



UNIVERSITAS GADJAH MADA  
FAKULTAS TEKNIK  
DEPARTEMEN TEKNIK ELEKTRO DAN TEKNOLOGI INFORMASI

---

TUGAS METODE NUMERIS

**INTEGRASI NUMERIK DENGAN METODE  
TRAPEZOIDAL, RICHARDSON, ROMBERG, ADAPTIVE,  
DAN GAUSSIAN QUADRATURE**

Ditulis oleh:

**Kelompok:**

1. Nathanael Satya Saputra (NIM NAEL)
2. Muhammad Nafal Zakin Rustanto (24/535255/TK/59364)
3. Yohanes Anthony Saputra (NIM ANTHONY)
4. Johannes De Deo Dimas Aryobimo (24/540351/TK/59948)

## **BAGIAN 1: Dasar Teori**

### **1.1. Integrasi Analitik (Metode Eksak)**

Integrasi analitik adalah metode perhitungan integral menggunakan rumus-rumus kalkulus secara langsung. Metode ini memberikan nilai eksak (tepat) dari suatu integral jika fungsi yang diintegrasikan memiliki antiturunan yang dapat ditentukan.

#### **Definisi Integral Tentu:**

Integral tentu dari fungsi  $f(x)$  pada interval  $[a, b]$  didefinisikan sebagai:

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

di mana  $F(x)$  adalah antiturunan dari  $f(x)$ , yaitu  $F'(x) = f(x)$ .

#### **Teorema Fundamental Kalkulus:**

Jika  $f(x)$  kontinu pada interval  $[a, b]$  dan  $F(x)$  adalah antiturunan dari  $f(x)$ , maka:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

#### **Kegunaan:**

Hasil dari integrasi analitik digunakan sebagai nilai pembanding (nilai eksak) untuk mengevaluasi akurasi metode-metode integrasi numerik. Error dari metode numerik dihitung sebagai selisih absolut antara hasil numerik dengan nilai eksak ini.

#### Algoritma:

1. Tentukan fungsi  $f(x)$  dan batas integrasi  $[a, b]$
2. Cari antiturunan  $F(x)$  dari  $f(x)$
3. Hitung  $F(b) - F(a)$
4. Hasil adalah nilai eksak integral

#### Implementasi Python:

```

1 import numpy as np
2
3 # Contoh untuk f(x) = cos(x) pada [0, pi/2]
4 a = 0
5 b = np.pi / 2
6 # Antiturunan cos(x) adalah sin(x)
7 exact = np.sin(b) - np.sin(a) # = 1.0
8
9 # Contoh untuk f(x) = x^2 pada [0, 1]
10 a = 0
11 b = 1
12 # Antiturunan x^2 adalah x^3/3
13 exact = (b**3 / 3) - (a**3 / 3) # = 1/3

```

## 1.2. Metode Trapezoidal Rule

Metode *Trapezoidal Rule* merupakan salah satu metode numerik untuk menghitung pendekatan integral tentu dari suatu fungsi yang sulit atau tidak dapat diintegrasikan secara analitik. Ide dari metode ini adalah dengan membagi daerah di bawah kurva fungsi  $f(x)$  pada interval  $[a, b]$  menjadi sejumlah bagian kecil yang berbentuk trapesium, kemudian menjumlahkan luas seluruh trapesium tersebut untuk memperoleh nilai pendekatan dari integral.

Secara matematis, integral tentu dari  $f(x)$  pada interval  $[a, b]$  dapat ditulis sebagai:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Jika interval  $[a, b]$  dibagi menjadi  $n$  subinterval yang sama panjang dengan lebar  $h = \frac{b-a}{n}$ , maka dengan pendekatan *Trapezoidal Rule* nilai integral yakni

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

dengan  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ , dan  $x_i = a + i \cdot h$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

#### Algoritma:

Input: fungsi  $f(x)$ , batas  $a$  dan  $b$ , jumlah subinterval  $n$

1. Hitung  $h = (b - a) / n$

2. Buat array  $x$  dengan  $n+1$  titik:  $x[i] = a + i \cdot h$
  3. Hitung nilai fungsi  $y[i] = f(x[i])$  untuk semua  $i$
  4.  $result = h * (0.5 \cdot y[0] + \text{sum}(y[1] \text{ sampai } y[n-1]) + 0.5 \cdot y[n])$
- Output: result

### Implementasi Python:

```

1 import numpy as np
2
3 def trapezoidal_rule(f, a, b, n):
4     """
5     Metode Trapezoidal Rule
6     f: fungsi yang akan diintegalkan
7     a: batas bawah
8     b: batas atas
9     n: jumlah subinterval
10    """
11    h = (b - a) / n
12    x = np.linspace(a, b, n + 1)
13    y = f(x)
14
15    result = h * (0.5 * y[0] + np.sum(y[1:-1]) + 0.5 * y[-1])
16    return result
17
18 # Contoh penggunaan
19 def f(x):
20     return np.cos(x)
21
22 result = trapezoidal_rule(f, 0, np.pi/2, 4)

```

## 1.3. Metode Richardson Extrapolation

**Richardson Extrapolation** adalah teknik numerik untuk meningkatkan akurasi hasil pendekatan dengan mengkombinasikan beberapa hasil pendekatan yang memiliki ukuran langkah berbeda. Metode ini sangat efektif untuk mempercepat konvergensi hasil numerik.

### Prinsip Dasar:

Misalkan  $N(h)$  adalah pendekatan numerik dari nilai eksak  $N$  dengan ukuran langkah  $h$ . Jika error dapat dinyatakan sebagai deret pangkat dari  $h$ :

$$N(h) = N + a_1 h^p + a_2 h^{2p} + a_3 h^{3p} + \dots$$

Maka dengan menggunakan dua pendekatan dengan ukuran langkah berbeda ( $h$  dan  $\frac{h}{2}$ ), kita dapat mengeliminasi suku error orde terendah.

### Rumus Richardson Extrapolation:

Untuk integrasi numerik menggunakan Trapezoidal Rule, formula Richardson Extrapolation diberikan oleh:

$$R_{i,j} = R_{i,j-1} + \frac{R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^j - 1}$$

di mana:

- $R_{i,0}$  adalah hasil Trapezoidal Rule dengan  $n = 2^i$  subinterval
- $R_{i,j}$  adalah hasil ekstrapolasi pada level  $i$  dan kolom  $j$
- Setiap kolom  $j$  mengeliminasi error orde  $O(h^{2j+2})$

### Tabel Richardson:

Tabel Richardson memiliki struktur:

$i$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
0	$R_{0,0}$			
1	$R_{1,0}$	$R_{1,1}$		
2	$R_{2,0}$	$R_{2,1}$	$R_{2,2}$	
3	$R_{3,0}$	$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$

Nilai pada diagonal utama ( $R_{0,0}, R_{1,1}, R_{2,2}, \dots$ ) menunjukkan peningkatan akurasi yang signifikan.

### Algoritma:

Input: fungsi  $f(x)$ , batas  $a$  dan  $b$ ,  $\text{max\_level}$

1. Inisialisasi matriks  $R$  berukuran  $\text{max\_level} \times \text{max\_level}$
2. Untuk  $i = 0$  sampai  $\text{max\_level}-1$ :
  - a.  $n = 2^i$
  - b.  $R[i][0] = \text{trapezoidal\_rule}(f, a, b, n)$
3. Untuk  $j = 1$  sampai  $\text{max\_level}-1$ :
  - a. Untuk  $i = j$  sampai  $\text{max\_level}-1$ :
$$R[i][j] = R[i][j-1] + (R[i][j-1] - R[i-1][j-1]) / (4^j - 1)$$
4. Hasil terbaik adalah  $R[\text{max\_level}-1][\text{max\_level}-1]$

Output: matriks  $R$

### Implementasi Python:

```
1 import numpy as np
2
3 def richardson_extrapolation(f, a, b, max_level=5):
4     """
5     Metode Richardson Extrapolation
6     Menggunakan trapezoidal rule sebagai basis dan melakukan
7     ekstrapolasi
8     """
9     R = np.zeros((max_level, max_level))
10
11     # Kolom pertama: hasil trapezoidal rule dengan  $n = 2^i$ 
12     for i in range(max_level):
13         n = 2**i
14         R[i][0] = trapezoidal_rule(f, a, b, n)
15
16     # Richardson extrapolation untuk kolom-kolom berikutnya
17     for j in range(1, max_level):
18         for i in range(j, max_level):
19             R[i][j] = R[i][j-1] + (R[i][j-1] - R[i-1][j-1]) / (4**j)
```

```

- 1)
20
21     return R
22
23 # Contoh penggunaan
24 richardson = richardson_extrapolation(f, 0, np.pi/2, max_level=5)
25 result = richardson[4][4] # Hasil terbaik

```

## 1.4. Metode Romberg Integration

**Romberg Integration** adalah metode integrasi numerik yang menggabungkan Trapezoidal Rule dengan Richardson Extrapolation. Perbedaan utama dengan Richardson standar adalah cara menghitung kolom pertama menggunakan teknik rekursif yang lebih efisien.

### Rumus Romberg:

Kolom pertama dihitung dengan:

$$R_{0,0} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$R_{i,0} = \frac{1}{2} R_{i-1,0} + h_i \sum_{k=1}^{2^{i-1}} f(a + (2k-1)h_i)$$

di mana  $h_i = \frac{b-a}{2^i}$ .

Untuk kolom berikutnya, menggunakan Richardson Extrapolation:

$$R_{i,j} = R_{i,j-1} + \frac{R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^j - 1}$$

### Algoritma:

Input: fungsi  $f(x)$ , batas  $a$  dan  $b$ ,  $\text{max\_level}$

1. Inisialisasi matriks  $R$  berukuran  $\text{max\_level} \times \text{max\_level}$
2.  $R[0][0] = 0.5 * (b - a) * (f(a) + f(b))$
3. Untuk  $i = 1$  sampai  $\text{max\_level}-1$ :
  - a.  $h = (b - a) / 2^i$
  - b.  $\text{sum\_val} = 0$
  - c. Untuk  $k = 1$  sampai  $2^{(i-1)}$ :
  $\text{sum\_val} += f(a + (2*k - 1) * h)$
  - d.  $R[i][0] = 0.5 * R[i-1][0] + h * \text{sum\_val}$
4. Untuk  $i = 1$  sampai  $\text{max\_level}-1$ :
  - a. Untuk  $j = 1$  sampai  $i$ :
  $R[i][j] = R[i][j-1] + (R[i][j-1] - R[i-1][j-1]) / (4^j - 1)$

Output: matriks  $R$

### Implementasi Python:

```

1 import numpy as np
2
3 def romberg_integration(f, a, b, max_level=5):

```

```

4      """
5      Metode Romberg Integration
6      Menghasilkan tabel Romberg R[i][j]
7      """
8      R = np.zeros((max_level, max_level))
9
10     # R[0][0] menggunakan trapezoidal rule dengan 1 interval
11     R[0][0] = 0.5 * (b - a) * (f(a) + f(b))
12
13     for i in range(1, max_level):
14         h = (b - a) / (2**i)
15
16         # Hitung sum untuk titik-titik baru
17         sum_val = 0
18         for k in range(1, 2*(i-1) + 1):
19             sum_val += f(a + (2*k - 1) * h)
20
21         R[i][0] = 0.5 * R[i-1][0] + h * sum_val
22
23         # Richardson extrapolation
24         for j in range(1, i + 1):
25             R[i][j] = R[i][j-1] + (R[i][j-1] - R[i-1][j-1]) / (4**j
26                 - 1)
27
28     return R
29
30 # Contoh penggunaan
31 romberg = romberg_integration(f, 0, np.pi/2, max_level=5)
32 result = romberg[4][4] # Hasil terbaik

```

## 1.5. Metode Adaptive Integration

**Adaptive Integration** adalah metode integrasi numerik yang secara otomatis menyesuaikan ukuran interval berdasarkan perilaku fungsi. Metode ini menggunakan Simpson's Rule sebagai basis dan membagi interval menjadi subinterval yang lebih kecil jika diperlukan untuk mencapai toleransi error yang ditentukan.

### Simpson's Rule:

Untuk interval  $[a, b]$ :

$$S = \frac{h}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

di mana  $c = \frac{a+b}{2}$  dan  $h = b - a$ .

### Kriteria Adaptif:

Interval dibagi dua jika:

$$|S_2 - S| > 15 \times \text{tol}$$

di mana  $S$  adalah hasil Simpson untuk keseluruhan interval dan  $S_2 = S_{\text{left}} + S_{\text{right}}$  adalah hasil dari dua subinterval.

### Algoritma:

Input: fungsi  $f(x)$ , batas  $a$  dan  $b$ , toleransi  $tol$ ,  $max\_depth$

1. Fungsi `simpson_rule(a, b)`:

$c = (a + b) / 2$

$h = b - a$

$\text{return } (h/6) * (f(a) + 4*f(c) + f(b))$

2. Fungsi `adaptive_aux(a, b, tol, S, fa, fb, fc, depth)`:

a. Hitung titik tengah:  $d = (a+c)/2$ ,  $e = (c+b)/2$

b. Hitung nilai fungsi:  $fd = f(d)$ ,  $fe = f(e)$

c.  $S_{\text{left}} = (c-a)/6 * (fa + 4*fd + fc)$

d.  $S_{\text{right}} = (b-c)/6 * (fc + 4*fe + fb)$

e.  $S_2 = S_{\text{left}} + S_{\text{right}}$

f. Jika  $depth \leq 0$  atau  $|S_2 - S| \leq 15*tol$ :

$\text{return } S_2 + (S_2 - S)/15$

g. Jika tidak:

$\text{return } \text{adaptive\_aux}(a, c, \dots) + \text{adaptive\_aux}(c, b, \dots)$

3.  $c = (a + b) / 2$

4. Hitung  $S = \text{simpson\_rule}(a, b)$

5.  $\text{return } \text{adaptive\_aux}(a, b, tol, S, f(a), f(b), f(c), max\_depth)$

Output: hasil integral

### Implementasi Python:

```
1 import numpy as np
2
3 def adaptive_simpson(f, a, b, tol=1e-10, max_depth=50):
4     """
5     Metode Adaptive Integration menggunakan Simpson's Rule
6     """
7     def simpson_rule(f, a, b):
8         """Simpson's rule untuk interval [a, b]"""
9         c = (a + b) / 2
10        h = b - a
11        return (h / 6) * (f(a) + 4 * f(c) + f(b))
12
13    def adaptive_aux(f, a, b, tol, S, fa, fb, fc, depth):
14        """Fungsi rekursif untuk adaptive integration"""
15        c = (a + b) / 2
16        d = (a + c) / 2
17        e = (c + b) / 2
18
19        fd = f(d)
20        fe = f(e)
21
22        Sleft = (c - a) / 6 * (fa + 4 * fd + fc)
23        Sright = (b - c) / 6 * (fc + 4 * fe + fb)
24        S2 = Sleft + Sright
25
```

```

26     if depth <= 0 or abs(S2 - S) <= 15 * tol:
27         return S2 + (S2 - S) / 15
28
29     return (adaptive_aux(f, a, c, tol/2, Sleft, fa, fc, fd,
30         depth-1) +
31             adaptive_aux(f, c, b, tol/2, Sright, fc, fb, fe,
32                 depth-1))
33
34     c = (a + b) / 2
35     fa = f(a)
36     fb = f(b)
37     fc = f(c)
38     S = simpson_rule(f, a, b)
39
40     return adaptive_aux(f, a, b, tol, S, fa, fb, fc, max_depth)
41
42 # Contoh penggunaan
43 result = adaptive_simpson(f, 0, np.pi/2)

```

## 1.6. Metode Gaussian Quadrature

**Gaussian Quadrature** adalah metode integrasi numerik yang menggunakan titik-titik sampling optimal (nodes) dan bobot (weights) yang telah ditentukan secara matematis untuk memberikan akurasi maksimal dengan jumlah evaluasi fungsi minimal.

### Rumus Umum:

Untuk interval  $[-1, 1]$ :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

di mana  $x_i$  adalah nodes (Gauss-Legendre) dan  $w_i$  adalah weights.

### Transformasi ke Interval $[a, b]$ :

Untuk interval  $[a, b]$ , gunakan transformasi:

$$x = \frac{1}{2}[(b - a)t + (a + b)]$$

sehingga:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}[(b-a)t + (a+b)]\right) dt \\ &\approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{1}{2}[(b-a)x_i + (a+b)]\right) \end{aligned}$$

### Nodes dan Weights untuk 5-point Gauss-Legendre:



$x_i$ (nodes)	$w_i$ (weights)
-0.9061798459	0.2369268851
-0.5384693101	0.4786286705
0.0	0.5688888889
0.5384693101	0.4786286705
0.9061798459	0.2369268851

### Algoritma:

Input: fungsi  $f(x)$ , batas  $a$  dan  $b$ , jumlah titik  $n$

1. Tentukan nodes dan weights untuk  $n$ -point:
  - Jika  $n=5$ , gunakan tabel di atas
  - Jika tidak, hitung dari polinomial Legendre
2.  $result = 0$
3. Untuk  $i = 1$  sampai  $n$ :
  - a.  $x = 0.5 * ((b - a) * nodes[i] + (a + b))$
  - b.  $result += weights[i] * f(x)$
4.  $result *= 0.5 * (b - a)$

Output:  $result$

### Implementasi Python:

```

1 import numpy as np
2
3 def gaussian_quadrature(f, a, b, n=5):
4     """
5     Metode Gaussian Quadrature
6     Menggunakan n-point Gauss-Legendre quadrature
7     """
8     if n == 5:
9         # 5-point Gauss-Legendre nodes dan weights
10        nodes = np.array([
11            -0.9061798459386640,
12            -0.5384693101056831,
13            0.0,
14            0.5384693101056831,
15            0.9061798459386640
16        ])
17
18        weights = np.array([
19            0.2369268850561891,
20            0.4786286704993665,
21            0.5688888888888889,
22            0.4786286704993665,
23            0.2369268850561891
24        ])
25    else:
26        # Untuk n lain, gunakan numpy (opsional)
27        nodes, weights = np.polynomial.legendre.leggauss(n)
28
29    # Transformasi dari [-1, 1] ke [a, b]
30    result = 0

```

```

31     for i in range(len(nodes)):
32         x = 0.5 * ((b - a) * nodes[i] + (a + b))
33         result += weights[i] * f(x)
34
35     result *= 0.5 * (b - a)
36     return result
37
38 # Contoh penggunaan
39 result = gaussian_quadrature(f, 0, np.pi/2, n=5)

```

## BAGIAN 2: Langkah Perhitungan

### 2.1. Perhitungan Integrasi Analitik (Nilai Eksak)

**Fungsi 1:**  $f(x) = \cos(x)$  pada interval  $[0, \frac{\pi}{2}]$

Langkah perhitungan:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{\pi/2} \cos(x) \, dx \\
 &= \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \\
 &= 1 - 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

**Nilai Eksak:**  $I_1 = 1.0$

**Fungsi 2:**  $f(x) = x^2$  pada interval  $[0, 1]$

Langkah perhitungan:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^1 x^2 \, dx \\
 &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\
 &= \frac{1}{3} - 0 \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

**Nilai Eksak:**  $I_2 = 0.333333\dots$  atau  $\frac{1}{3}$

### 2.2. Perhitungan Metode Trapezoidal Rule

**Fungsi 1:**  $f(x) = \cos(x)$  pada interval  $[0, \frac{\pi}{2}]$

Langkah perhitungan dengan program Python:

Pertama, impor library numpy agar mempermudah melakukan perhitungan

```
1 import numpy as np
```

Kemudian, mendeklarasi fungsi untuk melakukan perhitungan metode *Trapezoidal Rule*, fungsi ini menerima input :

- f: fungsi yang akan diintegrasikan, yaitu  $f(x) = \cos(x)$
- a: batas bawah, yaitu 0
- b: batas atas, yaitu  $\frac{\pi}{2}$
- n: jumlah subinterval, yaitu  $n = [1, 2, 4]$

```
1 def trapezoidal_rule(f, a, b, n):
```

Fungsi ini bekerja dengan tiga langkah utama: menentukan lebar trapezoid, menghasilkan grid titik evaluasi, dan mengukur tinggi fungsi di setiap titik - membentuk fondasi untuk perhitungan integral numerik yang akurat.

```
1     h = (b - a) / n
2     x = np.linspace(a, b, n + 1)
3     y = f(x)
```

Perhitungan akhir dilakukan dengan menerapkan rumus inti trapezoidal rule: mengalikan lebar trapezoid dengan penjumlahan nilai fungsi di semua titik, dimana nilai di ujung-ujung interval diberi bobot 0.5 dan nilai di titik-titik tengah diberi bobot penuh, kemudian hasilnya langsung dikembalikan sebagai solusi integral numerik

```
1     result = h * (0.5 * y[0] + np.sum(y[1:-1]) + 0.5 * y[-1])
2     return result
```

**Fungsi 2:**  $f(x) = x^2$  pada interval  $[0, 1]$

Langkah perhitungan dengan program Python:

Implementasi untuk fungsi kedua sebetulnya hampir mirip seperti fungsi pertama, perbedaannya terletak di variabel input pada fungsinya. Pertama, import (library) numpy

```
1 import numpy as np
```

Kemudian, mendeklarasi fungsi untuk melakukan perhitungan metode *Trapezoidal Rule*, fungsi ini menerima input :

- f: fungsi yang akan diintegrasikan, yaitu  $f(x) = x^2$
- a: batas bawah, yaitu 0
- b: batas atas, yaitu 1
- n: jumlah subinterval, yaitu  $n = [1, 2, 4]$

Perhitungan akhir dilakukan dengan menerapkan rumus inti trapezoidal rule: mengalikan lebar trapezoid dengan penjumlahan nilai fungsi di semua titik, dimana nilai di ujung-ujung interval

diberi bobot 0.5 dan nilai di titik-titik tengah diberi bobot penuh, kemudian hasilnya langsung dikembalikan sebagai solusi integral numerik

```
1 result = h * (0.5 * y[0] + np.sum(y[1:-1]) + 0.5 * y[-1])
2 return result
```

### 2.3. Perhitungan Metode Richardson Extrapolation

[Isi langkah-langkah perhitungan menggunakan metode Richardson Extrapolation]

### 2.4. Perhitungan Metode Romberg Integration

**Fungsi 1:**  $f(x) = \cos(x)$  pada interval  $[0, \frac{\pi}{2}]$

**Fungsi 2:**  $f(x) = x^2$  pada interval  $[0, 1]$

[Isi langkah-langkah perhitungan menggunakan metode Romberg Integration]

### 2.5. Perhitungan Metode Adaptive Integration

[Isi langkah-langkah perhitungan menggunakan metode Adaptive Integration]

### 2.6. Perhitungan Metode Gaussian Quadrature

[Isi langkah-langkah perhitungan menggunakan metode Gaussian Quadrature]

## BAGIAN 3: Hasil dan Perbandingan Error

### 3.1. Hasil Perhitungan

[Isi tabel hasil perhitungan dari semua metode]

### 3.2. Perbandingan Error

[Isi analisis perbandingan error dari semua metode]

### 3.3. Kesimpulan

[Isi kesimpulan dari hasil dan perbandingan error]