

Figur 3.1 Kontinuerlig takbjelke

## Kontinuerlig bjelke

### 3.1 Oppgaven

Dimensjoner den kontinuerlige limtrebjelken vist i figur 3.1. Bjelken, som er en av ialt 7 like takbjelker i et butikklokale med kontinuerlig avstivende (horisontal) takskive, er symmetrisk opplagt på 3 søyler. De to like feltene har en (teoretisk) spennvidde på 15000 mm.

### 3.2 Forutsetninger og antakelser

Limtre GL30c /  $\rho_m = 430 \text{ kg/m}^3$

Klimaklasse: 1

Lastvarighetsklasse for snølasten: Korttidslast

Lastvarighetsklasse for vindlasten: Øyeblikkslast

Partialfaktor for limtre:  $\gamma_M = 1,15$

Lastbredde: 6000 mm

Prøver med følgende tverrsnitt:

Bjelken:  $b = 190 \text{ mm}$ ,  $h = 1215 \text{ mm}$

Innersøylen:  $b = 190 \text{ mm}$ ,  $h_i = 675 \text{ mm}$

Yttersøylen:  $b = 190 \text{ mm}$ ,  $h_y = 405 \text{ mm}$

### 3.3 Laster

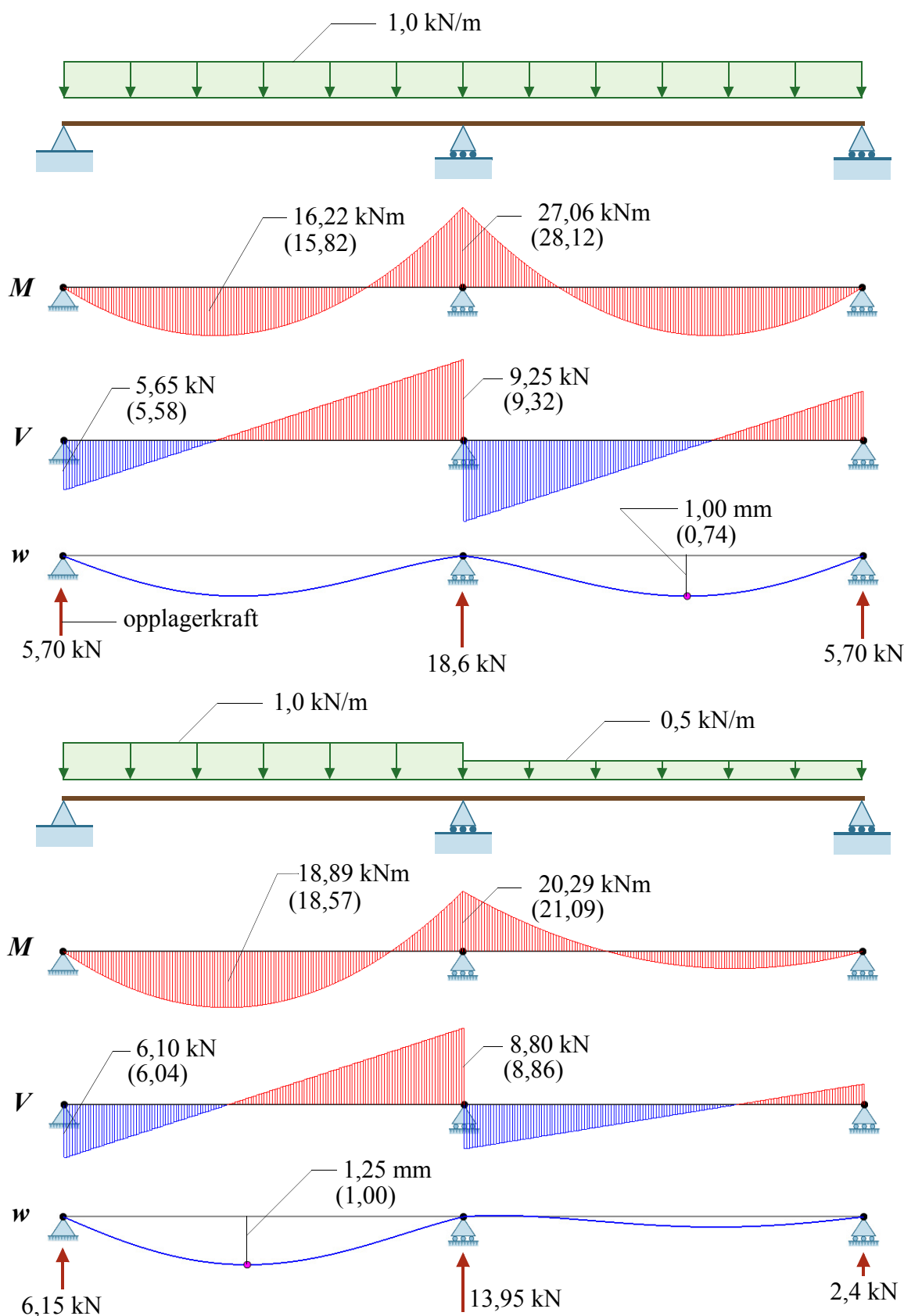
Karakteristiske laster på en bjelke:

Egenlast bjelke:  $g_{b,k} = 0,19 \cdot 1,215 \cdot 430 \cdot 9,82 = 975 \text{ N/m} = 1,0 \text{ kN/m}$

Egenlast avstivende isolert stålplatetak (Byggforskserien 471.031):

$0,70 \text{ kN/m}^2 \Rightarrow g_{t,k} = 0,7 \cdot 6,0 = 4,2 \text{ kN/m}$

Permanent last:  $g_k = g_{b,k} + g_{t,k} = 5,2 \text{ kN/m}$



**Figur 3.2** Statiske beregninger (tallene i parentes tar *ikke* hensyn til skjærdeformasjonene)

Variable (natur-) laster: NS-EN 1991-1-3 og NS-EN 1991-1-4:

Snølast på mark:  $s_k = 4,5 \text{ kN/m}^2$  ; formfaktor  $\mu_1 = 0,8$

$$q_{s,k} = 0,8 \cdot 4,5 \cdot 6 = 21,6 \text{ kN/m}$$

Vind: dimensjonerende hastighetstrykk  $q_p = 0,75 \text{ kN/m}^2$

Samlet vindtrykk/vindsug settes sammen av ytre og indre vindkrefter. Vind på tvers av bjelkene, dvs. mot gavl, gir en ytre vindkraft (sug/trykk) som er jevnt fordelt over hele bjelkens lengde, mens vind mot langvegg (dvs. langs-etter bjelkene) gir en varierende vindlast langs bjelken som totalt sett er lavere enn den som vind mot gavl gir.

Størst oppadrettet vindsug får en bjelke i sone H (se figur 7.6 og tabell 7.2 i NS-EN 1991-1-4) hvor formfaktoren er  $c_e = -0,7$ . Denne kombineres med et innvendig overtrykk med formfaktor  $c_i = 0,2$ . Resulterende oppadrettet vindlast blir:

$$q_{sug,k} = q_p(c_e - c_i) \cdot 6 = 0,75 \cdot (-0,7 - 0,2) \cdot 6 = -4,1 \text{ kN/m}$$

Størst nedadrettet vindtrykk får bjelken i sone I hvor formfaktoren er  $c_e = 0,2$ . Denne kombineres med et innvendig undertrykk med formfaktor  $c_i = -0,3$ .

Resulterende nedadrettet vindlast blir:

$$q_{trykk,k} = q_p(c_e - c_i) \cdot 6 = 0,75 \cdot (0,2 + 0,3) \cdot 6 = 2,3 \text{ kN/m}$$

### Lastkombinasjoner - bruddgrensetilstand

Figur 3.2 på motstående side viser resultater fra statiske beregninger utført for de to aktuelle snølastsituasjonene - enhetslaster med riktig fordeling. For bruddgrensetilstanden er full snølast på hele bjelken dimensjonerende. Også her er det kombinasjonen STR-2 som kommer til anvendelse, men med tanke på dimensjoneringen av selve bjelken må vi vurdere to kombinasjoner, en med bare snø, dvs.

$$p_{d,1} = 1,2g_k + 1,5q_{s,k} = 1,2 \cdot 5,2 + 1,5 \cdot 21,6 = 38,6 \text{ kN/m} \quad (3-1)$$

og en med både snø (som dominerende last) og vindtrykk, dvs.

$$p_{d,2} = 1,2g_k + 1,5q_{s,k} + 1,5\psi_{0,2}q_{trykk,k} = 38,6 + 1,5 \cdot 0,6 \cdot 2,3 = 40,7 \text{ kN/m} \quad (3-2)$$

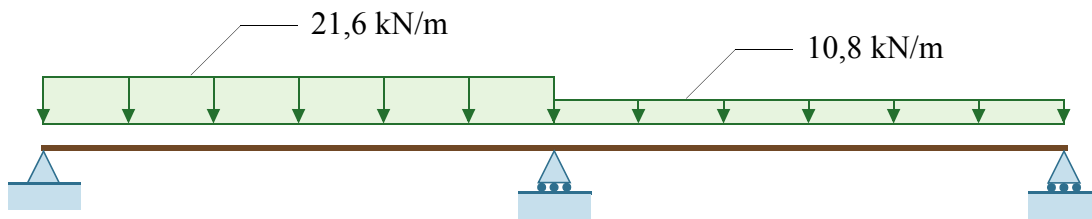
Verdien på  $\psi_{0,2}$  er tatt fra introduksjonen (tabell 2). For lastkombinasjonen  $p_{d,1}$  har vi at  $k_{mod} = 0,9$  (klimaklasse 1 og korttidslast), mens  $k_{mod} = 1,1$  for lastkombinasjonen  $p_{d,2}$  (klimaklasse 1 og øyeblikkslast). Dette betyr at dimensjonerende materialfastheter er ca. 20% høyere for  $p_{d,2}$  enn for  $p_{d,1}$ , mens  $p_{d,2}$  bare er 5% høyere enn  $p_{d,1}$ , som igjen betyr at for dimensjoneringen av selve bjelken kan vi se bort fra  $p_{d,2}$  og dermed vindtrykket.

Vindsuget på snøfritt tak kan derimot føre til løftekrefter ved oppleggene, og vi må derfor undersøke følgende lastkombinasjon:

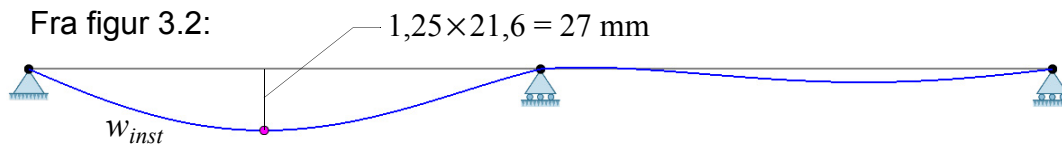
$$p_{løft} = 1,0g_k + 1,5q_{sug,k} = 1,0 \cdot 5,2 - 1,5 \cdot 4,1 = -0,95 \text{ kN/m} \quad (3-3)$$

Her virker egenlasten i "gunstig" retning, derfor lastfaktor lik 1,0.

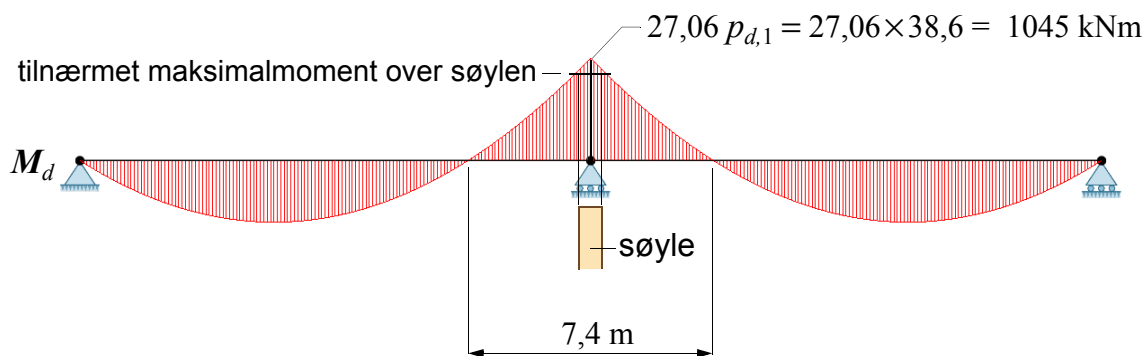
Variabel (snø-) last for bruksgrensetilstand ( $q_{s, halv, k}$ )



Fra figur 3.2:



Dimensjonerende bøyemoment (fra figur 3.2):



Kommentar:

Den teoretiske modellen, med "knivopplegg", overestimerer maksimalmomentet over søylen med ca. 10%.

### Lastkombinasjoner - bruksgrensetilstand

Av de tre lastkombinasjonene som er definert for bruksgrensetilstanden er det her mest naturlig å basere kontrollen på *ofte forekommende kombinasjon*, med last fra både snø og vindtrykk. Snø er den dominerende variable lasten ( $Q_1$ ), og i henhold til figur 3.2 gir full snø (21,6 kN/m) i ett felt og halv snø (10,8 kN/m) i det andre feltet størst nedbøyning. Vind og egenlast er jevnt fordelt over hele bjelkelengden. Som vi skal se vil ikke vindtrykk bidra til nedbøyningen (dette fordi  $\psi_2 = 0$  for vind).

### 3.4 Bruddgrensekontroll

Her må en kontrollere *bøyespenningene*, *skjærspenningene* og *flatetrykket* ved oppleggene. Eventuelle løftekrefter ved oppleggene må også bestemmes.

For kombinasjonen klimaklasse 1 og korttidslast gir tabell 7:

$$k_{mod} = 0,9$$

*Dimensjonerende fastheter*, basert på de karakteristiske fasthetene i tabell 6, er:

$$f_{m,d} = 30 \frac{1,0 \cdot 0,9}{1,15} = 23 \text{ N/mm}^2 \quad (k_h = 1,0)$$

$$f_{c,90,d} = 2,5 \frac{0,9}{1,15} = 2,0 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{v,d} = 3,5 \frac{0,9}{1,15} = 2,7 \text{ N/mm}^2$$

### Bøye kontroll (EK5-1 pkt. 6.1.6 og pkt. 6.3.3)

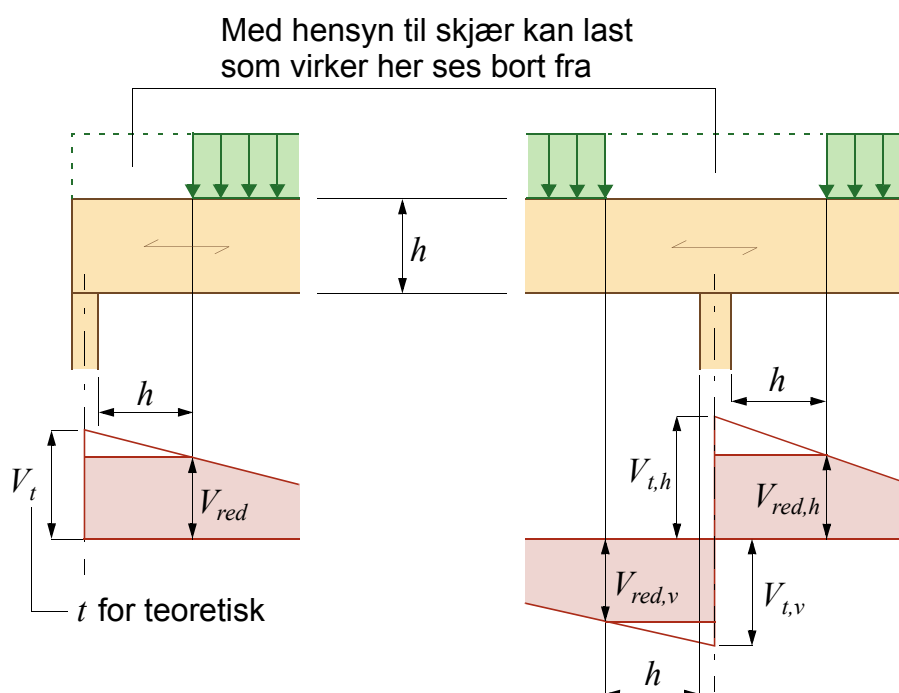
Med utgangspunkt i momentdiagrammet øverst i figur 3.2, og uten noen reduksjon på grunn av den relativt store oppleggsflaten, finner vi at dimensjonerende bøymoment (over midtre opplegg) er:

$$M_d = 27,06 \times 38,6 = 1045 \text{ kNm}$$

$$\Rightarrow \sigma_{m,d} = \frac{M_d}{W} = \frac{6 \cdot 1045 \cdot 10^6}{190 \cdot 1215^2} = 22 \text{ N/mm}^2 < f_{m,d} \quad \text{OK}$$

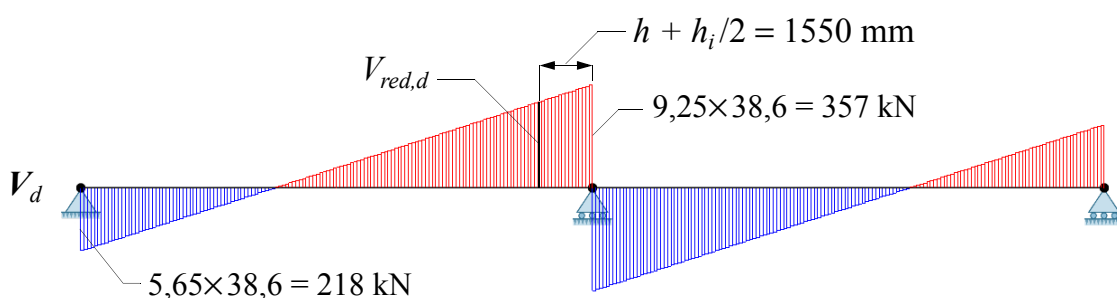
Hva så med vippling? Vi forutsetter at bjelken er sikret mot rotasjon om egen akse (dvs. at den er "gaflet") ved oppleggene på yttersøylene, og at takskiven sikrer bjelkens overkant mot forskyvninger på tvers. Eneste mulighet for vippling er dermed i sonen ved midtopplegget som har trykk i underkant av bjelken. Om vi (konservativt) regner som om midtsøylen virker som en konsentrert last på en bjelke med lengde 7,4 m, kan vi regne den effektive (vippe-) lengden som (se tabell 6.1 i EK5-1):  $L_{ef} = 0,8 \cdot 7,4 = 5,9 \text{ m}$ . Det gir:

$$\sigma_{m,crit} = \frac{0,78b^2}{hL_{ef}} E_{0,05} = \frac{0,78 \cdot 190^2 \cdot 10800}{1215 \cdot 5900} = 42 \text{ N/mm}^2 \quad \text{EK5-1: lign. 6.32}$$



**Figur 3.3** Reduksjon av skjærkraft ved opplegg (**EK5-1**, pkt 6.1.7)

Dimensjonerende skjærkraft (fra figur 3.2):



Kommentar:

Det er mye som taler for at et eventuelt skjærbrudd for et problem som dette vil oppstå ved ett av endeoppleggene og ikke ved midtopplegget. Et skjærbrudd betinger at øvre og nedre bjelkehalvdel glir i forhold til hverandre. En slik bevegelse er "kinematisk låst" ved midtopplegget – dette er diskutert i [3].

Siden vi her tilfredsstiller kravene også ved midtopplegget (med redusert skjærkraft), behøver vi ikke ta stilling til hvor et eventuelt brudd vil oppstå.

$$\lambda_{rel, m} = \sqrt{\frac{f_{m, k}}{\sigma_{m, crit}}} = \sqrt{\frac{30}{42}} = 0,85 \quad \text{EK5-1: ligning (6.30)}$$

$$k_{crit} = 1,56 - 0,75 \cdot 0,85 = 0,92 \quad \text{EK5-1: ligning (6.34)}$$

Standardens krav, ligning (6.33):

$$\frac{\sigma_{m, d}}{k_{crit} \cdot f_{m, d}} = \frac{22}{0,92 \cdot 23} = 1,0 \quad \text{OK}$$

En bokstavtro tolkning av standarden ville økt lengden  $L_{ef}$  med  $2h$  og dermed redusert  $k_{crit}$  tilstrekkelig til at brøken ovenfor ville bli 1,1. Vi har imidlertid ikke tatt hensyn til at bjelken er avstivet i overkant, vi har ikke gitt søylen noen avstivende virkning, og vi har ikke tatt hensyn til at den dimensjonerende bøyepening  $\sigma_{m, d}$  er lavere enn beregnet på grunn av det brede opplegget. I sum er dette mer enn nok til å slå fast at bjelken tilfredsstiller kravene til bøyestyrke.

### Skjærkontroll (EK5-1, pkt. 6.1.7)

Figur 3.3 viser hvordan vi tolker punkt 6.1.7(3) i EK5-1. Standarden snakker riktig nok bare om en konsentrert kraft som angriper på bjelkens overkant, men det er vanskelig å finne noen god begrunnelse for at bestemmelsen ikke også skulle gjelde for en fordelt last.

Største opptredende (teoretiske) skjærkraft har vi ved midtopplegget for jevnt fordelt snølast:

$$V_{t, d} = 9,25 \times 38,6 = 357 \text{ kN}$$

Dimensjonerende redusert skjærkraft, i henhold til figur 3.3:

$$V_{red, d} = 357 - (357 + 218) \frac{1550}{15000} = 357 - 59 = 298 \text{ kN}$$

Dimensjonerende skjærspenning:

$$\tau_{v, d} = \frac{3 \cdot V_{red, d}}{2 \cdot b_{ef} \cdot h} = \frac{3 \cdot V_{red, d}}{2 \cdot (k_{cr} \cdot b) h} = \frac{3 \cdot 298 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,8 \cdot 190 \cdot 1215} = 2,4$$

$$\text{Kontroll: } \frac{\tau_{v, d}}{f_{v, d}} = \frac{2,4}{2,7} = 0,89 < 1,0 \quad \text{OK}$$

### Trykk normalt fibre (EK5-1, pkt. 6.1.5)

Dimensjonerende opplagerkraft ved endeopplegg (skjev snølast, se figur 3.2):

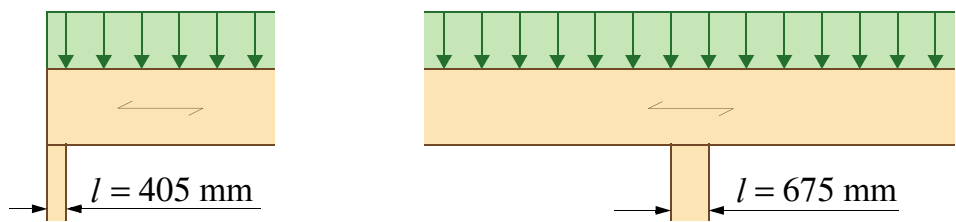
$$F_{y, d} = 1,2 \cdot 5,2 \cdot 5,70 + 1,5 \cdot 21,6 \cdot 6,15 = 35,6 + 199,3 = 235 \text{ kN}$$

$$\sigma_{c, 90, d} = \frac{235 \cdot 10^3}{190 \cdot (h_y + 30)} = \frac{235000}{190 \cdot 435} = 2,8 \text{ N/mm}^2$$

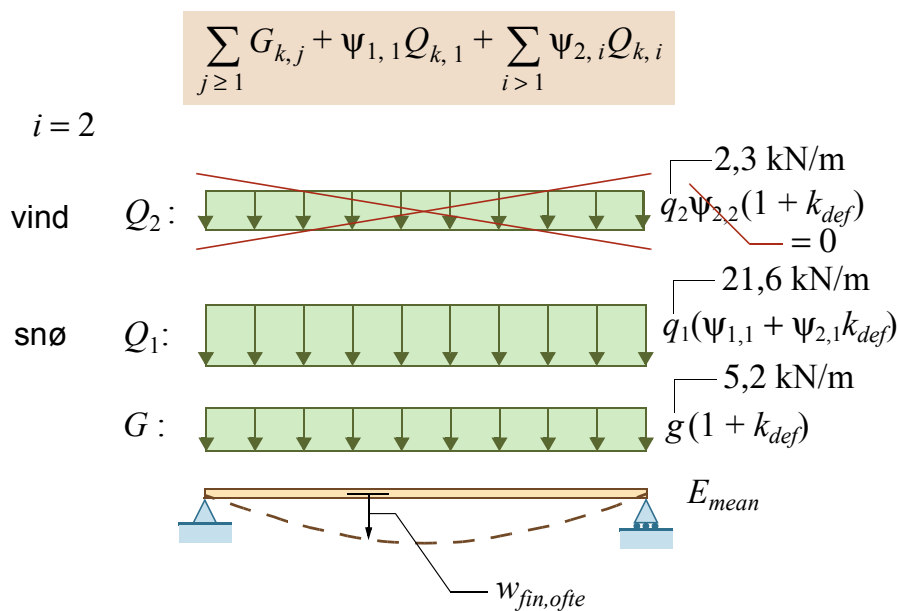
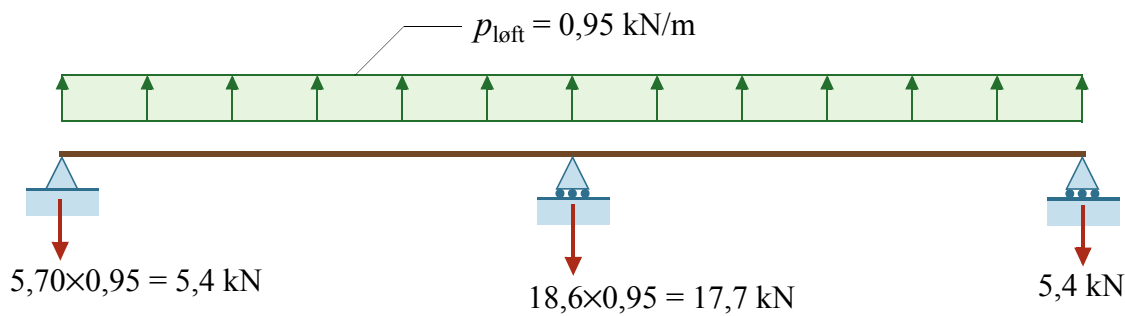
Dimensjonerende opplagerkraft ved midtopplegg (jevn snølast, se figur 3.2):

$$F_{y, d} = 18,6 \times 38,6 = 718 \text{ kN}$$





Løftekrefter (se figur 3.2 og ligning 3-3):



Ofte forekommende lastkombinasjon (se figur 1.3)

$$\sigma_{c,90,d} = \frac{718 \cdot 10^3}{190 \cdot (h_i + 60)} = \frac{718000}{190 \cdot 735} = 5,1 \text{ N/mm}^2$$

Kontrollen i EK5-1 krever at  $\frac{\sigma_{c,90,d}}{k_{c,90} \cdot f_{c,90,d}} < 1,0$

For limtre skal faktoren  $k_{c,90}$  settes lik 1,75 dersom oppleggslengden  $l$  er mindre eller lik 400 mm; ellers skal den settes lik 1,0. Strengt tatt skal vi her sette  $k_{c,90}$  lik 1,0 for begge oppleggene, og det betyr at ingen av oppleggene tilfredsstiller standardens krav. Det store spranget ved 400 mm virker urimelig, og dette har ført til at vi i Norge, i påvente av en mer rimelig løsning, tillater en alternativ kontroll basert på Rapport nr. 86 fra Norsk Treteknisk Institutt (se endringsblad til det norske NA til EK5-1). Her finner vi kontrollen

$$\frac{\sigma_{c,90,d}}{k_{c,90}^* f_{c,90,d}} \leq 1,0 \quad \text{hvor}$$

$$\sigma_{c,90,d} = \frac{F_{c,90,d}}{A_{net}} = \frac{718 \cdot 10^3}{190 \cdot 675} = 5,6 \text{ N/mm}^2 \quad \text{– for midtopplegget, og}$$

$$f_{c,90,d}^N = f_{c,90,d}^* \frac{k_{mod}}{\gamma_M} = 5,5 \frac{0,9}{1,15} = 4,3 \text{ N/mm}^2$$

For vårt tilfelle er  $k_{c,90}^* = 1,0$ , og kontrollen blir dermed

$$\frac{\sigma_{c,90,d}}{k_{c,90}^* f_{c,90,d}^N} = \frac{5,6}{1,0 \cdot 4,3} = 1,3 > 1,0 \quad \text{ikke OK}$$

De ytre søylene derimot, hvor  $\sigma_{c,90,d} = 3,1 \text{ N/mm}^2$  (når vi regner med  $A_{net}$ ), vil tilfredsstille det norske kravet til flatetrykket.

Vi konkluderer med at bortsett fra flatetrykket mellom bjelke og midtsøyle har bjelken tilfredsstillende bruddgrensekapasitet, men det er neppe grunnlag for å redusere bjelkehøyden. Forbindelsen mellom bjelke og midtsøyle kommer vi tilbake til i både eksempel 17 (trykk tvers på fibre) og eksempel 20 (avstivning/gaffel-lagring).

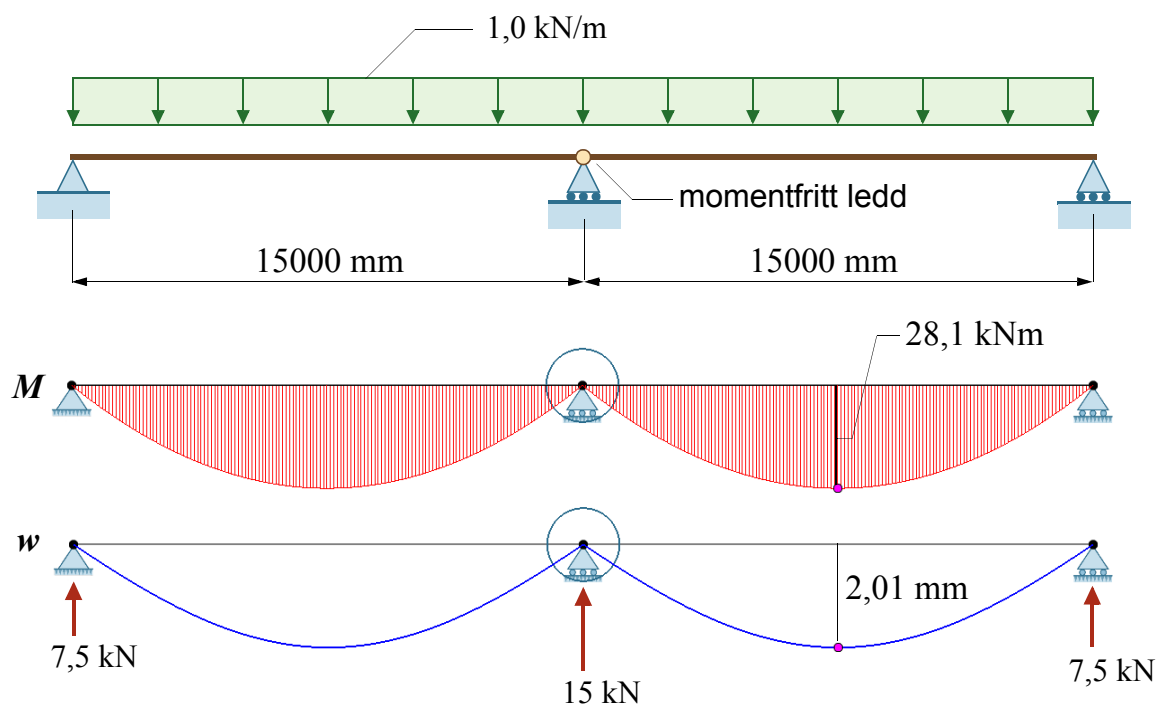
### Løftekrefter

Bjelken må festes på en slik måte at løftekreftene vist på motstående side kan overføres til søylene (som forutsettes å kunne overføre kreftene til fundamentene).

## 3.5 Bruksgrensekontroll

### Nedbøyninger

Som allerede nevnt baserer vi her nedbøyningskontrollen på ofte forekommende lastkombinasjon, se figur 1.3. Her får nedbøyningen bidrag fra egenlast og snø, men ikke vind, som vist på motstående side.



$$f_{c, 90, d} = f_{c, 90, d}^* \frac{k_{mod}}{\gamma_M} = 5,5 \frac{0,9}{1,15} = 4,3 \text{ N/mm}^2$$

For klimaklasse 1 har vi at  $k_{def} = 0,6$ .

For snø har vi (se tabell 2):  $\psi_1 = 0,5$  og  $\psi_2 = 0,2$

For vind har vi (tabell 2):  $\psi_1 = 0,2$  og  $\psi_2 = 0$

Ved å benytte nedbøyningene i figur 3.2 fremkalt av enhetslaster finner vi:

Bidrag fra egenlast:  $w_g = 5,2 \cdot (1 + 0,6) \cdot 1,0 = 8 \text{ mm}$

Bidrag fra snø:  $w_s = 21,6 \cdot (0,5 + 0,2 \cdot 0,6) \cdot 1,25 = 17 \text{ mm}$

Bidrag fra vind:  $w_v = 0$  ( $\psi_2 = 0$  for vind)

$$\Rightarrow w_{fin,ofte} = w_g + w_s = 8 + 17 = 25 \text{ mm} \approx L / 600 \quad \text{OK}$$

### Kommentar

Den foreslåtte bjelke er relativt lang, og avhengig av hvor bygget ligger i forhold til limtreprodusenten vil transport kunne bli et problem. Et alternativ vil være å skjøte to 15 m lange bjelker over midtstøtten. Hvilke konsekvenser vil det ha?

På motstående side er vist det momentdiagram og den forskyvningsfigur som vi nå må sammenligne med de øverste diagrammene i figur 3.2. Vi ser at feltmomentet nå (28,1 kNm) blir litt større enn støttemomentet for den kontinuerlige bjelken (27,1 kNm), men økningen er ikke større enn at også den skjømte bjelken vil tilfredsstille kravene til bøyekapasitet, spesielt ettersom vi nå kan se helt bort fra vippling (dvs.  $k_{crit} = 1,0$ ).

Dimensjonerende skjærkraft er mindre for den skjømte bjelken enn for den kontinuerlige bjelken, og mens flatetrykket over yttersøylene øker (til 4,1 N/mm<sup>2</sup>) minker det (til 4,5 N/mm<sup>2</sup>) over midtsøylen. Med  $f_{c,90,d} = 4,3 \text{ N/mm}^2$ , finner vi at det norske kravet til flatetrykket er tilfredsstilt for begge søylene (med det nøyaktighetsnivå vi har lagt oss på er  $4,5/4,3 = 1,0465 \approx 1,0$ ).

Hva så med nedbøyningen? Her må vi sammenligne 2,01 med henholdsvis 1,25 (for snø) og 1,0 (for den permanente lasten), og for den ofte forekommende lastkombinasjonen vil vi nå finne en største nedbøyning som er:

$$w_{fin,ofte} = w_g + w_s = 8 \cdot \frac{2,01}{1,0} + 17 \cdot \frac{2,01}{1,25} = 43 \text{ mm} \approx L / 350 \quad \text{OK}$$

Konklusjonen blir at den skjømte bjelken tilfredsstiller standardens krav, både i brudd- og bruksgrensetilstanden.

Et annet alternativ er å skjømte bjelken med et spesielt beslag, et såkalt Gerber-beslag, i ett av punktene som har null bøyemoment ved jevnt fordelt last. Dette alternativet ser vi nærmere på i neste eksempel.