

Problématique: planification de projets ou planing de tâches. On a un ensemble de tâches élémentaires - on voudrait savoir comment ordonnancer, planifier ces tâches pour que le projet soit terminé le plus tôt possible (fin de l'exécution de la dernière tâche).

Mais il existe des contraintes sur les tâches. Exemple de contraintes

- **Contrainte de précédence**
- Contrainte de localisation temporelle
- Contrainte de disjonction
- Contrainte de ressource, ...

En entrée : un tableau de tâches élémentaires avec pour chacune

- un numéro et/ou un intitulé
- une durée prévue de réalisation
- les contraintes de précédence

En sortie - résultats attendus:

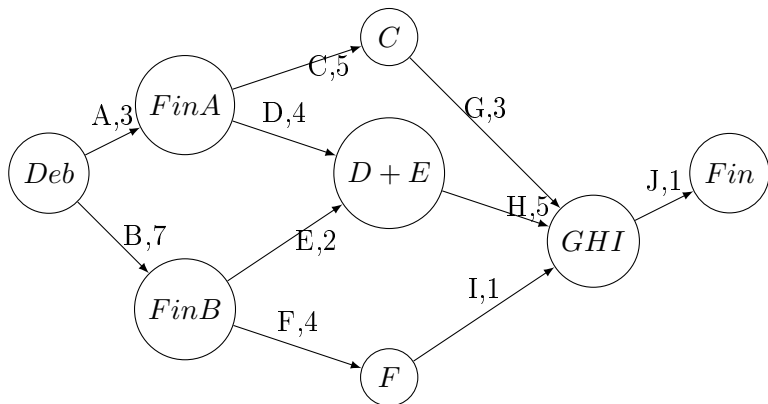
- la durée minimale d'exécution du projet
- le planing d'exécution des tâches
- les tâches critiques - le(s) chemin(s) critique(s)
- la marge sur les tâches non critiques

Méthode la plus connue pour résoudre les problèmes d'ordo avec contraintes de précédence. S'appuie sur la construction du graphe PERT (Program Evaluation Research Task).

- Chaque tâche est représentée par **un et un seul arc**
- Chaque sommet correspond à une étape dans la réalisation du projet. Obligatoirement deux sommets *Début du projet* et *Fin du projet*. Et des sommets intermédiaires correspondant à la fin d'une (ou de plusieurs) tâches.
- Besoin parfois de rajouter des arcs supplémentaires correspondant à des tâches fictives pour respecter les contraintes.

Un premier exemple

Tache	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Duree (j)	3	7	5	4	2	4	3	5	1	2
Prec	-	-	A	A	B	B	C	D+E	F	G+H+I



Il faut calculer sur chaque sommet 2 dates:

- La date au plus tôt
- La date au plus tard

Les dates au plus tôt sont calculées de gauche à droite. Par convention, la date de début de projet est 0 (et pas le 13/04/15). Puis, de proche en proche:

$$d_i = \text{Max}_{j \in \Gamma_i^-} (d_j + t_{ji})$$

La date au plus tôt du sommet Fin de projet correspond à la **durée minimale d'exécution du projet**.

Les dates au plus tard sont calculées de droite à gauche. La date au plus tard de Fin de projet est la durée minimale d'exécution du projet. Puis, de proche en proche:

$$T_i = \text{Min}_{j \in \Gamma_i^+} (T_j - t_{ij})$$

Il faut ensuite en déduire les dates où l'on peut planifier le début de chaque tâche: **Calendrier des tâches**.

Chaque tâche a correspond à un seul arc sur le graphe Pert : arc (i, j) .

- Date au plus tôt: $d_a = d_i$
- Date au plus tard: $T_a = T_j - t_a$

La différence entre date au plus tard et date au plus tôt constitue **la marge de la tâche**: c'est le retard que l'on peut prendre sur l'exécution d'une tâche sans remettre en question la durée minimale d'exécution du projet.

Les tâches à marge nulle sont dites **critiques**. Ce sont les tâches qui ont mêmes dates au plus tôt et au plus tard et sur lesquelles tout retard se répercute intégralement sur la durée totale du projet.

Un **chemin critique** est un enchainement de tâches critiques depuis le Début du projet jusqu'à sa Fin. Un chemin critique correspond au chemin le plus long depuis le sommet Début jusqu'au sommet Fin. Il justifie la durée minimale du projet. Comme il peut y avoir un seul ou plusieurs plus court ou plus long chemin, il en va de même du chemin critique.

Un deuxième exemple - les tâches fictives

Tache	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Duree (j)	3	7	5	4	2	4	3	5	1	2
Prec	-	-	A+B	A+B	B	B	C	D+E+F	F	G+H+I

Un troisième exemple

Tâc	A	B	C	D	E	F	G	H	K	I	J
Dur	3	7	5	4	2	4	3	5	4	1	2
Pre	-	-	A+B	A+B	B	B	C	D+E+F	D+E	F	G+H+I