Petit Memento de logique

11 novembre 2015

La logique des propositions manipule des propositions. Ces propositions prennent des valeurs dans les booléens c'est-à-dire l'ensemble VRAI,FAUX.
On peut construire à partir de 2 énoncés, un énoncé plus compliqué grâce à des conneteurs logiques.

Les connecteurs logiques

La négation($\neg$)

A	$\neg B$
VRAI	FAUX
FAUX	VRAI

La conjonction ($\wedge$)

A	B	$A \wedge B$
VRAI	FAUX	FAUX
VRAI	VRAI	VRAI
FAUX	FAUX	FAUX
FAUX	VRAI	FAUX

La disjonction($\vee$)

A	B	$A \vee B$
VRAI	VRAi	VRAI
VRAI	FAUX	VRAI
FAUX	VRAI	VRAI
FAUX	FAUX	FAUX

L'implication($A \Rightarrow B$)

A	B	$A \Rightarrow B$
VRAI	VRAI	VRAI
VRAI	FAUX	FAUX
FAUX	VRAI	VRAI
FAUX	FAUX	VRAI

L'équivalence($A \Leftrightarrow B$)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
VRAI	VRAI	VRAI
VRAI	FAUX	FAUX
FAUX	VRAI	FAUX
FAUX	FAUX	VRAI

Les lois de De Morgan

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Variables et quantificateurs

Dans une proposition mathématique, on peut utiliser une variable qui n'a pas de valeur définie. Si la variable est x on peut noté la proposition $A(x)$. On peut lier les variables libres des propositions grâce à des quantificateurs. Il existe deux quantificateurs qui permettent d'utiliser des variables dans les expressions mathématiques :

1. "Quel que soit" : $\forall x A(x)$
   signifie que la propriété $A(x)$ est vraie pour toutes les valeurs de x

2. "Il existe" : $\exists x A(x)$
   signifie qu'il existe au moins un x qui satisfait la proposition $A(x)$

Equivalences :

$\neg(\forall x A(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
$\neg(\exists x A(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$