Algorithmique 2, TD n° 4

Devan SOHIER

Exercice 1 : Elément majoritaire dans un tableau

On s'intéresse ici à des tableaux pouvant contenir plusieurs fois le même élément. On dit qu'un élément est majoritaire dans `T` s'il apparaît strictement plus de $n/2$ fois dans le tableau. Par commodité, on supposera ici que n est une puissance de 2.

1. Ecrire un algorithme qui calcule le nombre d'occurrences d'un élément donné dans le tableau.
2. En déduire un algorithme pour tester si le tableau possède un élément majoritaire.
3. Donner un autre algorithme, récursif, basé sur le découpage de `T` en deux tableaux de même taille. Prouvez-le.
4. Calculer sa complexité.

Exercice 2 : Tours de Hanoï

Les tours de Hanoï sont un jeu consistant en trois piquets et n disques de tailles différentes. Au début du jeu, tous les disques sont rangés sur le premier piquet, par ordre de taille décroissante (en partant du bas). Le but du jeu est de les déplacer sur le troisième piquet, en respectant la règle qu'un disque ne peut être placé que sur un piquet vide ou sur un disque de taille supérieure. Pour représenter le déplacement d'un disque du piquet i au piquet j, nous demanderons à l'algorithme d'écrire *"déplacer un disque du piquet i au piquet j"*

1. Résoudre le cas $n = 1$.
2. Sachant comment déplacer $n - 1$ disques du piquet i au piquet j, comment en déplacer n ?
3. Ecrire un algorithme récursif résolvant le problème des tours de HanoÏ.

4. Calculer sa complexité.
5. Dérécursiver cet algorithme.

Exercice 3 : Méthode de Straßen

Ecrire une méthode basée sur la méthode *diviser pour régner* pour la multiplication de matrice, en vous appuyant sur la multiplication de matrice par blocs.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

On pose $M_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$, $M_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$, $M_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$, $M_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$, $M_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$, $M_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12})$ et $M_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$. On note $C = AB$.

1. Vérifier que $C_{11} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$, $C_{12} = M_3 + M_5$, $C_{21} = M_2 + M_4$ et $C_{22} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6$.
2. En déduire un algorithme (on appelle cet algorithme l'algorithme de Straßen).
3. Calculer la complexité de cet algorithme.