

Solución: Problema de enfriamiento de Newton

Problema

Justo antes del mediodía se encuentra el cuerpo de una víctima de un presunto homicidio dentro de un cuarto que se conserva a una temperatura constante de 70°F . A las 12 del día la temperatura del cuerpo es de 80°F y a la 1 P.M. de 75°F . Considere que la temperatura del cuerpo al morir era de 98.6°F y que éste se ha enfriado de acuerdo con la ley de Newton. ¿A qué hora murió la víctima?

Solución

1. Ley de enfriamiento de Newton

La ley establece:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

donde:

- $T(t)$ = temperatura del cuerpo en el instante t
- T_a = temperatura ambiente = 70°F
- k = constante de proporcionalidad ($k < 0$ porque se enfría)

2. Solución de la ecuación diferencial

La solución general es:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{kt}$$

donde T_0 es la temperatura en $t = 0$.

3. Elección del eje de tiempo

Tomamos $t = 0$ como el mediodía (momento en que se encuentra el cuerpo).

Datos:

- $T_a = 70$
- $T(0) = 80$
- $T(1) = 75$ (1 P.M., $t = 1$ hora)

4. Cálculo de k

De $T(0) = 80$:

$$80 = 70 + (80 - 70)e^{k \cdot 0} \quad (\text{solo verifica})$$

De $T(1) = 75$:

$$75 = 70 + (80 - 70)e^{k \cdot 1}$$

$$5 = 10e^k$$

$$e^k = 0.5$$

$$k = \ln(0.5) = -\ln 2$$

5. Modelo completo desde $t = 0$

$$T(t) = 70 + 10e^{-t \ln 2} = 70 + 10 \cdot 2^{-t}$$

6. Encontrar el tiempo transcurrido desde la muerte

Al morir: $T = 98.6$, $T_a = 70$. Sea t_m = horas transcurridas desde la muerte hasta mediodía.

Tomando $t = 0$ como el momento de la muerte:

$$T(t) = 70 + (98.6 - 70)e^{kt}$$

$$T(t) = 70 + 28.6e^{kt}$$

Sabemos que al mediodía ($t = t_m$) $T = 80$:

$$80 = 70 + 28.6e^{kt_m}$$

$$10 = 28.6e^{kt_m}$$

$$e^{kt_m} = \frac{10}{28.6}$$

$$kt_m = \ln\left(\frac{10}{28.6}\right)$$

$$t_m = \frac{\ln(10/28.6)}{k} = \frac{\ln(10/28.6)}{-\ln 2}$$

7. Cálculo numérico

$$\frac{10}{28.6} \approx 0.34965$$

$$\ln(0.34965) \approx -1.0508$$

$$-\ln 2 \approx -0.693147$$

$$t_m \approx \frac{-1.0508}{-0.693147} \approx 1.516 \text{ horas}$$

Es decir, 1.516 horas = 1 hora 31 minutos aproximadamente antes del mediodía.

8. Hora de la muerte

Mediodía menos 1 h 31 min → **10:29 A.M.**

La víctima murió aproximadamente a las 10:29 A.M.
--