Exercice 1 : $\boxed{10}$

1) Un automate fini déterministe est un quintuplet $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ avec :
- → Q : un ensemble fini d'états
- → Σ : un alphabet
- → $\delta : Q \times \Sigma \to Q$: une fonction de transition.
- → $s \in Q$: l'état initial.
- → $F \subset Q$: l'ensemble des états acceptants.

2) Une machine de Turing est un septuplet $\mathcal{M} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, s, F, B)$ avec :
- → Q : un ensemble fini d'états
- → Γ : un alphabet du ruban
- → Σ : l'alphabet terminal
- → $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{N, G, D\}$ une fonction de transition
- → $s \in Q$: l'état initial
- → $F \subset Q$: l'ensemble des états acceptants
- → $B \in \Gamma \setminus \Sigma$: le caractère blanc du ruban.

3) Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ un automate fini déterministe.

Posons $\mathcal{M} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta', s, F, B)$ avec :
- → $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$
- → $\delta' : (q, \alpha) \mapsto (\delta(q, \alpha), B, D)$

Toute exécution de $\mathcal{M}$ sur un mot d'entrée ω est équivalente à l'exécution de $\mathcal{A}$. En effet, considérons une configuration (q, ω) de $\mathcal{A}$, avec $\omega = \alpha\omega'$:

$$(q, \omega) \vdash_{\mathcal{A}} (\delta(q, \alpha), \omega')$$

$$(q, \varepsilon, \omega) \vdash_{\mathcal{M}} (\delta'(q, \alpha), \varepsilon, \omega')$$

et réciproquement.

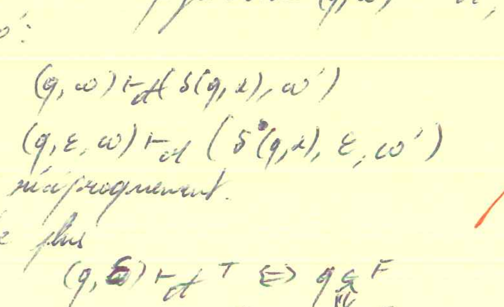
De plus

$$(q, \varepsilon) \vdash_{\mathcal{A}} \top \Leftrightarrow q \in F$$

$$(q, \varepsilon, \varepsilon) \vdash_{\mathcal{M}} \top \Leftrightarrow q \in F$$

Donc $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

4) a^* : a^+ : b^* : aa : $(aa)^*$: $a^+b^*(aa)^*$



		a	b
$A = \{0\}$	A	B	M
$B = \{1\}$	B	C	D
$M = \emptyset$	M	M	M
$C = \{2, 4\}$	C	E	D
$D = \{3\}$	D	F	D
$E = \{3, 5\}$	E	C	D
$F = \{4\}$	F	G	M
$G = \{5\}$	G	F	M

5)

	a	b	B
A	B, B, D	$\perp$	$\perp$
B	C, B, D	D, B, D	$\top$
C	E, B, D	D, B, D	$\top$
D	F, B, D	D, B, D	$\top$
E	C, B, D	D, B, D	$\top$
F	G, B, D	$\perp$	$\perp$
G	F, B, D	$\perp$	$\top$

6) $(A, \varepsilon, aabaaaa) \vdash (B, \varepsilon, abaaaa) \vdash (C, \varepsilon, baaaa) \vdash (D, \varepsilon, aaaa) \vdash (F, \varepsilon, aaa) \vdash (G, \varepsilon, aa) \vdash (F, \varepsilon, a) \vdash (G, \varepsilon, B) \vdash \top$

Exercice 2 : $\boxed{6}$

Soit ω un mot non-vide contenant autant de a que de b, et commençant et se terminant par le même caractère. Supposons, quitte à inverser les rôles de a et de b, que ce caractère est a.

Notons u_k la différence entre le nombre de a et le nombre de b dans le préfixe de ω de longueur k.

On a : $u_0 = 0$ (ε ne contient aucun a et aucun b)

$u_{|\omega|} = 0$ (ω contient autant de a que de b)

$u_1 = 1$: (le premier caractère de ω est a)

$u_{|\omega|-1} = u_{|\omega|} - 1 = -1$ (le dernier caractère de ω est a)

Comme $u_{k+1} = u_k \pm 1$, il existe $1 < i < |\omega| - 1$ tel que $u_i = 0$.

Notons ω_1 le préfixe de ω de longueur i. Par construction, ω_1 contient autant de a que de b. Notons $\omega_2 \in (a|b)^*$ le mot tel que $\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega$. ω_2 contient autant de a que de b, puisque ω et ω_1 ~~ont~~ cette propriété.

Donc $\omega = \omega_1 \cdot \omega_2$ avec ω_1 et ω_2 deux mots non-vides contenant autant de a que de b.

Ainsi, la grammaire ci-dessous engendre le langage des mots sur $\{a, b\}$ contenant autant de a que de b :

$$T \to aTb \mid bTa \mid TT \mid \varepsilon$$

$T \vdash aTb \vdash aTTb \vdash abTaTb \vdash abaTb \vdash abaaTbb \vdash abaabb$

Exercice 3 : $\boxed{4}$

Notons $L = \{\omega\omega \mid \omega \in \{a, b\}^*\}$.

Supposons L algébrique, et notons N l'entier du lemme de pompage des langages algébriques.

Notons $\omega = a^N b^N a^N b^N \in L$.

D'après le lemme, il existe u, x, y, z et v de Σ^* tels que $\omega = uxyzv$, $|xyz| \leq N$, $|xz| \geq 0$, et $\forall i \in \mathbb{N}$, $ux^iyz^iv \in L$.

Comme $|xyz| \leq N$, xyz est un sous-mot soit du premier $a^N b^N$, soit de $b^N a^N$, soit du deuxième $a^N b^N$.

Dans le premier cas, $ux^2yz^2v = a^{N+k} b^l a^i b^{N+j} a^N b^N$ qui ne peut être de la forme $\omega\omega$ que pour $k = l = i = j = 0$, ce qui est impossible car $|xz| > 0$. Le troisième cas est similaire.

Dans le deuxième cas, $ux^2yz^2v = a^N b^{N+k} a^l b^i a^{N+j} b^N$, qui amène à la même contradiction.

Donc L n'est pas algébrique.