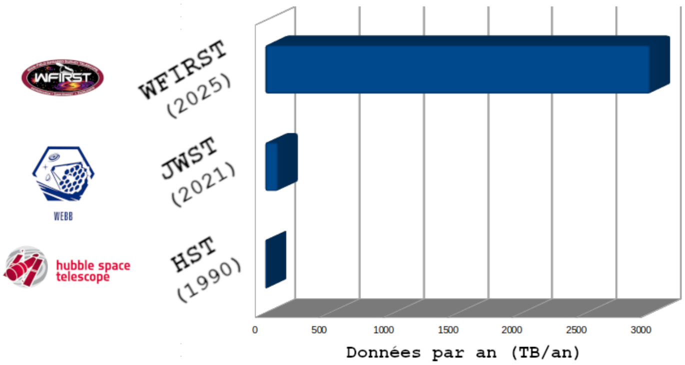
Fonctionnelles de Minkowski appliquées à la classification des galaxies

Julien Barrès, Sofiane Aïssani, Gabriel Aillet, Raphaël Seegmuller
Encadrant : Carlo Schimd

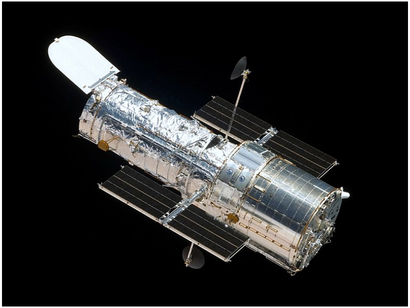
Introduction



Source : Space Telescope Science Institute (STScI)

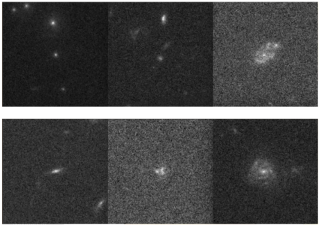
Problématique : Les fonctionnelles de Minkowski peuvent-elles permettre une nouvelle classification des galaxies ?

Jeux de données



Télescope spatial Hubble, mission STS-125
(Koekemoer et al. 2007, Massey et al. 2010)

- *Advanced Camera for Surveys* (ACS)
- Redshift : $0,05 < z < 1$
- 804 images sélectionnées (sur 72000)



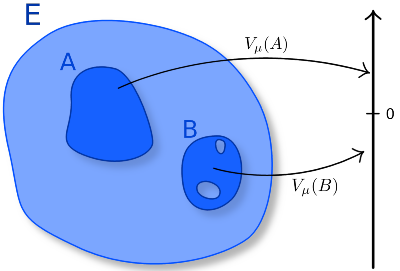
(Laigle et al. 2016)

Plan

Fonctionnelles de Minkowski : définition

Théorème (Hadwiger, 1957)

[1] Dans un espace métrique (E, δ) de dimension d, il existe $d + 1$ Fonctionnelles de Minkowski (MF) appelées $V_0, \ldots, V_d$...



Fonctionnelles de Minkowski : propriétés

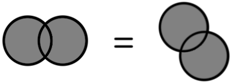
Théorème (Hadwiger, 1957)

[2] ... qui vérifient les trois propriétés listées ci-dessous.

Additivité

$$\forall A, B, \quad \forall \mu, \quad V_\mu(A \cup B) = V_\mu(A) + V_\mu(B) - V_\mu(A \cap B)$$

Invariance par
rotation et translation



$$\forall A, \quad \forall g \in \mathcal{G}, \quad \forall \mu, \quad V_\mu(g(A)) = V_\mu(A)$$

Continuité

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \forall \mu, \quad \lim_{n\to\infty} A_n = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} V_\mu(A_n) = V_\mu(A)$$

Fonctionnelles de Minkowski : intérêt

Théorème (Hadwiger, 1957)

[3] Toute fonctionnelle $\mathcal{F}$ vérifiant les trois propriétés précédentes est une combinaison linéaire des fonctionnelles de Minkowski :

$$\exists \lambda_0, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F} = \sum_{\mu=0}^{d} \lambda_\mu V_\mu$$

Fonctionnelles de Minkowski : intérêt

Théorème (Hadwiger, 1957)

[3] Toute fonctionnelle $\mathcal{F}$ vérifiant les trois propriétés précédentes est une combinaison linéaire des fonctionnelles de Minkowski :

$$\exists \lambda_0, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F} = \sum_{\mu=0}^{d} \lambda_\mu V_\mu$$

$\Rightarrow$ Les fonctionnelles de Minkowski apportent une caractérisation complète de la géométrie et la topologie des ensembles.

Fonctionnelles de Minkowski en 2D

Grandeurs géométriques :

- Aire, notée F ou V_0

$$\boxed{F = V_0(A) \;=\; \frac{1}{4\pi}\int_A \mathrm{d}\Omega}$$

- Périmètre, noté U ou V_1

$$\boxed{U = V_1(A) \;=\; \frac{1}{16\pi}\int_{\partial A} \mathrm{d}l}$$

Grandeur topologique :

- Caractéristique d'Euler, notée χ ou V_2

$$\boxed{\chi = V_2(A) \;=\; \frac{1}{8\pi^2}\int_{\partial A} \kappa \,\mathrm{d}l = N_{\text{régions connexes}} - N_{\text{trous}}}$$

Fonctionnelles de Minkowski en 2D

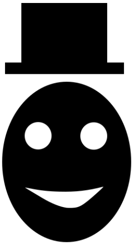
Grandeurs géométriques :

- Aire, notée F ou V_0

$$\boxed{F = V_0(A) \;=\; \frac{1}{4\pi}\int_A \mathrm{d}\Omega}$$

- Périmètre, noté U ou V_1

$$\boxed{U = V_1(A) \;=\; \frac{1}{16\pi}\int_{\partial A} \mathrm{d}l}$$



$\chi = 2 - 3 = -1$

Grandeur topologique :

- Caractéristique d'Euler, notée χ ou V_2

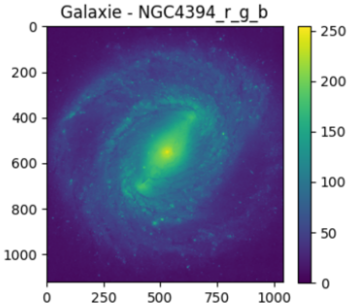
$$\boxed{\chi = V_2(A) \;=\; \frac{1}{8\pi^2}\int_{\partial A} \kappa\,\mathrm{d}l = N_{\text{régions connexes}} - N_{\text{trous}}}$$

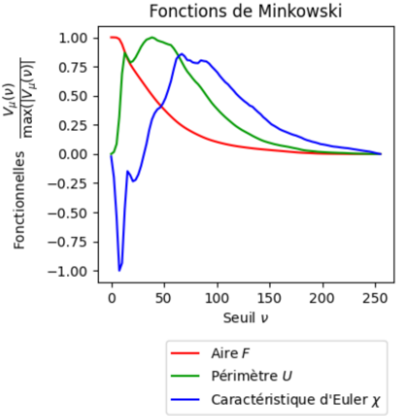
Fonctionnelles de Minkowski en 2D

$$\Sigma_\nu := \left\{(i,j) \in \mathbb{R}^2 : f(i,j) > \nu\right\}$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ représente l'intensité lumineuse d'un pixel et ν la valeur du seuil d'intensité.

Fonctionnelles de Minkowski en 2D : exemple





module `python` : `minkfncts2d`
`github.com/moutazhaq/minkfncts2d`
(Mantz, Jacobs et Mecke 2008)

Analyse en composantes principales : principe

Données :

- $n = 804$ "individus" : les images
- $p = 300$ variables $X_1, \ldots, X_{300}$: leurs fonctionnelles de Minkowski

Réduction : $D \rightarrow \hat{D}$

Matrice de corrélation :
$R = \frac{1}{n-1} \hat{D}\ {}^t\hat{D}$

Matrice de données : D

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} & \ldots & \ldots & X_{1,300} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{804,1} & \ldots & \ldots & X_{804,300} \end{pmatrix}$$

R non diagonale
$\Leftrightarrow$ les variables sont corrélées.

Analyse en composantes principales : méthode

Diagonalisation de R :

$$\Delta = {}^{t}PRP$$

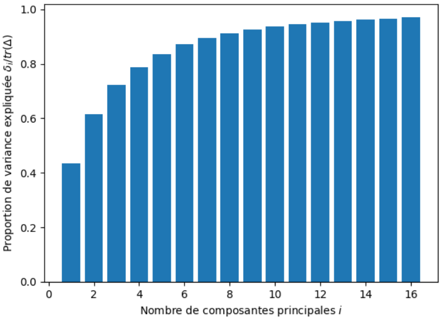
$$P \in O_p(\mathbb{R}), \quad \Delta \text{ diagonale}$$

Matrice Δ

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_{300} \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 \geq \cdots \geq \delta_{300}$$

$$\operatorname{Tr} R = \operatorname{Tr} \Delta$$

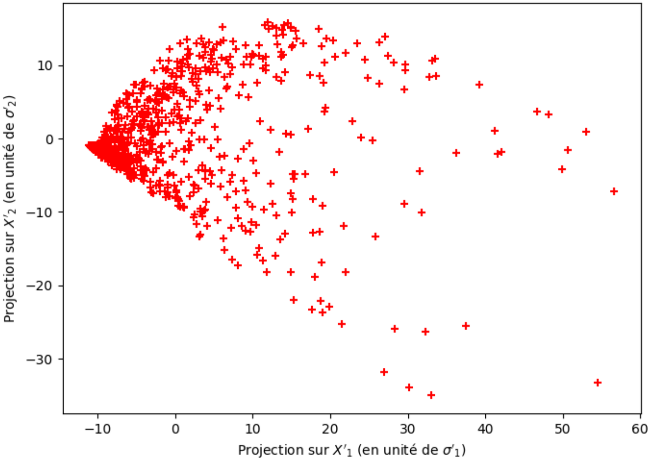


Projection sur 8 variables :

$$\mathbb{R}^{300} \longrightarrow \mathbb{R}^{8}$$

Plus de 90% de la variance condensée dans 8 variables

Analyse en composantes principales : résultat



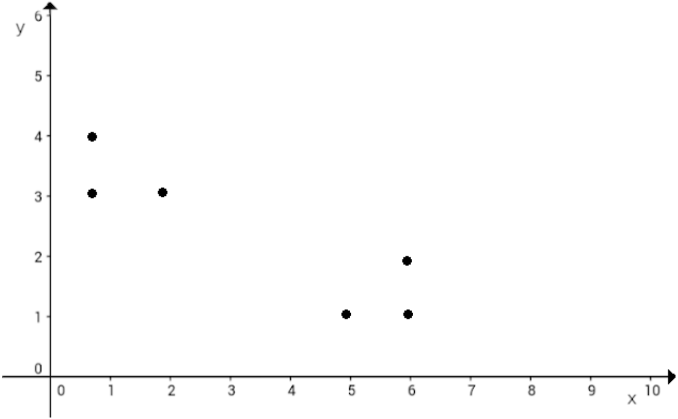
Algorithme *k*-means *clustering*

Algorithme k-means *clustering*

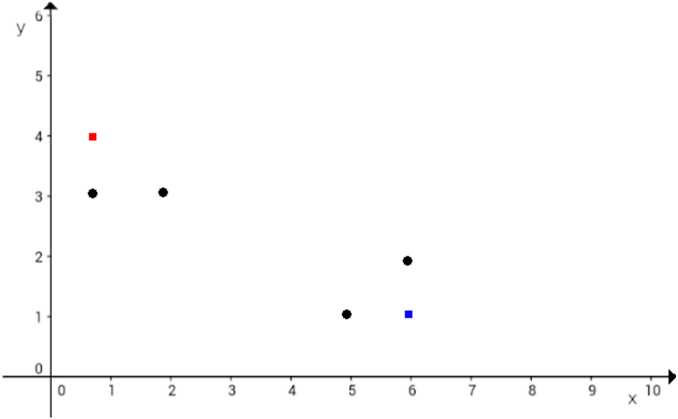
On définit μ_k le centroïde du groupe k
Et l'inertie comme :

$$\sum_{i=1}^{m} ||x^{(i)} - \mu_c^{(i)}||^2$$

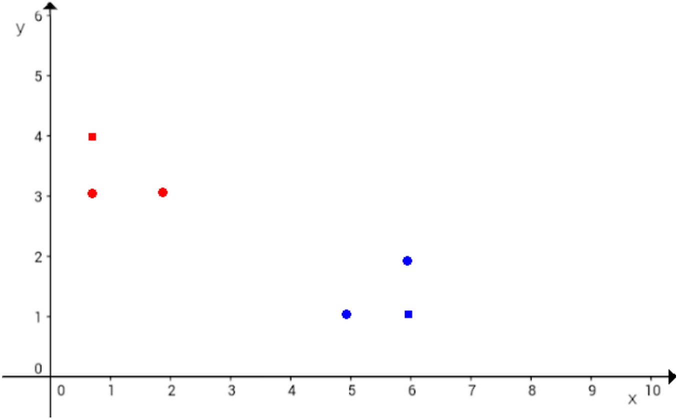
Algorithme *k*-means *clustering*



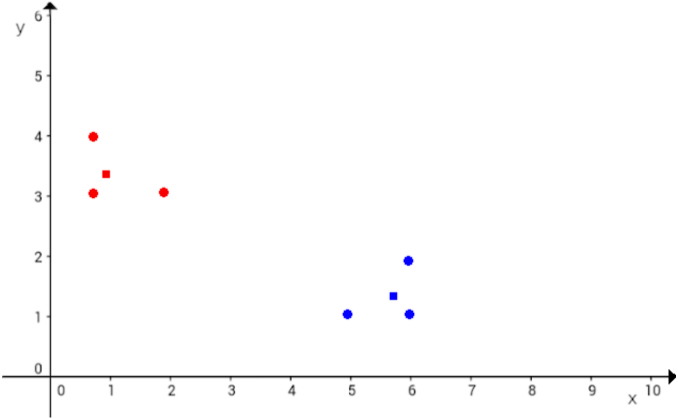
Algorithme *k*-means *clustering*



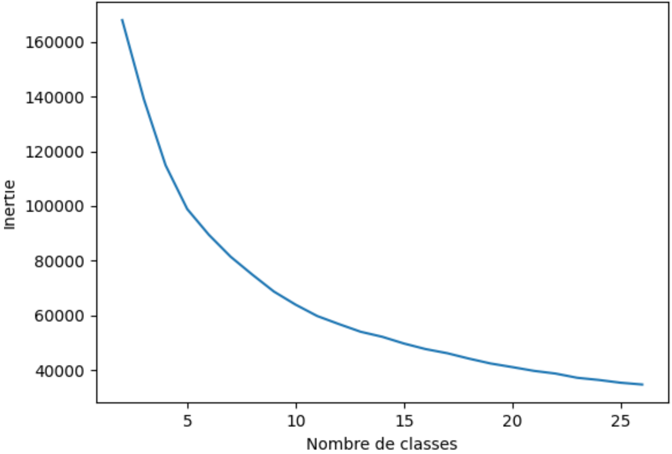
Algorithme *k*-means *clustering*

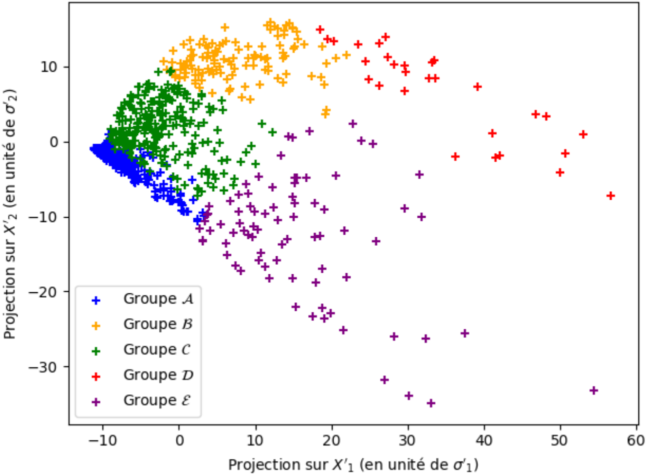


Algorithme *k*-means *clustering*

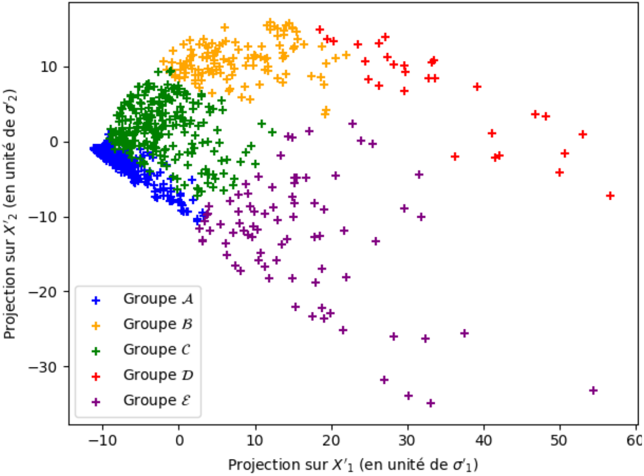


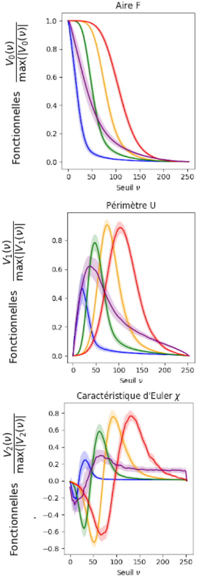
Algorithme *k*-means *clustering*

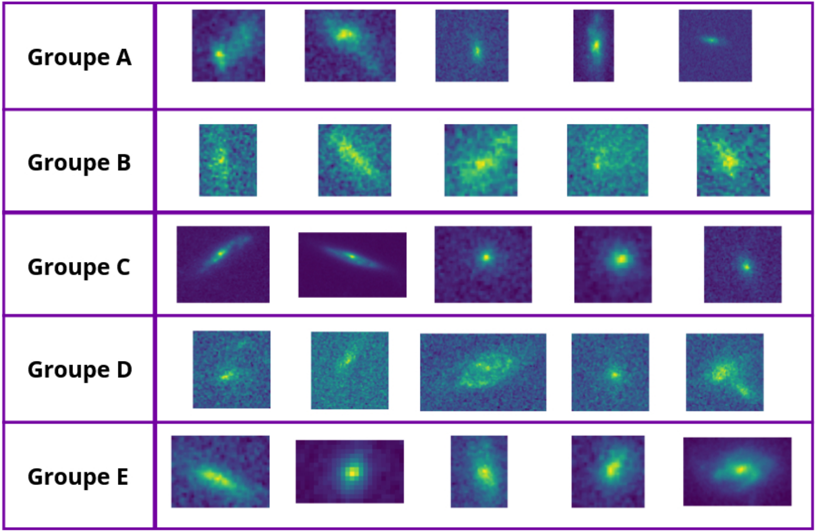




Projection sur X'_2 (en unité de σ'_2)
Projection sur X'_1 (en unité de σ'_1)
10
0
−10
−20
−30
−10
0
10
20
30
40
50
60
Groupe $\mathcal{A}$
Groupe $\mathcal{B}$
Groupe $\mathcal{C}$
Groupe $\mathcal{D}$
Groupe $\mathcal{E}$

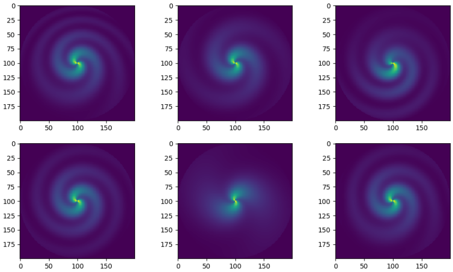

Groupe $\mathcal{A}$
Groupe $\mathcal{B}$
Groupe $\mathcal{C}$
Groupe $\mathcal{D}$
Groupe $\mathcal{E}$
Projection sur X'_2 (en unité de σ'_2)
Projection sur X'_1 (en unité de σ'_1)


Aire F
Fonctionnelles $\frac{V_0(\nu)}{\max(|V_0(\nu)|)}$
Seuil ν
Périmètre U
Fonctionnelles $\frac{V_1(\nu)}{\max(|V_1(\nu)|)}$
Seuil ν
Caractéristique d'Euler χ
Fonctionnelles $\frac{V_2(\nu)}{\max(|V_2(\nu)|)}$
Seuil ν

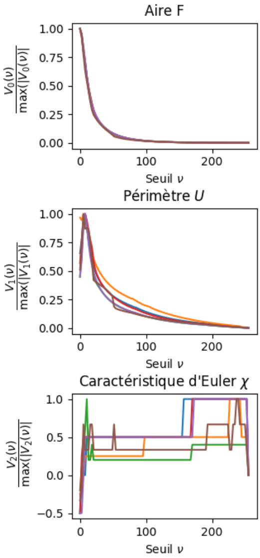

Groupe A
Groupe B
Groupe C
Groupe D
Groupe E

Étude de l'impact du bruit numérique

Images de simulations



Crédit : K. Kraljic (Institute for Astronomy, University of Edinburgh, Royal Observatory Edinburgh)



Simulation de bruits

Sources diverses :

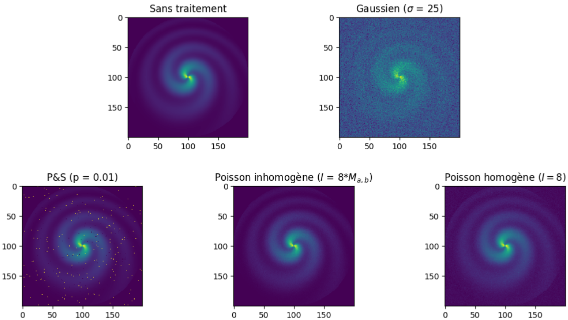
- Erreur de transmission de données
- Défauts de matériel
- Chaleur (bruit thermique)
- Signaux externes (rayons cosmiques, satellites)

Simulation de bruits

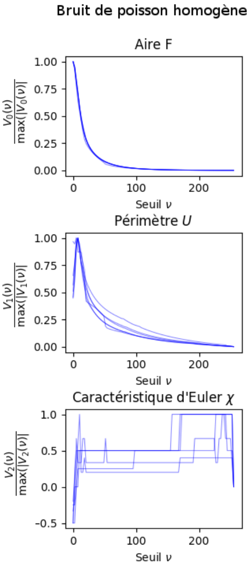
Sources diverses :

- Erreur de transmission de données
- Défauts de matériel
- Chaleur (bruit thermique)
- Signaux externes (rayons cosmiques, satellites)

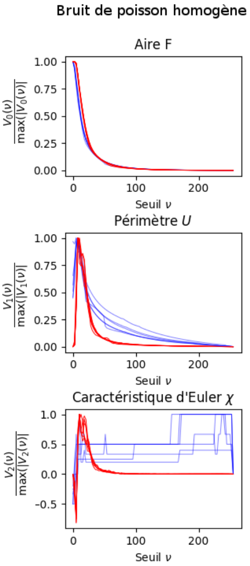
Loi gaussienne
$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}$
Loi de Poisson
$p(k) = P(X = k) = \frac{I^k}{k!} e^{-I}$



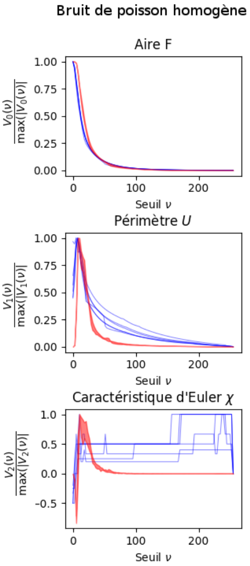
Perte d'information drastique



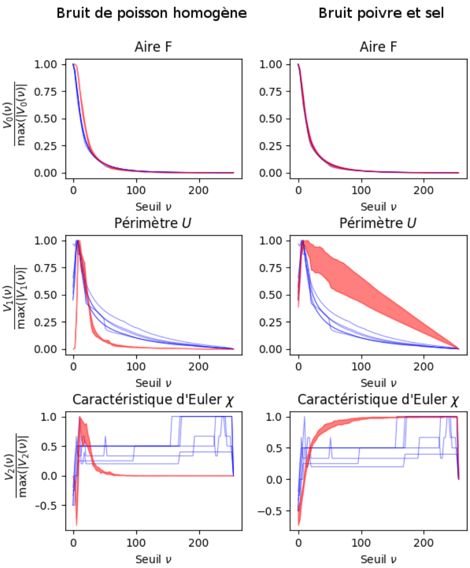
Perte d'information drastique



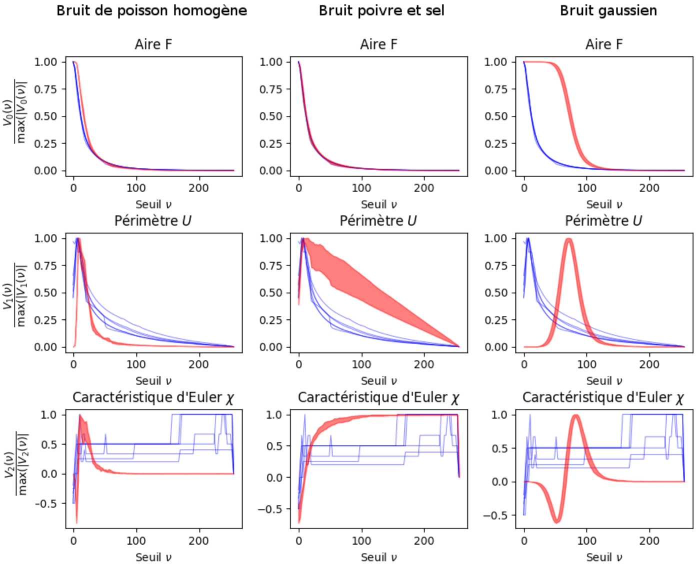
Perte d'information drastique



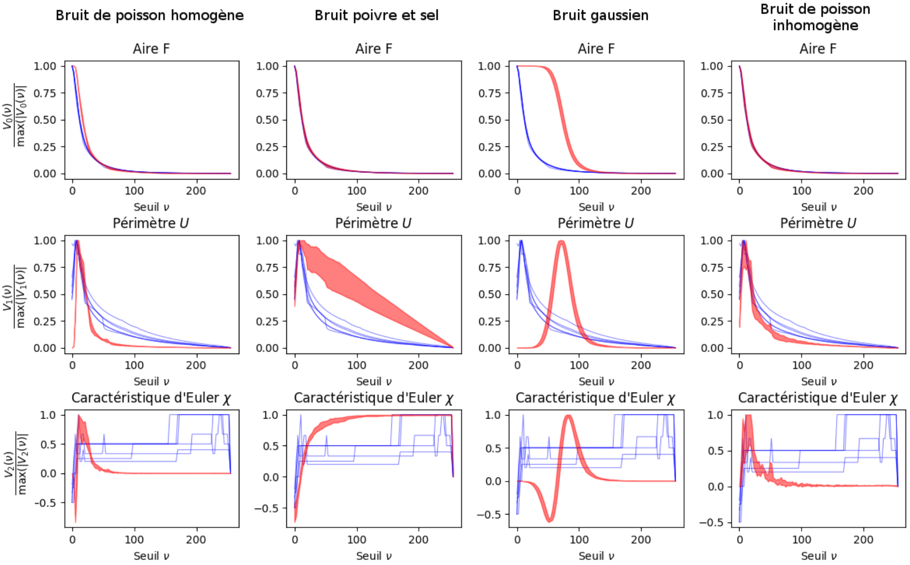
Perte d'information drastique



Perte d'information drastique



Perte d'information drastique



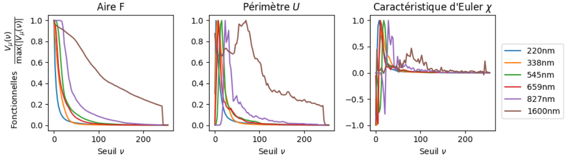
Pistes d'approfondissement de la méthode

- Homogénéisation du bruit
- Utiliser d'autres indicateurs morphologiques

- *concentration of stellar light* (C)
- *asymmetric distribution* (A)
- *clumpiness* (S)

(Rodriguez-Gomez, 2019)

- Étude de l'impact de la bande spectrale du filtre

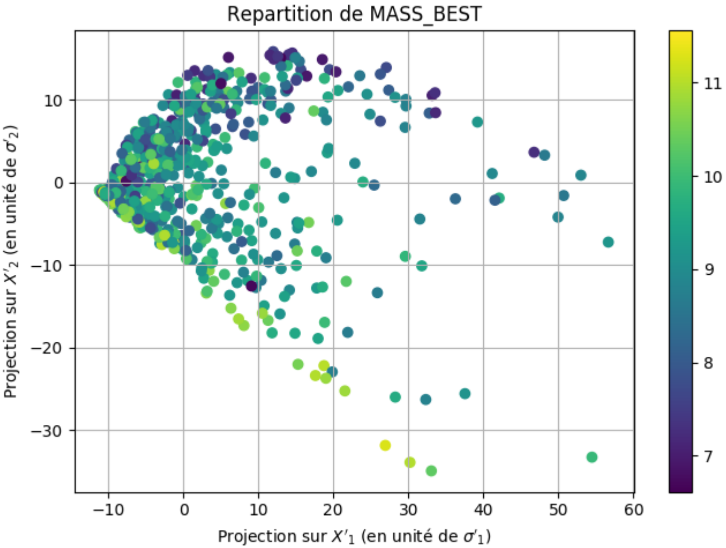


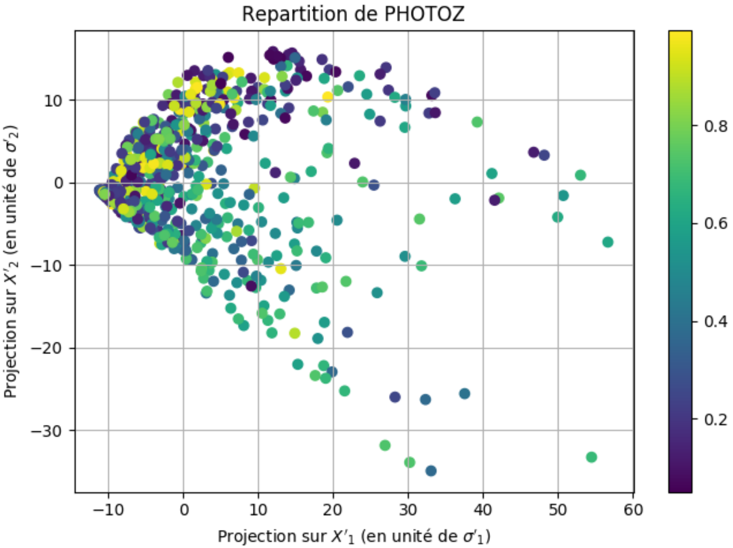
Bilan

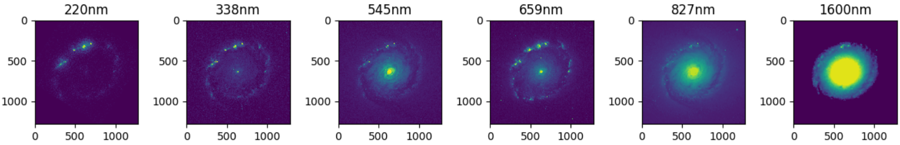
- Réalisation d'une quarantaine de programmes, utilisation de plusieurs librairies scientifiques python (*astropy, scipy, sklearn*...).
- Utilisation de logiciels courants dans le domaine de l'étude des galaxies (*DS9, TOPCAT*...).
- Étude de diverses manières d'altérer les fonctionnelles de Minkowski de galaxies (bruit, inclinaison, dégradation, filtre/bande spectrale).
- Comparaison à des répartitions basées sur différents paramètres physiques (masse, redshift...).

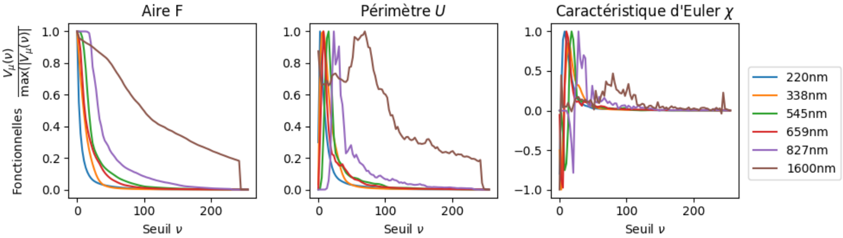
Merci de votre attention !

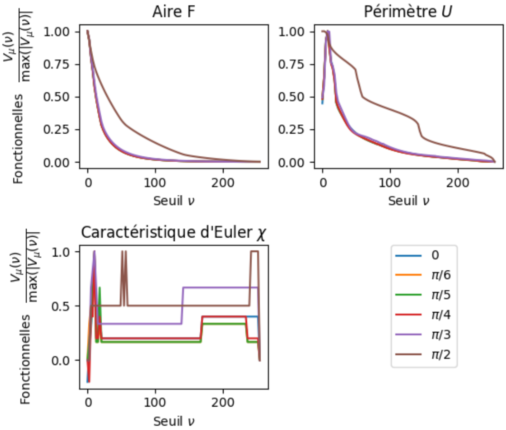
Annexe

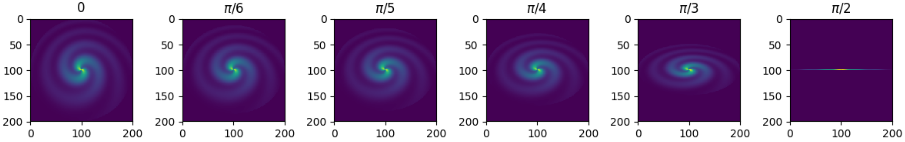

Repartition de MASS_BEST
Projection sur X'_1 (en unité de σ'_1)
Projection sur X'_2 (en unité de σ'_2)
−10
0
10
20
30
40
50
60
−30
−20
−10
0
10
7
8
9
10
11

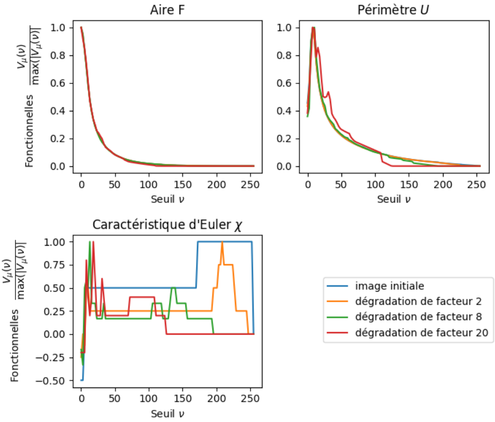

Repartition de PHOTOZ
10
0
−10
−20
−30
−10
0
10
20
30
40
50
60
Projection sur X'_1 (en unité de σ'_1)
Projection sur X'_2 (en unité de σ'_2)
0.8
0.6
0.4
0.2


220nm
338nm
545nm
659nm
827nm
1600nm
0
500
1000


Aire F
Périmètre U
Caractéristique d'Euler χ
Fonctionnelles $\frac{V_\mu(\nu)}{\max(|V_\mu(\nu)|)}$
Seuil ν
220nm
338nm
545nm
659nm
827nm
1600nm


Aire F
Périmètre U
Caractéristique d'Euler χ
Fonctionnelles $\frac{V_\mu(\nu)}{\max(|V_\mu(\nu)|)}$
Seuil ν
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
1.0
0.5
0.0
0
100
200
0
π/6
π/5
π/4
π/3
π/2


0
π/6
π/5
π/4
π/3
π/2
0
50
100
150
200


Aire F
Périmètre U
Caractéristique d'Euler χ
Fonctionnelles $\frac{V_\mu(\nu)}{\max(|V_\mu(\nu)|)}$
Seuil ν
image initiale
dégradation de facteur 2
dégradation de facteur 8
dégradation de facteur 20

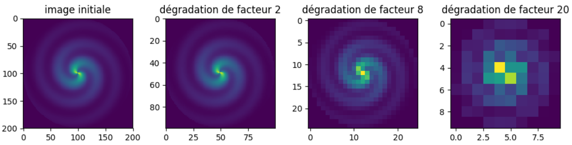
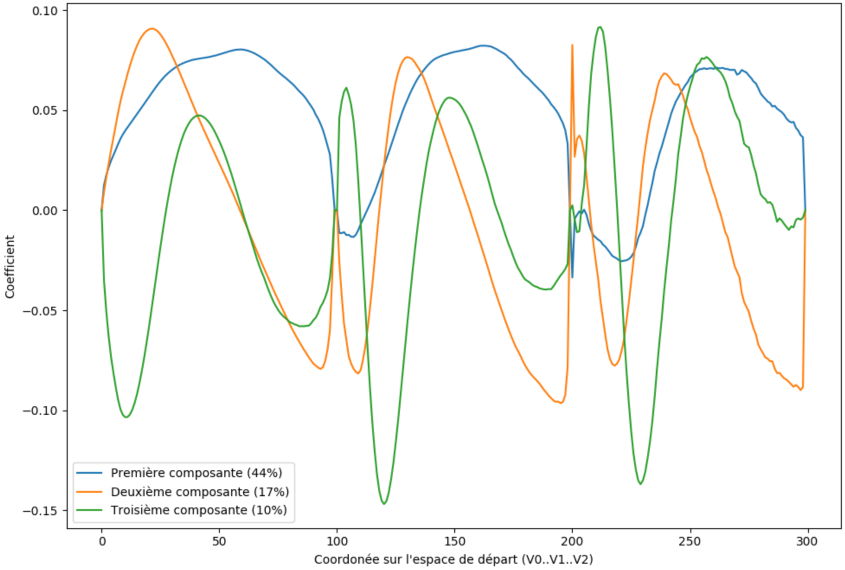


image initiale
dégradation de facteur 2
dégradation de facteur 8
dégradation de facteur 20


0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
−0.15
Coefficient
0
50
100
150
200
250
300
Coordonée sur l'espace de départ (V0..V1..V2)
Première composante (44%)
Deuxième composante (17%)
Troisième composante (10%)

- $C = 5\log_{10}\left(\frac{r_{80}}{r_{20}}\right)$
- $A = \frac{\sum_{i,j}|I_{ij} - I_{ij}^{180}|}{\sum_{i,j}|I_{ij}|} - A_{brg}$
- $S = \frac{\sum_{i,j} I_{ij} - I_{ij}^{S}}{\sum_{i,j} I_{ij}} - S_{brg}$

(Rodriguez-Gomez, 2019)