)/15
6. Jika tidak, rekursi pada [a,c] dan [c,b] dengan tol/2

Estimasi Error:
--------------
Error ≈ (S2 - S) / 15

Ini berdasarkan analisis error Simpson's rule:
  Error_Simpson ∝ h⁵

Ketika h dibagi dua, error berkurang dengan faktor 2⁵ = 32
Sehingga: Error_new ≈ Error_old / 16
Dan: Error ≈ (S2 - S) / (16-1) = (S2 - S) / 15

Kelebihan:
----------
1. Efisien: fokus pada daerah yang sulit
2. Akurasi terkontrol dengan toleransi
3. Otomatis menyesuaikan dengan kompleksitas fungsi
4. Menghindari over-computation pada daerah yang smooth

Parameter:
----------
• tol: toleransi error yang diinginkan (default: 1e-10)
• max_depth: kedalaman rekursi maksimum (default: 50)
```

METODE 4: GAUSSIAN QUADRATURE

TEORI GAUSSIAN QUADRATURE
=========================

Gaussian Quadrature adalah metode integrasi yang menggunakan titik-titik sampling optimal (Gauss points) untuk mencapai akurasi maksimal.

Formula Dasar (Gauss-Legendre):

$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \Sigma_i\, w_i \cdot f(x_i)$

dimana:
- x_i: Gauss points (akar polinomial Legendre)
- w_i: bobot (weights) yang sesuai

5-Point Gauss-Legendre:

Nodes (x_i):	Weights (w_i):
x_1 = -0.9061798459386640	w_1 = 0.2369268850561891
x_2 = -0.5384693101056831	w_2 = 0.4786286704993665
x_3 = 0.0	w_3 = 0.5688888888888889
x_4 = 0.5384693101056831	w_4 = 0.4786286704993665
x_5 = 0.9061798459386640	w_5 = 0.2369268850561891

Catatan: Weights simetris ($w_1=w_5$, $w_2=w_4$)

Transformasi ke Interval [a,b]:

$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)/2 \cdot \int_{-1}^{1} f((b-a)t/2 + (a+b)/2)\, dt$

Langkah-langkah:
1. Transformasi x_i dari [-1,1] ke [a,b]:
   $x'_i = (b-a)/2 \cdot x_i + (a+b)/2$

2. Hitung weighted sum:
   $\Sigma_i\, w_i \cdot f(x'_i)$

3. Kalikan dengan faktor skala:
   $(b-a)/2 \cdot \Sigma_i\, w_i \cdot f(x'_i)$

Akurasi:
----

n-point Gauss quadrature exact untuk polinomial derajat ≤ 2n-1
5-point Gauss quadrature exact untuk polinomial derajat ≤ 9

Kelebihan:
----

1. Akurasi sangat tinggi dengan evaluasi fungsi minimal
2. Optimal untuk fungsi smooth
3. Tidak memerlukan turunan fungsi
4. Error $\propto f^{(2n)}(\xi)$ dengan orde yang sangat tinggi

SOAL 1: GAUSSIAN QUADRATURE - PERHITUNGAN

PERHITUNGAN GAUSSIAN QUADRATURE untuk $\int_0^{(\pi/2)} \cos(x)\,dx$
==

TRANSFORMASI dari [-1,1] ke [0, π/2]:

Formula: $x'_i = (b-a)/2 \cdot x_i + (a+b)/2$
$= 0.78539816 \cdot x_i + 0.78539816$

EVALUASI TITIK-TITIK:

---

i	Node (x_i)	x'_i (transformed)	$f(x'_i)=\cos(x'_i)$	Weight (w_i)
1	-0.906179845938664	0.073686176689439	0.997286401840	0.236926885056189
2	-0.538469310105683	0.362485356194554	0.935018407118	0.478628670499367
3	0.000000000000000	0.785398163397448	0.707106781187	0.568888888888889
4	0.538469310105683	1.208310970600343	0.354599179851	0.478628670499367
5	0.906179845938664	1.497110150105458	0.073619513066	0.236926885056189

PERHITUNGAN WEIGHTED SUM:

$$\Sigma\, w_i \cdot f(x'_i) = w_1 \cdot f(x'_1) + w_2 \cdot f(x'_2) + w_3 \cdot f(x'_3) + w_4 \cdot f(x'_4) + w_5 \cdot f(x'_5)$$

$$\begin{aligned} &= 0.236927 \times 0.997286 \\ &+ 0.478629 \times 0.935018 \\ &+ 0.568889 \times 0.707107 \\ &+ 0.478629 \times 0.354599 \\ &+ 0.236927 \times 0.073620 \end{aligned}$$

$$= 1.273239544785538$$

HASIL AKHIR:

$$\begin{aligned} I &\approx (b-a)/2 \times \Sigma\, w_i \cdot f(x'_i) \\ &= 0.78539816 \times 1.273239544785538 \\ &= 1.000000000039565 \end{aligned}$$

Error = 3.956502e-11

CATATAN:
Error sangat kecil karena cos(x) sangat smooth dan dapat diaproksimasi
dengan baik oleh polinomial derajat tinggi.

SOAL 1: RINGKASAN HASIL

RINGKASAN HASIL SOAL 1: $\int_0$^(π/2) cos(x) dx
==

Nilai Eksak: 1.000000000000000

PERBANDINGAN SEMUA METODE:

Trapezoidal $R_{0,0}$	0.785398163397448	Error: 2.146018e-01
Trapezoidal $R_{1,1}$	0.948059448968520	Error: 5.194055e-02
Trapezoidal $R_{2,2}$	0.987115800972776	Error: 1.288420e-02
Romberg $R_{4,4}$	0.999999999998017	Error: 1.982858e-12
Adaptive Simpson	0.999999999999999	Error: 1.110223e-15
Gaussian Quadrature	1.000000000039565	Error: 3.956502e-11

ANALISIS PERFORMA:

---

1. TRAPEZOIDAL RULE:
   - $R_{0,0}$ (n=1): Error terbesar 2.15e-01
   - $R_{2,2}$ (n=4): Error 1.29e-02, improvement ~16.7x
   - Pola: Error berkurang ~4x setiap level (sesuai teori $O(h^2)$)

2. ROMBERG INTEGRATION:
   - Error: 1.98e-12
   - Metode tercepat konvergen dengan akurasi sangat tinggi
   - Hanya perlu 2^4=16 evaluasi fungsi untuk hasil luar biasa akurat

3. ADAPTIVE SIMPSON:
   - Error: 1.11e-15
   - Otomatis menyesuaikan dengan kompleksitas fungsi
   - Cocok untuk fungsi dengan perilaku tidak teratur

4. GAUSSIAN QUADRATURE:
   - Error: 3.96e-11
   - Akurasi tertinggi dengan hanya 5 evaluasi fungsi!
   - Optimal untuk fungsi smooth seperti cos(x)
   - Exact untuk polinomial derajat ≤9

KESIMPULAN:

Untuk integral cos(x):
- Gaussian Quadrature memberikan hasil terbaik (error 3.96e-11)
- Romberg juga sangat baik (error 1.98e-12)
- Semua metode konvergen ke nilai eksak dengan baik

SOAL 2: $\int_0^1 x^2\,dx$ - TRAPEZOIDAL RULE

LANGKAH-LANGKAH PERHITUNGAN:
============================

Diketahui:
  $f(x) = x^2$
  $a = 0, b = 1$
  Nilai eksak = $\int_0^1 x^2\,dx = [x^3/3]_0^1 = 1/3 = 0.333333333333333$

LEVEL 0: $R_{0,0}$ (n=1, satu interval)

$h = (1 - 0)/1 = 1.000000$

Titik evaluasi:
  $x_0 = 0.000000$, $f(x_0) = (0.0000)^2 = 0.000000$
  $x_1 = 1.000000$, $f(x_1) = (1.0000)^2 = 1.000000$

$$
\begin{aligned}
R_{0,0} &= h/2\,[f(x_0) + f(x_1)] \\
&= 1.000000/2 \times [0.000000 + 1.000000] \\
&= 0.500000 \times 1.000000 \\
&= 0.500000000000000
\end{aligned}
$$

Error = $|0.500000 - 0.333333| = 1.666667\text{e-}01$

LEVEL 1: $R_{1,1}$ (n=2, dua interval)

$h = (1 - 0)/2 = 0.500000$

Titik evaluasi:
  $x_0 = 0.000000$, $f(x_0) = (0.0000)^2 = 0.000000$
  $x_1 = 0.500000$, $f(x_1) = (0.5000)^2 = 0.250000$
  $x_2 = 1.000000$, $f(x_2) = (1.0000)^2 = 1.000000$

$$
\begin{aligned}
R_{1,1} &= h/2\,[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)] \\
&= 0.500000/2 \times [0.000000 + 2\times 0.250000 + 1.000000] \\
&= 0.250000 \times 1.500000 \\
&= 0.375000000000000
\end{aligned}
$$

Error = $|0.375000 - 0.333333| = 4.166667\text{e-}02$

LEVEL 2: $R_{2,2}$ (n=4)

Dengan 4 interval (h=0.25), kita evaluasi di x=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1
Hasil: 0.343750000000000
Error: 1.041667e-02

SOAL 2: ROMBERG INTEGRATION

TABEL ROMBERG untuk $\int_0^1 x^2\, dx$
==============================

Nilai Eksak: 0.3333333333333333

TABEL LENGKAP:

---

i\j	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4
i=0	0.500000000000	-	-	-	-
i=1	0.375000000000	0.333333333333	-	-	-
i=2	0.343750000000	0.333333333333	0.333333333333	-	-
i=3	0.335937500000	0.333333333333	0.333333333333	0.333333333333	-
i=4	0.333984375000	0.333333333333	0.333333333333	0.333333333333	0.333333333333

CONTOH PERHITUNGAN EKSTRAPOLASI:

```
R(1,1) = R(1,0) + [R(1,0) - R(0,0)] / 3
       = 0.3750000000 + [0.3750000000 - 0.5000000000] / 3
       = 0.3750000000 + -0.0416666667
       = 0.3333333333333333

R(2,2) = R(2,1) + [R(2,1) - R(1,1)] / 15
       = 0.3333333333 + 0.0000000000
       = 0.3333333333333333

R(3,3) = R(3,2) + [R(3,2) - R(2,2)] / 63
       = 0.3333333333 + 0.0000000000
       = 0.3333333333333333

R(4,4) = R(4,3) + [R(4,3) - R(3,3)] / 255
       = 0.3333333333 + 0.0000000000
       = 0.3333333333333333
```

HASIL AKHIR: R(4,4) = 0.3333333333333333
Error = 0.000000e+00

OBSERVASI:
Untuk fungsi polinomial x^2, konvergensi sangat cepat karena
Simpson's Rule (R(1,1)) sudah exact untuk polinomial derajat ≤3!

SOAL 2: GAUSSIAN QUADRATURE - PERHITUNGAN

PERHITUNGAN GAUSSIAN QUADRATURE untuk $\int_0^1 x^2\,dx$
===

TRANSFORMASI dari [-1,1] ke [0, 1]:

Formula: $x'_i = (b-a)/2 \cdot x_i + (a+b)/2$
$= 0.50000000 \cdot x_i + 0.50000000$
$= 0.5 \cdot x_i + 0.5$

EVALUASI TITIK-TITIK:

i	Node (x_i)	x'_i (transformed)	$f(x'_i)=(x'_i)^2$	Weight (w_i)
1	-0.906179845938664	0.046910077030668	0.002200555327	0.236926885056189
2	-0.538469310105683	0.230765344947158	0.053252644429	0.478628670499367
3	0.000000000000000	0.500000000000000	0.250000000000	0.568888888888889
4	0.538469310105683	0.769234655052841	0.591721954534	0.478628670499367
5	0.906179845938664	0.953089922969332	0.908380401266	0.236926885056189

PERHITUNGAN WEIGHTED SUM:

$$
\begin{aligned}
\Sigma\, w_i \cdot f(x'_i) &= 0.236927 \times 0.0022005553 \\
&+ 0.478629 \times 0.0532526444 \\
&+ 0.568889 \times 0.2500000000 \\
&+ 0.478629 \times 0.5917219545 \\
&+ 0.236927 \times 0.9083804013 \\
\\
&= 0.000521370719 \\
&+ 0.025488242403 \\
&+ 0.142222222222 \\
&+ 0.283215092404 \\
&+ 0.215219738918 \\
\\
&= 0.666666666666667
\end{aligned}
$$

HASIL AKHIR:

$$
\begin{aligned}
I &\approx (b-a)/2 \times \Sigma\, w_i \cdot f(x'_i) \\
&= 0.50000000 \times 0.666666666666667 \\
&= 0.333333333333333
\end{aligned}
$$

Nilai Eksak: 0.333333333333333
Error: 0.000000e+00

CATATAN PENTING:

Karena $f(x)=x^2$ adalah polinomial derajat 2, dan 5-point Gauss quadrature exact untuk polinomial derajat ≤ 9, hasil ini seharusnya exact.
Error yang muncul (~0.00e+00) hanya dari floating-point precision.

SOAL 2: RINGKASAN HASIL

RINGKASAN HASIL SOAL 2: $\int_0^1 x^2\,dx$
==================================

Nilai Eksak: 0.3333333333333333

PERBANDINGAN SEMUA METODE:

Trapezoidal $R_{0,0}$	0.500000000000000	Error: 1.666667e-01
Trapezoidal $R_{1,1}$	0.375000000000000	Error: 4.166667e-02
Trapezoidal $R_{2,2}$	0.343750000000000	Error: 1.041667e-02
Romberg $R_{4,4}$	0.333333333333333	Error: 0.000000e+00
Adaptive Simpson	0.333333333333333	Error: 0.000000e+00
Gaussian Quadrature	0.333333333333333	Error: 0.000000e+00

ANALISIS PERFORMA:

---

1. TRAPEZOIDAL RULE:
   - $R_{0,0}$ (n=1): Error 1.67e-01
   - $R_{2,2}$ (n=4): Error 1.04e-02
   - Konvergensi sesuai teori $O(h^2)$

2. ROMBERG INTEGRATION:
   - Error: 0.00e+00
   - Konvergensi sangat cepat karena $f(x)=x^2$ adalah polinomial
   - Simpson's Rule (R(1,1)) sudah memberikan akurasi tinggi

3. ADAPTIVE SIMPSON:
   - Error: 0.00e+00
   - Untuk fungsi smooth seperti x^2, tidak banyak adaptasi diperlukan
   - Akurasi sangat baik dengan minimal subdivision

4. GAUSSIAN QUADRATURE:
   - Error: 0.00e+00
   - Hampir exact! (error hanya floating-point precision)
   - 5-point exact untuk polinomial derajat ≤9
   - x^2 (derajat 2) → hasil sempurna

KARAKTERISTIK KHUSUS UNTUK POLINOMIAL:

Untuk $f(x)=x^2$:
- Simpson's Rule exact untuk polinomial derajat ≤3 → sangat akurat
- Romberg R(1,1) = Simpson's Rule → konvergensi sangat cepat
- Gaussian Quadrature exact untuk polinomial derajat ≤9 → hasil perfect
- Semua metode memberikan hasil yang sangat baik

KESIMPULAN:

Gaussian Quadrature optimal untuk integral polinomial atau fungsi smooth.
Dengan hanya 5 evaluasi fungsi, error mencapai machine precision!

KESIMPULAN UMUM DAN REKOMENDASI

KESIMPULAN UMUM
===============

PERBANDINGAN METODE INTEGRASI NUMERIK

1. TRAPEZOIDAL RULE
   Kelebihan:
   • Sederhana dan mudah diimplementasikan
   • Cocok untuk pemahaman dasar integrasi numerik
   • Stabil secara numerik

   Kekurangan:
   • Konvergensi lambat ($O(h^2)$)
   • Memerlukan banyak evaluasi fungsi untuk akurasi tinggi

   Rekomendasi: Untuk pembelajaran atau quick estimate

2. ROMBERG INTEGRATION
   Kelebihan:
   • Konvergensi sangat cepat (eksponensial)
   • Efisien: akurasi tinggi dengan evaluasi minimal
   • Memberikan sequence of approximations
   • Built-in error estimation

   Kekurangan:
   • Memerlukan interval terstruktur (2^n subdivisions)
   • Tidak adaptive

   Rekomendasi: Pilihan terbaik untuk fungsi smooth pada interval fixed

3. ADAPTIVE INTEGRATION
   Kelebihan:
   • Otomatis menyesuaikan dengan kompleksitas fungsi
   • Efisien untuk fungsi dengan variasi lokal
   • Kontrol error yang baik
   • Cocok untuk fungsi discontinuous/singular

   Kekurangan:
   • Overhead untuk fungsi yang sangat smooth
   • Implementasi lebih kompleks

   Rekomendasi: Terbaik untuk fungsi dengan perilaku tidak teratur

4. GAUSSIAN QUADRATURE
   Kelebihan:
   • Akurasi tertinggi per evaluasi fungsi
   • Optimal untuk fungsi smooth
   • n-point exact untuk polinomial derajat $\leq 2n-1$
   • Sangat efisien

   Kekurangan:
   • Fixed points (tidak adaptive)
   • Kurang efisien untuk fungsi oscillatory/singular
   • Memerlukan transformasi interval

   Rekomendasi: Pilihan terbaik untuk fungsi smooth dan well-behaved

PANDUAN PEMILIHAN METODE

KONDISI	METODE YANG DISARANKAN
Fungsi smooth & polynomial	Gaussian Quadrature
Fungsi smooth & general	Romberg Integration
Fungsi dengan discontinuity	Adaptive Integration
Fungsi oscillatory	Adaptive Integration
Quick estimate	Trapezoidal Rule
High precision required	Romberg or Gaussian
Unknown function behavior	Adaptive Integration

HASIL DARI KEDUA SOAL

Soal 1 (cos(x)): Gaussian Quadrature terbaik
Soal 2 (x^2): Gaussian Quadrature hampir exact

Kedua kasus menunjukkan superioritas Gaussian Quadrature untuk fungsi smooth dan well-behaved.