GEOMETRÍA, CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE UN ROBOT

ÍNDICE: GEOMETRÍA, CINEMÁTICA Y DINÁMICA

Geometría

Coordenadas propias y del mundo

Representación de la posición.

- Tipos de coordenadas

Matrices de rotación

Representación de la orientación del elemento final

- Ángulos de Euler y RPY

Matrices de transformación homogéneas

Cinemática

Problema cinemático directo e inverso

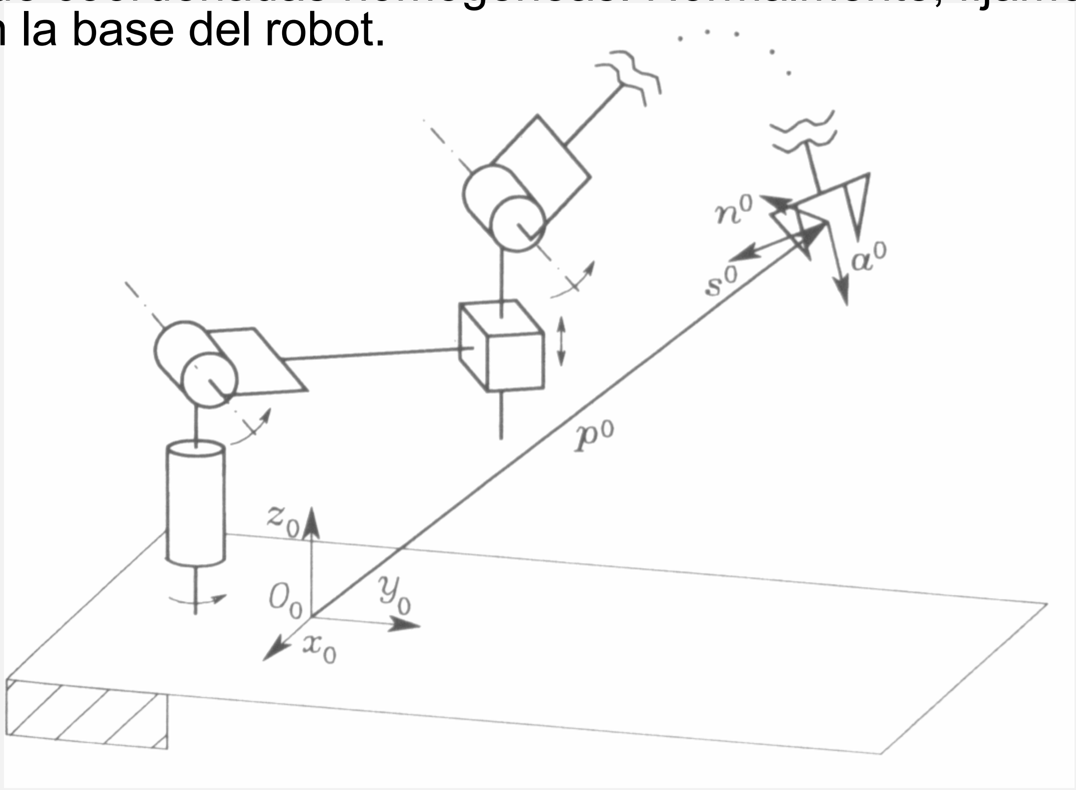
Dinámica

Ecuaciones de Newton-Euler

Ecuaciones de Lagrange-Euler

COORDENADAS PROPIAS Y DEL MUNDO

- Coordenadas propias (del cuerpo)
  - Indican la posición y orientación del extremo final del robot.
- Coordenadas del mundo
  - Posición y orientación del extremo final del robot respecto a un sistema de coordenadas homogéneas. Normalmente, fijamos el centro en la base del robot.

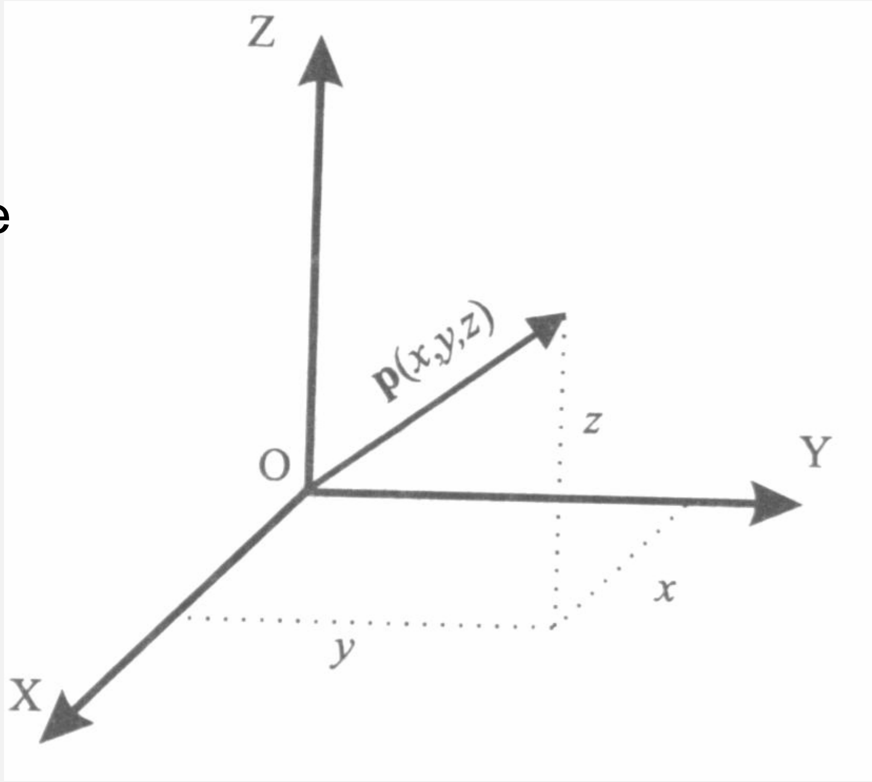


REPRESENTACIÓN DE LA POSICIÓN (I)

- Vamos a representar la posición en un espacio tridimensional
- Veremos 3 tipos de representación
  - Coordenadas cartesianas
  - Coordenadas cilíndricas
  - Coordenadas esféricas

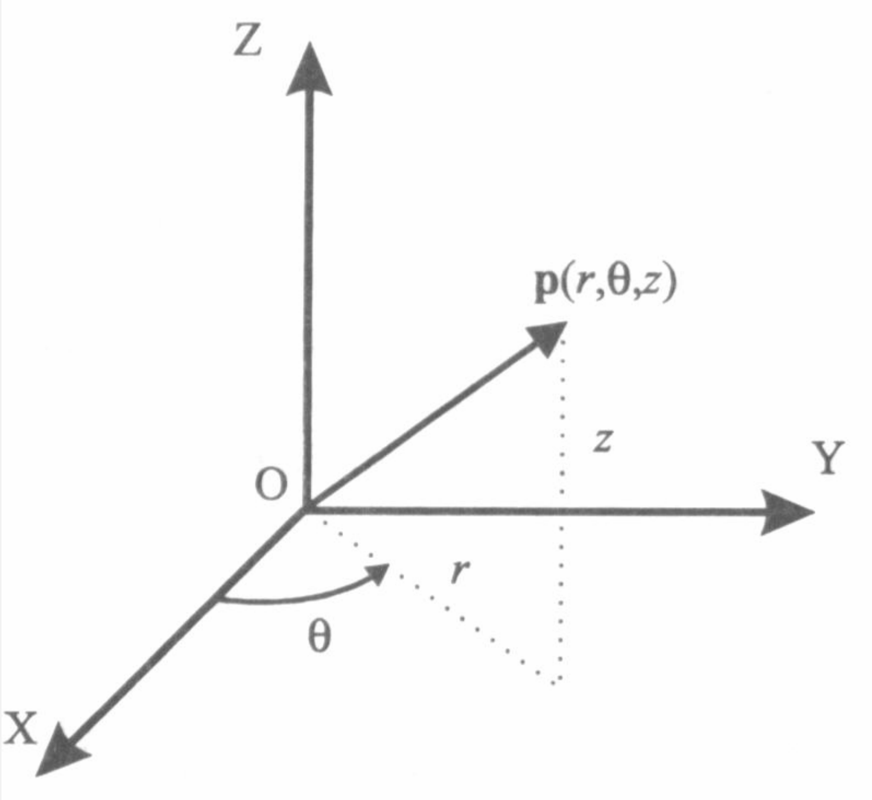
REPRESENTACIÓN DE LA POSICIÓN (II)

- Coordenadas cartesianas
  - Utilizamos el sistema de referencia O(origen)XYZ
  - Definimos la posición mediante el vector **p**(x,y,z)
    - x expresa la proyección del vector **p** sobre el eje OX.
    - y expresa la proyección del vector **p** sobre el eje OY.
    - z expresa la proyección del vector **p** sobre el eje OZ.



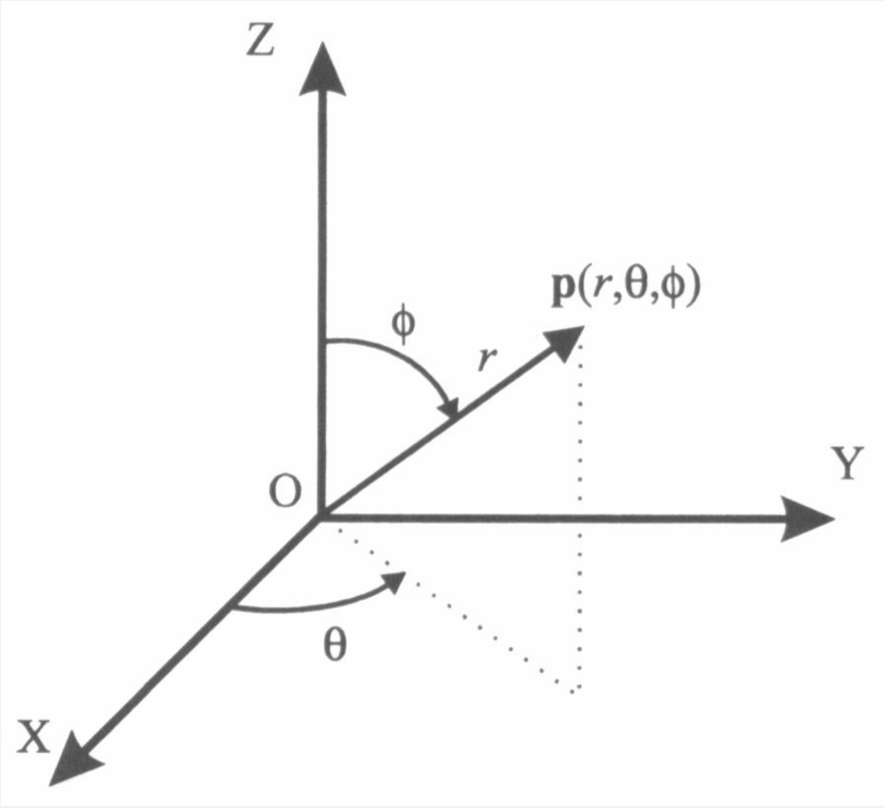
REPRESENTACIÓN DE LA POSICIÓN (III)

- Coordenadas cilíndricas
  - Utilizamos el sistema de referencia OXYZ
  - Definimos la posición mediante el vector **p**(r,θ,z)
    - r es la distancia desde el origen O hasta el extremo del vector **p**.
    - θ es el ángulo formado por la proyección del vector **p** sobre el plano OXY con el eje OX.
    - z expresa la proyección del vector **p** sobre el eje OZ.

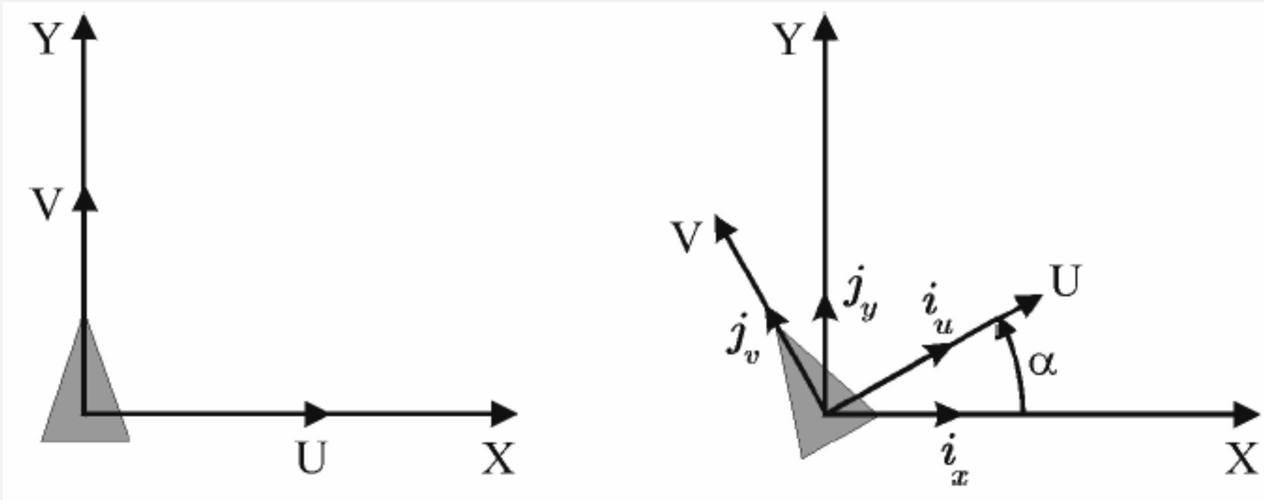


REPRESENTACIÓN DE LA POSICIÓN (IV)

- Coordenadas esféricas
  - Utilizamos el sistema de referencia OXYZ
  - Definimos la posición mediante el vector **p**(r,θ,Φ)
    - r es la distancia desde el origen O hasta el extremo del vector **p**.
    - θ es el ángulo formado por la proyección del vector **p** sobre el plano OXY con el eje OX.
    - Φ es el ángulo formado por el vector **p** con el eje OZ.



MATRICES DE ROTACIÓN: 2D

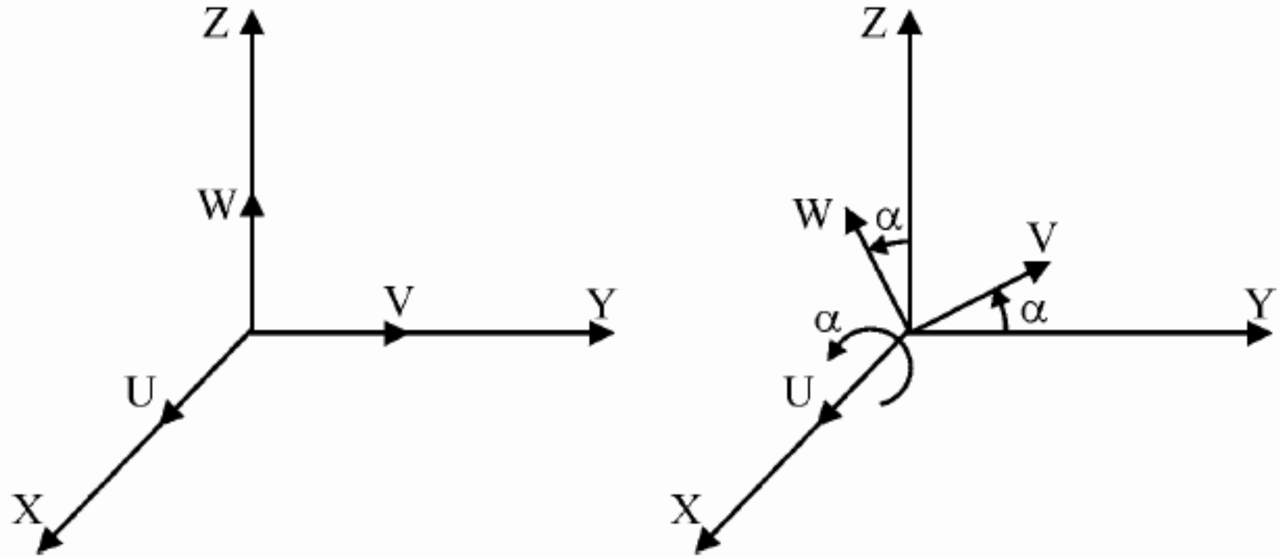


$$\mathbf{p}_{xy} = [p_x, p_y]^T = p_x \cdot \mathbf{i}_x + p_y \cdot \mathbf{j}_y$$
$$\mathbf{p}_{uv} = [p_u, p_v]^T = p_u \cdot \mathbf{i}_u + p_v \cdot \mathbf{j}_v$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \\ \mathbf{j}_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \mathbf{j}_v \\ \mathbf{j}_y \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \mathbf{j}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

MATRICES DE ROTACIÓN: 3D (I)

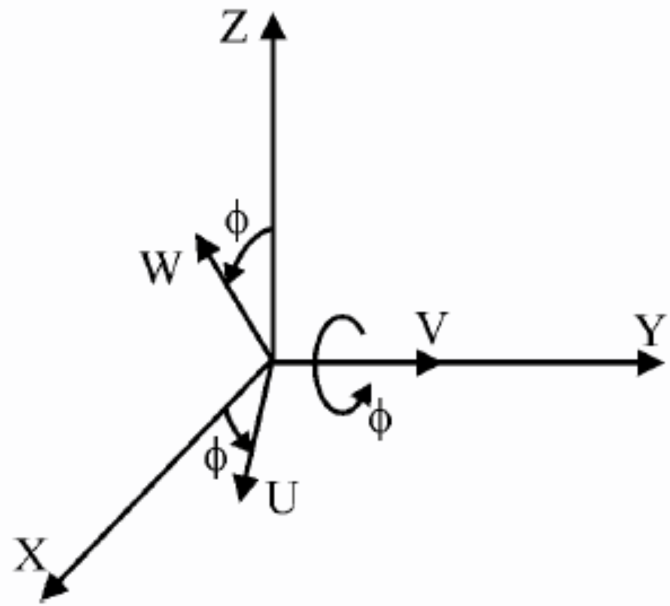


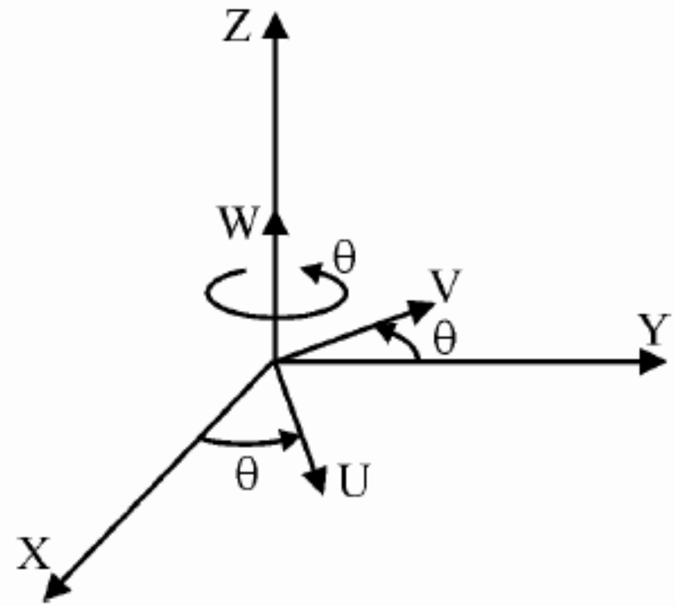
$$\mathbf{p}_{xyz} = [p_x, p_y, p_z]^T = p_x \cdot \mathbf{i}_x + p_y \cdot \mathbf{j}_y + p_z \cdot \mathbf{k}_z$$
$$\mathbf{p}_{uvw} = [p_u, p_v, p_w]^T = p_u \cdot \mathbf{i}_u + p_v \cdot \mathbf{j}_v + p_w \cdot \mathbf{k}_w$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \\ \mathbf{j}_y \\ \mathbf{k}_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x\mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x\mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x\mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y\mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y\mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y\mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z\mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z\mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z\mathbf{k}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

MATRICES DE ROTACIÓN: 3D (II)





$$\mathbf{R}(\mathbf{y},\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{z},\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

COMPOSICIÓN DE ROTACIONES

- Podemos multiplicar las matrices de rotación básicas entre sí para representar una secuencia de rotación finita respecto del eje principal del sistema de coordenadas OXYZ
  - La multiplicación de matrices no es conmutativa
  - Importante el orden de realización de las rotaciones
- También podemos encadenar rotaciones básicas respecto a los ejes principales de los sistemas de coordenadas obtenidos después de una rotación

COMPOSICIÓN DE ROTACIONES: EJEMPLO

- Orden de composición (respecto de OXYZ)
  1. Rotación de ángulo α respecto del eje OX
  2. Rotación de ángulo θ respecto del eje OZ
  3. Rotación de ángulo Φ respecto del eje OY

$$\mathrm{R} = R_{y,\phi}\, R_{z,\theta}\, R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} Cos_\phi & 0 & Sen_\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -Sen_\phi & 0 & Cos_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cos_\theta & -Sen_\theta & 0 \\ Sen_\theta & Cos_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos_\alpha & -Sen_\alpha \\ 0 & Sen_\alpha & Cos_\alpha \end{bmatrix} =$$

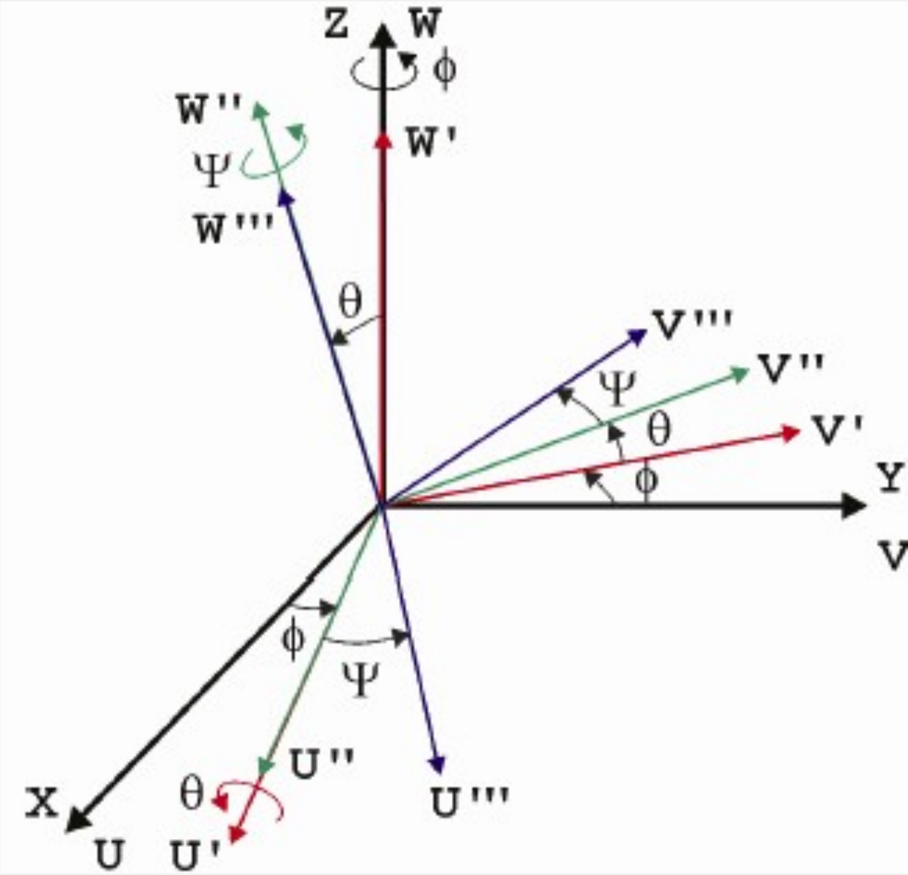
$$\begin{bmatrix} Cos_\phi Cos_\theta & Sen_\phi Sen_\alpha - Cos_\phi Sen_\theta Cos_\alpha & Cos_\phi Sen_\theta Sen_\alpha + Sen_\phi Cos_\alpha \\ Sen_\theta & Cos_\theta Cos_\alpha & -Cos_\theta Sen_\alpha \\ -Sen_\phi Cos_\theta & Sen_\phi Sen_\theta Cos_\alpha + Cos_\phi Sen_\alpha & Cos_\phi Cos_\alpha - Sen_\phi Sen_\theta Sen_\alpha \end{bmatrix}$$

ORIENTACIÓN DEL ELEMENTO TERMINAL (I)

- Un punto queda definido en el espacio a través de su posición
- Para un sólido necesitamos definir además cual es la orientación
- Hay varias formas de definir la orientación siendo las más usuales:
  - Ángulos de Euler
  - Ángulos RPY

ORIENTACIÓN DEL ELEMENTO TERMINAL (II)

- Ángulos de Euler ZXZ
  - Es una de las representaciones más habituales.
  - Se suele asociar con los movimientos básicos de un giroscopio.
  - Si se parte de los sistemas OXYZ y OUVW, inicialmente coincidentes, podemos colocar al sistema OUVW en cualquier orientación siguiendo los siguientes pasos (en orden):
    1. Girar el sistema OUVW un ángulo Φ con respecto al eje OZ, convirtiéndose en el OU´V´W´.
    2. Girar el sistema OU´V´W´ un ángulo θ con respecto al eje OU´ (X inicial), conviertiendose en el OU´´V´´W´´.
    3. Girar el sistema OU´´V´´W´´ un ángulo ψ con respecto al eje OW´´ (Z inicial), convirtiéndose finalmente en el OU´´´V´´´W´´´



ORIENTACIÓN DEL ELEMENTO TERMINAL (III)

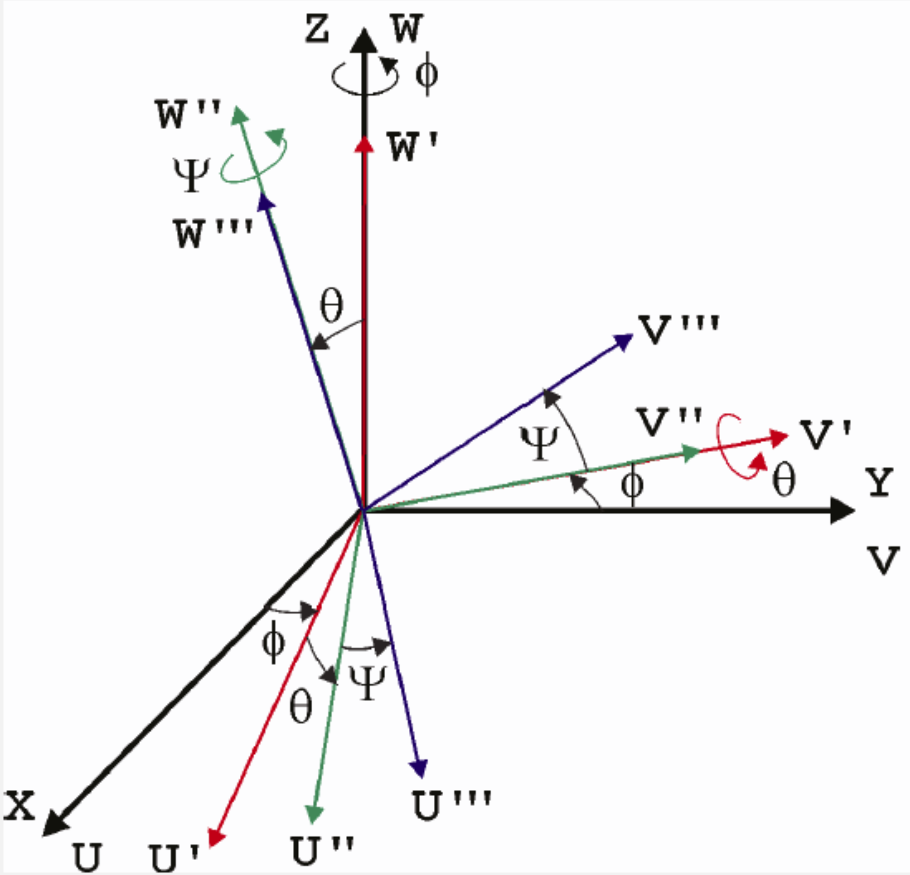
- Matriz de rotación:

$$\mathrm{R} = R_{z,\phi}\, R_{u',\theta}\, R_{w'',\psi} = \begin{bmatrix} Cos_{\phi} & -Sen_{\phi} & 0 \\ Sen_{\phi} & Cos_{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cos_{\theta} & 0 & Sen_{\theta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -Sen_{\theta} & 0 & Cos_{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cos_{\psi} & -Sen_{\psi} & 0 \\ Sen_{\psi} & Cos_{\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Cos_{\phi}Cos_{\psi} - Sen_{\phi}Cos_{\theta}Sen_{\psi} & -Cos_{\phi}Sen_{\psi} - Sen_{\phi}Cos_{\theta}Cos_{\psi} & Sen_{\phi}Sen_{\theta} \\ Sen_{\phi}Cos_{\psi} + Cos_{\phi}Cos_{\theta}Sen_{\psi} & -Sen_{\phi}Sen_{\psi} + Cos_{\phi}Cos_{\theta}Cos_{\psi} & -Cos_{\phi}Sen_{\theta} \\ Sen_{\theta}Sen_{\psi} & Sen_{\theta}Cos_{\psi} & Cos_{\theta} \end{bmatrix}$$

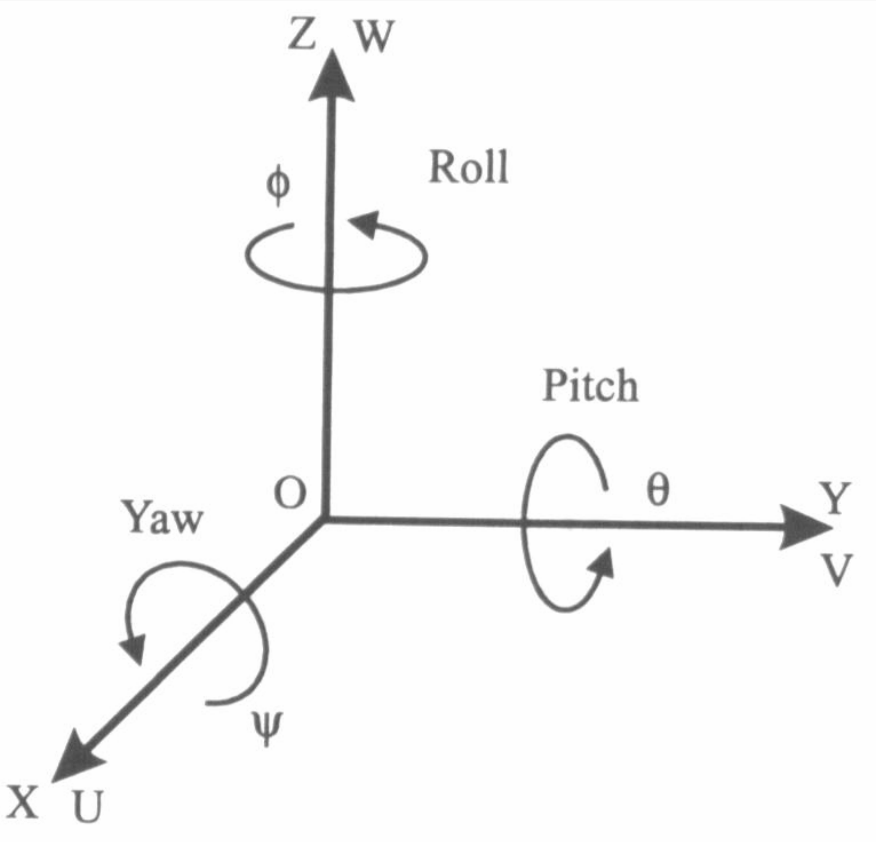
ORIENTACIÓN DEL ELEMENTO TERMINAL (IV)

- Ángulos de Euler ZYZ
  - Si se parte de los sistemas OXYZ y OUVW, inicialmente coincidentes, podemos colocar al sistema OUVW en cualquier orientación siguiendo los siguientes pasos (en orden):
    1. Girar el sistema OUVW un ángulo Φ con respecto al eje OZ, convirtiéndose en el OU´V´W´.
    2. Girar el sistema OU´V´W´ un ángulo θ con respecto al eje OV´ (Y inicial), conviertiendose en el OU´´V´´W´´.
    3. Girar el sistema OU´´V´´W´´ un ángulo ψ con respecto al eje OW´´ (Z inicial), convirtiéndose finalmente en el OU´´´V´´´W´´´



ORIENTACIÓN DEL ELEMENTO TERMINAL (V)

- Ángulos RPY
  - “roll” (balanceo), “pitch” (inclinación) y “yaw” (orientación). En naútica corresponde a alabeo, cabeceo y guiñada.
  - Representación utilizada generalmente en aeronáutica.
  - Si se parte de los sistemas OXYZ y OUVW, inicialmente coincidentes, podemos colocar al sistema OUVW en cualquier orientación siguiendo los siguientes pasos (en orden):
    1. Girar el sistema OUVW un ángulo ψ con respecto al eje OX. Es el denominado Yaw o guiñada.
    2. Girar el sistema OUVW un ángulo θ con respecto al eje OY. Es el denominado Pitch o cabeceo.
    3. Girar el sistema OUVW un ángulo Φ con respecto al eje OZ. Es el denominado Roll o alabeo.



ORIENTACIÓN DEL ELEMENTO TERMINAL (VI)

- Matriz de rotación (Ángulos RPY):

$$\mathrm{R} = R_{z,\phi}\, R_{y,\theta}\, R_{x,\psi} = \begin{bmatrix} Cos_\phi & -Sen_\phi & 0 \\ Sen_\phi & Cos_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cos_\theta & 0 & Sen_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -Sen_\theta & 0 & Cos_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos_\psi & -Sen_\psi \\ 0 & Sen_\psi & Cos_\psi \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} Cos_\phi Cos_\theta & Cos_\phi Sen_\theta Sen_\psi - Sen_\phi Cos_\psi & Cos_\phi Sen_\theta Cos_\psi + Sen_\phi Sen_\psi \\ Sen_\phi Cos_\theta & Sen_\phi Sen_\theta Sen_\psi - Cos_\phi Cos_\psi & Sen_\phi Sen_\theta Cos_\psi - Sen_\phi Sen_\psi \\ -Sen_\phi & Cos_\theta Sen_\psi & Cos_\theta Cos_\psi \end{bmatrix}$$