

# COORDENADAS HOMOGÉNEAS

# COORDENADAS HOMOGÉNEAS

- Una matriz de rotación 3 x 3 no nos da ninguna posibilidad para la traslación y el escalado.
- Introducimos una cuarta coordenada
  - $\mathbf{p}(x,y,z)$   $\mathbf{p}(wx,wy,wz,w)$  , donde  $w$  tiene un valor arbitrario y representa un factor de escala.
- Vector en coordenadas homogéneas:

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ejemplo:  $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$   $[2,3,4,1]^T = [4,6,8,2]^T = [-6,-9,-12,-3]^T$ .
- En general, la representación mediante coordenadas homogéneas de la localización de sólidos en un espacio  $n$ -dimensional se realiza a través de coordenadas de un espacio  $(n+1)$ -dimensional.

# MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA (I)

- Matriz 4x4 que representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \mathbf{f}_{1 \times 3} & \mathbf{w}_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

- En robótica la submatriz  $\mathbf{f}_{1 \times 3}$ , que representa una transformación de perspectiva, es nula; y la submatriz  $\mathbf{w}_{1 \times 1}$ , que representa un escalado global, es la unidad:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que representa la orientación y posición de un sistema OUVW rotado y trasladado con respecto al sistema de referencia OXYZ.

# MATRIZ DETRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA (II)

- Aplicaciones

- Representar la posición y orientación de un sistema girado y trasladado OUVW, con respecto a un sistema fijo de referencia OXYZ, que es lo mismo que representar una rotación y una traslación realizada sobre un sistema de referencia.

- **Transformar** un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema OUVW, a su expresión en coordenadas del sistema de referencia OXYZ.

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Rotar y trasladar** un vector con respecto a un sistema de referencia fijo OXYZ.

$$\begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA: TRASLACIÓN (I)

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Traslación
  - – Para un sistema OUVW trasladado únicamente un vector  $\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$  con respecto al sistema fijo OXYZ. La matriz homogénea será la matriz básica de traslación:
    - Un vector cualquiera  $\mathbf{r}$ , representado en OUVW por  $\mathbf{r}_{uvw}$ , tendrá como coordenadas en el sistema OXYZ:

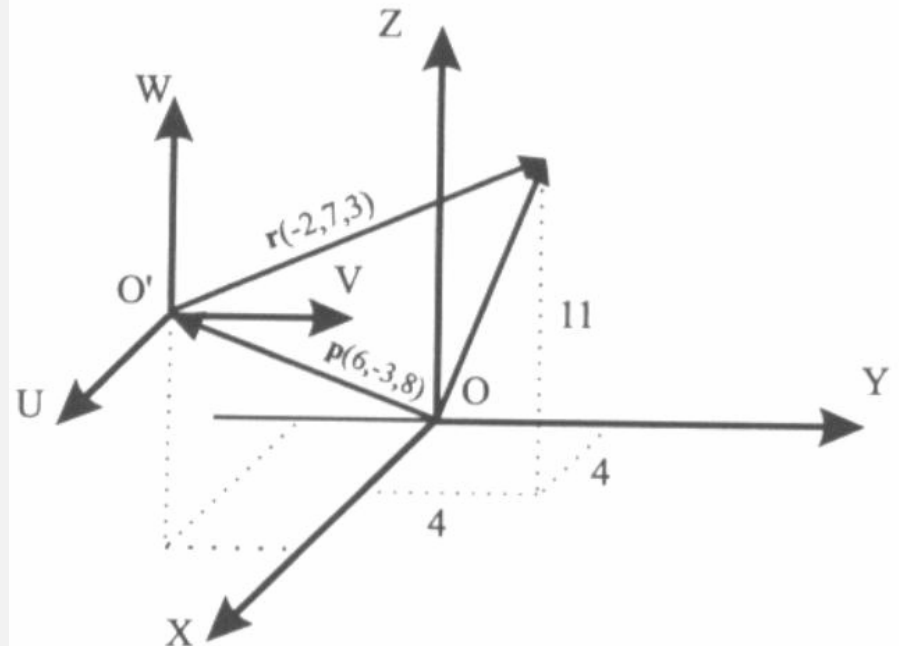
$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_u + p_x \\ r_v + p_y \\ r_w + p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA: TRASLACIÓN (II)

- Ejemplo 1.

- Tenemos un sistema  $O'UVW$  que está trasladado un vector  $\mathbf{p}(6, -3, 8)$  con respecto del sistema  $OXYZ$ . Calcular las coordenadas  $(r_x, r_y, r_z)$  del vector  $\mathbf{r}$  cuyas coordenadas con respecto al sistema  $O'UVW$  son  $\mathbf{r}_{uvw}(-2, 7, 3)$ .

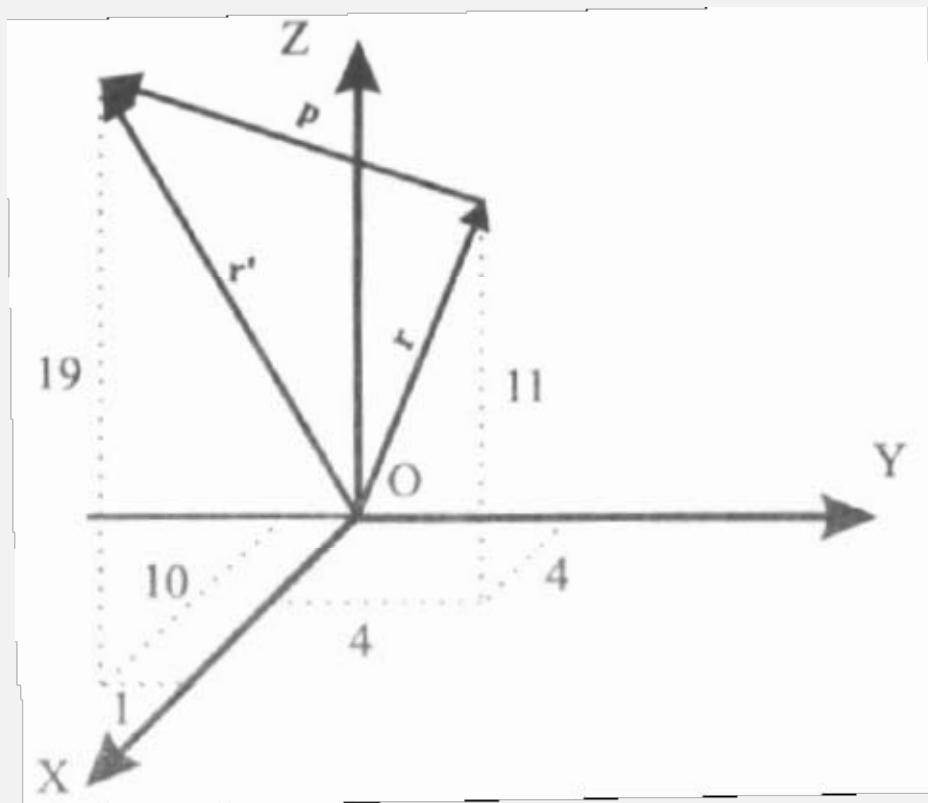
$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$



## MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA: TRASLACIÓN (III)

- Ejemplo 2.
  - Calcular el vector  $r'_{xyz}$  resultante de trasladar al vector  $r_{xyz}(4,4,11)$  según la transformación  $T(p)$  con  $p(6,-3,8)$ .

$$\begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA: ROTACIÓN (I)

- Supongamos que el sistema O'UVW sólo se encuentra rotado con respecto al sistema OXYZ. La submatriz de rotación  $\mathbf{R}_{3 \times 3}$  será la que defina la rotación.
- Se pueden definir tres matrices homogéneas básicas de rotación según el eje sobre el que se realice dicha rotación.

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{y}, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{z}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

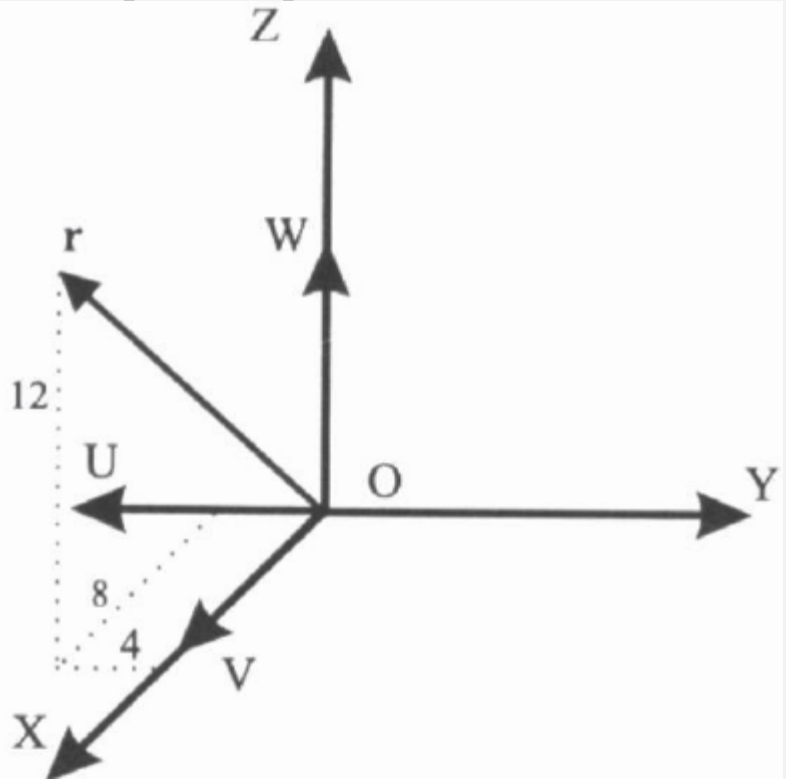


## MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA: ROTACIÓN (II)

- Ejemplo 1.

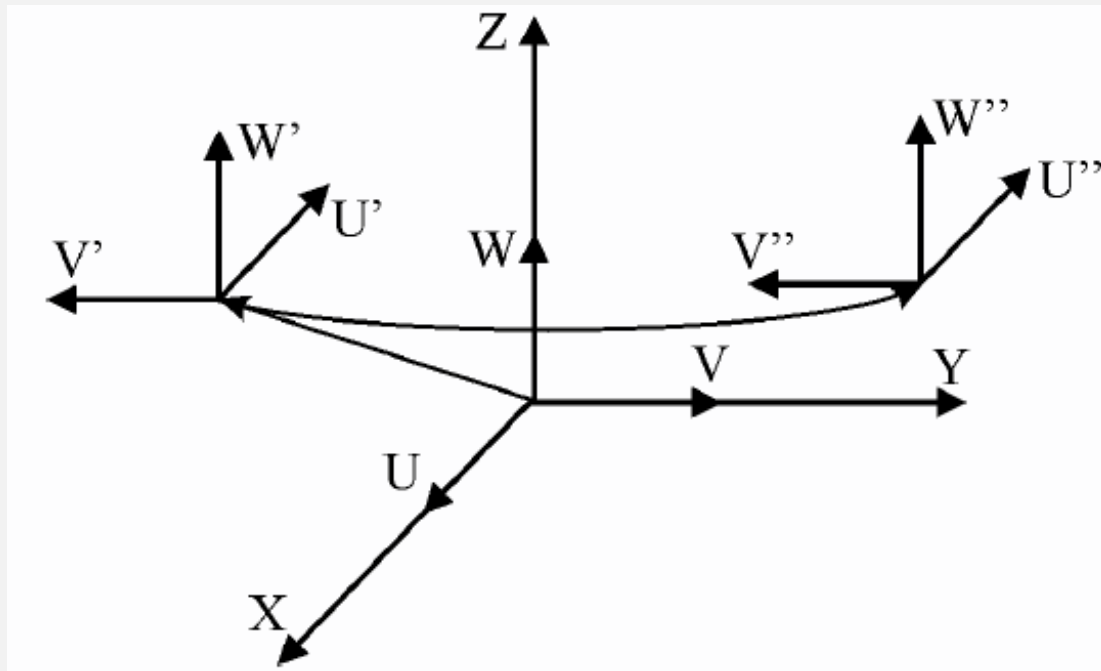
- Tenemos un sistema OUVW que se encuentra girado  $-90^\circ$  alrededor del eje OZ con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas del vector  $\mathbf{r}_{xyz}$  si  $\mathbf{r}_{uvw}=[8,4,12]$ .

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$



## COMBINACIÓN DE ROTACIONES Y TRASLACIONES (I)

- Es posible combinar rotaciones y traslaciones básicas multiplicando las matrices correspondientes.
- El producto **NO** es conmutativo:
  - Rotar y después trasladar  $\neq$  Trasladar y después rotar.



## COMBINACIÓN DE ROTACIONES Y TRASLACIONES (II)

- Rotación seguida de traslación:

$$\mathbf{T}((\mathbf{x}, \alpha), \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & p_y \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

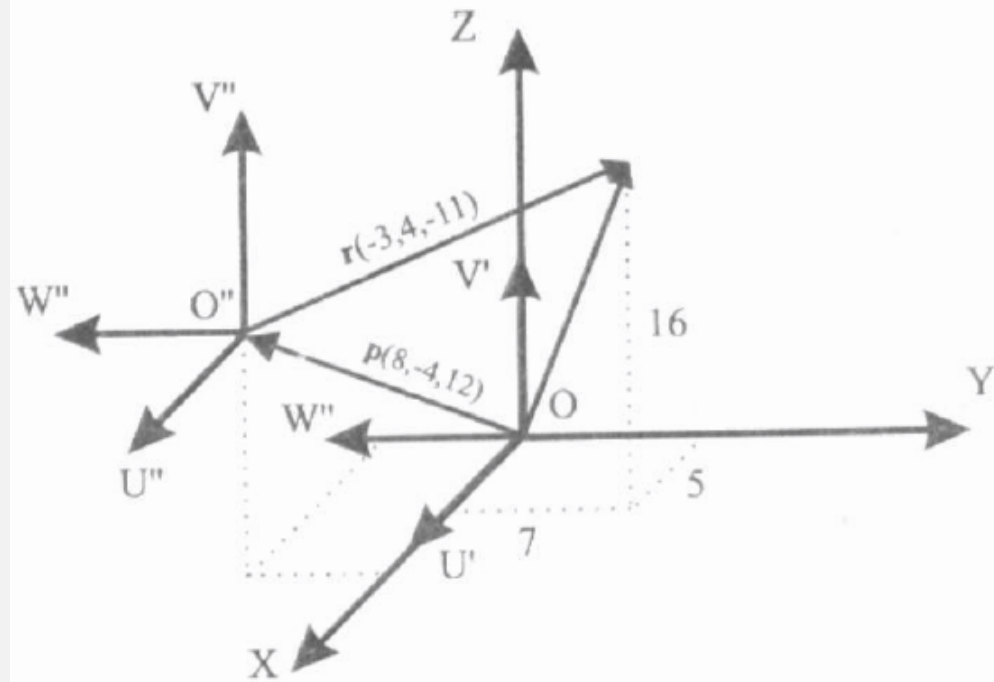
- Traslación seguida de rotación:

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}, (\mathbf{x}, \alpha)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & p_y \cos \alpha - p_z \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & p_y \sin \alpha + p_z \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# COMBINACIÓN DE ROTACIONES Y TRASLACIONES (III)

- Ejemplo 1. Rotación seguida de traslación
  - Un sistema OUVW ha sido girado  $90^\circ$  alrededor del eje OX y posteriormente trasladado un vector  $\mathbf{p}(8,-4,12)$  con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas  $(r_x, r_y, r_z)$  del vector  $\mathbf{r}$  con coordenadas  $\mathbf{r}_{uvw}(-3,4,-11)$

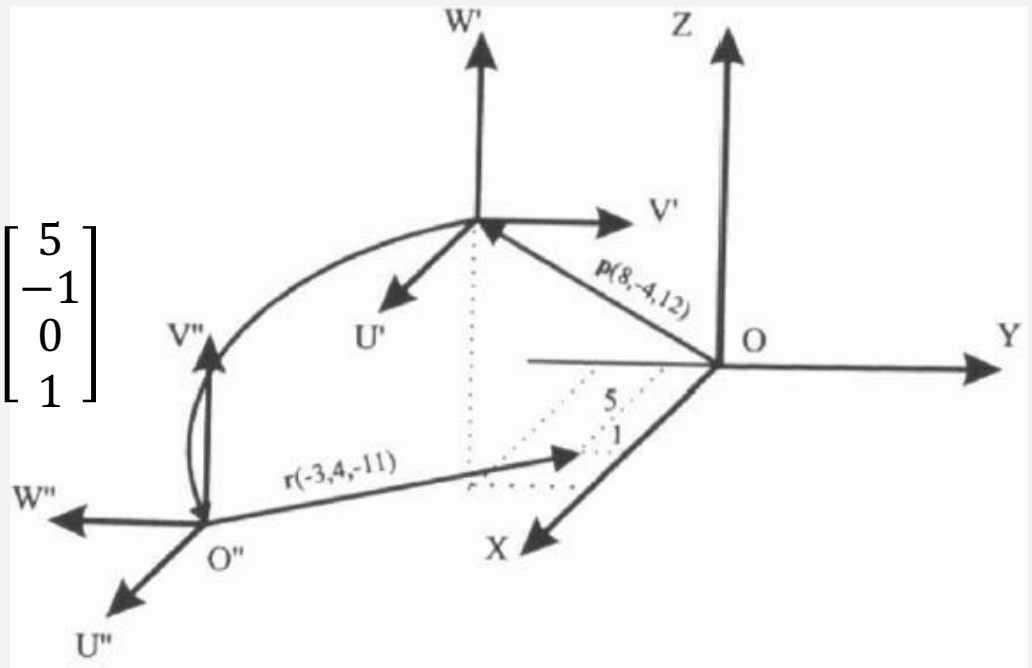
$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# COMBINACIÓN DE ROTACIONES Y TRASLACIONES (IV)

- Ejemplo 2. Traslación seguida de rotación
  - Un sistema OUVW ha sido trasladado un vector  $\mathbf{p}(8,-12,-4)$  con respecto al sistema OXYZ y girado  $90^\circ$  alrededor del eje OX. Calcular las coordenadas  $(r_x, r_y, r_z)$  del vector  $\mathbf{r}$  con coordenadas  $\mathbf{r}_{uvw}(-3,4,-11)$

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# COMPOSICIÓN DE MATRICES HOMOGÉNEAS (I)

- Una transformación compleja puede descomponerse en la aplicación consecutiva de transformaciones simples (giros básicos y traslaciones).
- Por ejemplo, una matriz que representa un giro de un ángulo  $\alpha$  sobre OX, seguido de un giro  $\Phi$  sobre OY y de un giro  $\theta$  sobre OZ, puede obtenerse por la composición de las matrices básicas de rotación:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \mathbf{T}(\mathbf{z}, \theta) \mathbf{T}(\mathbf{y}, \phi) \mathbf{T}(\mathbf{x}, \alpha) \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -C\alpha S\theta + S\phi C\theta S\alpha & S\alpha S\theta + S\phi C\theta C\alpha & 0 \\ C\phi S\theta & C\alpha C\theta + S\phi S\theta S\alpha & -S\alpha C\theta + S\phi S\theta C\alpha & 0 \\ -S\phi & C\phi S\alpha & C\alpha C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## COMPOSICIÓN DE MATRICES HOMOGÉNEAS (II)

- Criterios de composición de matrices homogéneas
  - Si el sistema fijo OXYZ y el sistema transformado OUVW son coincidentes, la matriz homogénea de transformación será la matriz identidad 4x4,  $I_4$ .
  - Si el sistema OUVW se obtiene mediante rotaciones y traslaciones definidas con respecto al sistema fijo OXYZ, la matriz homogénea que representa cada transformación se deberá premultiplicar sobre las matrices de las transformaciones previas.
  - Si el sistema OUVW se obtiene mediante rotaciones y traslaciones definidas con respecto al sistema móvil, la matriz homogénea que representa cada transformación se deberá postmultiplicar sobre las matrices de las transformaciones previas.

## COMPOSICIÓN DE MATRICES HOMOGÉNEAS (III)

- Ejemplo 1. PREMULTIPLICACIÓN

- Se quiere obtener la matriz de transformación que representa al sistema OUVW obtenido a partir del sistema fijo OXYZ mediante un giro de  $-90^\circ$  alrededor del eje OX, de una traslación de vector  $\mathbf{p}_{xyz}(5, 5, 10)$  y un giro de  $90^\circ$  sobre el eje OZ:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{T}(\mathbf{z}, 90^\circ)\mathbf{T}(\mathbf{p})\mathbf{T}(\mathbf{x}, -90^\circ) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$



## COMPOSICIÓN DE MATRICES HOMOGÉNEAS (IV)

- Ejemplo 2. POSTMULTIPLICACIÓN

- Obtener la matriz de transformación que representa las siguientes transformaciones sobre un sistema OXYZ fijo de referencia: traslación de un vector  $\mathbf{p}_{xyz}(-3, 10, 10)$ ; giro de  $-90^\circ$  sobre el eje OU del sistema trasladado y giro de  $90^\circ$  sobre el eje OV del sistema girado:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \mathbf{T}(\mathbf{p})\mathbf{T}(\mathbf{u}, -90^\circ)\mathbf{T}(\mathbf{v}, 90^\circ) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

# INVERSA DE UNA MATRIZ HOMOGÉNEA

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{n}^T \mathbf{p} \\ o_x & o_y & o_z & -\mathbf{o}^T \mathbf{p} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{a}^T \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Si se tiene la relación  $\mathbf{r}_{xyz} = \mathbf{T} \mathbf{r}_{uvw}$  y se multiplica en ambos miembros por  $\mathbf{T}^{-1}$  :

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{r}_{xyz} = \mathbf{r}_{uvw}$$

por lo que teniendo en cuenta el significado geométrico de una matriz de transformación, se deduce que los vectores fila de la submatriz de rotación de la matriz  $\mathbf{T}$ , representan los ejes principales del sistema de coordenadas de referencia OXYZ con respecto a OUVW.