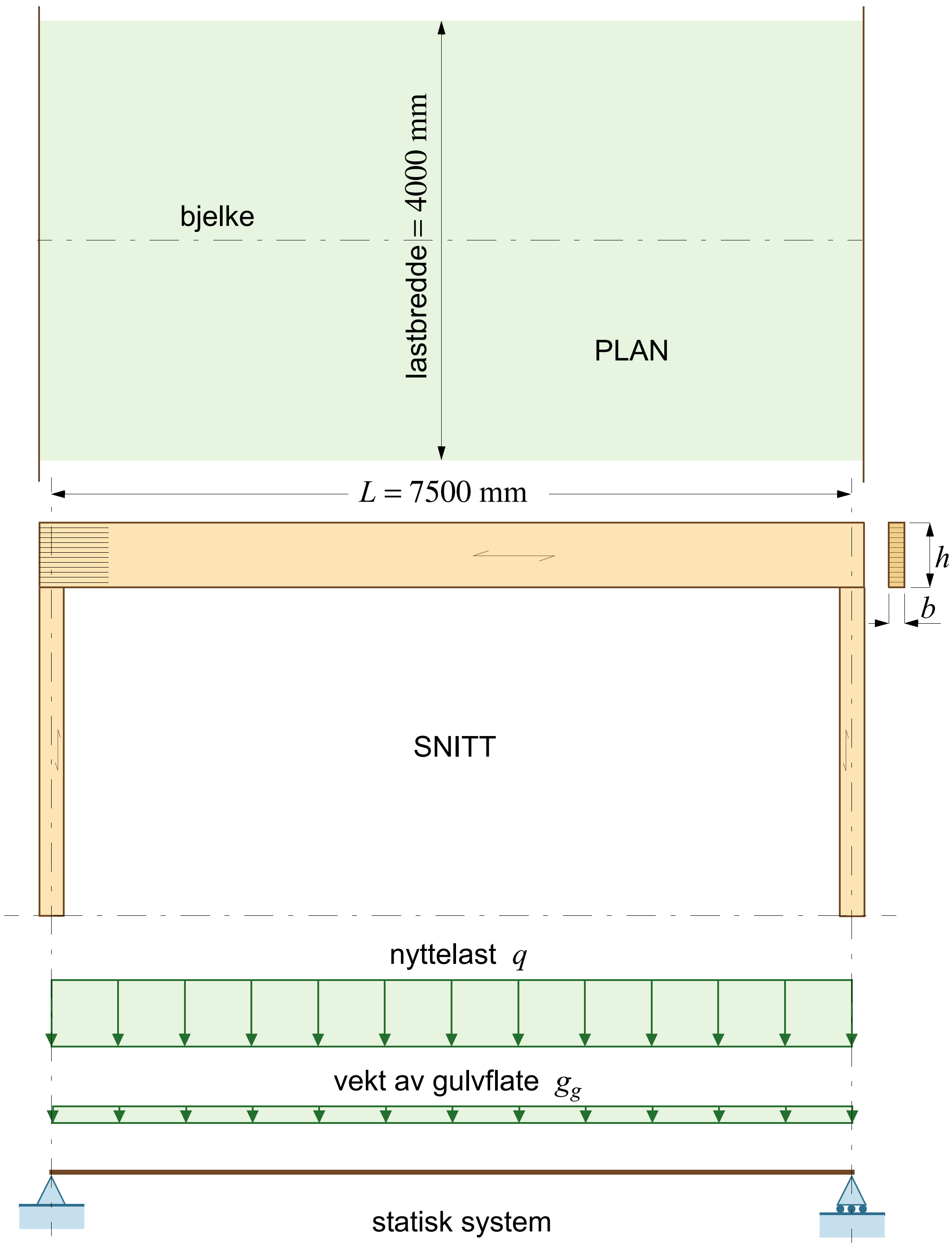


Figur 1.1 Fritt opplagt hovedbjelke for bæring av gulv i bolig

Ved valg av bjelketverrsnitt må en ta utgangspunkt i hva som produseres. Lagerførte bjelkebredder er 90, 115 og 140 mm, og bjelkehøyden må være et helt multiplum av lamelltykkelsen som er 45 mm. Velger $b = 140$ mm.

Tabell 3-1 i Limtreboka [1] foreslår en bjelkehøyde $h \approx L/14$ for denne type bjelke. Det skulle tilsi $h = 540$ mm. Vi velger å gå opp en lamell og antar $h = 585$ mm. Dette siden bjelken er en viktig del av en gulvkonstruksjon og sannsynligvis vil trenge ekstra stivhet.

EKSEMPEL 1

Fritt opplagt bjelke

1.1 Oppgaven

Figur 1.1 viser en hovedbjelke av limtre for bæring av gulv i boligbygg. Bjelken er opplagt på søyler, og dens (teoretiske) spennvidde er 7500 mm.

Oppgaven er å dimensjonere den viste bjelken.

1.2 Forutsetninger og antakelser

Limtre GL30c / $\rho_m = 430$ kg/m^3

Klimaklasse : 1

Lastvarighetsklasse for nyttelasten: Halvårslast

Partialfaktor for limtre: $\gamma_M = 1{,}15$

Antar bjelketverrsnitt, se figur 1.1: $b = 140$ mm og $h = 585$ mm

Lastbredde: 4000 mm

1.3 Laster

Karakteristiske laster på en bjelke:

Egenlast bjelke: $g_{b,k} = 0{,}14 \cdot 0{,}585 \cdot 430 \cdot 9{,}82 = 346$ N/m $= 0{,}35$ kN/m

Egenlast gulv (lydisolerende bjelkelag - Byggforskserien 471.031):

1,0 kN/m^2 $\Rightarrow$ $g_{g,k} = 1{,}0 \cdot 4{,}0 = 4{,}0$ kN/m

Permanent last: $g_k = g_{b,k} + g_{g,k} = 4{,}35$ kN/m

Variabel nyttelast: NS-EN 1991-1-1:

Kategori A (tabell NA.6.3.1.2) boligareal: 2,0 kN/m^2

Tillegg for bevegelige skillevegger (6.3.1.2(8)): 0,5 kN/m^2

Variabel last: $q_k = (2{,}0 + 0{,}5) \cdot 4{,}0 = 10{,}0$ kN/m

“Konstruksjonen” er i pålitelighetsklasse 2; derfor ingen reduksjon av lastfaktoren for den variable lasten.

Kombinasjonsfaktorene $\psi_{1,1}$ og $\psi_{2,1}$ er tatt fra tabell 2 for kategoriene boliger og kontorer.

Høydefaktoren (se ligning 3.2 i **EK5-1**):

$$k_h = \left(\frac{600}{585}\right)^{0,1} = 1,0$$

Her starter vi med den vanlige statiske modellen, nemlig en bjelke opplagt på “kniv”-lager i oppleggsflatenes midtpunkter. Dette er en konservativ modell, spesielt med hensyn til dimensjonerende skjærkraft som jo kan reduseres noe ved opplegg.

Tankegangen her er at holder det for en konservativ modell, så er det ingen grunn til å benytte seg av mulige reduksjoner. Slike vurderes bare om nødvendig.

For en fritt opplagt bjelke med jevnt fordelt last p_d har vi at:

$$M_{maks} = \frac{p_d L^2}{8} = \frac{20,2 \cdot 7,5^2}{8} = 142,0 \text{ kNm}, \quad \text{og}$$

$$V_{maks} = \frac{p_d L}{2} = \frac{20,2 \cdot 7,5}{2} = 75,8 \text{ kN}$$

Lastkombinasjoner - bruddgrensetilstand

Med såpass liten andel permanent last er det rimelig klart at det er kombinasjonen STR-2 (se tabell 3) som kommer til anvendelse her, dvs.

$$p_d = 1{,}2g_k + 1{,}5q_k = 1{,}2 \cdot 4{,}35 + 1{,}5 \cdot 10{,}0 = 20{,}2 \text{ kN/m} \tag{1-1}$$

Det anses overflødig å vurdere lastkombinasjonen STR-1.

Lastkombinasjoner - bruksgrensetilstand

Av de tre lastkombinasjonene som er definert for bruksgrensetilstanden er det her mest naturlig å basere kontrollen på *ofte forekommende kombinasjon*. Dette eksemplet vil imidlertid bli benyttet til en grundig behandling av bruksgrensetilstanden, og vi vil derfor se på alle tre lastkombinasjonene.

Karakteristisk kombinasjon

$$p_{kar} = g_k + q_k = 4{,}35 + 10{,}0 = 14{,}4 \text{ kN/m} \tag{1-2}$$

Ofte forekommende kombinasjon

$$p_{ofte} = g_k + \psi_{1,1}q_k = 4{,}35 + 0{,}5 \cdot 10{,}0 = 9{,}4 \text{ kN/m} \tag{1-3}$$

Tilnærmet permanent kombinasjon

$$p_{perm} = g_k + \psi_{2,1}q_k = 4{,}35 + 0{,}3 \cdot 10{,}0 = 7{,}4 \text{ kN/m} \tag{1-4}$$

1.4 Bruddgrensekontroll

Her må en kontrollere *bøyespenningene*, *skjærspenningene* og *flatetrykket* ved oppleggene. For kombinasjonen klimaklasse 1 og halvårslast gir tabell 7:

$$k_{mod} = 0{,}8$$

Dimensjonerende fastheter, basert på de karakteristiske fasthetene i tabell 6, er:

$$f_{m,d} = 30\frac{1{,}0 \cdot 0{,}8}{1{,}15} = 21 \text{ N/mm}^2 \qquad (k_h = 1{,}0)$$

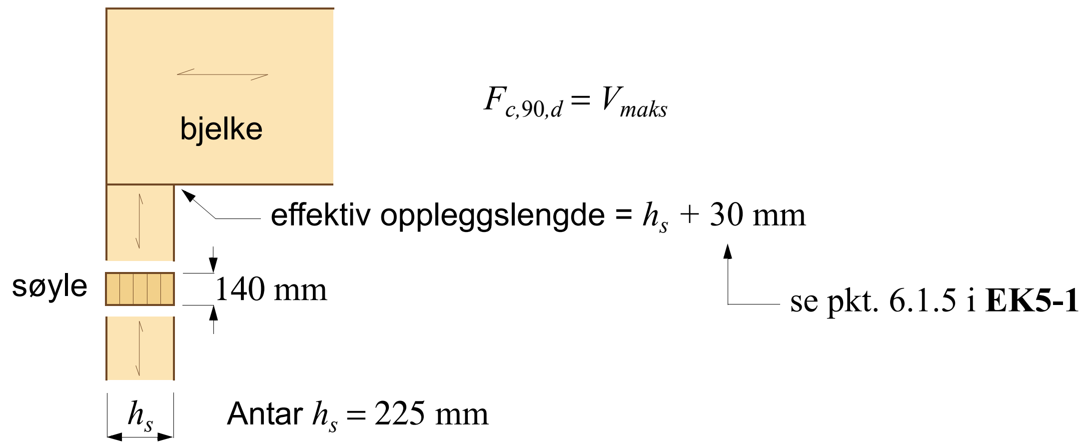
$$f_{c,90,d} = 2{,}5\frac{0{,}8}{1{,}15} = 1{,}7 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{v,d} = 3{,}5\frac{0{,}8}{1{,}15} = 2{,}4 \text{ N/mm}^2$$

Dimensjonerende spenninger:

$$\sigma_{m,d} = \frac{M_{d,maks}}{W} = \frac{6 \cdot M_{d,maks}}{bh^2} = \frac{6 \cdot 142 \cdot 10^6}{140 \cdot 585^2} = 18 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_d = \frac{3 \cdot V_{d,maks}}{2 \cdot b_{ef} \cdot h} = \frac{3 \cdot V_{d,maks}}{2 \cdot (k_{cr} \cdot b)h} = \frac{3 \cdot 75{,}8 \cdot 10^3}{2 \cdot 0{,}8 \cdot 140 \cdot 585} = 1{,}7 \text{ N/mm}^2$$



Hva om bjelken *ikke* er sikret mot vipping mellom oppleggene (som fortsatt antas å være gaflet)?

Alle nummer nedenfor refererer til **EK5-1**.

Kontrollen er fortsatt ligning (6.33), men nå kan vi ikke gå ut fra at k_{crit} er lik 1,0. For å bestemme k_{crit} trenger vi den relative slankhet for bøyning, definert ved ligning (6.30), dvs.

$$\lambda_{rel,\,m} = \sqrt{\frac{f_{m,\,k}}{\sigma_{m,\,crit}}}$$ hvor, i henhold til ligning (6.32),

$$\sigma_{m,\,crit} = \frac{0{,}78 b^2}{h L_{ef}} E_{0{,}05}$$ for rektangulære tverrsnitt av bartre.

For en jevnt fordelt last på bjelkens overside er, i henhold til tabell 6.1,

$L_{ef} = 0{,}9l + 2h = 0{,}9 \cdot 7500 + 2 \cdot 585 = 7920$ mm, som gir

$$\sigma_{m,\,crit} = \frac{0{,}78 \cdot 140^2}{585 \cdot 7920} \cdot 10800 = 36 \text{ N/mm}^2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{rel,\,m} = \sqrt{\frac{f_{m,\,k}}{\sigma_{m,\,crit}}} = \sqrt{\frac{30}{36}} = 0{,}91$$

Ligning (6.34) gir:

$$k_{crit} = 1{,}56 - 0{,}75 \cdot 0{,}91 = 0{,}88$$

og vi ser at bjelken fortsatt tilfredsstiller bøyningskontrollen i ligning (6.33); $k_{crit} \cdot f_{m,d} > \sigma_{m,d}$.

For å kunne beregne flatetrykket ved oppleggene må vi gjøre en antakelse om søyledimensjonen. Vi antar at søylen har samme bredde som bjelken (140 mm) og en høyde lik 225 mm. Det gir:

$$\sigma_{c,\,90,\,d} = \frac{F_{c,\,90,\,d}}{A_{ef}} = \frac{0{,}5 \cdot 20{,}2 \cdot 7500}{140 \cdot (225 + 30)} = 2{,}1 \text{ N/mm}^2$$

Bøyekontroll (**EK5-1** pkt. 6.3.3)

Vi har bøyning om bare en akse, og vi forutsetter at bjelkene er sikret (gaffellagret) mot rotasjon om egen akse ved oppleggene. Videre er det rimelig å anta at gulvflaten vil forhindre *vipping*, dvs. $k_{crit} = 1{,}0$. Vi har bøyning kun om sterk akse, og **EK5-1** krever da at ligning (6.33) skal være tilfredsstilt, dvs.

$$\frac{\sigma_{m,\,d}}{k_{crit} \cdot f_{m,\,d}} = \frac{18}{1{,}0 \cdot 21} = 0{,}86 < 1{,}0 \qquad \textbf{OK}$$

Skjærkontroll (**EK5-1**, pkt. 6.1.7)

$$\frac{\tau_d}{f_{v,\,d}} = \frac{1{,}7}{2{,}4} = 0{,}71 < 1{,}0 \qquad \textbf{OK}$$

Trykk normalt fibrene (**EK5-1**, pkt. 6.1.5)

$$\frac{\sigma_{c,\,90,\,d}}{k_{c,\,90} \cdot f_{c,\,90,\,d}} = \frac{2{,}1}{1{,}75 \cdot 1{,}7} = 0{,}71 < 1{,}0 \qquad \textbf{OK}$$

For limtre settes faktoren $k_{c,90}$ lik 1,0 eller 1,75 - for vårt tilfelle kan den settes lik 1,75 (se pkt. 6.1.5 i **EK5-1**).

Alle bruddgrensekontrollene er tilfredsstilt med god margin, og et raskt overslag viser at disse kontrollene også vil være tilfredsstilt for en bjelke med en lamell mindre, dvs. med en høye lik 540 mm. Vi avventer imidlertid bruksgrensekontrollene før vi eventuelt slår fast at bjelkehøyden kan reduseres.

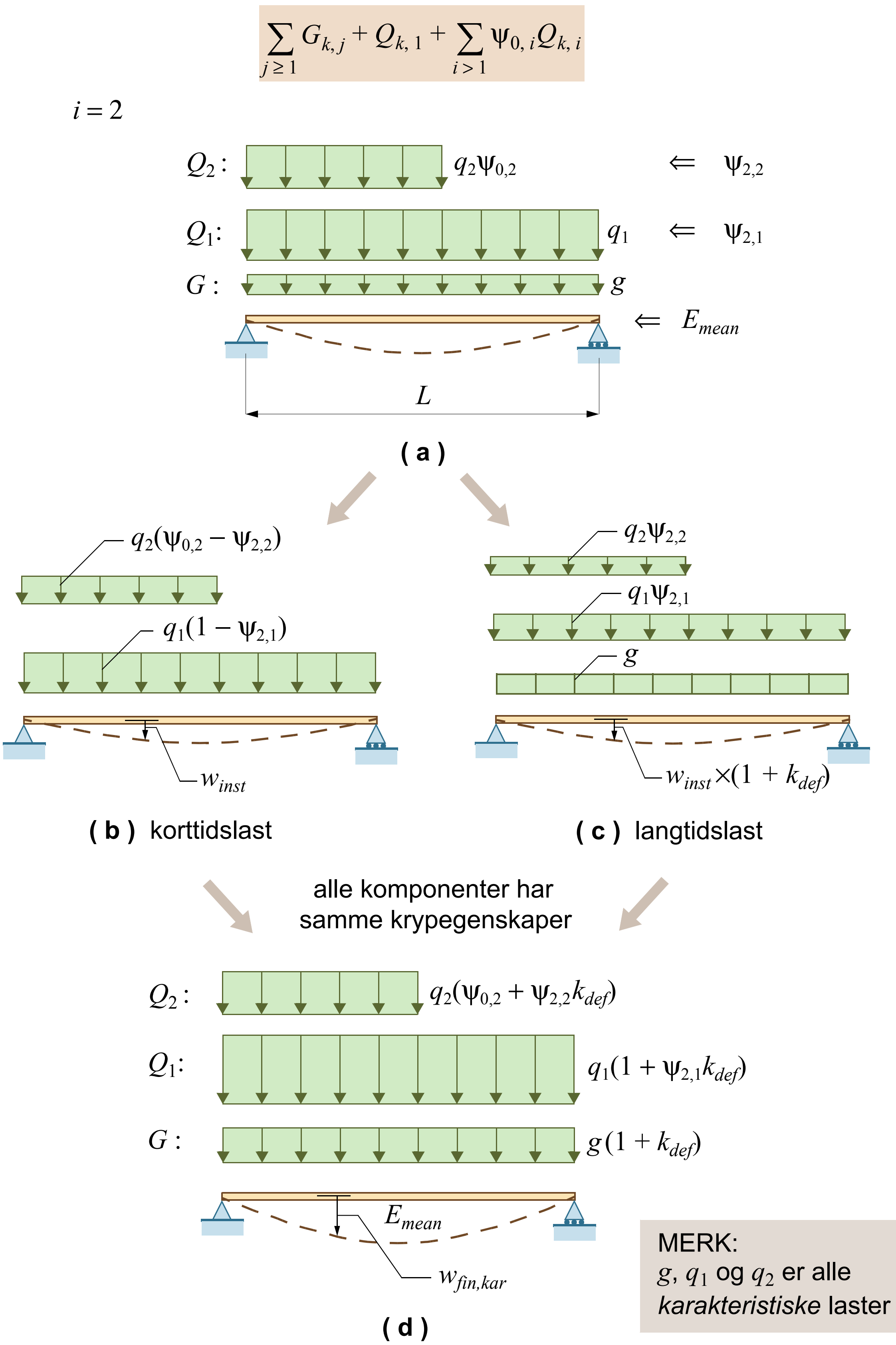
1.5 Bruksgrensekontroll

Nedbøyninger

Deformasjoner i trekonstruksjoner er et litt vanskelig tema, og **EK5-1** er ikke helt enkel å tolke. Vi tar derfor dette litt grundig første gangen.

Deformasjonen består av to deler, en øyeblikkelig ("instantaneous") og reverserbar *korttidsdel* (w_{inst}) og en ikke reverserbar *langtidsdel* (w_{kryp}) som skyldes krypeffekter. **EK5-1** bestemmer kryp-deformasjonen, forårsaket av en permanent last, ved å multiplisere den øyeblikkelige deformasjonen som lasten forårsaker med deformasjonsfaktoren k_{def}, dvs.

$$w_{kryp} = k_{def} \cdot w_{inst}$$



Figur 1.2 Forskyvningsberegning – **karakteristisk lastkombinasjon**; ren trekonstruksjon. Kopi av figur i ref.[3]

Nøkkelen til å forstå bestemmelsene i **EK5-1** er å dele alle variable laster i en korttidsdel og en langtidsdel. Detaljene i dette er vist i [3], og for konstruksjoner hvor alle komponenter har samme krypegenskaper kan den endelige forskyvning, for den *karakteristiske lastkombinasjonen*, beregnes direkte som vist i figur 1.2. Forutsatt at konstruksjonen oppfører seg etter lineær (1. ordens) teori, er det likegyldig om en multipliserer langtidslasten eller forskyvningen den forårsaker med en gitt faktor (lik $1-k_{def}$). Ved å multiplisere lasten kan vi beregne den endelige forskyvningen direkte for en lastkombinasjon, som vist i figur 1.2d (husk at alle lastfaktorer γ nå er 1,0). Midlere stivhet (E_{mean}) benyttes.

For de samme antakelser gir **EK5-1** den samme endelige forskyvning som prosedyren i figur 1.2 gir. Dette er imidlertid den eneste lastkombinasjonen **EK5-1** behandler. De andre to lastkombinasjonene som NS-EN-1990 definerer, og som antakelig kommer til anvendelse oftere enn den *karakteristiske* kombinasjonen, er ikke omtalt i **EK5-1**. Samme resonnement som benyttet i figur 1.2 gir løsningene vist i figurene 1.3 og 1.4, for henholdsvis *ofte forekommende* og *tilnærmet permanent* lastkombinasjon.

Tilbake til eksemplet vårt, hvor vi bare har en variabel last (Q_1), vil vi beregne endelig nedbøyning for alle de tre lastkombinasjonene.

For klimaklasse 1 er $k_{def} = 0{,}6$. Videre er $\psi_{1,1} = 0{,}5$ og $\psi_{2,1} = 0{,}3$.

Karakteristisk lastkombinasjon

$$p_{fin,kar} = q_k(1+\psi_{2,1}k_{def}) + g_k(1+k_{def}) = 10(1 + 0{,}3\cdot 0{,}6) + 4{,}35(1 + 0{,}6) = 18{,}8 \text{ kN/m}$$

$$w_{fin,\,kar} = \frac{5p_{kar}L^4}{384E_{mean}I} = \frac{12\cdot 5\cdot 18{,}8\cdot 7500^4}{384\cdot 13000\cdot 140\cdot 585^3} = 26 \text{ mm} \quad\Rightarrow\quad L/290$$

Ofte forekommende lastkombinasjon

$$p_{fin,ofte} = q_k(\psi_{1,1} + \psi_{2,1}k_{def}) + g_k(1 + k_{def})$$
$$= 10\cdot(0{,}5 + 0{,}3\cdot 0{,}6) + 4{,}35(1 + 0{,}6) = 13{,}8 \text{ kN/m}$$

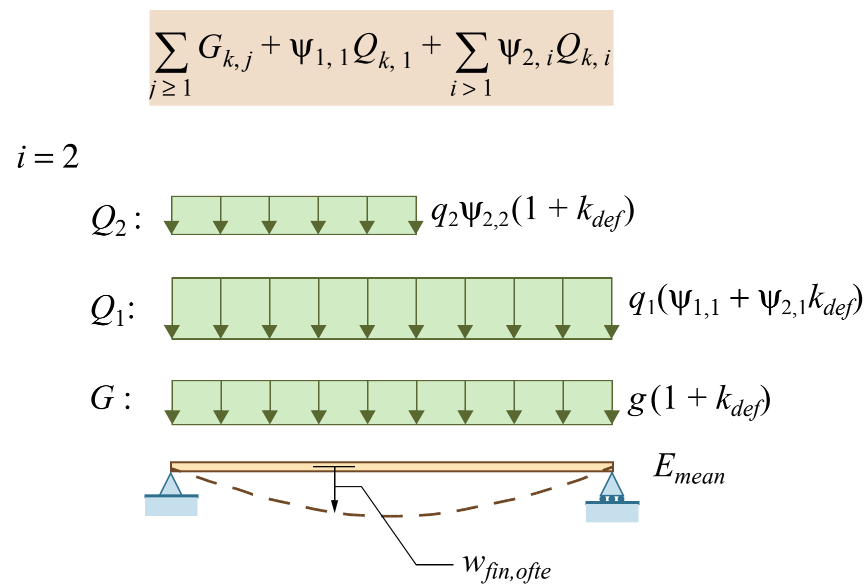
$$w_{fin,\,ofte} = \frac{5p_{ofte}L^4}{384E_{mean}I} = \frac{12\cdot 5\cdot 13{,}8\cdot 7500^4}{384\cdot 13000\cdot 140\cdot 585^3} = 19 \text{ mm} \quad\Rightarrow\quad L/395$$

Tilnærmet permanent lastkombinasjon

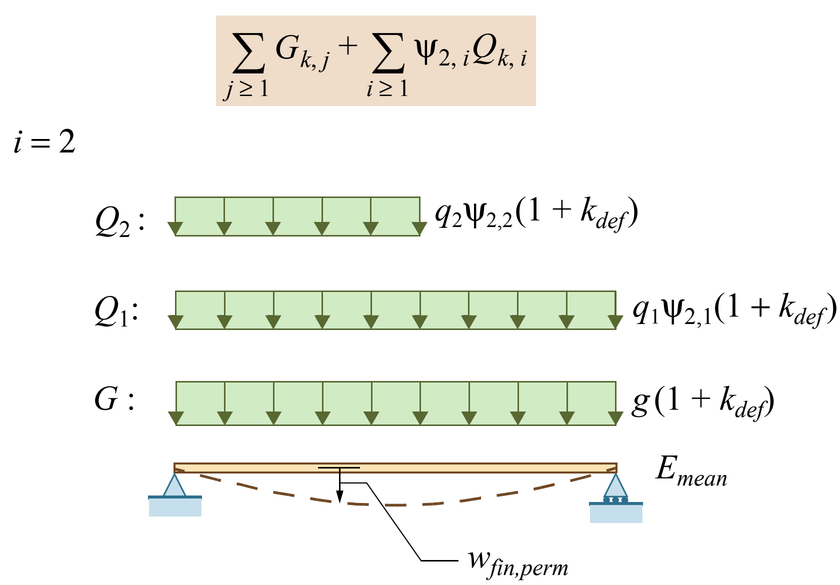
$$p_{fin,perm} = q_k\psi_{2,1}(1 + k_{def}) + g_k(1 + k_{def}) = (10\cdot 0{,}3 + 4{,}35)(1 + 0{,}6) = 11{,}8 \text{ kN/m}$$

$$w_{fin,\,perm} = \frac{5p_{perm}L^4}{384E_{mean}I} = \frac{12\cdot 5\cdot 11{,}8\cdot 7500^4}{384\cdot 13000\cdot 140\cdot 585^3} = 16 \text{ mm} \quad\Rightarrow\quad L/470$$

Et rimelig krav til største nedbøyningen for en bjelke som dette vil være at den er mindre enn $L/300$. På bakgrunn av det nøyaktighetsnivå vi opererer med her tilfredsstiller alle lastkombinasjonene dette kravet. I følge tabell 5 i innledningsdelen er det naturlig å legge ofte forekommende lastkombinasjon til grunn for kontrollen, og da ser vi at vi ligger godt under et krav på $L/300$. Som understøt-



Figur 1.3 Forskyvningsberegning – **ofte forekommende last-kombinasjon**; ren trekonstruksjon. Kopi av figur i ref.[3]



Figur 1.4 Forskyvningsberegning – **tilnærmet permanent last-kombinasjon**; ren trekonstruksjon. Kopi av figur i ref.[3]

telse for en gulvflate er imidlertid stivheten av stor betydning, ikke bare for nedbøyningen, men kanskje i enda større grad for gulvets dynamiske egenskaper.

Med en bjelkehøyde på 540 mm (en lamell mindre) vil $w_{fin,ofte}$ bli ca. 24 mm, dvs. $L/310$.

Ser man bort fra mulige svingeproblemer kan en nok vurdere å gå ned på bjelkehøyden med en lamell, dvs. til h = 540 mm. Komfortkravene til gulv gjør at svingning ofte er utslagsgivende for dimensjoneringen, og vi vil derfor ikke foreslå å reduserer bjelkehøyden uten en mer grundig vurdering av svingeegenskapene (som krever mer detaljert informasjon om selve gulvkonstruksjonen).

Svingning kommer vi tilbake til i eksempel 2.

Kommentar til nedbøyningsberegningen

Største nedbøyning er her beregnet etter formelen

$$w_{maks} = \frac{5pL^4}{384EI}$$

som kun tar hensyn til bøyedeformasjonene. For trekonstruksjoner bør en også ta med *skjærdeformasjonene*, på grunn av trematerialets lave skjærmodul (G). For vår enkle, fritt opplagte bjelke med konstant stivhet finnes det en enkel formel også for skjærbidraget til nedbøyningen, se ligning (6-18) i Limtreboka [1]. For krumme komponenter og bjelker med variabelt tverrsnitt samt mer sammensatte konstruksjoner, er vi stort sett henvist til programverktøy for beregning av forskyvninger. Vi har utført slike beregninger for den enkle bjelken, hvor vi også tar hensyn til skjærdeformasjonene, og finner at det øker nedbøyningene med godt og vel 10%. Det er såpass mye at det absolutt bør tas hensyn til, og det er her et viktig argument for ikke å redusere bjelkehøyden.

I fortsettelsen vil vi konsekvent ta med skjærdeformasjonen i *alle* beregninger.