

All-in at the River

Standard Code Library

Shanghai Jiao Tong University

Desprado2

fstqwq

AntiLeaf



“

那一年的区域赛是 ICPC2020 银川

最终我们差 100 分钟出线

当时我看见 fstqwq 趴在魄罗上 泣不成声

这个画面我永生难忘

那一刻我在想 如果能再给我一次机会 我一定要赢回所有
如今沈阳就在眼前 我必须考虑这会不会是我此生仅有的机会

我相信 Talancode 能有过去的霸主地位 fstqwq 功不可没

重铸交大荣光，我辈义不容辞

”

Contents

1 数学

1.1 插值	2
1.1.1 牛顿插值	2
1.1.2 拉格朗日插值	2
1.2 多项式	2
1.2.1 FFT	2
1.2.2 NTT	2
1.2.3 任意模数卷积(三模数NTT)	2
1.2.4 多项式操作	3
1.2.5 更优秀的多项式多点求值	6
1.2.6 拉格朗日反演	7
1.2.7 半在线卷积	7
1.2.8 常系数齐次线性递推 $O(k \log k \log n)$	7
1.3 FWT快速沃尔什变换	8
1.4 单纯形	9
1.5 线性代数	10
1.5.1 线性基	10
1.5.2 线性代数知识	10
1.6 常见数列	10
1.6.1 伯努利数	10
1.6.2 分拆数	10

2 数论

2.1 $O(n)$ 预处理逆元	10
2.2 杜教筛	10
2.3 线性筛	10
2.4 Miller-Rabin	11
2.5 Pollard's Rho	11

3 图论

3.1 最小生成树	11
3.1.1 Boruvka算法	11
3.1.2 动态最小生成树	12
3.1.3 Steiner Tree 斯坦纳树	13
3.2 最短路	13
3.2.1 k短路	13
3.3 仙人掌	14
3.3.1 仙人掌DP	14
3.4 二分图	15
3.4.1 KM二分图最大权匹配	15
3.5 一般图匹配	16
3.5.1 高斯消元	16
3.5.2 带花树	17
3.5.3 带权带花树	18
3.6 最大流	20
3.6.1 Dinic	20
3.6.2 ISAP	20
3.6.3 HLPP最高标号预流推进	21
3.7 费用流	22
3.7.1 SPFA费用流	22

4 数据结构

4.1 线段树	23
4.1.1 非递归线段树	23
4.1.2 主席树	23
4.2 陈丹琦分治	23
4.3 Treap	24
4.4 Splay	25
4.5 树分治	25
4.5.1 动态树分治	25
4.5.2 紫荆花之恋	26
4.6 LCT	27
4.6.1 不换根(弹飞绵羊)	27
4.6.2 换根/维护生成树	28

4.6.3 维护子树信息	29
--------------	----

4.6.4 模板题:动态QTREE4(询问树上相距最远点)	30
-------------------------------	----

4.7 虚树	32
4.8 长链剖分	33
4.9 梯子剖分	33
4.10 左偏树	34
4.11 常见根号思路	34

5 字符串

5.1 AC自动机	34
5.2 后缀数组	35
5.2.1 SA-IS	35
5.2.2 SAMSA	36
5.3 后缀自动机	37
5.4 回文树	37
5.4.1 广义回文树	37
5.5 Manacher马拉车	39
5.6 KMP	39
5.6.1 ex-KMP	39

6 动态规划

6.1 决策单调性 $O(n \log n)$	40
-------------------------	----

7 Miscellaneous

7.1 $O(1)$ 快速乘	40
7.2 $O(n^2)$ 高精度	41
7.3 xorshift	43
7.4 枚举子集	44
7.5 STL	44
7.6 pb_ds	44
7.7 rope	44

8 注意事项

8.1 常见下毒手法	44
8.2 场外相关	44
8.3 做题策略与心态调节	44

1. 数学

1.1 插值

1.1.1 牛顿插值

牛顿插值的原理是二项式反演.

二项式反演:

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g(k) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

可以用 e^x 和 e^{-x} 的麦克劳林展开式证明.

套用二项式反演的结论即可得到牛顿插值:

$$f(n) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} r_i$$

$$r_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} f(j)$$

其中 k 表示 $f(n)$ 的最高次项系数.

实现时可以用 k 次差分替代右边的式子:

```
1 for (int i = 0; i <= k; i++)
2   r[i] = f(i);
3 for (int j = 0; j < k; j++)
4   for (int i = k; i > j; i--)
5     r[i] -= r[i - 1];
```

注意到预处理 r_i 的式子满足卷积形式,必要时可以用FFT优化至 $O(k \log k)$ 预处理.

1.1.2 拉格朗日插值

$$f(x) = \sum_i f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

1.2 多项式

1.2.1 FFT

```
1 //使用时一定要注意double的精度是否足够(极限大概是10^14)
2
3 const double pi=acos((double)-1.0);
4
5 //手写复数类
6 //支持加减乘三种运算
7 //+=运算符如果用的不多可以不重载
8 struct Complex{
9     double a,b;//由于long double精度和double几乎相同,通常
10    ↪ 没有必要用long double
11    Complex(double a=0.0,double b=0.0):a(a),b(b){}
12    Complex operator+(const Complex &x)const{return
13    ↪ Complex(a+x.a,b+x.b);}
14    Complex operator-(const Complex &x)const{return
15    ↪ Complex(a-x.a,b-x.b);}
16    Complex operator*(const Complex &x)const{return
17    ↪ Complex(a*x.a-b*x.b,a*x.b+b*x.a);}
18    Complex &operator+=(const Complex &x){return
19    ↪ *this=*this+x;}
20 }w[maxn],w_inv[maxn];
21
22 //FFT初始化 O(n)
23 //需要调用sin, cos函数
24 void FFT_init(int n){
25     for(int i=0;i<n;i++)//根据单位根的旋转性质可以节省计
26     ↪ 算单位根逆元的时间
27     |   w[i]=w_inv[n-i-1]=Complex(cos(2*pi/n*i),sin(2*pi/n*i));
28     //当然不存单位根也可以,只不过在FFT次数较多时很可能会
29     ↪ 增大常数
```

```
23 }
24
25 //FFT主过程 O(n\log n)
26 void FFT(Complex *A,int n,int tp){
27     for(int i=1,j=0,k;i<n-1;i++){
28         k=n;
29         do j^=(k>>=1);while(j<k);
30         if(i<j)swap(A[i],A[j]);
31     }
32     for(int k=2;k<=n;k<=<1){
33         for(int i=0;i<n;i+=k)
34             for(int j=0;j<(k>>1);j++){
35                 Complex a=A[i+j], b = (tp>0?w:w_inv)[n /
36                 ↪ k * j] * A[i + j + (k / 2)];
37                 A[i+j]=a+b;
38                 A[i+j+(k>>1)]=a-b;
39             }
40     if(tp<0)for(int i=0;i<n;i++)A[i].a/=n;
41 }
```

1.2.2 NTT

```
1 constexpr int p = 998244353, g = 3; // p为模数, g为p的任
2   ↪ 意一个原根
3
4 void NTT(int *A, int n, int tp) { // n为变换长度,
5   ↪ tp为1或-1, 表示正/逆变换
6   ↪ 转算法, 原理是模拟加1
7   for (int i = 1, j = 0, k; i < n - 1; i++) { // O(n)旋
8       k = n;
9       do
10         j ^= (k >>= 1);
11       while (j < k);
12       if(i < j)
13         swap(A[i], A[j]);
14
15     for (int k = 2; k <= n; k <=<= 1) {
16         int wn = qpow(g, (tp > 0 ? (p - 1) / k : (p - 1)
17         ↪ / k * (long long)(p - 2) % (p - 1)));
18         for (int i = 0; i < n; i += k) {
19             int w = 1;
20             for (int j = 0; j < (k >> 1); j++, w = (long
21             ↪ long)w * wn % p){
22                 int a = A[i + j], b = (long long)w * A[i
23                 ↪ + j + (k >> 1)] % p;
24                 A[i + j] = (a + b) % p;
25                 A[i + j + (k >> 1)] = (a - b + p) % p;
26             } // 更好的写法是预处理单位根的次幂
27         }
28     }
29
30     if (tp < 0) {
31         int inv = qpow(n, p - 2); // 如果能预处理逆元更好
32         for (int i = 0; i < n; i++)
33             A[i] = (long long)A[i] * inv % p;
34     }
35 }
```

1.2.3 任意模数卷积(三模数NTT)

```
1 //只要求模数在2^30-1以内,无其他特殊要求
2 //常数很大,慎用
3 //在卷积结果不超过10^14时可以直接double暴力乘,这时就不要
4 //写任意模数卷积了
5 //这里有三模数NTT和拆系数FFT两个版本,通常后者常数要小一
6   ↪ 些
```

```

5 //但在答案不超过 $10^{18}$ 时可以改成双模数NTT,这时就比拆系
  ↳ 数FFT快一些了
6
7 //以下为三模数NTT,原理是选取三个乘积大于结果的NTT模数,最
  ↳ 后中国剩余定理合并
8 //以对23333333(不是质数)取模为例
9 const int
  ↳ maxn=262200,Mod=23333333,g=3,m[]={998244353,1004535809,1045430273},
10   m0_inv=669690699,m1_inv=332747959,M_inv=942377029;//这
  ↳ 三个模数最小原根都是3
11 const long long M=(long long)m[0]*m[1];
12
13 //主函数(当然更多时候包装一下比较好)
14 //用来卷积的是A和B
15 //需要调用mul
16 int n,N=1,A[maxn],B[maxn],C[maxn],D[maxn],ans[3][maxn];
17 int main(){
18   scanf("%d",&n);
19   while(N<(n<<1))N<<=1;
20   for(int i=0;i<n;i++)scanf("%d",&A[i]);
21   for(int i=0;i<n;i++)scanf("%d",&B[i]);
22   for(int i=0;i<3;i++)mul(m[i],ans[i]);
23   for(int i=0;i<n;i++)printf("%d ",China(ans[0]
  ↳ [i],ans[1][i],ans[2][i]));
24   return 0;
25 }
26
27 //mul  $O(n \log n)$ 
28 //包装了模NTT模数的卷积
29 //需要调用NTT
30 void mul(int p,int *ans){
31   copy(A,A+N,C);
32   copy(B,B+N,D);
33   NTT(C,N,1,p);
34   NTT(D,N,1,p);
35   for(int i=0;i<N;i++)ans[i]=(long long)C[i]*D[i]*p;
36   NTT(ans,N,-1,p);
37 }
38
39 //中国剩余定理  $O(1)$ 
40 //由于直接合并会爆Long Long,采用神奇的方法合并
41 //需要调用 $O(1)$ 快速乘
42 inline int China(int a0,int a1,int a2){
43   long long A=(mul((long long)a0*m1_inv,m[1],M)
44   +mul((long long)a1*m0_inv,m[0],M))%M;
45   int k=((a2-A)%m[2]+m[2])%m[2]*M_inv*m[2];
46   return (k%Mod*(M%Mod)%Mod+A%Mod)%Mod;
47 }
48
49 //-----分割
  ↳ 线-----
50
51 //以下为拆系数FFT,原理是减小结果范围使得double精度能够承
  ↳ 受
52 //仍然以模233333333为例
53 const int maxn=262200,p=23333333,M=4830;//M取值要使得结果
  ↳ 不超过 $10^{14}$ 
54
55 //需要开的数组
56 struct Complex{//内容略
57 }w[maxn],w_inv[maxn],A[maxn],B[maxn],C[maxn],D[maxn],F[maxn],G[maxn],H[maxn];
58
59 //主函数(当然更多时候包装一下比较好)
60 //需要调用FFT初始化,FFT
61 int main(){
62   scanf("%d",&n);
63   int N=1;
64   while(N<(n<<1))N<<=1;
65   for(int i=0,x;i<n;i++){
66     scanf("%d",&x);
67     A[i]=x/M;

```

```

68     B[i]=x%M;
69   }
70   for(int i=0,x;i<n;i++){
71     scanf("%d",&x);
72     C[i]=x/M;
73     D[i]=x%M;
74   }
75   FFT_init(N);
76   FFT(A,N,1);
77   FFT(B,N,1);
78   FFT(C,N,1);
79   FFT(D,N,1);
80   for(int i=0;i<N;i++){
81     F[i]=A[i]*C[i];
82     G[i]=A[i]*D[i]+B[i]*C[i];
83     H[i]=B[i]*D[i];
84   }
85   FFT(F,N,-1);
86   FFT(G,N,-1);
87   FFT(H,N,-1);
88   for(int i=0;i<n;i++)
89     printf("%d\n",(int)((M*M*((long long)
  ↳ (F[i].a+0.5)%p)%p+
90     M*((long long)(G[i].a+0.5)%p)%p+(long long)
  ↳ (H[i].a+0.5)%p)%p));
91   return 0;
92 }

```

1.2.4 多项式操作

```

1 // A为输入, C为输出, n为所需长度且必须是 $2^k$ 
2 // 多项式求逆, 要求A常数项不为0
3 void get_inv(int *A, int *C, int n) {
4   static int B[maxn];
5
6   memset(C, 0, sizeof(int) * (n * 2));
7   C[0] = qpow(A[0], p - 2); // 一般常数项都是1, 直接赋值
  ↳ 为1就可以
8
9   for (int k = 2; k <= n; k <= 1) {
10     memcpy(B, A, sizeof(int) * k);
11     memset(B + k, 0, sizeof(int) * k);
12
13     NTT(B, k * 2, 1);
14     NTT(C, k * 2, 1);
15
16     for (int i = 0; i < k * 2; i++) {
17       C[i] = (2 - (long long)B[i] * C[i]) % p *
  ↳ C[i] % p;
18       if (C[i] < 0)
19         C[i] += p;
20     }
21
22     NTT(C, k * 2, -1);
23
24     memset(C + k, 0, sizeof(int) * k);
25   }
26 }
27
28 // 开根
29 void get_sqrt(int *A, int *C, int n) {
30   static int B[maxn], D[maxn];
31
32   memset(C, 0, sizeof(int) * (n * 2));
33   C[0] = 1; // 如果不是1就要考虑二次剩余
34
35   for (int k = 2; k <= n; k *= 2) {
36     memcpy(B, A, sizeof(int) * k);

```

```

37     memset(B + k, 0, sizeof(int) * k);
38
39     get_inv(C, D, k);
40
41     NTT(B, k * 2, 1);
42     NTT(D, k * 2, 1);
43
44     for (int i = 0; i < k * 2; i++)
45         B[i] = (long long)B[i] * D[i] % p;
46
47     NTT(B, k * 2, -1);
48
49     for (int i = 0; i < k; i++)
50         C[i] = (long long)(C[i] + B[i]) * inv_2 %
51             ↪ p; // inv_2 是 2 的逆元
52 }
53
54 // 求导
55 void get_derivative(int *A, int *C, int n) {
56     for (int i = 1; i < n; i++)
57         C[i - 1] = (long long)A[i] * i % p;
58
59     C[n - 1] = 0;
60 }
61
62 // 不定积分, 最好预处理逆元
63 void get_integrate(int *A, int *C, int n) {
64     for (int i = 1; i < n; i++)
65         C[i] = (long long)A[i - 1] * qpow(i, p - 2) % p;
66
67     C[0] = 0; // 不定积分没有常数项
68 }
69
70 // 多项式 ln, 要求 A 常数项不为 0
71 void get_ln(int *A, int *C, int n) { // 通常情况下 A 常数项
72     ↪ 都是 1
73     static int B[maxn];
74
75     get_derivative(A, B, n);
76     memset(B + n, 0, sizeof(int) * n);
77
78     get_inv(A, C, n);
79
80     NTT(B, n * 2, 1);
81     NTT(C, n * 2, 1);
82
83     for (int i = 0; i < n * 2; i++)
84         B[i] = (long long)B[i] * C[i] % p;
85
86     NTT(B, n * 2, -1);
87
88     get_integrate(B, C, n);
89
90     memset(C + n, 0, sizeof(int) * n);
91 }
92
93 // 多项式 exp, 要求 A 没有常数项
94 // 常数很大且总代码较长, 一般来说最好替换为分治 FFT
95 // 分治 FFT 依据: 设  $G(x) = \exp F(x)$ , 则有  $g_{-i} = \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} f_k g_{i-k}$ 
96 void get_exp(int *A, int *C, int n) {
97     static int B[maxn];
98
99     memset(C, 0, sizeof(int) * (n * 2));
100     C[0] = 1;
101
102     for (int k = 2; k <= n; k <= 1) {
103         get_ln(C, B, k);

```

```

104         for (int i = 0; i < k; i++) {
105             B[i] = A[i] - B[i];
106             if (B[i] < 0)
107                 B[i] += p;
108         }
109         (++B[0]) %= p;
110
111         NTT(B, k * 2, 1);
112         NTT(C, k * 2, 1);
113
114         for (int i = 0; i < k * 2; i++)
115             C[i] = (long long)C[i] * B[i] % p;
116
117         NTT(C, k * 2, -1);
118
119         memset(C + k, 0, sizeof(int) * k);
120     }
121 }
122
123 // 多项式 k 次幂, 在 A 常数项不为 1 时需要转化
124 // 常数较大且总代码较长, 在时间要求不高时最好替换为暴力
125     ↪ 快速幂
126 void get_pow(int *A, int *C, int n, int k) {
127     static int B[maxn];
128
129     get_ln(A, B, n);
130
131     for (int i = 0; i < n; i++)
132         B[i] = (long long)B[i] * k % p;
133
134     get_exp(B, C, n);
135 }
136
137 // 多项式除法,  $A / B$ , 结果输出在 C
138 // A 的次数为 n, B 的次数为 m
139 void get_div(int *A, int *B, int *C, int n, int m) {
140     static int f[maxn], g[maxn], gi[maxn];
141
142     if (n < m) {
143         memset(C, 0, sizeof(int) * m);
144         return;
145     }
146
147     int N = 1;
148     while (N < (n - m + 1))
149         N <<= 1;
150
151     memset(f, 0, sizeof(int) * N * 2);
152     memset(g, 0, sizeof(int) * N * 2);
153     // memset(gi, 0, sizeof(int) * N);
154
155     for (int i = 0; i < n - m + 1; i++)
156         f[i] = A[n - i - 1];
157     for (int i = 0; i < m && i < n - m + 1; i++)
158         g[i] = B[m - i - 1];
159
160     get_inv(g, gi, N);
161
162     for (int i = n - m + 1; i < N; i++)
163         gi[i] = 0;
164
165     NTT(f, N * 2, 1);
166     NTT(gi, N * 2, 1);
167
168     for (int i = 0; i < N * 2; i++)
169         f[i] = (long long)f[i] * gi[i] % p;
170
171     NTT(f, N * 2, -1);
172
173     for (int i = 0; i < n - m + 1; i++)

```

```

173     C[i] = f[n - m - i];
174 }
175
176 // 多项式取模, 余数输出到C, 商输出到D
177 void get_mod(int *A, int *B, int *C, int *D, int n, int
    ↪ m) {
178     static int b[maxn], d[maxn];
179
180     if (n < m) {
181         memcpy(C, A, sizeof(int) * n);
182
183         if (D)
184             memset(D, 0, sizeof(int) * m);
185
186         return;
187     }
188
189     get_div(A, B, d, n, m);
190
191     if (D) { // D是商, 可以选择不要
192         for (int i = 0; i < n - m + 1; i++)
193             D[i] = d[i];
194     }
195
196     int N = 1;
197     while (N < n)
198         N *= 2;
199
200     memcpy(b, B, sizeof(int) * m);
201
202     NTT(b, N, 1);
203     NTT(d, N, 1);
204
205     for (int i = 0; i < N; i++)
206         b[i] = (long long)d[i] * b[i] % p;
207
208     NTT(b, N, -1);
209
210     for (int i = 0; i < m - 1; i++)
211         C[i] = (A[i] - b[i] + p) % p;
212
213     memset(b, 0, sizeof(int) * N);
214     memset(d, 0, sizeof(int) * N);
215 }
216
217 // 多点求值要用的数组
218 int q[maxn], ans[maxn]; // q是要代入的各个系数, ans是求出
    ↪ 的值
219 int tg[25][maxn * 2], tf[25][maxn]; // 辅助数组, tg是预处
    ↪ 理乘积,
220 // tf是项数越来越少的f, tf[0]就是原来的函数
221
222 void pretreat(int l, int r, int k) { // 多点求值预处理
223     static int A[maxn], B[maxn];
224
225     int *g = tg[k] + 1 * 2;
226
227     if (r - l + 1 <= 200) {
228         g[0] = 1;
229
230         for (int i = l; i <= r; i++) {
231             for (int j = i - l + 1; j; j--) {
232                 g[j] = (g[j - 1] - (long long)g[j] *
    ↪ q[i]) % p;
233                 if (g[j] < 0)
234                     g[j] += p;
235             }
236             g[0] = (long long)g[0] * (p - q[i]) % p;
237         }
238
239         return;
240     }
241
242     int mid = (l + r) / 2;
243
244     pretreat(l, mid, k + 1);
245     pretreat(mid + 1, r, k + 1);
246
247     if (!k)
248         return;
249
250     int N = 1;
251     while (N <= r - l + 1)
252         N *= 2;
253
254     int *gl = tg[k + 1] + 1 * 2, *gr = tg[k + 1] + (mid +
    ↪ 1) * 2;
255
256     memset(A, 0, sizeof(int) * N);
257     memset(B, 0, sizeof(int) * N);
258
259     memcpy(A, gl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
260     memcpy(B, gr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
261
262     NTT(A, N, 1);
263     NTT(B, N, 1);
264
265     for (int i = 0; i < N; i++)
266         A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
267
268     NTT(A, N, -1);
269
270     for (int i = 0; i <= r - l + 1; i++)
271         g[i] = A[i];
272 }
273
274 void solve(int l, int r, int k) { // 多项式多点求值主过程
275     int *f = tf[k];
276
277     if (r - l + 1 <= 200) {
278         for (int i = l; i <= r; i++) {
279             int x = q[i];
280
281             for (int j = r - l; ~j; j--)
282                 ans[i] = ((long long)ans[i] * x + f[j]) %
    ↪ p;
283         }
284
285         return;
286     }
287
288     int mid = (l + r) / 2;
289     int *ff = tf[k + 1], *gl = tg[k + 1] + 1 * 2, *gr =
    ↪ tg[k + 1] + (mid + 1) * 2;
290
291     get_mod(f, gl, ff, NULL, r - l + 1, mid - l + 2);
292     solve(l, mid, k + 1);
293
294     memset(gl, 0, sizeof(int) * (mid - l + 2));
295     memset(ff, 0, sizeof(int) * (mid - l + 1));
296
297     get_mod(f, gr, ff, NULL, r - l + 1, r - mid + 1);
298     solve(mid + 1, r, k + 1);
299
300     memset(gr, 0, sizeof(int) * (r - mid + 1));
301     memset(ff, 0, sizeof(int) * (r - mid));
302 }
303
304 // f < x^n, m个询问, 询问是0-based, 当然改成1-based也很简
    ↪ 单

```

```

305 void get_value(int *f, int *x, int *a, int n, int m) {
306     if (m <= n)
307         m = n + 1;
308     if (n < m - 1)
309         n = m - 1; // 补零方便处理
310
311     memcpy(tf[0], f, sizeof(int) * n);
312     memcpy(q, x, sizeof(int) * m);
313
314     pretreat(0, m - 1, 0);
315     solve(0, m - 1, 0);
316
317     if (a) // 如果a是NULL, 代表不复制答案, 直接用ans数组
318         memcpy(a, ans, sizeof(int) * m);
319 }

```

1.2.5 更优秀的多项式多点求值

这个做法不需要写求逆和取模, 但是神乎其技, 完全搞不懂原理
清空和复制之类的地方容易抄错, 抄的时候要注意

```

1  int q[maxn], ans[maxn]; // q是要代入的各个系数, ans是求出
    ↪ 的值
2  int tg[25][maxn * 2], tf[25][maxn]; // 辅助数组, tg是预处
    ↪ 理乘积,
3  // tf是项数越来越少的f, tf[0]就是原来的函数
4
5  void pretreat(int l, int r, int k) { // 预处理
6      static int A[maxn], B[maxn];
7
8      int *g = tg[k] + 1 * 2;
9
10     if (r - l + 1 <= 1) {
11         g[0] = 1;
12
13         for (int i = 1; i <= r; i++) {
14             for (int j = i - 1 + 1; j; j--) {
15                 g[j] = (g[j - 1] - (long long)g[j] *
16                     ↪ q[i]) % p;
17                 if (g[j] < 0)
18                     g[j] += p;
19             }
20             g[0] = (long long)g[0] * (p - q[i]) % p;
21         }
22
23         reverse(g, g + r - l + 2);
24
25         return;
26     }
27
28     int mid = (l + r) / 2;
29
30     pretreat(l, mid, k + 1);
31     pretreat(mid + 1, r, k + 1);
32
33     int N = 1;
34     while (N <= r - l + 1)
35         N *= 2;
36
37     int *gl = tg[k + 1] + 1 * 2, *gr = tg[k + 1] + (mid +
38         ↪ 1) * 2;
39
40     memset(A, 0, sizeof(int) * N);
41     memset(B, 0, sizeof(int) * N);
42
43     memcpy(A, gl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
44     memcpy(B, gr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
45
46     NTT(A, N, 1);
47     NTT(B, N, 1);

```

```

46     for (int i = 0; i < N; i++)
47         A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
48
49     NTT(A, N, -1);
50
51     for (int i = 0; i <= r - l + 1; i++)
52         g[i] = A[i];
53 }
54
55 void solve(int l, int r, int k) { // 主过程
56     static int a[maxn], b[maxn];
57
58     int *f = tf[k];
59
60     if (l == r) {
61         ans[l] = f[0];
62         return;
63     }
64
65     int mid = (l + r) / 2;
66     int *ff = tf[k + 1], *gl = tg[k + 1] + 1 * 2, *gr =
67         ↪ tg[k + 1] + (mid + 1) * 2;
68
69     int N = 1;
70     while (N < r - l + 2)
71         N *= 2;
72
73     memcpy(a, f, sizeof(int) * (r - l + 2));
74     memcpy(b, gr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
75     reverse(b, b + r - mid + 1);
76
77     NTT(a, N, 1);
78     NTT(b, N, 1);
79     for (int i = 0; i < N; i++)
80         b[i] = (long long)a[i] * b[i] % p;
81
82     reverse(b + 1, b + N);
83     NTT(b, N, 1);
84     int n_inv = qpow(N, p - 2);
85     for (int i = 0; i < N; i++)
86         b[i] = (long long)b[i] * n_inv % p;
87
88     for (int i = 0; i < mid - l + 2; i++)
89         ff[i] = b[i + r - mid];
90
91     memset(a, 0, sizeof(int) * N);
92     memset(b, 0, sizeof(int) * N);
93
94     solve(l, mid, k + 1);
95
96     memset(ff, 0, sizeof(int) * (mid - l + 2));
97
98     memcpy(a, f, sizeof(int) * (r - l + 2));
99     memcpy(b, gl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
100     reverse(b, b + mid - l + 2);
101
102     NTT(a, N, 1);
103     NTT(b, N, 1);
104     for (int i = 0; i < N; i++)
105         b[i] = (long long)a[i] * b[i] % p;
106
107     reverse(b + 1, b + N);
108     NTT(b, N, 1);
109     for (int i = 0; i < N; i++)
110         b[i] = (long long)b[i] * n_inv % p;
111
112     for (int i = 0; i < r - mid + 1; i++)
113         ff[i] = b[i + mid - l + 1];

```



```

114     memset(a, 0, sizeof(int) * N);
115     memset(b, 0, sizeof(int) * N);
116
117     solve(mid + 1, r, k + 1);
118
119     memset(gl, 0, sizeof(int) * (mid - l + 2));
120     memset(gr, 0, sizeof(int) * (r - mid + 1));
121     memset(ff, 0, sizeof(int) * (r - mid + 1));
122 }
123
124 // f < x^n, m个询问, 0-based
125 void get_value(int *f, int *x, int *a, int n, int m) {
126     static int c[maxn], d[maxn];
127
128     if (m <= n)
129         m = n + 1;
130     if (n < m - 1)
131         n = m - 1; // 补零
132
133     memcpy(q, x, sizeof(int) * m);
134
135     pretreat(0, m - 1, 0);
136
137     int N = 1;
138     while (N < m)
139         N *= 2;
140
141     get_inv(tg[0], c, N);
142
143     fill(c + m, c + N, 0);
144     reverse(c, c + m);
145
146     memcpy(d, f, sizeof(int) * m);
147
148     NTT(c, N * 2, 1);
149     NTT(d, N * 2, 1);
150     for (int i = 0; i < N * 2; i++)
151         c[i] = (long long)c[i] * d[i] % p;
152     NTT(c, N * 2, -1);
153
154     for (int i = 0; i < m; i++)
155         tf[0][i] = c[i + n];
156
157     solve(0, m - 1, 0);
158
159     if (a) // 如果a=NULL, 代表不复制答案, 直接用ans数组
160         memcpy(a, ans, sizeof(int) * m);
161 }
162

```

1.2.6 拉格朗日反演

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为复合逆 则有

$$[x^n]g(x) = \frac{1}{n}[x^{n-1}] \left(\frac{x}{f(x)} \right)^n$$

$$[x^n]h(g(x)) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]h'(x) \left(\frac{x}{f(x)} \right)^n$$

1.2.7 半在线卷积

```

1 void solve(int l, int r) {
2     if (r <= m)
3         return;
4
5     if (r - l == 1) {
6         if (l == m)
7             f[l] = a[m];
8         else

```

```

9         f[l] = (long long)f[l] * inv[l - m] % p;
10
11     for (int i = l, t = (long long)l * f[l] % p; i <=
        ↪ n; i += 1)
12         g[i] = (g[i] + t) % p;
13
14     return;
15 }
16
17 int mid = (l + r) / 2;
18
19 solve(l, mid);
20
21 if (l == 0) {
22     for (int i = 1; i < mid; i++) {
23         A[i] = f[i];
24         B[i] = (c[i] + g[i]) % p;
25     }
26     NTT(A, r, 1);
27     NTT(B, r, 1);
28     for (int i = 0; i < r; i++)
29         A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
30     NTT(A, r, -1);
31
32     for (int i = mid; i < r; i++)
33         f[i] = (f[i] + A[i]) % p;
34 }
35 else {
36     for (int i = 0; i < r - l; i++)
37         A[i] = f[i];
38     for (int i = l; i < mid; i++)
39         B[i - l] = (c[i] + g[i]) % p;
40     NTT(A, r - l, 1);
41     NTT(B, r - l, 1);
42     for (int i = 0; i < r - l; i++)
43         A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
44     NTT(A, r - l, -1);
45
46     for (int i = mid; i < r; i++)
47         f[i] = (f[i] + A[i - l]) % p;
48
49     memset(A, 0, sizeof(int) * (r - l));
50     memset(B, 0, sizeof(int) * (r - l));
51
52     for (int i = l; i < mid; i++)
53         A[i - l] = f[i];
54     for (int i = 0; i < r - l; i++)
55         B[i] = (c[i] + g[i]) % p;
56     NTT(A, r - l, 1);
57     NTT(B, r - l, 1);
58     for (int i = 0; i < r - l; i++)
59         A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
60     NTT(A, r - l, -1);
61
62     for (int i = mid; i < r; i++)
63         f[i] = (f[i] + A[i - l]) % p;
64 }
65
66 memset(A, 0, sizeof(int) * (r - l));
67 memset(B, 0, sizeof(int) * (r - l));
68
69 solve(mid, r);
70 }

```

1.2.8 常系数齐次线性递推 $O(k \log k \log n)$

如果只有一次这个操作可以像代码里一样加上一个只求一次逆的优化, 否则就乖乖每次做完整的除法和取模


```

1 // 多项式取模, 余数输出到C, 商输出到D
2 void get_mod(int *A, int *B, int *C, int *D, int n, int
   ↪ m) {
3     static int b[maxn], d[maxn];
4     static bool flag = false;
5
6     if (n < m) {
7         memcpy(C, A, sizeof(int) * n);
8
9         if (D)
10             memset(D, 0, sizeof(int) * m);
11
12         return;
13     }
14
15     get_div(A, B, d, n, m);
16
17     if (D) { // D是商, 可以选择不要
18         for (int i = 0; i < n - m + 1; i++)
19             D[i] = d[i];
20     }
21
22     int N = 1;
23     while (N < n)
24         N *= 2;
25
26     if (!flag) {
27         memcpy(b, B, sizeof(int) * m);
28         NTT(b, N, 1);
29
30         flag = true;
31     }
32
33     NTT(d, N, 1);
34
35     for (int i = 0; i < N; i++)
36         d[i] = (long long)d[i] * b[i] % p;
37
38     NTT(d, N, -1);
39
40     for (int i = 0; i < m - 1; i++)
41         C[i] = (A[i] - d[i] + p) % p;
42
43     // memset(b, 0, sizeof(int) * N);
44     memset(d, 0, sizeof(int) * N);
45 }
46
47 // g < x^n, f是输出答案的数组
48 void pow_mod(long long k, int *g, int n, int *f) {
49     static int a[maxn], t[maxn];
50
51     memset(f, 0, sizeof(int) * (n * 2));
52
53     f[0] = a[1] = 1;
54
55     int N = 1;
56     while (N < n * 2 - 1)
57         N *= 2;
58
59     while (k) {
60         NTT(a, N, 1);
61
62         if (k & 1) {
63             memcpy(t, f, sizeof(int) * N);
64
65             NTT(t, N, 1);
66             for (int i = 0; i < N; i++)
67                 t[i] = (long long)t[i] * a[i] % p;
68             NTT(t, N, -1);

```

```

69         get_mod(t, g, f, NULL, n * 2 - 1, n);
70     }
71
72     for (int i = 0; i < N; i++)
73         a[i] = (long long)a[i] * a[i] % p;
74     NTT(a, N, -1);
75
76     memcpy(t, a, sizeof(int) * (n * 2 - 1));
77     get_mod(t, g, a, NULL, n * 2 - 1, n);
78     fill(a + n - 1, a + N, 0);
79
80     k >>= 1;
81 }
82
83     memset(a, 0, sizeof(int) * (n * 2));
84 }
85
86 // f_n = \sum_{i=1}^m f_{n-i} a_i
87 // f是0~m-1项的初值
88 int linear_recurrence(long long n, int m, int *f, int *a)
   ↪ {
89     static int g[maxn], c[maxn];
90
91     memset(g, 0, sizeof(int) * (m * 2 + 1));
92
93     for (int i = 0; i < m; i++)
94         g[i] = (p - a[m - i]) % p;
95     g[m] = 1;
96
97     pow_mod(n, g, m + 1, c);
98
99     int ans = 0;
100     for (int i = 0; i < m; i++)
101         ans = (ans + (long long)c[i] * f[i]) % p;
102
103     return ans;
104 }
105

```

1.3 FWT快速沃尔什变换

```

1 // 注意FWT常数比较小, 这点与FFT/NTT不同
2 // 以下代码均以模质数情况为例, 其中n为变换长度, tp表示
   ↪ 正/逆变换
3
4 // 按位或版本
5 void FWT_or(int *A, int n, int tp) {
6     for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
7         for (int i = 0; i < n; i += k)
8             for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
9                 if (tp > 0)
10                     A[i + j + k / 2] = (A[i + j + k / 2]
   ↪ + A[i + j]) % p;
11                 else
12                     A[i + j + k / 2] = (A[i + j + k / 2]
   ↪ - A[i + j] + p) % p;
13             }
14 }
15
16 // 按位与版本
17 void FWT_and(int *A, int n, int tp) {
18     for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
19         for (int i = 0; i < n; i += k)
20             for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
21                 if (tp > 0)
22                     A[i + j] = (A[i + j] + A[i + j + k /
   ↪ 2]) % p;
23                 else

```

```

24 |         A[i + j] = (A[i + j] - A[i + j + k /
25 |             ↪ 2] + p) % p;
26 |     }
27 | }
28 | // 按位异或版本
29 | void FWT_xor(int *A, int n, int tp) {
30 |     for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
31 |         for (int i = 0; i < n; i += k)
32 |             for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
33 |                 int a = A[i + j], b = A[i + j + k / 2];
34 |                 A[i + j] = (a + b) % p;
35 |                 A[i + j + k / 2] = (a - b + p) % p;
36 |             }
37 |
38 |     if (tp < 0) {
39 |         int inv = qpow(n % p, p - 2); // n的逆元, 在不取
40 |             ↪ 模时需要用每层除以2代替
41 |         for (int i = 0; i < n; i++)
42 |             A[i] = A[i] * inv % p;
43 |     }

```

1.4 单纯形

```

1 | const double eps = 1e-10;
2 |
3 | double A[maxn][maxn], x[maxn];
4 | int n, m, t, id[maxn * 2];
5 |
6 | // 方便起见, 这里附上主函数
7 | int main() {
8 |     scanf("%d%d%d", &n, &m, &t);
9 |
10 |    for (int i = 1; i <= n; i++) {
11 |        scanf("%lf", &A[0][i]);
12 |        id[i] = i;
13 |    }
14 |
15 |    for (int i = 1; i <= m; i++) {
16 |        for (int j = 1; j <= n; j++)
17 |            scanf("%lf", &A[i][j]);
18 |
19 |        scanf("%lf", &A[i][0]);
20 |    }
21 |
22 |    if (!inititalize())
23 |        printf("Infeasible"); // 无解
24 |    else if (!simplex())
25 |        printf("Unbounded"); // 最优解无限大
26 |
27 |    else {
28 |        printf("%.15lf\n", -A[0][0]);
29 |        if (t) {
30 |            for (int i = 1; i <= m; i++)
31 |                x[id[i + n]] = A[i][0];
32 |            for (int i = 1; i <= n; i++)
33 |                printf("%.15lf ", x[i]);
34 |        }
35 |    }
36 |    return 0;
37 | }
38 |
39 | //初始化
40 | //对于初始解可行的问题, 可以把初始化省略掉
41 | bool inititalize() {
42 |     while (true) {
43 |         double t = 0.0;
44 |         int l = 0, e = 0;

```

```

45 |         for (int i = 1; i <= m; i++)
46 |             if (A[i][0] + eps < t) {
47 |                 t = A[i][0];
48 |                 l = i;
49 |             }
50 |
51 |         if (!l)
52 |             return true;
53 |
54 |         for (int i = 1; i <= n; i++)
55 |             if (A[l][i] < -eps && (!e || id[i] < id[e]))
56 |                 e = i;
57 |
58 |         if (!e)
59 |             return false;
60 |
61 |         pivot(l, e);
62 |     }
63 | }
64 |
65 | //求解
66 | bool simplex(){
67 |     while (true) {
68 |         int l = 0, e = 0;
69 |         for (int i = 1; i <= n; i++)
70 |             if (A[0][i] > eps && (!e || id[i] < id[e]))
71 |                 e = i;
72 |
73 |         if (!e)
74 |             return true;
75 |
76 |         double t = 1e50;
77 |         for (int i = 1; i <= m; i++)
78 |             if (A[i][e] > eps && A[i][0] / A[i][e] < t) {
79 |                 l = i;
80 |                 t = A[i][0] / A[i][e];
81 |             }
82 |
83 |         if (!l)
84 |             return false;
85 |
86 |         pivot(l, e);
87 |     }
88 | }
89 |
90 | //转轴操作, 本质是在凸包上沿着一条棱移动
91 | void pivot(int l, int e) {
92 |     swap(id[e], id[n + l]);
93 |     double t = A[l][e];
94 |     A[l][e] = 1.0;
95 |
96 |     for (int i = 0; i <= n; i++)
97 |         A[l][i] /= t;
98 |
99 |     for (int i = 0; i <= m; i++)
100 |         if (i != l) {
101 |             t = A[i][e];
102 |             A[i][e] = 0.0;
103 |             for (int j = 0; j <= n; j++)
104 |                 A[i][j] -= t * A[l][j];
105 |         }
106 |     }
107 | }

```

1.5 线性代数

1.5.1 线性基

1.5.2 线性代数知识

行列式:

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i, \sigma_i}$$

逆矩阵:

$$B = A^{-1} \iff AB = I$$

代数余子式:

$$M_{i,j} = (-1)^{(i+j)} \det A - \{i,j\}$$

也就是 A 去掉一行一列之后的行列式

同时我们有

$$M = \frac{A^{-1}}{\det A}$$

1.6 常见数列

1.6.1 伯努利数

$$B(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{B_i x^i}{i!} = \frac{x}{e^x - 1}$$

$$B_n = [n=0] - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{B_i}{n-i+1}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i = 0$$

$$S_n(m) = \sum_{i=0}^{m-1} i^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_{n-i} \frac{m^{i+1}}{i+1}$$

1.6.2 分拆数

```

1 int b = sqrt(n);
2 ans[0] = tmp[0] = 1;
3
4 for (int i = 1; i <= b; ++i) {
5     for (int rep = 0; rep < 2; ++rep)
6         for (int j = i; j <= n - i * i; ++j)
7             add(tmp[j], tmp[j - i]);
8
9     for (int j = i * i; j <= n; ++j)
10        add(ans[j], tmp[j - i * i]);
11 }

```

2. 数论

2.1 $O(n)$ 预处理逆元

```

1 //要求p为质数
2
3 inv[0]=inv[1]=1;
4 for(int i=2;i<=n;i++)
5     inv[i]=(long long)(p-(p/i))*inv[p%i]%p;//p为模数
6 //i^{-1} \equiv -\lfloor \frac{p}{i} \rfloor \times (p \bmod i)^{-1} \pmod{p}
7 //i^{-1} = -(p/i) * (p%i)^{-1}

```

2.2 杜教筛

```

1 //用于求可以用狄利克雷卷积构造出好求和的东西的函数的前缀
  //和(有点绕)
2 //有些题只要求n<=10^9,这时就没必要开long long了,但记得乘
  //法时强转
3
4 //常量/全局变量/数组定义
5 const int
  // maxn=5000005, table_size=5000000, p=1000000007, inv_2=(p+1)/2;
6 bool notp[maxn];
7 int prime[maxn/20], phi[maxn], tbl[100005];
8 //tbl用来顶替哈希表, 其实开到n^{1/3}就够了, 不过保险起见开
  //成sqrt n比较好
9 long long N;
10
11 //主函数前面加上这么一句
12 memset(tbl, -1, sizeof(tbl));
13
14 //线性筛预处理部分略去
15
16 //杜教筛主过程 总计O(n^{2/3})
17 //递归调用自身
18 //递推式还需具体情况具体分析, 这里以求欧拉函数前缀和(mod
  // 10^9+7)为例
19 int S(long long n){
20     if(n<=table_size)return phi[n];
21     else if(~tbl[N/n])return tbl[N/n];
22     //原理:n除以所有可能的数的结果一定互不相同
23     int ans=0;
24     for(long long i=2, last; i<=n; i=last+1){
25         last=n/(n/i);
26         ans=(ans+(last-i+1)%p*S(n/i))%p;//如果n是int范围
          //的话记得强转
27     }
28     ans=(n*p*((n+1)%p)%p*inv_2-ans+p)%p;//同上
29     return tbl[N/n]=ans;
30 }

```

2.3 线性筛

```

1 // 此代码以计算约数之和函数\sigma_1(对10^9+7取模)为例
2 // 适用于任何f(p^k)便于计算的积性函数
3 constexpr int p = 1000000007;
4
5 int prime[maxn / 10], sigma_one[maxn], f[maxn], g[maxn];
6 // f: 除掉最小质因子后剩下的部分
7 // g: 最小质因子的幂次, 在f(p^k)比较复杂时很有用,
  // 但f(p^k)可以递推时就可以省略了
8 // 这里没有记录最小质因子, 但根据线性筛的性质, 每个合数
  // 只会被它最小的质因子筛掉
9 bool notp[maxn]; // 顾名思义
10
11 void get_table(int n) {
12     sigma_one[1] = 1; // 积性函数必有f(1) = 1
13     for (int i = 2; i <= n; i++) {
14         if (!notp[i]) { // 质数情况
15             prime[++prime[0]] = i;
16             sigma_one[i] = i + 1;
17             f[i] = g[i] = 1;
18         }
19
20         for (int j = 1; j <= prime[0] && i * prime[j] <=
          // n; j++) {
21             notp[i * prime[j]] = true;
22
23             if (i % prime[j]) { // 加入一个新的质因子, 这
              // 种情况很简单

```

```

24     sigma_one[i * prime[j]] = (long
    ↪ long) sigma_one[i] * (prime[j] + 1) %
    ↪ p;
25     f[i * prime[j]] = i;
26     g[i * prime[j]] = 1;
27 }
28 else { // 再加入一次最小质因子, 需要再进行分
    ↪ 类讨论
29     f[i * prime[j]] = f[i];
30     g[i * prime[j]] = g[i] + 1;
31     // 对于  $f(p^k)$  可以直接递推的函数, 这里的判
    ↪ 断可以改成
32     //  $i / \text{prime}[j] \% \text{prime}[j] \neq 0$ , 这样可以
    ↪ 省下  $f[]$  的空间,
33     // 但常数很可能会稍大一些
34
35     if (f[i] == 1) // 质数的幂次, 这
    ↪ 里  $\text{sigma}_1$  可以递推
36     sigma_one[i * prime[j]] =
    ↪ (sigma_one[i] + i * prime[j]) %
    ↪ p;
37     // 对于更一般的情况, 可以借助  $g[]$  计
    ↪ 算  $f(p^k)$ 
38     else sigma_one[i * prime[j]] = // 否则直
    ↪ 接利用积性, 两半乘起来
39     (long long) sigma_one[i * prime[j] /
    ↪ f[i]] * sigma_one[f[i]] % p;
40     break;
41 }
42 }
43 }
44 }

```

2.4 Miller-Rabin

```

1 //复杂度可以认为是常数
2
3 //封装好的函数体
4 //需要调用check
5 bool Miller_Rabin(long long n){
6     if(n==1) return false;
7     if(n==2) return true;
8     if(n%2==0) return false;
9     for(int i:{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37}){
10         if(i>n) break;
11         if(!check(n,i)) return false;
12     }
13     return true;
14 }
15
16 //用一个数检测
17 //需要调用Long Long快速幂和 $O(1)$ 快速乘
18 bool check(long long n, long long b){ //b是base
19     long long a=n-1;
20     int k=0;
21     while(a%2==0){
22         a>>=1;
23         k++;
24     }
25     long long t=qpow(b,a,n); //这里的快速幂函数需要
    ↪ 写 $O(1)$ 快速乘
26     if(t==1 || t==n-1) return true;
27     while(k--){
28         t=mul(t,t,n); //mul是 $O(1)$ 快速乘函数
29         if(t==n-1) return true;
30     }
31     return false;
32 }

```

2.5 Pollard's Rho

```

1 //注意, 虽然Pollard's Rho的理论复杂度是 $O(n^{\{1/4\}})$ 的,
2 //但实际跑起来比较慢, 一般用于做Long Long范围内的质因数分
    ↪ 解
3
4
5 //封装好的函数体
6 //需要调用solve
7 void factorize(long long n, vector<long long>&v){ //v用于存
    ↪ 分解出来的质因子, 重复的会放多个
8     for(int i:{2,3,5,7,11,13,17,19})
9         while(n%i==0){
10             v.push_back(i);
11             n/=i;
12         }
13     solve(n,v);
14     sort(v.begin(), v.end()); //从小到大排序后返回
15 }
16
17 //递归过程
18 //需要调用Pollard's Rho主过程, 同时递归调用自身
19 void solve(long long n, vector<long long>&v){
20     if(n==1) return;
21     long long p;
22     do p=Pollards_Rho(n); while(!p); //p是任意一个非平凡因
    ↪ 子
23     if(p==n){
24         v.push_back(p); //说明n本身就是质数
25         return;
26     }
27     solve(p,v); //递归分解两半
28     solve(n/p,v);
29 }
30
31 //Pollard's Rho主过程
32 //需要使用Miller-Rabin作为子算法
33 //同时需要调用 $O(1)$ 快速乘和gcd函数
34 long long Pollards_Rho(long long n){
35     assert(n>1);
36     if(Miller_Rabin(n)) return n;
37     long long
    ↪ c=rand()%(n-2)+1, i=1, k=2, x=rand()%(n-3)+2, u=2; //注
    ↪ 意这里rand函数需要重定义一下
38     for(;;){
39         i++;
40         x=(mul(x,x,n)+c)%n; //mul是 $O(1)$ 快速乘函数
41         long long g=gcd((u-x+n)%n,n);
42         if(g>1&&g<n) return g;
43         if(u==x) return 0; //失败@需要重新调用
44         if(i==k){
45             u=x;
46             k<<=1;
47         }
48     }
49 }

```

3. 图论

3.1 最小生成树

3.1.1 Boruvka算法

思想: 每次选择连接每个连通块的最小边, 把连通块缩起来。
每次连通块个数至少减半, 所以迭代 $O(\log n)$ 次即可得到最小生成树。

一种比较简单的实现方法: 每次迭代遍历所有边, 用并查集维护连通性和每个连通块的最小边权.

应用: 最小异或生成树

3.1.2 动态最小生成树

```

1 // 动态最小生成树的离线算法比较容易, 而在线算法通常极为复
  ↳ 杂
2 // 一个跑得比较快的离线做法是对时间分治, 在每层分治时找出
  ↳ 一定在/不在MST上的边, 只带着不确定边继续递归
3 // 简单起见, 找确定边的过程用Kruskal算法实现, 过程中的两种
  ↳ 重要操作如下:
4 // - Reduction: 待修改边标为+INF, 跑MST后把非树边删掉, 减少
  ↳ 无用边
5 // - Contraction: 待修改边标为-INF, 跑MST后缩除待修改边之
  ↳ 外的所有MST边, 计算必须边
6 // 每轮分治需要Reduction-Contraction, 借此减少不确定边, 从
  ↳ 而保证复杂度
7 // 复杂度证明: 假设当前区间有k条待修改边, n和m表示点数和边
  ↳ 数, 那么最坏情况下R-C的效果为(n, m) -> (n, n + k - 1)
  ↳ -> (k + 1, 2k)
8
9
10 // 全局结构体与数组定义
11 struct edge { // 边的定义
12     int u, v, w, id; // id表示边在原图中的编号
13     bool vis; // 在Kruskal时, 记录这条边是否是树边
14     bool operator < (const edge &e) const { return w <
15         ↳ e.w; }
16 } e[20][maxn], t[maxn]; // 为了便于回滚, 在每层分治存一个
17 ↳ 副本
18
19 // 用于存储修改的结构体, 表示第id条边的权值从u修改为v
20 struct A {
21     int id, u, v;
22 } a[maxn];
23
24 int id[20][maxn]; // 每条边在当前图中的编号
25 int p[maxn], size[maxn], stk[maxn], top; // p和size是并查
26 ↳ 集数组, stk是用来撤销的栈
27 int n, m, q; // 点数, 边数, 修改数
28
29 // 方便起见, 附上可能需要用到的预处理代码
30 for (int i = 1; i <= n; i++) { // 并查集初始化
31     p[i] = i;
32     size[i] = 1;
33 }
34
35 for (int i = 1; i <= m; i++) { // 读入与预标号
36     scanf("%d%d%d", &e[0][i].u, &e[0][i].v, &e[0][i].w);
37     e[0][i].id = i;
38     id[0][i] = i;
39 }
40
41 for (int i = 1; i <= q; i++) { // 预处理出调用数组
42     scanf("%d%d", &a[i].id, &a[i].v);
43     a[i].u = e[0][a[i].id].w;
44     e[0][a[i].id].w = a[i].v;
45 }
46
47 for (int i = q; i; i--)
48     e[0][a[i].id].w = a[i].u;
49
50 CDQ(1, q, 0, m, 0); // 这是调用方法
51
52 // 分治主过程 O(nlog^2n)
53 // 需要调用Reduction和Contraction

```

```

54 void CDQ(int l, int r, int d, int m, long long ans) { //
55     ↳ CDQ分治
56     if (l == r) { // 区间长度已减小到1, 输出答案, 退出
57         e[d][id[d][a[l].id]].w = a[l].v;
58         printf("%lld\n", ans + Kruskal(m, e[d]));
59         e[d][id[d][a[l].id]].w = a[l].u;
60         return;
61     }
62
63     int tmp = top;
64
65     Reduction(l, r, d, m);
66     ans += Contraction(l, r, d, m); // R-C
67
68     int mid = (l + r) / 2;
69
70     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, e[d + 1] + 1);
71     for (int i = 1; i <= m; i++)
72         id[d + 1][e[d][i].id] = i; // 准备好下一层要用的
73         ↳ 数组
74
75     CDQ(l, mid, d + 1, m, ans);
76
77     for (int i = 1; i <= mid; i++)
78         e[d][id[d][a[i].id]].w = a[i].v; // 进行左边的修
79         ↳ 改
80
81     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, e[d + 1] + 1);
82     for (int i = 1; i <= m; i++)
83         id[d + 1][e[d][i].id] = i; // 重新准备下一层要用
84         ↳ 的数组
85
86     CDQ(mid + 1, r, d + 1, m, ans);
87
88     for (int i = top; i > tmp; i--)
89         cut(stk[i]); // 撤销所有操作
90     top = tmp;
91 }
92
93 // Reduction(减少无用边): 待修改边标为+INF, 跑MST后把非树
94 ↳ 边删掉, 减少无用边
95 // 需要调用Kruskal
96 void Reduction(int l, int r, int d, int &m) {
97     for (int i = l; i <= r; i++)
98         e[d][id[d][a[i].id]].w = INF; // 待修改的边标为INF
99
100     Kruskal(m, e[d]);
101
102     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, t + 1);
103
104     int cnt = 0;
105     for (int i = 1; i <= m; i++)
106         if (t[i].w == INF || t[i].vis) { // 非树边扔掉
107             id[d][t[i].id] = ++cnt; // 给边重新编号
108             e[d][cnt] = t[i];
109         }
110
111     for (int i = r; i >= l; i--)
112         e[d][id[d][a[i].id]].w = a[i].u; // 把待修改的边
113         ↳ 改回去
114
115     m = cnt;
116 }
117
118 // Contraction(缩必须边): 待修改边标为-INF, 跑MST后缩除待
119 ↳ 修改边之外的所有树边
120 // 返回缩掉的边的总权值
121 // 需要调用Kruskal

```

```

118 long long Contraction(int l, int r, int d, int &m) {
119     long long ans = 0;
120
121     for (int i = l; i <= r; i++)
122         e[d][id[d][a[i].id]].w = -INF; // 待修改边标
123         ↪ 为-INF
124
125     Kruskal(m, e[d]);
126     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, t + 1);
127
128     int cnt = 0;
129     for (int i = 1; i <= m; i++) {
130
131         if (t[i].w != -INF && t[i].vis) { // 必须边
132             ans += t[i].w;
133             mergeset(t[i].u, t[i].v);
134         }
135         else { // 不确定边
136             id[d][t[i].id]++; cnt;
137             e[d][cnt] = t[i];
138         }
139     }
140
141     for (int i = r; i >= l; i--) {
142         e[d][id[d][a[i].id]].w = a[i].u; // 把待修改的边
143         ↪ 改回去
144         e[d][id[d][a[i].id]].vis = false;
145     }
146
147     m = cnt;
148
149     return ans;
150 }
151
152 // Kruskal算法 O(m log n)
153 // 方便起见, 这里直接沿用进行过缩点的并查集, 在过程结束后
154 ↪ 撤销即可
155 long long Kruskal(int m, edge *e) {
156     int tmp = top;
157     long long ans = 0;
158
159     sort(e + 1, e + m + 1); // 比较函数在结构体中定义过了
160
161     for (int i = 1; i <= m; i++) {
162         if (findroot(e[i].u) != findroot(e[i].v)) {
163             e[i].vis = true;
164             ans += e[i].w;
165             mergeset(e[i].u, e[i].v);
166         }
167         else
168             e[i].vis = false;
169     }
170
171     for (int i = top; i > tmp; i--)
172         cut(stk[i]); // 撤销所有操作
173     top = tmp;
174
175     return ans;
176 }
177
178 // 以下是并查集相关函数
179 int findroot(int x) { // 因为需要撤销, 不写路径压缩
180     while (p[x] != x)
181         x = p[x];
182
183     return x;
184 }

```

```

185 void mergeset(int x, int y) { // 按size合并, 如果想跑得更快
186     ↪ 快就写一个按秩合并
187     x = findroot(x); // 但是按秩合并要再开一个栈记录合并
188     ↪ 之前的秩
189     y = findroot(y);
190
191     if (x == y)
192         return;
193
194     if (size[x] > size[y])
195         swap(x, y);
196
197     p[x] = y;
198     size[y] += size[x];
199     stk[++top] = x;
200 }
201
202 void cut(int x) { // 并查集撤销
203     int y = x;
204
205     do
206         size[y = p[y]] -= size[x];
207     while (p[y] != y);
208
209     p[x] = x;
210 }

```

3.1.3 Steiner Tree 斯坦纳树

问题: 一张图上有 k 个关键点, 求让关键点两两连通的最小生成树
做法: 状压DP, $f_{i,S}$ 表示以 i 号点为树根, i 与 S 中的点连通的最小边权和
 转移有两种:

1. 枚举子集:

$$f_{i,S} = \min_{T \subset S} \{f_{i,T} + f_{i,S \setminus T}\}$$

2. 新加一条边:

$$f_{i,S} = \min_{(i,j) \in E} \{f_{j,S} + w_{i,j}\}$$

第一种直接枚举子集DP就行了, 第二种可以用SPFA或者Dijkstra松弛(显然负边一开始全选就行了, 所以只需要处理非负边).
 复杂度 $O(n3^k + 2^k m \log n)$.

3.2 最短路

3.2.1 k短路

```

1 //注意这是个多项式算法, 在k比较大时很有优势, 但k比较小时最
2 ↪ 好还是用A*
3 //DAG和有环的情况都可以, 有重边或自环也无所谓, 但不能有零
4 ↪ 环
5 //以下代码以Dijkstra+可持久化左偏树为例
6
7 constexpr int maxn = 1005, maxe = 10005, maxm = maxe * 30;
8 ↪ //点数, 边数, 左偏树结点数
9
10 // 结构体定义
11 struct A { // 用来求最短路
12     int x, d;
13     A(int x, int d) : x(x), d(d) {}
14     bool operator < (const A &a) const {
15         return d > a.d;
16     }
17 };

```



```

16 struct node{ // 左偏树结点
17     int w, i, d; // i:最后一条边的编号 d:左偏树附加信息
18     node *lc, *rc;
19
20     node() {}
21
22     node(int w, int i) : w(w), i(i), d(0) {}
23
24     void refresh(){
25         d = rc -> d + 1;
26     }
27 } null[maxm], *ptr = null, *root[maxn];
28
29 struct B { // 维护答案用
30     int x, w; // x是结点编号, w表示之前已经产生的权值
31     node *rt; // 这个答案对应的堆顶, 注意可能不等于任何一个结点的堆
32     B(int x, node *rt, int w) : x(x), w(w), rt(rt) {}
33     bool operator < (const B &a) const {
34         return w + rt -> w > a.w + a.rt -> w;
35     }
36 };
37
38 // 全局变量和数组定义
39 vector<int> G[maxn], W[maxn], id[maxn]; // 最开始要存反向
    ↳ 图, 然后把G清空作为儿子列表
40 bool vis[maxn], used[maxe]; // used表示边是否在最短路树上
41 int u[maxe], v[maxe], w[maxe]; // 存下每条边, 注意是有向边
42 int d[maxn], p[maxn]; // p表示最短路树上每个点的父边
43 int n, m, k, s, t; // s, t分别表示起点和终点
44
45 // 以下是主函数中较关键的部分
46 for (int i = 0; i <= n; i++)
47     root[i] = null; // 一定要加上!!!
48 // (读入&建反向图)
49 Dijkstra();
50 // (清空G, W, id)
51 for (int i = 1; i <= n; i++)
52     if (p[i]) {
53         used[p[i]] = true; // 在最短路树上
54         G[v[p[i]]].push_back(i);
55     }
56 for (int i = 1; i <= m; i++) {
57     w[i] = d[u[i]] - d[v[i]]; // 现在的w[i]表示这条边能
    ↳ 使路径长度增加多少
58     if (!used[i])
59         root[u[i]] = merge(root[u[i]], newnode(w[i], i));
60 }
61 dfs(t);
62 priority_queue<B> heap;
63 heap.push(B(s, root[s], 0)); // 初始状态是找贡献最小的边
    ↳ 加进去
64 printf("%d\n", d[s]); // 第1短路需要特判
65 while (--k) { // 其余k-1短路径用二叉堆维护
66     if (heap.empty())
67         printf("-1\n");
68     else {
69         int x = heap.top().x, w = heap.top().w;
70         node *rt = heap.top().rt;
71         heap.pop();
72         printf("%d\n", d[s] + w + rt -> w);
73         if (rt -> lc != null || rt -> rc != null)
74             heap.push(B(x, merge(rt -> lc, rt -> rc),
    ↳ w)); // pop掉当前边, 换成另一条贡献大一点
    ↳ 的边
75         if (root[v[rt -> i]] != null)
76             heap.push(B(v[rt -> i], root[v[rt -> i]], w +
    ↳ rt -> w)); // 保留当前边, 往后面再接上另
    ↳ 一条边
77     }

```

```

78 }
79 // 主函数到此结束
80
81 // Dijkstra预处理最短路  $O(m \log n)$ 
82 void Dijkstra() {
83     memset(d, 63, sizeof(d));
84     d[t] = 0;
85     priority_queue<A> heap;
86     heap.push(A(t, 0));
87     while (!heap.empty()) {
88         int x = heap.top().x;
89         heap.pop();
90
91         if (vis[x])
92             continue;
93
94         vis[x] = true;
95         for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
96             if (!vis[G[x][i]] && d[G[x][i]] > d[x] + W[x][i]) {
97                 d[G[x][i]] = d[x] + W[x][i];
98                 p[G[x][i]] = id[x][i];
99                 heap.push(A(G[x][i], d[G[x][i]]));
100             }
101     }
102 }
103
104 // dfs求出每个点的堆 总计  $O(m \log n)$ 
105 // 需要调用merge, 同时递归调用自身
106 void dfs(int x) {
107     root[x] = merge(root[x], root[v[p[x]]]);
108     for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
109         dfs(G[x][i]);
110 }
111
112 // 包装过的new node()  $O(1)$ 
113 node *newnode(int w, int i) {
114     *++ptr = node(w, i);
115     ptr -> lc = ptr -> rc = null;
116     return ptr;
117 }
118
119 // 带可持久化的左偏树合并 总计  $O(n \log n)$ 
120 // 递归调用自身
121 node *merge(node *x, node *y) {
122     if (x == null) return y;
123     if (y == null) return x;
124     if (x -> w > y -> w) swap(x, y);
125     node *z = newnode(x -> w, x -> i);
126     z -> lc = x -> lc;
127     z -> rc = merge(x -> rc, y);
128     if (z -> lc -> d > z -> rc -> d) swap(z -> lc, z -> rc);
129     z -> refresh();
130     return z;
131 }

```

3.3 仙人掌

3.3.1 仙人掌DP

```

1 struct edge{
2     int to, w, prev;
3 } e[maxn * 2];
4
5 vector<pair<int, int>> v[maxn];
6
7 vector<long long> d[maxn];
8
9 stack<int> stk;
10

```



```

11 int p[maxn];
12
13 bool vis[maxn], vise[maxn * 2];
14
15 int last[maxn], cnte;
16
17 long long f[maxn], g[maxn], sum[maxn];
18
19 int n, m, cnt;
20
21 void addedge(int x, int y, int w) {
22     v[x].push_back(make_pair(y, w));
23 }
24
25 void dfs(int x) {
26
27     vis[x] = true;
28
29     for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev) {
30         if (vise[i ^ 1])
31             continue;
32
33         int y = e[i].to, w = e[i].w;
34
35         vise[i] = true;
36
37         if (!vis[y]) {
38             stk.push(i);
39             p[y] = x;
40             dfs(y);
41
42             if (!stk.empty() && stk.top() == i) {
43                 stk.pop();
44                 addedge(x, y, w);
45             }
46         }
47
48         else {
49             cnt++;
50
51             long long tmp = w;
52             while (!stk.empty()) {
53                 int i = stk.top();
54                 stk.pop();
55
56                 int yy = e[i].to, ww = e[i].w;
57
58                 addedge(cnt, yy, 0);
59
60                 d[cnt].push_back(tmp);
61
62                 tmp += ww;
63
64                 if (e[i ^ 1].to == y)
65                     break;
66             }
67
68             addedge(y, cnt, 0);
69
70             sum[cnt] = tmp;
71         }
72     }
73 }
74
75 void dp(int x) {
76
77     for (auto o : v[x]) {
78         int y = o.first, w = o.second;
79         dp(y);
80     }

```

```

81
82     if (x <= n) {
83         for (auto o : v[x]) {
84             int y = o.first, w = o.second;
85
86             f[x] += 2 * w + f[y];
87         }
88
89         g[x] = f[x];
90
91         for (auto o : v[x]) {
92             int y = o.first, w = o.second;
93
94             g[x] = min(g[x], f[x] - f[y] - 2 * w + g[y] +
95                 ↪ w);
96         }
97     }
98     else {
99         f[x] = sum[x];
100         for (auto o : v[x]) {
101             int y = o.first;
102
103             f[x] += f[y];
104         }
105
106         g[x] = f[x];
107
108         for (int i = 0; i < (int)v[x].size(); i++) {
109             int y = v[x][i].first;
110
111             g[x] = min(g[x], f[x] - f[y] + g[y] +
112                 ↪ min(d[x][i], sum[x] - d[x][i]));
113         }
114     }
115 }

```

3.4 二分图

3.4.1 KM二分图最大权匹配

```

1 const long long INF = 0x3f3f3f3f3f3f3f3f;
2
3 long long w[maxn][maxn], lx[maxn], ly[maxn], slack[maxn];
4 // 边权 顶标 slack
5 // 如果要求最大权完美匹配就把不存在的边设为-INF, 否则所有
6   ↪ 边对0取max
7
8 bool visx[maxn], visy[maxn];
9
10 int boy[maxn], girl[maxn], p[maxn], q[maxn], head, tail;
11 // p : pre
12
13 int n, m, N, e;
14
15 // 增广
16 bool check(int y) {
17     visy[y] = true;
18
19     if (boy[y]) {
20         visx[boy[y]] = true;
21         q[tail++] = boy[y];
22         return false;
23     }
24
25     while (y) {
26         boy[y] = p[y];
27         swap(y, girl[p[y]]);
28     }

```

```

28     return true;
29 }
30 // bfs每个点
31 void bfs(int x) {
32     memset(q, 0, sizeof(q));
33     head = tail = 0;
34
35     q[tail++] = x;
36     visx[x] = true;
37
38     while (true) {
39         while (head != tail) {
40             int x = q[head++];
41
42             for (int y = 1; y <= N; y++)
43                 if (!visy[y]) {
44                     long long d = lx[x] + ly[y] - w[x]
45                         ↪ [y];
46
47                     if (d < slack[y]) {
48                         p[y] = x;
49                         slack[y] = d;
50
51                         if (!slack[y] && check(y))
52                             return;
53                     }
54                 }
55             }
56
57             long long d = INF;
58             for (int i = 1; i <= N; i++)
59                 if (!visy[i])
60                     d = min(d, slack[i]);
61
62             for (int i = 1; i <= N; i++) {
63                 if (visx[i])
64                     lx[i] -= d;
65
66                 if (visy[i])
67                     ly[i] += d;
68                 else
69                     slack[i] -= d;
70             }
71
72             for (int i = 1; i <= N; i++)
73                 if (!visy[i] && !slack[i] && check(i))
74                     return;
75         }
76     }
77 // 主过程
78 long long KM() {
79     for (int i = 1; i <= N; i++) {
80         // lx[i] = 0;
81         ly[i] = -INF;
82         // boy[i] = girl[i] = -1;
83
84         for (int j = 1; j <= N; j++)
85             ly[i] = max(ly[i], w[j][i]);
86     }
87
88     for (int i = 1; i <= N; i++) {
89         memset(slack, 0x3f, sizeof(slack));
90         memset(visx, 0, sizeof(visx));
91         memset(visy, 0, sizeof(visy));
92         bfs(i);
93     }
94 }

```

```

96     long long ans = 0;
97     for (int i = 1; i <= N; i++)
98         ans += w[i][girl[i]];
99     return ans;
100 }
101 // 为了方便贴上主函数
102 int main() {
103
104     scanf("%d%d", &n, &m, &e);
105     N = max(n, m);
106
107     while (e--) {
108         int x, y, c;
109         scanf("%d%d", &x, &y, &c);
110         w[x][y] = max(c, 0);
111     }
112
113     printf("%lld\n", KM());
114
115     for (int i = 1; i <= n; i++) {
116         if (i > 1)
117             printf(" ");
118         printf("%d", w[i][girl[i]] > 0 ? girl[i] : 0);
119     }
120     printf("\n");
121
122     return 0;
123 }

```

3.5 一般图匹配

3.5.1 高斯消元

```

1 // 这个算法基于Tutte定理和高斯消元,思维难度相对小一些,也
  ↪ 更方便进行可行边的判定
2 // 注意这个算法复杂度是满的,并且常数有点大,而带花树通常
  ↪ 是跑不满的
3 // 以及,根据Tutte定理,如果求最大匹配的大小的话直接输
  ↪ 出Tutte矩阵的秩/2即可
4 // 需要输出方案时则需要再写后面那些乱七八糟的东西
5
6 // 复杂度和常数所限,1s之内500已经是这个算法的极限了
7 const int maxn = 505, p = 1000000007; // p可以是任
  ↪ 意10^9以内的质数
8
9 // 全局数组和变量定义
10 int A[maxn][maxn], B[maxn][maxn], t[maxn][maxn],
  ↪ id[maxn], a[maxn];
11 bool row[maxn] = {false}, col[maxn] = {false};
12 int n, m, girl[maxn]; // girl是匹配点,用来输出方案
13
14 // 为了方便使用,贴上主函数
15 // 需要调用高斯消元和eliminate
16 int main() {
17     srand(19260817); // 膜蛤专用随机种子,换一个也无所谓
18
19     scanf("%d", &n, &m); // 点数和边数
20     while (m--) {
21         int x, y;
22         scanf("%d", &x, &y);
23         A[x][y] = rand() % p;
24         A[y][x] = -A[x][y]; // Tutte矩阵是反对称矩阵
25     }
26
27     for (int i = 1; i <= n; i++)
28         id[i] = i; // 输出方案用的,因为高斯消元的时候会
  ↪ 交换列
29     memcpy(t, A, sizeof(t));
30

```

```

31 Gauss(A, NULL, n);
32
33 m = n;
34 n = 0; // 这里变量复用纯属个人习惯.....
35
36 for (int i = 1; i <= m; i++)
37     if (A[id[i]][id[i]])
38         a[++n] = i; // 找出一个极大满秩子矩阵
39
40 for (int i = 1; i <= n; i++)
41     for (int j = 1; j <= n; j++)
42         A[i][j] = t[a[i]][a[j]];
43
44 Gauss(A, B, n);
45
46 for (int i = 1; i <= n; i++)
47     if (!girl[a[i]])
48         for (int j = i + 1; j <= n; j++)
49             if (!girl[a[j]] && t[a[i]][a[j]] && B[j]
50                 ↪ [i]) {
51                 // 注意上面那句if的写法, 现在t是邻接矩
52                 ↪ 阵的备份,
53                 // 逆矩阵j行i列不为0当且仅当这条边可
54                 ↪ 行
55                 girl[a[i]] = a[j];
56                 girl[a[j]] = a[i];
57                 eliminate(i, j);
58                 eliminate(j, i);
59                 break;
60             }
61
62 printf("%d\n", n >> 1);
63 for (int i = 1; i <= m; i++)
64     printf("%d ", girl[i]);
65
66 return 0;
67 }
68
69 // 高斯消元  $O(n^3)$ 
70 // 在传入B时表示计算逆矩阵, 传入NULL则只需计算矩阵的秩
71 void Gauss(int A[][maxn], int B[][maxn], int n){
72     if(B) {
73         memset(B, 0, sizeof(t));
74         for (int i = 1; i <= n; i++)
75             B[i][i] = 1;
76     }
77
78     for (int i = 1; i <= n; i++) {
79         if (!A[i][i]) {
80             for (int j = i + 1; j <= n; j++)
81                 if (A[j][i]) {
82                     swap(id[i], id[j]);
83                     for (int k = i; k <= n; k++)
84                         swap(A[i][k], A[j][k]);
85
86                     if (B)
87                         for (int k = 1; k <= n; k++)
88                             swap(B[i][k], B[j][k]);
89                     break;
90                 }
91             continue;
92         }
93
94         int inv = qpow(A[i][i], p - 2);
95
96         for (int j = 1; j <= n; j++)
97             if (i != j && A[j][i]){

```

```

97         int t = (long long)A[j][i] * inv % p;
98
99         for (int k = i; k <= n; k++)
100             if (A[i][k])
101                 A[j][k] = (A[j][k] - (long long)t
102                     ↪ * A[i][k]) % p;
103
104         if (B)
105             for (int k = 1; k <= n; k++)
106                 if (B[i][k])
107                     B[j][k] = (B[j][k] - (long
108                         ↪ long)t * B[i][k])%p;
109
110     }
111
112     if (B)
113         for (int i = 1; i <= n; i++) {
114             int inv = qpow(A[i][i], p - 2);
115
116             for (int j = 1; j <= n; j++)
117                 if (B[i][j])
118                     B[i][j] = (long long)B[i][j] * inv %
119                         ↪ p;
120         }
121
122 // 消去一行一列  $O(n^2)$ 
123 void eliminate(int r, int c) {
124     row[r] = col[c] = true; // 已经被消掉
125
126     int inv = qpow(B[r][c], p - 2);
127
128     for (int i = 1; i <= n; i++)
129         if (!row[i] && B[i][c]) {
130             int t = (long long)B[i][c] * inv % p;
131
132             for (int j = 1; j <= n; j++)
133                 if (!col[j] && B[r][j])
134                     B[i][j] = (B[i][j] - (long long)t *
135                         ↪ B[r][j]) % p;
136         }
137 }

```

3.5.2 带花树

```

1 // 带花树通常比高斯消元快很多, 但在只要求最大匹配大小的
2 // 时候并没有高斯消元好写
3 // 当然输出方案要方便很多
4
5 // 全局数组与变量定义
6 vector<int> G[maxn];
7 int girl[maxn], f[maxn], t[maxn], p[maxn], vis[maxn],
8     ↪ tim, q[maxn], head, tail;
9 int n, m;
10
11 // 封装好的主过程  $O(nm)$ 
12 int blossom() {
13     int ans = 0;
14
15     for (int i = 1; i <= n; i++)
16         if (!girl[i])
17             ans += bfs(i);
18
19     return ans;
20 }
21
22 // bfs找增广路  $O(m)$ 

```

```

23 bool bfs(int s) {
24     memset(t, 0, sizeof(t));
25     memset(p, 0, sizeof(p));
26
27     for (int i = 1; i <= n; i++)
28         f[i] = i; // 并查集
29
30     head = tail = 0;
31     q[tail++] = s;
32     t[s] = 1;
33
34     while (head != tail){
35         int x = q[head++];
36         for (int y : G[x]){
37             if (findroot(y) == findroot(x) || t[y] == 2)
38                 continue;
39
40             if (!t[y]){
41                 t[y] = 2;
42                 p[y] = x;
43
44                 if (!girl[y]){
45                     for (int u = y, t; u = t) {
46                         t = girl[p[u]];
47                         girl[p[u]] = u;
48                         girl[u] = p[u];
49                     }
50                     return true;
51                 }
52                 t[girl[y]] = 1;
53                 q[tail++] = girl[y];
54             }
55             else if (t[y] == 1) {
56                 int z = LCA(x, y);
57                 shrink(x, y, z);
58                 shrink(y, x, z);
59             }
60         }
61     }
62
63     return false;
64 }
65
66 //缩奇环 O(n)
67 void shrink(int x, int y, int z) {
68     while (findroot(x) != z){
69         p[x] = y;
70         y = girl[x];
71
72         if (t[y] == 2) {
73             t[y] = 1;
74             q[tail++] = y;
75         }
76
77         if (findroot(x) == x)
78             f[x] = z;
79         if (findroot(y) == y)
80             f[y] = z;
81
82         x = p[y];
83     }
84 }
85
86 //暴力找LCA O(n)
87 int LCA(int x, int y) {
88     tim++;
89     while (true) {
90         if (x) {
91             x = findroot(x);

```

```

92         if (vis[x] == tim)
93             return x;
94         else {
95             vis[x] = tim;
96             x = p[girl[x]];
97         }
98     }
99     swap(x, y);
100 }
101 }
102 }
103
104 //并查集的查找 O(1)
105 int findroot(int x) {
106     return x == f[x] ? x : (f[x] = findroot(f[x]));
107 }

```

3.5.3 带权带花树

(有一说一这玩意实在太难写了，抄之前建议先想想算法是不是假的或者有SB做法)

```

1 #define DIST(e) (Lab[e.u]+Lab[e.v]-g[e.u][e.v].w*2)
2 struct Edge{ int u,v,w; } g[N][N];
3 int n,m,n_x,lab[N],match[N],slack[N],
4 st[N],pa[N],fl_from[N][N],S[N],vis[N];
5 vector<int> fl[N];
6 deque<int> q;
7 void update_slack(int u,int x){
8     if(!slack[x]||DIST(g[u][x])<DIST(g[slack[x]][x]))
9         ↪ slack[x]=u; }
10 void set_slack(int x){
11     slack[x]=0;
12     for(int u=1; u<=n; ++u)
13         if(g[u][x].w>0&&st[u]!
14             ↪ =x&&S[st[u]]==0)update_slack(u,x);
15 }
16 void q_push(int x){
17     if(x<=n)return q.push_back(x);
18     for(int i=0; i<fl[x].size(); i++)q_push(fl[x][i]);
19 }
20 void set_st(int x,int b){
21     st[x]=b;
22     if(x<=n)return;
23     for(int i=0; i<fl[x].size(); ++i)set_st(fl[x][i],b);
24 }
25 int get_pr(int b,int xr){
26     int
27     ↪ pr=find(fl[b].begin(),fl[b].end(),xr)-fl[b].begin();
28     if(pr%2==1){
29         reverse(fl[b].begin()+1,fl[b].end());
30         return (int)fl[b].size()-pr;
31     }
32     else return pr;
33 }
34 void set_match(int u,int v){
35     match[u]=g[u][v].v;
36     if(u<=n)return;
37     Edge e=g[u][v];
38     int xr=fl_from[u][e.u],pr=get_pr(u,xr);
39     for(int i=0; i<pr; ++i)set_match(fl[u][i],fl[u]
40         ↪ [i^1]);
41     set_match(xr,v);
42     rotate(fl[u].begin(),fl[u].begin()+pr,fl[u].end());
43 }
44 void augment(int u,int v){
45     int xnv=st[match[u]];
46     set_match(u,v);
47     if(!xnv)return;

```

```

44     set_match(xnv,st[pa[xnv]]);
45     augment(st[pa[xnv]],xnv);
46 }
47 int get_lca(int u,int v){
48     static int t=0;
49     for(++t; u||v; swap(u,v)){
50         if(u==0)continue;
51         if(vis[u]==t)return u;
52         vis[u]=t;
53         u=st[match[u]];
54         if(u)u=st[pa[u]];
55     }
56     return 0;
57 }
58 void add_blossom(int u,int lca,int v){
59     int b=n+1;
60     while(b<=n_x&&st[b])++b;
61     if(b>n_x)++n_x;
62     lab[b]=0,S[b]=0;
63     match[b]=match[lca];
64     fl[b].clear();
65     fl[b].push_back(lca);
66     for(int x=u,y; x!=lca; x=st[pa[y]])
67         fl[b].push_back(x),
68         fl[b].push_back(y=st[match[x]]),q_push(y);
69     reverse(fl[b].begin()+1,fl[b].end());
70     for(int x=v,y; x!=lca; x=st[pa[y]])
71         fl[b].push_back(x),
72         fl[b].push_back(y=st[match[x]]),q_push(y);
73     set_st(b,b);
74     for(int x=1; x<=n_x; ++x)g[b][x].w=g[x][b].w=0;
75     for(int x=1; x<=n; ++x)fl_from[b][x]=0;
76     for(int i=0; i<fl[b].size(); ++i){
77         int xs=fl[b][i];
78         for(int x=1; x<=n_x; ++x)
79             if(g[b][x].w==0||DIST(g[xs][x])<DIST(g[b]
80                 ↪ [x]))
81                 g[b][x]=g[xs][x],g[x][b]=g[x][xs];
82         for(int x=1; x<=n; ++x)
83             if(fl_from[xs][x])fl_from[b][x]=xs;
84     }
85     set_slack(b);
86 }
87 void expand_blossom(int b){
88     for(int i=0; i<fl[b].size(); ++i)
89         set_st(fl[b][i],fl[b][i]);
90     int xr=fl_from[b][g[b][pa[b]].u],pr=get_pr(b,xr);
91     for(int i=0; i<pr; i+=2){
92         int xs=fl[b][i],xns=fl[b][i+1];
93         pa[xs]=g[xns][xs].u;
94         S[xs]=1,S[xns]=0;
95         slack[xs]=0,set_slack(xns);
96         q_push(xns);
97     }
98     S[xr]=1,pa[xr]=pa[b];
99     for(int i=pr+1; i<fl[b].size(); ++i){
100         int xs=fl[b][i];
101         S[xs]=-1,set_slack(xs);
102     }
103     st[b]=0;
104 }
105 bool on_found_Edge(const Edge &e){
106     int u=st[e.u],v=st[e.v];
107     if(S[v]==-1){
108         pa[v]=e.u,S[v]=1;
109         int nu=st[match[v]];
110         slack[v]=slack[nu]=0;
111         S[nu]=0,q_push(nu);
112     }
113     else if(S[v]==0){
114         int lca=get_lca(u,v);
115         if(!lca)return augment(u,v),augment(v,u),1;
116         else add_blossom(u,lca,v);
117     }
118     return 0;
119 }
120 bool matching(){
121     fill(S,S+n_x+1,-1),fill(slack,slack+n_x+1,0);
122     q.clear();
123     for(int x=1; x<=n_x; ++x)
124         if(st[x]==x&&!match[x])pa[x]=0,S[x]=0,q_push(x);
125     if(q.empty())return 0;
126     for(;;){
127         while(q.size()){
128             int u=q.front();
129             q.pop_front();
130             if(S[st[u]]==1)continue;
131             for(int v=1; v<=n; ++v)
132                 if(g[u][v].w>0&&st[u]!=st[v]){
133                     if(DIST(g[u][v])==0){
134                         if(on_found_Edge(g[u][v]))return
135                             ↪ 1;
136                     }
137                     else update_slack(u,st[v]);
138                 }
139             int d=INF;
140             for(int b=n+1; b<=n_x; ++b)
141                 if(st[b]==b&&S[b]==1)d=min(d,lab[b]/2);
142             for(int x=1; x<=n_x; ++x)
143                 if(st[x]==x&&slack[x]){
144                     if(S[x]==-1)d=min(d,DIST(g[slack[x]]
145                         ↪ [x]));
146                     else if(S[x]==0)d=min(d,DIST(g[slack[x]]
147                         ↪ [x])/2);
148                 }
149             for(int u=1; u<=n; ++u){
150                 if(S[st[u]]==0){
151                     if(lab[u]<=d)return 0;
152                     lab[u]-=d;
153                 }
154                 else if(S[st[u]]==1)lab[u]+=d;
155             }
156             for(int b=n+1; b<=n_x; ++b)
157                 if(st[b]==b){
158                     if(S[st[b]]==0)lab[b]+=d*2;
159                     else if(S[st[b]]==1)lab[b]-=d*2;
160                 }
161             q.clear();
162             for(int x=1; x<=n_x; ++x)
163                 if(st[x]==x&&slack[x]&&st[slack[x]]!
164                     ↪ =x&&DIST(g[slack[x]][x])==0)
165                     if(on_found_Edge(g[slack[x]][x]))return
166                         ↪ 1;
167             for(int b=n+1; b<=n_x; ++b)
168                 if(st[b]==b&&S[b]==1&&lab[b]==0)expand_blossom(b);
169                 ↪ }
170             return 0; }
171 }
172 pair<ll,int> weight_blossom(){
173     fill(match,match+n+1,0);
174     n_x=n;
175     int n_matches=0;
176     ll tot_weight=0;
177     for(int u=0; u<=n; ++u)st[u]=u,fl[u].clear();
178     int w_max=0;
179     for(int u=1; u<=n; ++u)
180         for(int v=1; v<=n; ++v){

```

```

174         fl_from[u][v]=(u==v?u:0);
175         w_max=max(w_max,g[u][v].w); }
176     for(int u=1; u<=n; ++u)lab[u]=w_max;
177     while(matching())++n_matches;
178     for(int u=1; u<=n; ++u)
179         if(match[u]&&match[u]<u)
180             tot_weight+=g[u][match[u]].w;
181     return make_pair(tot_weight,n_matches); }
182 int main(){
183     cin>>n>>m;
184     for(int u=1; u<=n; ++u)
185         for(int v=1; v<=n; ++v)
186             g[u][v]=Edge {u,v,0};
187     for(int i=0,u,v,w; i<m; ++i){
188         cin>>u>>v>>w;
189         g[u][v].w=g[v][u].w=w; }
190     cout<<weight_blossom().first<<'\n';
191     for(int u=1; u<=n; ++u)cout<<match[u]<<' '; }

```

```

46     int flow = 0, f;
47     for (int &i = cur[x]; ~i; i = e[i].prev)
48         if (e[i].cap > 0 && d[e[i].to] == d[x] + 1 && (f
49             => dfs(e[i].to, min(e[i].cap,a)))) {
50
51             e[i].cap -= f;
52             e[i^1].cap += f;
53             flow += f;
54             a -= f;
55
56             if (!a)
57                 break;
58         }
59
60     return flow;
61 }

```

3.6 最大流

3.6.1 Dinic

```

1 // 注意Dinic适用于二分图或分层图,对于一般稀疏图ISAP更
  ↳ 优,稠密图则HLPP更优
2
3 struct edge{
4     int to, cap, prev;
5 } e[maxe * 2];
6
7 int last[maxn], len, d[maxn], cur[maxn], q[maxn];
8
9 memset(last, -1, sizeof(last));
10
11 void AddEdge(int x, int y, int z) {
12     e[len].to = y;
13     e[len].cap = z;
14     e[len].prev = last[x];
15     last[x] = len++;
16 }
17
18 int Dinic() {
19     int flow = 0;
20     while (bfs(), ~d[t]) {
21         memcpy(cur, last, sizeof(int) * (t + 5));
22         flow += dfs(s, inf);
23     }
24     return flow;
25 }
26
27 void bfs() {
28     int head = 0, tail = 0;
29     memset(d, -1, sizeof(int) * (t + 5));
30     q[tail++] = s;
31     d[s] = 0;
32
33     while (head != tail){
34         int x = q[head++];
35         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
36             if (e[i].cap > 0 && d[e[i].to] == -1) {
37                 d[e[i].to] = d[x] + 1;
38                 q[tail++] = e[i].to;
39             }
40     }
41 }
42
43 int dfs(int x, int a) {
44     if (x == t || !a)
45         return a;

```

3.6.2 ISAP

```

1 // 注意ISAP适用于一般稀疏图,对于二分图或分层图情
  ↳ 况Dinic比较优,稠密图则HLPP更优
2
3
4 // 边的定义
5 // 这里没有记录起点和反向边,因为反向边即为正向边xor 1,起
  ↳ 点即为反向边的终点
6 struct edge{
7     int to, cap, prev;
8 } e[maxe * 2];
9
10
11 // 全局变量和数组定义
12 int last[maxn], cnte = 0, d[maxn], p[maxn], c[maxn],
  ↳ cur[maxn], q[maxn];
13 int n, m, s, t; // s, t一定要开成全局变量
14
15 // 重要!!!
16 // main函数最前面一定要加上如下初始化
17 memset(last, -1, sizeof(last));
18
19
20
21 // 加边函数 O(1)
22 // 包装了加反向边的过程,方便调用
23 // 需要调用AddEdge
24 void addedge(int x, int y, int z) {
25     AddEdge(x, y, z);
26     AddEdge(y, x, 0);
27 }
28
29
30 // 真·加边函数 O(1)
31 void AddEdge(int x, int y, int z){
32     e[cnte].to = y;
33     e[cnte].cap = z;
34     e[cnte].prev = last[x];
35     last[x] = cnte++;
36 }
37
38
39 // 主过程 O(n^2 m)
40 // 返回最大流的流量
41 // 需要调用bfs, augment
42 // 注意这里的n是编号最大值,在这个值不为n的时候一定要开个
  ↳ 变量记录下来并修改代码
43 // 非递归
44 int ISAP() {
45     bfs();
46

```

```

47 memcpy(cur, last, sizeof(cur));
48
49 int x = s, flow = 0;
50
51 while (d[s] < n) {
52     if (x == t) { // 如果走到了t就增广一次, 并返回s重新
        ↪ 找增广路
53         flow += augment();
54         x = s;
55     }
56
57     bool ok = false;
58     for (int &i = cur[x]; ~i; i = e[i].prev)
59         if (e[i].cap && d[x] == d[e[i].to] + 1) {
60             p[e[i].to] = i;
61             x = e[i].to;
62
63             ok = true;
64             break;
65         }
66
67     if (!ok) { // 修改距离标号
68         int tmp = n - 1;
69         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
70             if (e[i].cap)
71                 tmp = min(tmp, d[e[i].to] + 1);
72
73         if (!--c[d[x]])
74             break; // gap优化, 一定要加上
75
76         c[d[x] = tmp]++;
77         cur[x] = last[x];
78
79         if (x != s)
80             x = e[p[x] ^ 1].to;
81     }
82 }
83 return flow;
84 }
85
86 // bfs函数 O(n+m)
87 // 预处理到t的距离标号
88 // 在测试数据组数较少时可以省略, 把所有距离标号初始化为0
89 void bfs(){
90     memset(d, -1, sizeof(d));
91
92     int head = 0, tail = 0;
93     d[t] = 0;
94     q[tail++] = t;
95
96     while (head != tail) {
97         int x = q[head++];
98         c[d[x]]++;
99
100         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
101             if (e[i ^ 1].cap && d[e[i].to] == -1) {
102                 d[e[i].to] = d[x] + 1;
103                 q[tail++] = e[i].to;
104             }
105     }
106 }
107
108 // augment函数 O(n)
109 // 沿增广路增广一次, 返回增广的流量
110 int augment() {
111     int a = (~0u) >> 1; // INT_MAX
112
113     for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to)
114         a = min(a, e[p[x]].cap);
115

```

```

116     for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to){
117         e[p[x]].cap -= a;
118         e[p[x] ^ 1].cap += a;
119     }
120
121     return a;
122 }

```

3.6.3 HLPP最高标号预流推进

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 1205, maxe = 120005, inf =
    ↪ 2147483647;
6
7 struct edge {
8     int to, cap, prev;
9 } e[maxe * 2];
10
11 int n, m, s, t;
12 int last[maxn], cnte;
13 int h[maxn], ex[maxn], gap[maxn * 2];
14 bool inq[maxn];
15
16 struct cmp {
17     bool operator() (int x, int y) const {
18         return h[x] < h[y];
19     }
20 };
21
22 priority_queue<int, vector<int>, cmp> heap;
23
24 void AddEdge(int x, int y, int z) {
25     e[cnte].to = y;
26     e[cnte].cap = z;
27     e[cnte].prev = last[x];
28     last[x] = cnte++;
29 }
30
31 void addedge(int x, int y, int z) {
32     AddEdge(x, y, z);
33     AddEdge(y, x, 0);
34 }
35
36 bool bfs() {
37     static int q[maxn];
38
39     fill(h, h + n + 1, 2 * n);
40     int head = 0, tail = 0;
41     q[tail++] = t;
42     h[t] = 0;
43
44     while (head < tail) {
45         int x = q[head++];
46         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
47             if (e[i ^ 1].cap && h[e[i].to] > h[x] + 1) {
48                 h[e[i].to] = h[x] + 1;
49                 q[tail++] = e[i].to;
50             }
51     }
52
53     return h[s] < 2 * n;
54 }
55
56 void push(int x) {
57     for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
58         if (e[i].cap && h[x] == h[e[i].to] + 1) {

```



```

59     int d = min(ex[x], e[i].cap);
60
61     e[i].cap -= d;
62     e[i ^ 1].cap += d;
63     ex[x] -= d;
64     ex[e[i].to] += d;
65
66     if (e[i].to != s && e[i].to != t &&
        ↪ !inq[e[i].to]) {
67         heap.push(e[i].to);
68         inq[e[i].to] = true;
69     }
70
71     if (!ex[x])
72         break;
73 }
74 }
75
76 void relabel(int x) {
77     h[x] = 2 * n;
78
79     for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
80         if (e[i].cap)
81             h[x] = min(h[x], h[e[i].to] + 1);
82 }
83
84 int hlpp() {
85     if (!bfs())
86         return 0;
87
88     // memset(gap, 0, sizeof(int) * 2 * n);
89     h[s] = n;
90
91     for (int i = 1; i <= n; i++)
92         gap[h[i]]++;
93
94     for (int i = last[s]; ~i; i = e[i].prev)
95         if (e[i].cap) {
96             int d = e[i].cap;
97
98             e[i].cap -= d;
99             e[i ^ 1].cap += d;
100             ex[s] -= d;
101             ex[e[i].to] += d;
102
103             if (e[i].to != s && e[i].to != t &&
                ↪ !inq[e[i].to]) {
104                 heap.push(e[i].to);
105                 inq[e[i].to] = true;
106             }
107         }
108
109     while (!heap.empty()) {
110         int x = heap.top();
111         heap.pop();
112         inq[x] = false;
113
114         push(x);
115         if (ex[x]) {
116             if (!--gap[h[x]]) { // gap
117                 for (int i = 1; i <= n; i++)
118                     if (i != s && i != t && h[i] > h[x])
119                         h[i] = n + 1;
120             }
121
122             relabel(x);
123             ++gap[h[x]];
124             heap.push(x);
125             inq[x] = true;

```

```

126     }
127 }
128
129 return ex[t];
130 }
131
132 int main() {
133
134     memset(last, -1, sizeof(last));
135
136     scanf("%d%d%d", &n, &m, &s, &t);
137
138     while (m--) {
139         int x, y, z;
140         scanf("%d%d%d", &x, &y, &z);
141         addedge(x, y, z);
142     }
143
144     printf("%d\n", hlpp());
145
146     return 0;
147 }

```

3.7 费用流

3.7.1 SPFA费用流

```

1 constexpr int maxn = 20005, maxm = 200005;
2
3 struct edge {
4     int to, prev, cap, w;
5 } e[maxm * 2];
6
7 int last[maxn], cnte, d[maxn], p[maxn]; // 记得把last初始
    ↪ 化成-1, 不然会死循环
8 bool inq[maxn];
9
10 void spfa(int s) {
11
12     memset(d, -63, sizeof(d));
13     memset(p, -1, sizeof(p));
14
15     queue<int> q;
16
17     q.push(s);
18     d[s] = 0;
19
20     while (!q.empty()) {
21         int x = q.front();
22         q.pop();
23         inq[x] = false;
24
25         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
26             if (e[i].cap) {
27                 int y = e[i].to;
28
29                 if (d[x] + e[i].w > d[y]) {
30                     p[y] = i;
31                     d[y] = d[x] + e[i].w;
32                     if (!inq[y]) {
33                         q.push(y);
34                         inq[y] = true;
35                     }
36                 }
37             }
38     }
39 }
40
41 int mcmf(int s, int t) {
42     int ans = 0;
43

```

```

44 while (spfa(s), d[t] > 0) {
45     int flow = 0x3f3f3f3f;
46     for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to)
47         flow = min(flow, e[p[x]].cap);
48
49     ans += flow * d[t];
50
51     for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to) {
52         e[p[x]].cap -= flow;
53         e[p[x] ^ 1].cap += flow;
54     }
55 }
56
57 return ans;
58 }
59
60 void add(int x, int y, int c, int w) {
61     e[cnte].to = y;
62     e[cnte].cap = c;
63     e[cnte].w = w;
64
65     e[cnte].prev = last[x];
66     last[x] = cnte++;
67 }
68
69 void addedge(int x, int y, int c, int w) {
70     add(x, y, c, w);
71     add(y, x, 0, -w);
72 }

```

```

4     tree[l] += cntl * d, tree[r] += cntr * d;
5     if (~l & 1) tree[l ^ 1] += d * len, mark[l ^ 1]
        ↳ += d, cntl += len;
6     if (r & 1) tree[r ^ 1] += d * len, mark[r ^ 1] +=
        ↳ d, cntr += len;
7
8 }
9
10 for (; l; l >>= 1, r >>= 1)
11     tree[l] += cntl * d, tree[r] += cntr * d;
12
13 int query(int l, int r) {
14     int ans = 0, len = 1, cntl = 0, cntr = 0;
15     for (l += n - 1, r += n + 1; l ^ r ^ 1; l >>= 1, r
        ↳ >>= 1, len <= 1) {
16         ans += cntl * mark[l] + cntr * mark[r];
17         if (~l & 1) ans += tree[l ^ 1], cntl += len;
18         if (r & 1) ans += tree[r ^ 1], cntr += len;
19     }
20
21     for (; l; l >>= 1, r >>= 1)
22         ans += cntl * mark[l] + cntr * mark[r];
23
24     return ans;
25 }

```

区间加，区间求最大值

4. 数据结构

4.1 线段树

4.1.1 非递归线段树

让fstqwq手撕

- 如果 $M = 2^k$ ，则只能维护 $[1, M - 2]$ 范围
- 找叶子： i 对应的叶子就是 $i + M$
- 单点修改：找到叶子然后向上跳
- 区间查询：左右区间各扩展一位，转换成开区间查询

```

1 int query(int l, int r) {
2     l += M - 1;
3     r += M + 1;
4
5     int ans = 0;
6     while (l ^ r != 1) {
7         ans += sum[l ^ 1] + sum[r ^ 1];
8
9         l >>= 1;
10        r >>= 1;
11    }
12
13    return ans;
14 }

```

区间修改要标记永久化,并且求区间和和求最值的代码不太一样

区间加，区间求和

```

1 void update(int l, int r, int d) {
2     for (l += N - 1, r += N + 1; l ^ r ^ 1; l >>= 1, r
        ↳ >>= 1) {
3         if (l < N) tree[l] = max(tree[l << 1], tree[l <<
            ↳ 1 | 1]) + mark[l],
4             tree[r] = max(tree[r << 1], tree[r <<
            ↳ 1 | 1]) + mark[r];
5         if (~l & 1) tree[l ^ 1] += d, mark[l ^ 1] += d;
6         if (r & 1) tree[r ^ 1] += d, mark[r ^ 1] += d;
7     }
8
9     for (; l; l >>= 1, r >>= 1)
10        if (l < N) tree[l] = max(tree[l << 1], tree[l <<
            ↳ 1 | 1]) + mark[l],
11            tree[r] = max(tree[r << 1], tree[r <<
            ↳ 1 | 1]) + mark[r];
12 }
13
14 void query(int l, int r) {
15     int maxl = -INF, maxr = -INF;
16     for (l += N - 1, r += N + 1; l ^ r ^ 1; l >>= 1, r
        ↳ >>= 1) {
17         maxl += mark[l], maxr += mark[r];
18         if (~l & 1) cmax(maxl, tree[l ^ 1]);
19         if (r & 1) cmax(maxr, tree[r ^ 1]);
20     }
21
22     for (; l; l >>= 1, r >>= 1)
23         maxl += mark[l], maxr += mark[r];
24
25     return max(maxl, maxr);
26 }

```

4.1.2 主席树

这种东西能不能手撕啊

```

1 void update(int l, int r, int d) {
2     int len = 1, cntl = 0, cntr = 0; // cntl, cntr是左右
        ↳ 两边分别实际修改的区间长度
3     for (l += n - 1, r += n + 1; l ^ r ^ 1; l >>= 1, r
        ↳ >>= 1, len <= 1) {

```

4.2 陈丹琦分治

```

1 // Division of Danqi Chen CDQ分治
2 // By AntiLeaf
3 // 通过题目四维偏序
4
5 void CDQ1(int l,int r){
6     if(l>=r)return;
7     int mid=(l+r)>>1;
8     CDQ1(l,mid);CDQ1(mid+1,r);
9     int i=l,j=mid+1,k=1;
10    while(i<=mid&&j<=r){
11        if(a[i].x<a[j].x){
12            a[i].ins=true;
13            b[k++]=a[i++];
14        }
15        else{
16            a[j].ins=false;
17            b[k++]=a[j++];
18        }
19    }
20    while(i<=mid){
21        a[i].ins=true;
22        b[k++]=a[i++];
23    }
24    while(j<=r){
25        a[j].ins=false;
26        b[k++]=a[j++];
27    }
28    copy(b+1,b+r+1,a+1);
29    CDQ2(l,r);
30 }
31 void CDQ2(int l,int r){
32     if(l>=r)return;
33     int mid=(l+r)>>1;
34     CDQ2(l,mid);CDQ2(mid+1,r);
35     int i=l,j=mid+1,k=1;
36     while(i<=mid&&j<=r){
37         if(b[i].y<b[j].y){
38             if(b[i].ins)add(b[i].z,1);
39             t[k++]=b[i++];
40         }
41         else{
42             if(!b[j].ins)ans+=query(b[j].z-1);
43             t[k++]=b[j++];
44         }
45     }
46     while(i<=mid){
47         if(b[i].ins)add(b[i].z,1);
48         t[k++]=b[i++];
49     }
50     while(j<=r){
51         if(!b[j].ins)ans+=query(b[j].z-1);
52         t[k++]=b[j++];
53     }
54     for(i=l;i<=mid;i++)if(b[i].ins)add(b[i].z,-1);
55     copy(t+1,t+r+1,b+1);
56 }

```

4.3 Treap

```

1 //Treap Minimum Heap Version 小根堆版本
2 //By ysf
3 //通过题目普通平衡树
4
5 //注意相同键值可以共存
6
7 struct node{//结点类定义
8     int key,size,p;//分别为键值子树大小优先级
9     node *ch[2];//0表示左儿子1表示右儿子
10    node(int key=0):key(key),size(1),p(rand()){}

```

```

11    void refresh(){size=ch[0]->size+ch[1]->size+1;}//更新
12    ↪ 子树大小和附加信息
13 }null[maxn],*root=null,*ptr=null;//数组名叫做null是为了方便
14    ↪ 便开哨兵节点
15 //如果需要删除而空间不能直接开下所有结点则需要再写一个
16    ↪ 垃圾回收
17 //注意数组里的元素一定不能delete否则会导致RE
18
19 //重要
20 //在主函数最开始一定要加上以下预处理
21 null->ch[0]=null->ch[1]=null;
22 null->size=0;
23
24 //伪构造函数 0(1)
25 //为了方便在结点类外面再定义一个伪构造函数
26 node *newnode(int x){//键值为x
27     *++ptr=newnode(x);
28     ptr->ch[0]=ptr->ch[1]=null;
29     return ptr;
30 }
31
32 //插入键值 期望O(\Log n)
33 //需要调用旋转
34 void insert(int x,node *&rt){//rt为当前结点建议调用时传
35     ↪ 入root下同
36     if(rt==null){
37         rt=newnode(x);
38         return;
39     }
40     int d=x>rt->key;
41     insert(x,rt->ch[d]);
42     rt->refresh();
43     if(rt->ch[d]->p<rt->p)rot(rt,d^1);
44 }
45
46 //删除一个键值 期望O(\Log n)
47 //要求键值必须存在至少一个否则会导致RE
48 //需要调用旋转
49 void erase(int x,node *&rt){
50     if(x==rt->key){
51         if(rt->ch[0]!=null&&rt->ch[1]!=null){
52             int d=rt->ch[0]->p<rt->ch[1]->p;
53             rot(rt,d);
54             erase(x,rt->ch[d]);
55         }
56         else rt=rt->ch[rt->ch[0]==null];
57     }
58     else erase(x,rt->ch[x>rt->key]);
59     if(rt!=null)rt->refresh();
60 }
61
62 //求元素的排名严格小于键值的个数+1 期望O(\Log n)
63 //非递归
64 int rank(int x,node *rt){
65     int ans=1,d;
66     while(rt!=null){
67         if((d=x>rt->key))ans+=rt->ch[0]->size+1;
68         rt=rt->ch[d];
69     }
70     return ans;
71 }
72
73 //返回排名第k从1开始的键值对应的指针 期望O(\Log n)
74 //非递归
75 node *kth(int x,node *rt){
76     int d;
77     while(rt!=null){
78         if(x==rt->ch[0]->size+1)return rt;
79         if((d=x>rt->ch[0]->size))x-=rt->ch[0]->size+1;
80         rt=rt->ch[d];
81     }
82 }

```

```

77     }
78     return rt;
79 }
80
81 //返回前驱最大的比给定键值小的键值对应的指针 期
82   ↳ 望 $O(\log n)$ 
83 //非递归
84 node *pred(int x, node *rt){
85     node *y=null;
86     int d;
87     while(rt!=null){
88         if((d=x>rt->key))y=rt;
89         rt=rt->ch[d];
90     }
91     return y;
92 }
93
94 //返回后继最小的比给定键值大的键值对应的指针 期
95   ↳ 望 $O(\log n)$ 
96 //非递归
97 node *succ(int x, node *rt){
98     node *y=null;
99     int d;
100    while(rt!=null){
101        if((d=x<rt->key))y=rt;
102        rt=rt->ch[d^1];
103    }
104    return y;
105 }
106
107 //旋转Treap版本  $O(1)$ 
108 //平衡树基础操作
109 //要求对应儿子必须存在 否则会导致后续各种莫名其妙的问题
110 void rot(node *&x, int d){ //x为被转下去的结点 会被修改以维
111   ↳ 护树结构
112     node *y=x->ch[d^1];
113     x->ch[d^1]=y->ch[d];
114     y->ch[d]=x;
115     x->refresh();
116     (x=y)->refresh();
117 }

```

4.4 Splay

(参见LCT,除了splay()需要传一个点表示最终它的父亲,其他写法都和LCT相同)

4.5 树分治

4.5.1 动态树分治

```

1 //Dynamic Divide and Couquer on Tree 动态树分治  $O(n\log$ 
2   ↳  $n)-O(\log n)$ 
3 //By ysf
4 //通过题目 COGS2278 树黑白
5
6 //为了减小常数 这里采用bfs写法 实测预处理比dfs快将近一半
7 //以下以维护一个点到每个黑点的距离之和为例
8
9 //全局数组定义
10 vector<int>G[maxn],W[maxn];
11 int size[maxn],son[maxn],q[maxn];
12 int p[maxn],depth[maxn],id[maxn][20],d[maxn][20]; //id是对
13   ↳ 应层所在子树的根
14 int a[maxn],ca[maxn],b[maxn][20],cb[maxn][20]; //维护距离
15   ↳ 和用的
16 bool vis[maxn]={false},col[maxn]={false};
17
18 //建树 总计 $O(n\log n)$ 
19 //需要调用找重心 预处理距离 同时递归调用自身

```

```

17 void build(int x,int k,int s,int pr){ //结点深度连通块大
18   ↳ 小点分树上的父亲
19     x=getcenter(x,s);
20     vis[x]=true;
21     depth[x]=k;
22     p[x]=pr;
23     for(int i=0;i<(int)G[x].size();i++){
24         if(!vis[G[x][i]]){
25             d[G[x][i]][k]=W[x][i];
26             p[G[x][i]]=x;
27             getdis(G[x][i],k,G[x][i]);
28         }
29     }
30     for(int i=0;i<(int)G[x].size();i++){
31         if(!vis[G[x][i]])build(G[x][i],k+1,size[G[x]
32   ↳ [i],x);
33     }
34 }
35
36 //找重心  $O(n)$ 
37 int getcenter(int x,int s){
38     int head=0,tail=0;
39     q[tail++]=x;
40     while(head!=tail){
41         x=q[head++];
42         size[x]=1;
43         son[x]=0;
44         for(int i=0;i<(int)G[x].size();i++){
45             if(!vis[G[x][i]]&&G[x][i]!=p[x]){
46                 p[G[x][i]]=x;
47                 q[tail++]=G[x][i];
48             }
49         }
50     }
51     for(int i=tail-1;i--){
52         x=q[i];
53         size[p[x]]+=size[x];
54         if(size[x]>size[son[p[x]]])son[p[x]]=x;
55     }
56     x=q[0];
57     while(son[x]&&(size[son[x]]<<1)>=s)x=son[x];
58     return x;
59 }
60
61 //预处理距离  $O(n)$ 
62 //方便起见 这里直接用了笨一点的方法  $O(n\log n)$  全存下来
63 void getdis(int x,int k,int rt){
64     int head=0,tail=0;
65     q[tail++]=x;
66     while(head!=tail){
67         x=q[head++];
68         size[x]=1;
69         id[x][k]=rt;
70         for(int i=0;i<(int)G[x].size();i++){
71             if(!vis[G[x][i]]&&G[x][i]!=p[x]){
72                 p[G[x][i]]=x;
73                 d[G[x][i]][k]=d[x][k]+W[x][i];
74                 q[tail++]=G[x][i];
75             }
76         }
77     }
78     for(int i=tail-1;i--){
79         size[p[q[i]]]+=size[q[i]];
80     }
81 }
82
83 //修改  $O(\log n)$ 
84 void modify(int x){
85     if(col[x])ca[x]--;
86     else ca[x]++; //记得先特判自己作为重心的那层
87     for(int u=p[x],k=depth[x]-1;u=p[u],k--){
88         if(col[x]){
89             a[u]-=d[x][k];

```

```

83     ca[u]--;
84     b[id[x][k]][k] -= d[x][k];
85     cb[id[x][k]][k]--;
86 }
87 else{
88     a[u] += d[x][k];
89     ca[u]++;
90     b[id[x][k]][k] += d[x][k];
91     cb[id[x][k]][k]++;
92 }
93 }
94 col[x] ^= true;
95 }
96 //询问  $O(\log n)$ 
97 int query(int x){
98     int ans = a[x]; //特判自己是重心的那层
99     for(int u = p[x], k = depth[x] - 1; u = p[u], k--){
100         ans += a[u] - b[id[x][k]][k] + d[x][k] * (ca[u] - cb[id[x]
101             ↳ [k]][k]);
102     }
103     return ans;
104 }

```

```

43     scanf("%d%d%d", &w[1], root[1]);
44     insert(-w[1], root[1]);
45     size[1] = 1;
46     printf("0\n");
47     for(int i = 2; i <= n; i++){
48         scanf("%d%d%d", &p[i], &tmp, &w[i]);
49         p[i] ^= (ans % (int) 1e9);
50         G[i].push_back(p[i]);
51         W[i].push_back(tmp);
52         G[p[i]].push_back(i);
53         W[p[i]].push_back(tmp);
54         addnode(i, tmp);
55         printf("%11d\n", ans);
56     }
57     return 0;
58 }
59 void addnode(int x, int z){ //wj-dj >= di-wi
60     depth[x] = depth[p[x]] + 1;
61     size[x] = 1;
62     insert(-w[x], root[x]);
63     int rt = 0;
64     for(int u = p[x], k = depth[p[x]]; u = p[u], k--){
65         if(u == p[x]){
66             id[x][k] = x;
67             d[x][k] = z;
68         }
69         else{
70             id[x][k] = id[p[x]][k];
71             d[x][k] = d[p[x]][k] + z;
72         }
73         ans += order(w[x] - d[x][k], root[u]) - order(w[x] - d[x]
74             ↳ [k], root1[id[x][k]][k]);
75         insert(d[x][k] - w[x], root[u]);
76         insert(d[x][k] - w[x], root1[id[x][k]][k]);
77         size[u]++;
78         siz[id[x][k]][k]++;
79         if(siz[id[x][k]][k] > size[u] * alpha + 5) rt = u;
80     }
81     id[x][depth[x]] = 0;
82     d[x][depth[x]] = 0;
83     if(rt){
84         dfs_destroy(rt, depth[rt]);
85         rebuild(rt, depth[rt], size[rt], p[rt]);
86     }
87 void rebuild(int x, int k, int s, int pr){
88     int u = 0;
89     dfs_getcenter(x, s, u);
90     vis[x] = true;
91     p[x] = pr;
92     depth[x] = k;
93     size[x] = s;
94     d[x][k] = id[x][k] = 0;
95     destroy(root[x]);
96     insert(-w[x], root[x]);
97     if(s <= 1) return;
98     for(int i = 0; i < (int) G[x].size(); i++) if(!vis[G[x][i]]){
99         p[G[x][i]] = 0;
100         d[G[x][i]][k] = w[x][i];
101         siz[G[x][i]][k] = p[G[x][i]] = 0;
102         destroy(root1[G[x][i]][k]);
103         dfs_getdis(G[x][i], x, G[x][i], k);
104     }
105     for(int i = 0; i < (int) G[x].size(); i++) if(!vis[G[x]
106         ↳ [i]]) rebuild(G[x][i], k + 1, size[G[x][i]], x);
107 void dfs_getcenter(int x, int s, int &u){
108     size[x] = 1;
109     son[x] = 0;

```

4.5.2 紫荆花之恋

```

1 #include<cstdio>
2 #include<cstring>
3 #include<algorithm>
4 #include<vector>
5 using namespace std;
6 const int maxn = 100010;
7 const double alpha = 0.7;
8 struct node{
9     static int randint(){
10         static int
11             ↳ a = 1213, b = 97818217, p = 998244353, x = 751815431;
12         x = a * x + b; x %= p;
13         return x < 0 ? (x += p) : x;
14     }
15     int data, size, p;
16     node *ch[2];
17     node(int d): data(d), size(1), p(randint()){}
18     inline void refresh()
19         ↳ {size = ch[0] -> size + ch[1] -> size + 1;}
20 } *null = new node(0), *root[maxn], *root1[maxn][50];
21 void addnode(int, int);
22 void rebuild(int, int, int, int);
23 void dfs_getcenter(int, int, int &);
24 void dfs_getdis(int, int, int, int);
25 void dfs_destroy(int, int);
26 void insert(int, node *&);
27 int order(int, node *);
28 void destroy(node *&);
29 void rot(node *&, int);
30 vector<int> G[maxn], W[maxn];
31 int size[maxn] = {0}, siz[maxn][50] = {0}, son[maxn];
32 bool vis[maxn];
33 int depth[maxn], p[maxn], d[maxn][50], id[maxn][50];
34 int n, m, w[maxn], tmp;
35 long long ans = 0;
36 int main(){
37     freopen("flowera.in", "r", stdin);
38     freopen("flowera.out", "w", stdout);
39     null->size = 0;
40     null->ch[0] = null->ch[1] = null;
41     scanf("%d%d", &n, &m);
42     fill(vis, vis + n + 1, true);
43     fill(root, root + n + 1, null);
44     for(int i = 0; i < n; i++) fill(root1[i], root1[i] + 50, null);

```

```

110 for(int i=0;i<(int)G[x].size();i++)if(!vis[G[x]
    ↳ [i]]&&G[x][i]!=p[x]){
111     p[G[x][i]]=x;
112     dfs_getcenter(G[x][i],s,u);
113     size[x]+=size[G[x][i]];
114     if(size[G[x][i]]>size[son[x]])son[x]=G[x][i];
115 }
116 if(!u||max(s-size[x],size[son[x]])<max(s-size[u],size[son[u]]))u=x;
117 }
118 void dfs_getdis(int x,int u,int rt,int k){
119     insert(d[x][k]-w[x],root[u]);
120     insert(d[x][k]-w[x],root1[rt][k]);
121     id[x][k]=rt;
122     siz[rt][k]++;
123     size[x]=1;
124     for(int i=0;i<(int)G[x].size();i++)if(!vis[G[x]
    ↳ [i]]&&G[x][i]!=p[x]){
125         p[G[x][i]]=x;
126         d[G[x][i]][k]=d[x][k]+w[x][i];
127         dfs_getdis(G[x][i],u,rt,k);
128         size[x]+=size[G[x][i]];
129     }
130 }
131 void dfs_destroy(int x,int k){
132     vis[x]=false;
133     for(int i=0;i<(int)G[x].size();i++)if(depth[G[x]
    ↳ [i]]>=k&&G[x][i]!=p[x]){
134         p[G[x][i]]=x;
135         dfs_destroy(G[x][i],k);
136     }
137 }
138 void insert(int x,node *&rt){
139     if(rt==null){
140         rt=new node(x);
141         rt->ch[0]=rt->ch[1]=null;
142         return;
143     }
144     int d=x>=rt->data;
145     insert(x,rt->ch[d]);
146     rt->refresh();
147     if(rt->ch[d]->p<rt->p)rot(rt,d^1);
148 }
149 int order(int x,node *rt){
150     int ans=0,d;
151     x++;
152     while(rt!=null){
153         if((d=x>=rt->data))ans+=rt->ch[0]->size+1;
154         rt=rt->ch[d];
155     }
156     return ans;
157 }
158 void destroy(node *&x){
159     if(x==null)return;
160     destroy(x->ch[0]);
161     destroy(x->ch[1]);
162     delete x;
163     x=null;
164 }
165 void rot(node *&x,int d){
166     node *y=x->ch[d^1];
167     x->ch[d^1]=y->ch[d];
168     y->ch[d]=x;
169     x->refresh();
170     (x=y)->refresh();
171 }

```

4.6 LCT

4.6.1 不换根(弹飞绵羊)

```

1 //Link-Cut Trees without Changing Root LCT不换根版本
    ↳  $O((n+m)\log n)$ 
2 //By ysf
3 //通过题目弹飞绵羊
4
5 //常数较大,请根据数据范围谨慎使用
6
7 #define isroot(x) ((x)!=(x)->p->ch[0]&&(x)!=(x)->p-
    ↳ >ch[1])//判断是不是Splay的根
8 #define dir(x) ((x)==(x)->p->ch[1])//判断它是它父亲的
    ↳ 左/右儿子
9
10 struct node{//结点类定义
11     int size;//Splay的子树大小
12     node *ch[2],*p;
13     node():size(1){}
14     void refresh(){size=ch[0]->size+ch[1]->size+1;}//附加
        ↳ 信息维护
15 }null[maxn];
16
17 //在主函数开头加上这句初始化
18 null->size=0;
19
20 //初始化结点
21 void initialize(node *x){x->ch[0]=x->ch[1]=x->p=null;}//
22
23 //Access 均摊 $O(\log n)$ 
24 //LCT核心操作,把结点到根的路径打通,顺便把与重儿子的连边
    ↳ 变成轻边
25 //需要调用splay
26 node *access(node *x){
27     node *y=null;
28     while(x!=null){
29         splay(x);
30         x->ch[1]=y;
31         (y=x)->refresh();
32         x=x->p;
33     }
34     return y;
35 }
36
37 //Link 均摊 $O(\log n)$ 
38 //把x的父亲设为y
39 //要求x必须为所在树的根节点,否则会导致后续各种莫名其妙的
    ↳ 问题
40 //需要调用splay
41 void link(node *x,node *y){
42     splay(x);
43     x->p=y;
44 }
45
46 //Cut 均摊 $O(\log n)$ 
47 //把x与其父亲的连边断掉
48 //x可以是所在树的根节点,这时此操作没有任何实质效果
49 //需要调用access和splay
50 void cut(node *x){
51     access(x);
52     splay(x);
53     x->ch[0]->p=null;
54     x->ch[0]=null;
55     x->refresh();
56 }
57
58 //Splay 均摊 $O(\log n)$ 
59 //需要调用旋转
60 void splay(node *x){
61     while(!isroot(x)){

```



```

62     if(isroot(x->p)){
63         rot(x->p,dir(x)^1);
64         break;
65     }
66     if(dir(x)==dir(x->p))rot(x->p->p,dir(x->p)^1);
67     else rot(x->p,dir(x)^1);
68     rot(x->p,dir(x)^1);
69 }
70 }
71
72 //旋转LCT版本 O(1)
73 //平衡树基本操作
74 //要求对应儿子必须存在否则会导致后续各种莫名其妙的问题
75 void rot(node *x,int d){
76     node *y=x->ch[d^1];
77     y->p=x->p;
78     if(!isroot(x))x->p->ch[dir(x)]=y;
79     if((x->ch[d^1]=y->ch[d])!=null)y->ch[d]->p=x;
80     (y->ch[d]=x)->p=y;
81     x->refresh();
82     y->refresh();
83 }

```

4.6.2 换根/维护生成树

```

1  #define isroot(x) ((x) -> p == null || ((x) -> p -> ch[0]
2    ↪ != (x) && (x) -> p -> ch[1] != (x)))
3  #define dir(x) ((x) == (x) -> p -> ch[1])
4  using namespace std;
5
6  const int maxn = 200005;
7
8  struct node{
9      int key, mx, pos;
10     bool rev;
11     node *ch[2], *p;
12
13     node(int key = 0): key(key), mx(key), pos(-1),
14         ↪ rev(false) {}
15
16     void pushdown() {
17         if (!rev)
18             return;
19
20         ch[0] -> rev ^= true;
21         ch[1] -> rev ^= true;
22         swap(ch[0], ch[1]);
23
24         if (pos != -1)
25             pos ^= 1;
26
27         rev = false;
28     }
29
30     void refresh() {
31         mx = key;
32         pos = -1;
33         if (ch[0] -> mx > mx) {
34             mx = ch[0] -> mx;
35             pos = 0;
36         }
37         if (ch[1] -> mx > mx) {
38             mx = ch[1] -> mx;
39             pos = 1;
40         }
41     }
42 } null[maxn * 2];

```

```

43 void init(node *x, int k) {
44     x -> ch[0] = x -> ch[1] = x -> p = null;
45     x -> key = x -> mx = k;
46 }
47
48 void rot(node *x, int d) {
49     node *y = x -> ch[d ^ 1];
50     if ((x -> ch[d ^ 1] = y -> ch[d]) != null)
51         y -> ch[d] -> p = x;
52
53     y -> p = x -> p;
54     if (!isroot(x))
55         x -> p -> ch[dir(x)] = y;
56
57     (y -> ch[d] = x) -> p = y;
58
59     x -> refresh();
60     y -> refresh();
61 }
62
63 void splay(node *x) {
64     x -> pushdown();
65
66     while (!isroot(x)) {
67         if (!isroot(x -> p))
68             x -> p -> p -> pushdown();
69         x -> p -> pushdown();
70         x -> pushdown();
71
72         if (isroot(x -> p)) {
73             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
74             break;
75         }
76
77         if (dir(x) == dir(x -> p))
78             rot(x -> p -> p, dir(x -> p) ^ 1);
79         else
80             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
81
82         rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
83     }
84 }
85
86 node *access(node *x) {
87     node *y = null;
88
89     while (x != null) {
90         splay(x);
91
92         x -> ch[1] = y;
93         (y = x) -> refresh();
94
95         x = x -> p;
96     }
97
98     return y;
99 }
100
101 void makeroor(node *x) {
102     access(x);
103     splay(x);
104     x -> rev ^= true;
105 }
106
107 void link(node *x, node *y) {
108     makeroor(x);
109     x -> p = y;
110 }
111

```



```

112 void cut(node *x, node *y) {
113     makeroot(x);
114     access(y);
115     splay(y);
116
117     y -> ch[0] -> p = null;
118     y -> ch[0] = null;
119     y -> refresh();
120 }
121
122 node *getroot(node *x) {
123     x = access(x);
124     while (x -> pushdown(), x -> ch[0] != null)
125         x = x -> ch[0];
126     splay(x);
127     return x;
128 }
129
130 node *getmax(node *x, node *y) {
131     makeroot(x);
132     x = access(y);
133
134     while (x -> pushdown(), x -> pos != -1)
135         x = x -> ch[x -> pos];
136     splay(x);
137
138     return x;
139 }
140
141 // 以下为主函数示例
142 for (int i = 1; i <= m; i++) {
143     init(null + n + i, w[i]);
144     if (getroot(null + u[i]) != getroot(null + v[i])) {
145         ans[q + 1] -= k;
146         ans[q + 1] += w[i];
147
148         link(null + u[i], null + n + i);
149         link(null + v[i], null + n + i);
150         vis[i] = true;
151     }
152     else {
153         int ii = getmax(null + u[i], null + v[i]) - null
154             ↳ - n;
155         if (w[i] >= w[ii])
156             continue;
157
158         cut(null + u[ii], null + n + ii);
159         cut(null + v[ii], null + n + ii);
160
161         link(null + u[i], null + n + i);
162         link(null + v[i], null + n + i);
163
164         ans[q + 1] -= w[ii];
165         ans[q + 1] += w[i];
166     }
167 }

```

```

9 // 节点类定义
10 struct node { // 以维护子树中黑点到根距离和为例
11     int w, chain_cnt, tree_cnt;
12     long long sum, suml, sumr, tree_sum; // 由于换根需要
13     ↳ 子树反转需要维护两个方向的信息
14     bool rev, col;
15     node *ch[2], *p;
16
17     node() : w(0), chain_cnt(0),
18         ↳ tree_cnt(0), sum(0), suml(0), sumr(0),
19         ↳ tree_sum(0), rev(false), col(false) {}
20
21     inline void pushdown() {
22         if(!rev)
23             return;
24
25         ch[0]->rev ^= true;
26         ch[1]->rev ^= true;
27         swap(ch[0], ch[1]);
28         swap(suml, sumr);
29
30         rev = false;
31     }
32
33     inline void refresh() { // 如果不想这样特判
34         ↳ 就pushdown一下
35         ↳ pushdown();
36
37         sum = ch[0] -> sum + ch[1] -> sum + w;
38         suml = (ch[0] -> rev ? ch[0] -> sumr : ch[0] ->
39             ↳ suml) + (ch[1] -> rev ? ch[1] -> sumr : ch[1]
40             ↳ -> suml) + (tree_cnt + ch[1] -> chain_cnt) *
41             ↳ (ch[0] -> sum + w) + tree_sum;
42         sumr = (ch[0] -> rev ? ch[0] -> suml : ch[0] ->
43             ↳ sumr) + (ch[1] -> rev ? ch[1] -> suml : ch[1]
44             ↳ -> sumr) + (tree_cnt + ch[0] -> chain_cnt) *
45             ↳ (ch[1] -> sum + w) + tree_sum;
46         chain_cnt = ch[0] -> chain_cnt + ch[1] ->
47             ↳ chain_cnt + tree_cnt;
48     }
49 } null[maxn * 2]; // 如果没有边权变点权就不用乘2了
50
51 // 封装构造函数
52 node *newnode(int w) {
53     node *x = nodes.front(); // 因为有删边加边，可以用一
54     ↳ 个队列维护可用结点
55     nodes.pop();
56     initialize(x);
57     x->w = w;
58     x -> refresh();
59     return x;
60 }
61
62 // 封装初始化函数
63 // 记得在进行操作之前对所有结点调用一遍
64 inline void initialize(node *x) {
65     *x = node();
66     x->ch[0]=x->ch[1]=x->p=null;
67 }
68
69 // 注意一下在Access的同时更新子树信息的方法
70 node *access(node *x) {
71     node *y = null;
72
73     while (x != null) {
74         splay(x);
75
76         x -> tree_cnt += x -> ch[1] -> chain_cnt - y ->
77             ↳ chain_cnt;

```

4.6.3 维护子树信息

```

1 // 这个东西虽然只需要抄板子但还是极其难写常数极其巨
2 ↳ 大没必要的时候就不要用
3 // 如果维护子树最小值就需要套一个可删除的堆来维护复杂度
4 ↳ 会变成 $O(n \log^2 n)$ 
5 // 注意由于这道题与边权有关需要边权拆点变点权
6
7 // 宏定义
8 #define isroot(x) ((x) -> p == null || ((x) != (x) -> p
9     ↳ -> ch[0] && (x) != (x) -> p -> ch[1]))
10 #define dir(x) ((x) == (x) -> p -> ch[1])

```

```

66     x->tree_sum += (x -> ch[1] -> rev ? x -> ch[1] ->
        ↳ sumr : x -> ch[1] -> suml) - y -> suml;
67     x -> ch[1] = y;
68
69     (y = x) -> refresh();
70     x = x -> p;
71 }
72
73     return y;
74 }
75
76 // 找到一个点所在连通块的根
77 // 对比原版没有变化
78 node *getroot(node *x) {
79     x = access(x);
80
81     while (x -> pushdown(), x -> ch[0] != null)
82         x = x -> ch[0];
83     splay(x);
84
85     return x;
86 }
87
88 // 换根, 同样没有变化
89 void makeroot(node *x) {
90     access(x);
91     splay(x);
92     x->rev ^= true;
93     x->pushdown();
94 }
95
96 // 连接两个点
97 // !!! 注意这里必须把两者都变成根, 因为只能修改根结点
98 void link(node *x, node *y) {
99     makeroot(x);
100    makeroot(y);
101
102    x->p = y;
103    y -> tree_cnt += x -> chain_cnt;
104    y -> tree_sum += x -> suml;
105    y -> refresh();
106 }
107
108 // 删除一条边
109 // 对比原版没有变化
110 void cut(node *x, node *y) {
111     makeroot(x);
112     access(y);
113     splay(y);
114
115     y -> ch[0] -> p = null;
116     y -> ch[0] = null;
117     y -> refresh();
118 }
119
120 // 修改/询问一个点, 这里以询问为例
121 // 如果是修改就在换根之后搞一些操作
122 long long query(node *x) {
123     makeroot(x);
124     return x -> suml;
125 }
126
127 // Splay函数
128 // 对比原版没有变化
129 void splay(node *x) {
130     x -> pushdown();
131
132     while (!isroot(x)) {
133         if (!isroot(x -> p))
134             x -> p -> p -> pushdown();

```

```

135     x -> p -> pushdown();
136     x -> pushdown();
137
138     if (isroot(x -> p)) {
139         rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
140         break;
141     }
142
143     if (dir(x) == dir(x -> p))
144         rot(x -> p -> p, dir(x -> p) ^ 1);
145     else
146         rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
147
148     rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
149 }
150
151 // 旋转函数
152 // 对比原版没有变化
153 void rot(node *x, int d) {
154     node *y = x -> ch[d ^ 1];
155
156     if ((x -> ch[d ^ 1] = y -> ch[d]) != null)
157         y -> ch[d] -> p = x;
158
159     y -> p = x -> p;
160     if (!isroot(x))
161         x -> p -> ch[dir(x)] = y;
162
163     (y -> ch[d] = x) -> p = y;
164
165     x -> refresh();
166     y -> refresh();
167 }
168

```

4.6.4 模板题:动态QTREE4(询问树上相距最远点)

```

1 #include<bits/stdc++.h>
2 #include<ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
3 #include<ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
4 #include<ext/pb_ds/priority_queue.hpp>
5
6 #define isroot(x) ((x)->p==null||((x)!=(x)->p-
    ↳ >ch[0]&&(x)!=(x)->p->ch[1]))
7 #define dir(x) ((x)==(x)->p->ch[1])
8
9 using namespace std;
10 using namespace __gnu_pbds;
11
12 const int maxn=100010;
13 const long long INF=1000000000000000000ll;
14
15 struct binary_heap{
16     __gnu_pbds::priority_queue<long long,less<long
    ↳ long>,binary_heap_tag>q1,q2;
17     binary_heap(){
18         void push(long long x){if(x>(-INF)>>2)q1.push(x);}
19         void erase(long long x){if(x>(-INF)>>2)q2.push(x);}
20         long long top(){
21             if(empty())return -INF;
22             while(!q2.empty()&&q1.top()==q2.top()){
23                 q1.pop();
24                 q2.pop();
25             }
26             return q1.top();
27         }
28         long long top2(){
29             if(size()<2)return -INF;
30             long long a=top();
31             erase(a);

```

```

32     long long b=top();
33     push(a);
34     return a+b;
35 }
36 int size(){return q1.size()-q2.size();}
37 bool empty(){return q1.size()==q2.size();}
38 }heap;//全局堆维护每条链的最大子段和
39 struct node{
40     long long sum,maxsum,prefix,suffix;
41     int key;
42     binary_heap heap;//每个点的堆存的是它的子树中到它的
43     // 最远距离,如果是黑点的话还会包括自己
44     node *ch[2],*p;
45     bool rev;
46     node(int k=0):sum(k),maxsum(-INF),prefix(-INF),
47         suffix(-INF),key(k),rev(false){}
48     inline void pushdown(){
49         if(!rev)return;
50         ch[0]->rev^=true;
51         ch[1]->rev^=true;
52         swap(ch[0],ch[1]);
53         swap(prefix,suffix);
54         rev=false;
55     }
56     inline void refresh(){
57         pushdown();
58         ch[0]->pushdown();
59         ch[1]->pushdown();
60         sum=ch[0]->sum+ch[1]->sum+key;
61         prefix=max(ch[0]->prefix,
62             ch[0]->sum+key+ch[1]->prefix);
63         suffix=max(ch[1]->suffix,
64             ch[1]->sum+key+ch[0]->suffix);
65         maxsum=max(max(ch[0]->maxsum,ch[1]->maxsum),
66             ch[0]->suffix+key+ch[1]->prefix);
67         if(!heap.empty()){
68             prefix=max(prefix,
69                 ch[0]->sum+key+heap.top());
70             suffix=max(suffix,
71                 ch[1]->sum+key+heap.top());
72             maxsum=max(maxsum,max(ch[0]->suffix,
73                 ch[1]->prefix)+key+heap.top());
74             if(heap.size()>1){
75                 maxsum=max(maxsum,heap.top2()+key);
76             }
77         }
78     }null[maxn<<1],*ptr=null;
79 void addedge(int,int,int);
80 void deledge(int,int);
81 void modify(int,int,int);
82 void modify_color(int);
83 node *newnode(int);
84 node *access(node*);
85 void makeroot(node*);
86 void link(node*,node*);
87 void cut(node*,node*);
88 void splay(node*);
89 void rot(node*,int);
90 queue<node*>freenodes;
91 tree<pair<int,int>,node*>mp;
92 bool col[maxn]={false};
93 char c;
94 int n,m,k,x,y,z;
95 int main(){
96     null->ch[0]=null->ch[1]=null->p=null;
97     scanf("%d%d%d",&n,&m,&k);
98     for(int i=1;i<=n;i++){
99         newnode(0);
100     }
101     heap.push(0);
102     while(k--){
103         scanf("%d",&x);
104         col[x]=true;
105         null[x].heap.push(0);
106     }
107     for(int i=1;i<n;i++){
108         scanf("%d%d%d",&x,&y,&z);
109         if(x>y)swap(x,y);
110         addedge(x,y,z);
111     }
112     while(m--){
113         scanf(" %c",&c,&x);
114         if(c=='A'){
115             scanf("%d",&y);
116             if(x>y)swap(x,y);
117             deledge(x,y);
118         }
119         else if(c=='B'){
120             scanf("%d%d",&y,&z);
121             if(x>y)swap(x,y);
122             addedge(x,y,z);
123         }
124         else if(c=='C'){
125             scanf("%d%d",&y,&z);
126             if(x>y)swap(x,y);
127             modify(x,y,z);
128         }
129         else modify_color(x);
130         printf("%lld\n", (heap.top()>0?heap.top():-1));
131     }
132     return 0;
133 }
134 void addedge(int x,int y,int z){
135     node *tmp;
136     if(freenodes.empty())tmp=newnode(z);
137     else{
138         tmp=freenodes.front();
139         freenodes.pop();
140         *tmp=node(z);
141     }
142     tmp->ch[0]=tmp->ch[1]=tmp->p=null;
143     heap.push(tmp->maxsum);
144     link(tmp,null+x);
145     link(tmp,null+y);
146     mp[make_pair(x,y)]=tmp;
147 }
148 void deledge(int x,int y){
149     node *tmp=mp[make_pair(x,y)];
150     cut(tmp,null+x);
151     cut(tmp,null+y);
152     freenodes.push(tmp);
153     heap.erase(tmp->maxsum);
154     mp.erase(make_pair(x,y));
155 }
156 void modify(int x,int y,int z){
157     node *tmp=mp[make_pair(x,y)];
158     makeroot(tmp);
159     tmp->pushdown();
160     heap.erase(tmp->maxsum);
161     tmp->key=z;
162     tmp->refresh();
163     heap.push(tmp->maxsum);
164 }
165 void modify_color(int x){
166     makeroot(null+x);
167     col[x]^=true;
168     if(col[x])null[x].heap.push(0);
169     else null[x].heap.erase(0);
170     heap.erase(null[x].maxsum);
171     null[x].refresh();
172     heap.push(null[x].maxsum);
173 }
174 node *newnode(int k){

```

```

175     *(&ptr)=node(k);
176     ptr->ch[0]=ptr->ch[1]=ptr->p=null;
177     return ptr;
178 }
179 node *access(node *x){
180     splay(x);
181     heap.erase(x->maxsum);
182     x->refresh();
183     if(x->ch[1]!=null){
184         x->ch[1]->pushdown();
185         x->heap.push(x->ch[1]->prefix);
186         x->refresh();
187         heap.push(x->ch[1]->maxsum);
188     }
189     x->ch[1]=null;
190     x->refresh();
191     node *y=x;
192     x=x->p;
193     while(x!=null){
194         splay(x);
195         heap.erase(x->maxsum);
196         if(x->ch[1]!=null){
197             x->ch[1]->pushdown();
198             x->heap.push(x->ch[1]->prefix);
199             heap.push(x->ch[1]->maxsum);
200         }
201         x->heap.erase(y->prefix);
202         x->ch[1]=y;
203         (y=x)->refresh();
204         x=x->p;
205     }
206     heap.push(y->maxsum);
207     return y;
208 }
209 void makeroot(node *x){
210     access(x);
211     splay(x);
212     x->rev^=true;
213 }
214 void link(node *x,node *y){//新添一条虚边@维护y对应的堆
215     makeroot(x);
216     makeroot(y);
217     x->pushdown();
218     x->p=y;
219     heap.erase(y->maxsum);
220     y->heap.push(x->prefix);
221     y->refresh();
222     heap.push(y->maxsum);
223 }
224 void cut(node *x,node *y){//断开一条实边@一条链变成两条
    //链@需要维护全局堆
225     makeroot(x);
226     access(y);
227     splay(y);
228     heap.erase(y->maxsum);
229     heap.push(y->ch[0]->maxsum);
230     y->ch[0]->p=null;
231     y->ch[0]=null;
232     y->refresh();
233     heap.push(y->maxsum);
234 }
235 void splay(node *x){
236     x->pushdown();
237     while(!isroot(x)){
238         if(!isroot(x->p))
239             x->p->p->pushdown();
240         x->p->pushdown();
241         x->pushdown();
242         if(isroot(x->p)){
243             rot(x->p,dir(x)^1);
244             break;
245         }

```

```

246         if(dir(x)==dir(x->p))
247             rot(x->p->p,dir(x->p)^1);
248         else rot(x->p,dir(x)^1);
249         rot(x->p,dir(x)^1);
250     }
251 }
252 void rot(node *x,int d){
253     node *y=x->ch[d^1];
254     if((x->ch[d^1]=y->ch[d])!=null)
255         y->ch[d]->p=x;
256     y->p=x->p;
257     if(!isroot(x->p))
258         x->p->ch[dir(x)]=y;
259     (y->ch[d]=x)->p=y;
260     x->refresh();
261     y->refresh();
262 }

```

4.7 虚树

```

1 #include<cstdio>
2 #include<cstring>
3 #include<algorithm>
4 #include<vector>
5 using namespace std;
6 const int maxn=1000005;
7 struct Tree{
8     vector<int>G[maxn],W[maxn];
9     int p[maxn],d[maxn],size[maxn],mn[maxn],mx[maxn];
10    bool col[maxn];
11    long long ans_sum;
12    int ans_min,ans_max;
13    void add(int x,int y,int z){
14        G[x].push_back(y);
15        W[x].push_back(z);
16    }
17    void dfs(int x){
18        size[x]=col[x];
19        mx[x]=(col[x]?d[x]:-0x3f3f3f3f);
20        mn[x]=(col[x]?d[x]:0x3f3f3f3f);
21        for(int i=0;i<(int)G[x].size();i++){
22            d[G[x][i]]=d[x]+W[x][i];
23            dfs(G[x][i]);
24            ans_sum+=(long long)size[x]*size[G[x][i]]
25                -> [i]*d[x];
26            ans_max=max(ans_max,mx[x]+mx[G[x][i]]
27                -> [i])-(d[x]<<1);
28            ans_min=min(ans_min,mn[x]+mn[G[x][i]]
29                -> [i])-(d[x]<<1);
30            size[x]+=size[G[x][i]];
31            mx[x]=max(mx[x],mx[G[x][i]]);
32            mn[x]=min(mn[x],mn[G[x][i]]);
33        }
34    }
35    void clear(int x){
36        G[x].clear();
37        W[x].clear();
38        col[x]=false;
39    }
40    void solve(int rt){
41        ans_sum=0;
42        ans_max=1<<31;
43        ans_min=(~0u)>>1;
44        dfs(rt);
45        ans_sum<<=1;
46    }
47 }virtree;
48 void dfs(int);
49 int LCA(int,int);

```

```

47 vector<int>G[maxn];
48 int f[maxn][20],d[maxn],dfn[maxn],tim=0;
49 bool cmp(int x,int y){return dfn[x]<dfn[y];}
50 int n,m,lgn=0,a[maxn],s[maxn],v[maxn];
51 int main(){
52     scanf("%d",&n);
53     for(int i=1,x,y;i<n;i++){
54         scanf("%d%d",&x,&y);
55         G[x].push_back(y);
56         G[y].push_back(x);
57     }
58     G[n+1].push_back(1);
59     dfs(n+1);
60     for(int i=1;i<=n+1;i++)G[i].clear();
61     lgn--;
62     for(int j=1;j<=lgn;j++)for(int i=1;i<=n;i++)f[i]
        ↳ [j]=f[f[i][j-1]][j-1];
63     scanf("%d",&m);
64     while(m--){
65         int k;
66         scanf("%d",&k);
67         for(int i=1;i<=k;i++)scanf("%d",&a[i]);
68         sort(a+1,a+k+1,cmp);
69         int top=0,cnt=0;
70         s[++top]=v[++cnt]=n+1;
71         long long ans=0;
72         for(int i=1;i<=k;i++){
73             virtree.col[a[i]]=true;
74             ans+=d[a[i]]-1;
75             int u=LCA(a[i],s[top]);
76             if(s[top]!=u){
77                 while(top>1&&d[s[top-1]]>=d[u]){
78                     virtree.add(s[top-1],s[top],d[s[top]]-d[s[top-1]]);
79                     top--;
80                 }
81                 if(s[top]!=u){
82                     virtree.add(u,s[top],d[s[top]]-d[u]);
83                     s[top]=v[++cnt]=u;
84                 }
85             }
86             s[++top]=a[i];
87         }
88         for(int
            ↳ i=top-1;i--;)virtree.add(s[i],s[i+1],d[s[i+1]]-d[s[i]]);
89         virtree.solve(n+1);
90         ans*=k-1;
91         printf("%lld %d
            ↳ %d\n",ans-virtree.ans_sum,virtree.ans_min,virtree.ans_max);
92         for(int i=1;i<=k;i++)virtree.clear(a[i]);
93         for(int i=1;i<=cnt;i++)virtree.clear(v[i]);
94     }
95     return 0;
96 }
97 void dfs(int x){
98     dfn[x]=++tim;
99     d[x]=d[f[x][0]]+1;
100     while((1<<lgn)<d[x])lgn++;
101     for(int i=0;i<(int)G[x].size();i++)if(G[x][i]!=f[x]
        ↳ [0]){
102         f[G[x][i]][0]=x;
103         dfs(G[x][i]);
104     }
105 }
106 int LCA(int x,int y){
107     if(d[x]!=d[y]){
108         if(d[x]<d[y])swap(x,y);

```

```

110         for(int
            ↳ i=lgn;i>=0;i--)if(((d[x]-d[y])>>i)&1)x=f[x]
            ↳ [i];
111     }
112     if(x==y)return x;
113     for(int i=lgn;i>=0;i--)if(f[x][i]!=f[y][i]){
114         x=f[x][i];
115         y=f[y][i];
116     }
117     return f[x][0];
118 }

```

4.8 长链剖分

```

1 // 顾名思义，长链剖分是取最深的儿子作为重儿子
2
3 // O(n)维护以深度为下标的子树信息
4 vector<int> G[maxn], v[maxn];
5 int n, p[maxn], h[maxn], son[maxn], ans[maxn];
6
7 // 原题意：求每个点的子树中与它距离是几的点最多，相同的
8 // ↳ 取最大深度
9 // 由于vector只能在后面加入元素，为了写代码方便，这里反
10 // ↳ 过来存
11 void dfs(int x) {
12     h[x] = 1;
13     for (int y : G[x])
14         if (y != p[x]){
15             p[y] = x;
16             dfs(y);
17             if (h[y] > h[son[x]])
18                 son[x] = y;
19         }
20
21     if (!son[x]) {
22         v[x].push_back(1);
23         ans[x] = 0;
24         return;
25     }
26     h[x] = h[son[x]] + 1;
27     swap(v[x], v[son[x]]);
28
29     if (v[x][ans[son[x]]] == 1)
30         ans[x] = h[x] - 1;
31     else
32         ans[x] = ans[son[x]];
33
34     v[x].push_back(1);
35
36     int mx = v[x][ans[x]];
37     for (int y : G[x])
38         if (y != p[x] && y != son[x]) {
39             for (int j = 1; j <= h[y]; j++) {
40                 v[x][h[x] - j - 1] += v[y][h[y] - j];
41
42                 int t = v[x][h[x] - j - 1];
43                 if (t > mx || (t == mx && h[x] - j - 1 >
                    ↳ ans[x])) {
44                     mx = t;
45                     ans[x] = h[x] - j - 1;
46                 }
47             }
48         }
49
50     v[y].clear();
51 }

```

```

52 }

4.9 梯子剖分

1 // 在线求一个点的第k祖先  $O(n \log n) - O(1)$ 
2 // 理论基础: 任意一个点x的第k级祖先y所在长链长度一定  $\geq k$ 
3
4 // 全局数组定义
5 vector<int> G[maxn], v[maxn];
6 int d[maxn], mxd[maxn], son[maxn], top[maxn], len[maxn];
7 int f[19][maxn], log_tbl[maxn];
8
9 // 在主函数中两遍dfs之后加上如下预处理
10 log_tbl[0] = -1;
11 for (int i = 1; i <= n; i++)
12     log_tbl[i] = log_tbl[i / 2] + 1;
13 for (int j = 1; (1 << j) < n; j++)
14     for (int i = 1; i <= n; i++)
15         f[j][i] = f[j - 1][f[j - 1][i]];
16
17 // 第一遍dfs, 用于计算深度和找出重儿子
18 void dfs1(int x) {
19     mxd[x] = d[x];
20
21     for (int y : G[x])
22         if (y != f[0][x]) {
23             f[0][y] = x;
24             d[y] = d[x] + 1;
25
26             dfs1(y);
27
28             mxd[x] = max(mxd[x], mxd[y]);
29             if (mxd[y] > mxd[son[x]])
30                 son[x] = y;
31         }
32 }
33
34 // 第二遍dfs, 用于进行剖分和预处理梯子剖分(每条链向上延
35 // 伸一倍)数组
36 void dfs2(int x) {
37     top[x] = (x == son[f[0][x]] ? top[f[0][x]] : x);
38
39     for (int y : G[x])
40         if (y != f[0][x])
41             dfs2(y);
42
43     if (top[x] == x) {
44         int u = x;
45         while (top[son[u]] == x)
46             u = son[u];
47
48         len[x] = d[u] - d[x];
49         for (int i = 0; i < len[x]; i++, u = f[0][u])
50             v[x].push_back(u);
51
52         u = x;
53         for (int i = 0; i < len[x] && u; i++, u = f[0][u])
54             v[x].push_back(u);
55     }
56 }
57
58 // 在线询问x的第k级祖先  $O(1)$ 
59 // 不存在时返回0
60 int query(int x, int k) {
61     if (!k)
62         return x;
63     if (k > d[x])
64         return 0;

```

```

64
65     x = f[log_tbl[k]][x];
66     k ^= 1 << log_tbl[k];
67     return v[top[x]][d[top[x]] + len[top[x]] - d[x] + k];
68 }

```

4.10 左偏树

(参见k短路)

4.11 常见根号思路

通用

- 出现次数大于 \sqrt{n} 的数不会超过 \sqrt{n} 个
- 对于带修改问题, 如果不方便分治或者二进制分组, 可以考虑对操作分块, 每次查询时暴力最后的 \sqrt{n} 个修改并更正答案
- 根号分治: 如果分治时每个子问题需要 $O(N)$ (N 是全局问题的大小)的时间, 而规模较小的子问题可以 $O(n^2)$ 解决, 则可以使用根号分治
 - 规模大于 \sqrt{n} 的子问题用 $O(N)$ 的方法解决, 规模小于 \sqrt{n} 的子问题用 $O(n^2)$ 暴力
 - 规模大于 \sqrt{n} 的子问题最多只有 \sqrt{n} 个
 - 规模不大于 \sqrt{n} 的子问题大小的平方和也必定不会超过 $n\sqrt{n}$
- 如果输入规模之和不大 n (例如给定多个小字符串与大字符串进行询问), 那么规模超过 \sqrt{n} 的问题最多只有 \sqrt{n} 个

序列

- 某些维护序列的问题可以用分块/块状链表维护
- 对于静态区间询问问题, 如果可以快速将左/右端点移动一位, 可以考虑莫队
 - 如果强制在线可以分块预处理, 但是一般空间需要 $n\sqrt{n}$
 - * 例题: 询问区间中有几种数出现次数恰好为 k , 强制在线
 - 如果带修改可以试着想一想带修莫队, 但是复杂度高达 $n^{\frac{5}{3}}$
- 线段树可以解决的问题也可以用分块来做到 $O(1)$ 询问或是 $O(1)$ 修改, 具体要看哪种操作更多

树

- 与序列类似, 树上也有树分块和树上莫队
 - 树上带修莫队很麻烦, 常数也大, 最好不要先考虑
 - 树分块不要想当然
- 树分治也可以套根号分治, 道理是一样的

字符串

- 循环节长度大于 \sqrt{n} 的子串最多只有 $O(n)$ 个, 如果是极长子串则只有 $O(\sqrt{n})$ 个

5. 字符串

5.1 AC自动机

```

1 // Aho-Corasick Automata AC自动机
2 // By AntiLeaf
3 // 通过题目BZOJ3881 Divljak
4
5
6 // 全局变量与数组定义
7 int ch[maxm][26] = {{0}}, f[maxm][26] = {{0}}, q[maxm] =
  ↳ {0}, sum[maxm] = {0}, cnt = 0;
8
9
10 // 在字典树中插入一个字符串 O(n)
11 int insert(const char *c) {
12     int x = 0;
13     while (*c) {
14         if (!ch[x][*c - 'a'])
15             ch[x][*c - 'a'] = ++cnt;
16         x = ch[x][*c++ - 'a'];
17     }
18     return x;
19 }
20
21
22 // 建AC自动机 O(n*sigma)
23 void getfail() {
24     int x, head = 0, tail = 0;
25
26     for (int c = 0; c < 26; c++)
27         if (ch[0][c])
28             q[tail++] = ch[0][c]; // 把根节点的儿子加入队
  ↳ 列
29
30     while (head != tail) {
31         x = q[head++];
32
33         G[f[x][0]].push_back(x);
34         fill(f[x] + 1, f[x] + 26, cnt + 1);
35
36         for (int c = 0; c < 26; c++) {
37             if (ch[x][c]) {
38                 int y = f[x][0];
39
40                 while (y && !ch[y][c])
41                     y = f[y][0];
42
43                 f[ch[x][c][0] = ch[y][c];
44                 q[tail++] = ch[x][c];
45             }
46             else
47                 ch[x][c] = ch[f[x][0]][c];
48         }
49     }
50     fill(f[0], f[0] + 26, cnt + 1);
51 }

```

5.2 后缀数组

5.2.1 SA-IS

```

1 // 注意求完的SA有效位只有1~n, 但它是0-based, 如果其他部
  ↳ 分是1-based记得+1再用
2
3 constexpr int maxn = 100005, l_type = 0, s_type = 1;
4
5 // 判断一个字符是否为LMS字符
6 bool is_lms(int *tp, int x) {

```

```

7     return x > 0 && tp[x] == s_type && tp[x - 1] ==
  ↳ l_type;
8 }
9
10 // 判断两个LMS子串是否相同
11 bool equal_substr(int *s, int x, int y, int *tp) {
12     do {
13         if (s[x] != s[y])
14             return false;
15         x++;
16         y++;
17     } while (!is_lms(tp, x) && !is_lms(tp, y));
18
19     return s[x] == s[y];
20 }
21
22 // 诱导排序(从*型诱导到L型,从L型诱导到S型)
23 // 调用之前应将*型按要求放入SA中
24 void induced_sort(int *s, int *sa, int *tp, int *buc, int
  ↳ *lbuc, int *sbuc, int n, int m) {
25     for (int i = 0; i <= n; i++)
26         if (sa[i] > 0 && tp[sa[i] - 1] == l_type)
27             sa[lbuc[s[sa[i] - 1]]++] = sa[i] - 1;
28
29     for (int i = 1; i <= m; i++)
30         sbuc[i] = buc[i] - 1;
31
32     for (int i = n; ~i; i--)
33         if (sa[i] > 0 && tp[sa[i] - 1] == s_type)
34             sa[sbuc[s[sa[i] - 1]]--] = sa[i] - 1;
35 }
36
37 // s是输入字符串, n是字符串的长度, m是字符集的大小
38 int *sa(int *s, int len, int m) {
39     int n = len - 1;
40
41     int *tp = new int[n + 1];
42     int *pos = new int[n + 1];
43     int *name = new int[n + 1];
44     int *sa = new int[n + 1];
45     int *buc = new int[m + 1];
46     int *lbuc = new int[m + 1];
47     int *sbuc = new int[m + 1];
48
49     memset(buc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
50
51     for (int i = 0; i <= n; i++)
52         buc[s[i]]++;
53
54     for (int i = 1; i <= m; i++) {
55         buc[i] += buc[i - 1];
56
57         lbuc[i] = buc[i - 1];
58         sbuc[i] = buc[i] - 1;
59     }
60
61     tp[n] = s_type;
62     for (int i = n - 1; ~i; i--) {
63         if (s[i] < s[i + 1])
64             tp[i] = s_type;
65         else if (s[i] > s[i + 1])
66             tp[i] = l_type;
67         else
68             tp[i] = tp[i + 1];
69     }
70
71     int cnt = 0;
72     for (int i = 1; i <= n; i++)
73         if (tp[i] == s_type && tp[i - 1] == l_type)
74             pos[cnt++] = i;

```



```

75     memset(sa, -1, sizeof(int) * (n + 1));
76     for (int i = 0; i < cnt; i++)
77         sa[sbuc[s[pos[i]]]--] = pos[i];
78     induced_sort(s, sa, tp, buc, lbuc, sbuc, n, m);
79
80     memset(name, -1, sizeof(int) * (n + 1));
81     int lastx = -1, namecnt = 1;
82     bool flag = false;
83
84
85     for (int i = 1; i <= n; i++) {
86         int x = sa[i];
87
88         if (is_lms(tp, x)) {
89             if (lastx >= 0 && !equal_substr(s, x, lastx,
90                 ↪ tp))
91                 namecnt++;
92
93             if (lastx >= 0 && namecnt == name[lastx])
94                 flag = true;
95
96             name[x] = namecnt;
97             lastx = x;
98         }
99     }
100     name[n] = 0;
101
102     int *t = new int[cnt];
103     int p = 0;
104     for (int i = 0; i <= n; i++)
105         if (name[i] >= 0)
106             t[p++] = name[i];
107
108     int *tsa;
109     if (!flag) {
110         tsa = new int[cnt];
111
112         for (int i = 0; i < cnt; i++)
113             tsa[t[i]] = i;
114     }
115     else
116         tsa = sais(t, cnt, namecnt);
117
118     lbuc[0] = sbuc[0] = 0;
119     for (int i = 1; i <= m; i++) {
120         lbuc[i] = buc[i - 1];
121         sbuc[i] = buc[i] - 1;
122     }
123
124     memset(sa, -1, sizeof(int) * (n + 1));
125     for (int i = cnt - 1; ~i; i--)
126         sa[sbuc[s[pos[tsa[i]]]--] = pos[tsa[i]];
127     induced_sort(s, sa, tp, buc, lbuc, sbuc, n, m);
128
129     return sa;
130 }
131 // O(n)求height数组, 注意是sa[i]与sa[i - 1]的LCP
132 void get_height(int *s, int *sa, int *rnk, int *height,
133     ↪ int n) {
134     for (int i = 0; i <= n; i++)
135         rnk[sa[i]] = i;
136
137     int k = 0;
138     for (int i = 0; i <= n; i++) {
139         if (!rnk[i])
140             continue;
141
142         if (k)

```

```

142         k--;
143
144         while (s[sa[rnk[i]] + k] == s[sa[rnk[i] - 1] +
145             ↪ k])
146             k++;
147
148         height[rnk[i]] = k;
149     }
150 }
151 char str[maxn];
152 int n, s[maxn], sa[maxn], rnk[maxn], height[maxn];
153
154 // 方便起见附上主函数
155 int main() {
156     scanf("%s", str);
157     n = strlen(str);
158     str[n] = '$';
159
160     for (int i = 0; i <= n; i++)
161         s[i] = str[i];
162
163     memcpy(sa, sais(s, n + 1, 256), sizeof(int) * (n +
164         ↪ 1));
165
166     get_height(s, sa, rnk, height, n);
167
168     return 0;
169 }

```

5.2.2 SAMSA

```

1 #include<bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3 const int maxn=100005;
4 void expand(int);
5 void dfs(int);
6 int
7     ↪ root,last,cnt=0,val[maxn<<1]={0},par[maxn<<1]={0},go[maxn<<1
8     ↪ [26]={0}];
9 bool vis[maxn<<1]={0};
10 char s[maxn];
11 int n,id[maxn<<1]={0},ch[maxn<<1
12     ↪ [26]={0}],height[maxn],tim=0;
13 int main(){
14     root=last=++cnt;
15     scanf("%s",s+1);
16     n=strlen(s+1);
17     for(int i=n;i--){
18         expand(s[i]-'a');
19         id[last]=i;
20     }
21     vis[1]=true;
22     for(int i=1;i<=cnt;i++){
23         if(id[i])
24             for(int x=i,pos=n;x&&!vis[x];x=par[x]){
25                 vis[x]=true;
26                 pos=--val[x]-val[par[x]];
27                 ch[par[x]][s[pos+1]-'a']=x;
28             }
29     }
30     dfs(root);
31     printf("\n");
32     for(int i=1;i<=n;i++)printf("%d ",height[i]);
33     return 0;
34 }
35 void expand(int c){
36     int p=last,np=++cnt;
37     val[np]=val[p]+1;
38     while(p&&!go[p][c]){
39         go[p][c]=np;

```

```

36     p=par[p];
37 }
38 if(!p)par[np]=root;
39 else{
40     int q=go[p][c];
41     if(val[q]==val[p]+1)par[np]=q;
42     else{
43         int nq=++cnt;
44         val[nq]=val[p]+1;
45         memcpy(go[nq],go[q],sizeof(go[q]));
46         par[nq]=par[q];
47         par[np]=par[q]=nq;
48         while(p&&go[p][c]==q){
49             go[p][c]=nq;
50             p=par[p];
51         }
52     }
53 }
54 last=np;
55 }
56 void dfs(int x){
57     if(id[x]){
58         printf("%d ",id[x]);
59         height[tim++]=val[last];
60         last=x;
61     }
62     for(int c=0;c<26;c++)if(ch[x][c])dfs(ch[x][c]);
63     last=par[x];
64 }

```

5.3 后缀自动机

(广义后缀自动机复杂度就是 $O(n|\Sigma|)$, 也没法做到更低了)

```

1 // 在字符集比较小的时候可以直接开go数组, 否则需要用map或
  ↳ 者哈希表替换
2 // 注意!!!结点数要开成串长的两倍
3
4 // 全局变量与数组定义
5 int last, val[maxn], par[maxn], go[maxn][26], cnt;
6 int c[maxn], q[maxn]; // 用来桶排序
7
8 // 在主函数开头加上这句初始化
9 last = cnt = 1;
10
11 // 以下是按val进行桶排序的代码
12 for (int i = 1; i <= cnt; i++)
13     c[val[i] + 1]++;
14 for (int i = 1; i <= n; i++)
15     c[i] += c[i - 1]; // 这里n是串长
16 for (int i = 1; i <= cnt; i++)
17     q[++c[val[i]]] = i;
18
19 //加入一个字符 均摊O(1)
20 void extend(int c) {
21     int p = last, np = ++cnt;
22     val[np] = val[p] + 1;
23
24     while (p && !go[p][c]) {
25         go[p][c] = np;
26         p = par[p];
27     }
28
29     if (!p)
30         par[np] = 1;
31     else {
32         int q = go[p][c];
33
34         if (val[q] == val[p] + 1)
35             par[np] = q;
36         else {

```

```

37         int nq = ++cnt;
38         val[nq] = val[p] + 1;
39         memcpy(go[nq], go[q], sizeof(go[q]));
40
41         par[nq] = par[q];
42         par[np] = par[q] = nq;
43
44         while (p && go[p][c] == q){
45             go[p][c] = nq;
46             p = par[p];
47         }
48     }
49 }
50
51 last = np;
52 }

```

5.4 回文树

```

1 //定理:一个字符串本质不同的回文子串个数是O(n)的
2 //注意回文树只需要开一倍结点, 另外结点编号也是一个可用
  ↳ 的bfs序
3
4 //全局数组定义
5 int val[maxn], par[maxn], go[maxn][26], last, cnt;
6 char s[maxn];
7
8 //重要!在主函数最前面一定要加上以下初始化
9 par[0]=cnt=1;
10 val[1]=-1;
11 //这个初始化和广义回文树不一样, 写普通题可以用, 广义回文树
  ↳ 就不要乱搞了
12
13 //extend函数 均摊O(1)
14 //向后扩展一个字符
15 //传入对应下标
16 void extend(int n){
17     int p=last, c=s[n]-'a';
18     while(s[n-val[p]-1]!=s[n])p=par[p];
19     if(!go[p][c]){
20         int q=++cnt, now=p;
21         val[q]=val[p]+2;
22         do p=par[p];while(s[n-val[p]-1]!=s[n]);
23         par[q]=go[p][c];
24         last=go[now][c]=q;
25     }
26     else last=go[p][c];
27     a[last]++;
28 }

```

5.4.1 广义回文树

(代码是梯子剖分的版本, 压力不大的题目换成直接倍增就好了, 常数只差不到一倍)

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 1000005, mod = 1000000007;
6
7 int val[maxn], par[maxn], go[maxn][26], fail[maxn][26],
  ↳ pam_last[maxn], pam_cnt;
8 int weight[maxn], pow_26[maxn];
9
10 int trie[maxn][26], trie_cnt, d[maxn], mxd[maxn],
  ↳ son[maxn], top[maxn], len[maxn], sum[maxn];
11 char chr[maxn];

```

```

12 int f[25][maxn], log_tbl[maxn];
13 vector<int> v[maxn];
14
15 vector<int> queries[maxn];
16
17 char str[maxn];
18 int n, m, ans[maxn];
19
20 int add(int x, int c) {
21     if (!trie[x][c]) {
22         trie[x][c] = ++trie_cnt;
23         f[0][trie[x][c]] = x;
24         chr[trie[x][c]] = c + 'a';
25     }
26
27     return trie[x][c];
28 }
29
30 int del(int x) {
31     return f[0][x];
32 }
33
34 void dfs1(int x) {
35     mxd[x] = d[x] = d[f[0][x]] + 1;
36
37     for (int i = 0; i < 26; i++)
38         if (trie[x][i]) {
39             int y = trie[x][i];
40
41             dfs1(y);
42
43             mxd[x] = max(mxd[x], mxd[y]);
44             if (mxd[y] > mxd[son[x]])
45                 son[x] = y;
46         }
47 }
48
49 void dfs2(int x) {
50     if (x == son[f[0][x]])
51         top[x] = top[f[0][x]];
52     else
53         top[x] = x;
54
55     for (int i = 0; i < 26; i++)
56         if (trie[x][i]) {
57             int y = trie[x][i];
58             dfs2(y);
59         }
60
61     if (top[x] == x) {
62         int u = x;
63         while (top[son[u]] == x)
64             u = son[u];
65
66         len[x] = d[u] - d[x];
67
68         for (int i = 0; i < len[x]; i++) {
69             v[x].push_back(u);
70             u = f[0][u];
71         }
72
73         u = x;
74         for (int i = 0; i < len[x]; i++) { // 梯子剖分,要
75             // 延长一倍
76             v[x].push_back(u);
77             u = f[0][u];
78         }
79     }
80
81 int get_anc(int x, int k) {
82     if (!k)
83         return x;
84     if (k > d[x])
85         return 0;
86
87     x = f[log_tbl[k]][x];
88     k ^= 1 << log_tbl[k];
89
90     return v[top[x]][d[top[x]] + len[top[x]] - d[x] + k];
91 }
92
93 char get_char(int x, int k) { // 查询x前面k个的字符是哪个
94     return chr[get_anc(x, k)];
95 }
96
97 int getfail(int x, int p) {
98     if (get_char(x, val[p] + 1) == chr[x])
99         return p;
100     return fail[p][chr[x] - 'a'];
101 }
102
103 int extend(int x) {
104
105     int p = pam_last[f[0][x]], c = chr[x] - 'a';
106
107     p = getfail(x, p);
108
109     int new_last;
110
111     if (!go[p][c]) {
112         int q = ++pam_cnt, now = p;
113         val[q] = val[p] + 2;
114
115         p = getfail(x, par[p]);
116
117         par[q] = go[p][c];
118         new_last = go[now][c] = q;
119
120         for (int i = 0; i < 26; i++)
121             fail[q][i] = fail[par[q]][i];
122
123         if (get_char(x, val[par[q]]) >= 'a')
124             fail[q][get_char(x, val[par[q]]) - 'a'] =
125                 par[q];
126
127         if (val[q] <= n)
128             weight[q] = (weight[par[q]] + (long long)(n -
129                 val[q] + 1) * pow_26[n - val[q]]) % mod;
130         else
131             weight[q] = weight[par[q]];
132     }
133     else
134         new_last = go[p][c];
135
136     pam_last[x] = new_last;
137
138     return weight[pam_last[x]];
139 }
140
141 void bfs() {
142     queue<int> q;
143
144     q.push(1);
145
146     while (!q.empty()) {
147         int x = q.front();
148         q.pop();
149
150         sum[x] = sum[f[0][x]];
151         if (x > 1)
152             sum[x] = (sum[x] + extend(x)) % mod;
153     }

```

```

153     for (int i : queries[x])
154         ans[i] = sum[x];
155
156     for (int i = 0; i < 26; i++)
157         if (trie[x][i])
158             q.push(trie[x][i]);
159 }
160
161 }
162
163 int main() {
164
165     pow_26[0] = 1;
166     log_tbl[0] = -1;
167
168     for (int i = 1; i <= 1000000; i++) {
169         pow_26[i] = 26ll * pow_26[i - 1] % mod;
170         log_tbl[i] = log_tbl[i / 2] + 1;
171     }
172
173     int T;
174     scanf("%d", &T);
175
176     while (T--) {
177         scanf("%d%d%s", &n, &m, str);
178
179         trie_cnt = 1;
180         chr[1] = '#';
181
182         int last = 1;
183         for (char *c = str; *c; c++)
184             last = add(last, *c - 'a');
185
186         queries[last].push_back(0);
187
188         for (int i = 1; i <= m; i++) {
189             int op;
190             scanf("%d", &op);
191
192             if (op == 1) {
193                 char c;
194                 scanf("%c", &c);
195
196                 last = add(last, c - 'a');
197             }
198             else
199                 last = del(last);
200
201             queries[last].push_back(i);
202         }
203
204         dfs1(1);
205         dfs2(1);
206
207         for (int j = 1; j <= log_tbl[trie_cnt]; j++)
208             for (int i = 1; i <= trie_cnt; i++)
209                 f[j][i] = f[j - 1][f[j - 1][i]];
210
211         par[0] = pam_cnt = 1;
212
213
214         for (int i = 0; i < 26; i++)
215             fail[0][i] = fail[1][i] = 1;
216
217         val[1] = -1;
218         pam_last[1] = 1;
219
220         bfs();
221
222         for (int i = 0; i <= m; i++)
223             printf("%d\n", ans[i]);
224

```

```

225     for (int j = 0; j <= log_tbl[trie_cnt]; j++)
226         memset(f[j], 0, sizeof(f[j]));
227
228     for (int i = 1; i <= trie_cnt; i++) {
229         chr[i] = 0;
230         d[i] = mxd[i] = son[i] = top[i] = len[i] =
231             ↳ pam_last[i] = sum[i] = 0;
232         v[i].clear();
233         queries[i].clear();
234
235         memset(trie[i], 0, sizeof(trie[i]));
236     }
237     trie_cnt = 0;
238
239     for (int i = 0; i <= pam_cnt; i++) {
240         val[i] = par[i] = weight[i];
241
242         memset(go[i], 0, sizeof(go[i]));
243         memset(fail[i], 0, sizeof(fail[i]));
244     }
245     pam_cnt = 0;
246
247 }
248
249 return 0;

```

5.5 Manacher马拉车

```

1 //n为串长,回文半径输出到p数组中
2 //数组要开串长的两倍
3 void manacher(const char *t, int n) {
4     static char s[maxn * 2];
5
6     for (int i = n; i; i--)
7         s[i * 2] = t[i];
8     for (int i = 0; i <= n; i++)
9         s[i * 2 + 1] = '#';
10
11     s[0] = '$';
12     s[(n + 1) * 2] = '\0';
13     n = n * 2 + 1;
14
15     int mx = 0, j = 0;
16
17     for (int i = 1; i <= n; i++) {
18         p[i] = (mx > i ? min(p[j * 2 - i], mx - i) : 1);
19         while (s[i - p[i]] == s[i + p[i]])
20             p[i]++;
21
22         if (i + p[i] > mx) {
23             mx = i + p[i];
24             j = i;
25         }
26     }
27 }

```

5.6 KMP

5.6.1 ex-KMP

```

1 //全局变量与数组定义
2 char s[maxn], t[maxn];
3 int n, m, a[maxn];
4
5 //主过程 O(n + m)
6 //把t的每个后缀与s的LCP输出到a中,s的后缀和自己的LCP存
7 // ↳ 在nx中
8 //0-based,s的长度是m,t的长度是n

```

```

8 void exKMP(const char *s, const char *t, int *a) {
9     static int nx[maxn];
10
11     memset(nx, 0, sizeof(nx));
12
13     int j = 0;
14     while (j + 1 < m && s[j] == s[j + 1])
15         j++;
16     nx[1] = j;
17
18     for (int i = 2, k = 1; i < m; i++) {
19         int pos = k + nx[k], len = nx[i - k];
20
21         if (i + len < pos)
22             nx[i] = len;
23         else {
24             j = max(pos - i, 0);
25             while (i + j < m && s[j] == s[i + j])
26                 j++;
27
28             nx[i] = j;
29             k = i;
30         }
31     }
32
33     j = 0;
34     while (j < n && j < m && s[j] == t[j])
35         j++;
36     a[0] = j;
37
38     for (int i = 1, k = 0; i < n; i++) {
39         int pos = k + a[k], len = nx[i - k];
40         if (i + len < pos)
41             a[i] = len;
42         else {
43             j = max(pos - i, 0);
44             while (j < m && i + j < n && s[j] == t[i + j])
45                 j++;
46
47             a[i] = j;
48             k = i;
49         }
50     }
51 }

```

```

18 int solve(long long tmp) {
19     memset(f, 63, sizeof(f));
20     f[0] = 0;
21
22     int head = 1, tail = 0;
23
24     for (int i = 1; i <= n; i++) {
25         f[i] = calc(1, i);
26         g[i] = 1;
27
28         while (head < tail && p[head + 1] <= i)
29             head++;
30         if (head <= tail) {
31             if (f[q[head]] + calc(q[head] + 1, i) < f[i])
32                 ⇨ {
33                     f[i] = f[q[head]] + calc(q[head] + 1, i);
34                     g[i] = g[q[head]] + 1;
35                 }
36             while (head < tail && p[head + 1] <= i + 1)
37                 head++;
38             if (head <= tail)
39                 p[head] = i + 1;
40         }
41         f[i] += tmp;
42
43         int r = n;
44
45         while (head <= tail) {
46             if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1, p[tail]) >
47                 ⇨ f[i] + calc(i + 1, p[tail])) {
48                 r = p[tail] - 1;
49                 tail--;
50             }
51             else if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1, r) <=
52                 ⇨ f[i] + calc(i + 1, r)) {
53                 if (r < n) {
54                     q[++tail] = i;
55                     p[tail] = r + 1;
56                 }
57                 break;
58             }
59             else {
60                 int L = p[tail], R = r;
61                 while (L < R) {
62                     int M = (L + R) / 2;
63
64                     if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1, M)
65                         ⇨ <= f[i] + calc(i + 1, M))
66                         L = M + 1;
67                     else
68                         R = M;
69                 }
70
71                 q[++tail] = i;
72                 p[tail] = L;
73
74                 break;
75             }
76         }
77     }
78
79     return g[n];
80 }

```

6. 动态规划

6.1 决策单调性 $O(n \log n)$

```

1 int a[maxn], q[maxn], p[maxn], g[maxn]; // 存左端点, 右端
   ⇨ 点就是下一个左端点 - 1
2
3 long long f[maxn], s[maxn];
4
5 int n, m;
6
7 long long calc(int l, int r) {
8     if (r < l)
9         return 0;
10
11     int mid = (l + r) / 2;
12     if ((r - l + 1) % 2 == 0)
13         return (s[r] - s[mid]) - (s[mid] - s[l - 1]);
14     else
15         return (s[r] - s[mid]) - (s[mid - 1] - s[l - 1]);
16 }
17

```

7. Miscellaneous

7.1 $O(1)$ 快速乘

```

1 // Long double 快速乘
2 // 在两数直接相乘会爆Long Long时才有必要使用
3 // 常数比直接Long Long乘法+取模大很多,非必要不建议使用
4 long long mul(long long a, long long b, long long p){
5     a%=p; b%=p;
6     return ((a*b-p*(long long)((long
    ↪ double)a/p*b+0.5))*p+p)%p;
7 }
8
9 // 指令集快速乘
10 // 试机记得测试能不能过编译
11 inline long long mul(const long long a, const long long
    ↪ b, const long long p) {
12     long long ans;
13     __asm__ __volatile__ ("tmulq %%rbx\n\tdivq %%rcx\n"
    ↪ : "=d"(ans) : "a"(a), "b"(b), "c"(p));
14     return ans;
15 }

```

7.2 $O(n^2)$ 高精度

```

1 // 注意如果只需要正数运算的话
2 // 可以只抄英文名的运算函数
3 // 按需自取
4 // 乘法 $O(n^2)$ 除法 $O(10 * n^2)$ 
5
6 const int maxn = 1005;
7
8 struct big_decimal {
9     int a[maxn];
10    bool negative;
11
12    big_decimal() {
13        memset(a, 0, sizeof(a));
14        negative = false;
15    }
16
17    big_decimal(long long x) {
18        memset(a, 0, sizeof(a));
19        negative = false;
20
21        if (x < 0) {
22            negative = true;
23            x = -x;
24        }
25
26        while (x) {
27            a[++a[0]] = x % 10;
28            x /= 10;
29        }
30    }
31
32    big_decimal(string s) {
33        memset(a, 0, sizeof(a));
34        negative = false;
35
36        if (s == "")
37            return;
38
39        if (s[0] == '-') {
40            negative = true;
41            s = s.substr(1);
42        }
43        a[0] = s.size();

```

```

44        for (int i = 1; i <= a[0]; i++)
45            a[i] = s[a[0] - i] - '0';
46
47        while (a[0] && !a[a[0]])
48            a[0]--;
49    }
50
51    void input() {
52        string s;
53        cin >> s;
54        *this = s;
55    }
56
57    string str() const {
58        if (!a[0])
59            return "0";
60
61        string s;
62        if (negative)
63            s = "-";
64
65        for (int i = a[0]; i; i--)
66            s.push_back('0' + a[i]);
67
68        return s;
69    }
70
71    operator string () const {
72        return str();
73    }
74
75    big_decimal operator - () const {
76        big_decimal o = *this;
77        if (a[0])
78            o.negative ^= true;
79
80        return o;
81    }
82
83    friend big_decimal abs(const big_decimal &u) {
84        big_decimal o = u;
85        o.negative = false;
86        return o;
87    }
88
89    big_decimal &operator <= (int k) {
90        a[0] += k;
91
92        for (int i = a[0]; i > k; i--)
93            a[i] = a[i - k];
94
95        for(int i = k; i; i--)
96            a[i] = 0;
97
98        return *this;
99    }
100
101    friend big_decimal operator << (const big_decimal &u,
    ↪ int k) {
102        big_decimal o = u;
103        return o <= k;
104    }
105
106    big_decimal &operator >= (int k) {
107        if (a[0] < k)
108            return *this = big_decimal(0);
109
110        a[0] -= k;
111        for (int i = 1; i <= a[0]; i++)

```



```

112     a[i] = a[i + k];
113
114     for (int i = a[0] + 1; i <= a[0] + k; i++)
115         a[i] = 0;
116
117     return *this;
118 }
119
120 friend big_decimal operator >> (const big_decimal &u,
121     ↪ int k) {
122     big_decimal o = u;
123     return o >>= k;
124 }
125
126 friend int cmp(const big_decimal &u, const
127     ↪ big_decimal &v) {
128     if (u.negative || v.negative) {
129         if (u.negative && v.negative)
130             return -cmp(-u, -v);
131
132         if (u.negative)
133             return -1;
134
135         if (v.negative)
136             return 1;
137     }
138
139     if (u.a[0] != v.a[0])
140         return u.a[0] < v.a[0] ? -1 : 1;
141
142     for (int i = u.a[0]; i; i--)
143         if (u.a[i] != v.a[i])
144             return u.a[i] < v.a[i] ? -1 : 1;
145
146     return 0;
147 }
148
149 friend bool operator < (const big_decimal &u, const
150     ↪ big_decimal &v) {
151     return cmp(u, v) == -1;
152 }
153
154 friend bool operator > (const big_decimal &u, const
155     ↪ big_decimal &v) {
156     return cmp(u, v) == 1;
157 }
158
159 friend bool operator == (const big_decimal &u, const
160     ↪ big_decimal &v) {
161     return cmp(u, v) == 0;
162 }
163
164 friend bool operator <= (const big_decimal &u, const
165     ↪ big_decimal &v) {
166     return cmp(u, v) <= 0;
167 }
168
169 friend bool operator >= (const big_decimal &u, const
170     ↪ big_decimal &v) {
171     return cmp(u, v) >= 0;
172 }
173
174 friend big_decimal decimal_plus(const big_decimal &u,
175     ↪ const big_decimal &v) { // 保证u, v均为正数的话可
176     ↪ 以直接调用
177     big_decimal o;
178
179     o.a[0] = max(u.a[0], v.a[0]);

```

```

172     for (int i = 1; i <= u.a[0] || i <= v.a[0]; i++)
173         ↪ {
174             o.a[i] += u.a[i] + v.a[i];
175
176             if (o.a[i] >= 10) {
177                 o.a[i + 1]++;
178                 o.a[i] -= 10;
179             }
180
181             if (o.a[o.a[0] + 1])
182                 o.a[o.a[0]]++;
183
184             return o;
185         }
186
187 friend big_decimal decimal_minus(const big_decimal
188     ↪ &u, const big_decimal &v) { // 保证u, v均为正数的
189     ↪ 话可以直接调用
190     int k = cmp(u, v);
191
192     if (k == -1)
193         return -decimal_minus(v, u);
194     else if (k == 0)
195         return big_decimal(0);
196
197     big_decimal o;
198
199     o.a[0] = u.a[0];
200
201     for (int i = 1; i <= u.a[0]; i++) {
202         o.a[i] += u.a[i] - v.a[i];
203
204         if (o.a[i] < 0) {
205             o.a[i] += 10;
206             o.a[i + 1]--;
207         }
208
209         while (o.a[0] && !o.a[o.a[0]])
210             o.a[o.a[0]]--;
211
212     }
213
214     return o;
215 }
216
217 friend big_decimal decimal_multi(const big_decimal
218     ↪ &u, const big_decimal &v) {
219     big_decimal o;
220
221     o.a[0] = u.a[0] + v.a[0] - 1;
222
223     for (int i = 1; i <= u.a[0]; i++)
224         for (int j = 1; j <= v.a[0]; j++)
225             o.a[i + j - 1] += u.a[i] * v.a[j];
226
227     for (int i = 1; i <= o.a[0]; i++)
228         if (o.a[i] >= 10) {
229             o.a[i + 1] += o.a[i] / 10;
230             o.a[i] %= 10;
231         }
232
233     if (o.a[o.a[0] + 1])
234         o.a[o.a[0]]++;
235
236     return o;
237 }
238
239 friend pair<big_decimal, big_decimal>
240     ↪ decimal_divide(big_decimal u, big_decimal v) { //
241     ↪ 整除

```

```

236     if (v > u)
237     |     return make_pair(big_decimal(0), u);
238
239     big_decimal o;
240     o.a[0] = u.a[0] - v.a[0] + 1;
241
242     int m = v.a[0];
243     v <<= u.a[0] - m;
244
245     for (int i = u.a[0]; i >= m; i--) {
246     |     while (u >= v) {
247     |         u = u - v;
248     |         o.a[i - m + 1]++;
249     |     }
250
251     |     v >>= 1;
252     | }
253
254     while (o.a[0] && !o.a[o.a[0]])
255     |     o.a[0]--;
256
257     return make_pair(o, u);
258 }
259
260 friend big_decimal operator + (const big_decimal &u,
261   ↳ const big_decimal &v) {
262     if (u.negative || v.negative) {
263     |     if (u.negative && v.negative)
264     |         return -decimal_plus(-u, -v);
265
266     |     if (u.negative)
267     |         return v - (-u);
268
269     |     if (v.negative)
270     |         return u - (-v);
271     | }
272
273     return decimal_plus(u, v);
274 }
275
276 friend big_decimal operator - (const big_decimal &u,
277   ↳ const big_decimal &v) {
278     if (u.negative || v.negative) {
279     |     if (u.negative && v.negative)
280     |         return -decimal_minus(-u, -v);
281
282     |     if (u.negative)
283     |         return -decimal_plus(-u, v);
284
285     |     if (v.negative)
286     |         return decimal_plus(u, -v);
287     | }
288
289     return decimal_minus(u, v);
290 }
291
292 friend big_decimal operator * (const big_decimal &u,
293   ↳ const big_decimal &v) {
294     if (u.negative || v.negative) {
295     |     big_decimal o = decimal_multi(abs(u),
296     |         ↳ abs(v));
297
298     |     if (u.negative ^ v.negative)
299     |         return -o;
300     |     return o;
301     }
302
303     return decimal_multi(u, v);
304 }

```

```

301 big_decimal operator * (long long x) const {
302     if (x >= 10)
303     |     return *this * big_decimal(x);
304
305     if (negative)
306     |     return -(*this * x);
307
308     big_decimal o;
309
310     o.a[0] = a[0];
311
312     for (int i = 1; i <= a[0]; i++) {
313     |     o.a[i] += a[i] * x;
314
315     |     if (o.a[i] >= 10) {
316     |         o.a[i + 1] += o.a[i] / 10;
317     |         o.a[i] %= 10;
318     |     }
319     | }
320
321     if (o.a[a[0] + 1])
322     |     o.a[0]++;
323
324     return o;
325 }
326
327 friend pair<big_decimal, big_decimal>
328   ↳ decimal_div(const big_decimal &u, const
329   ↳ big_decimal &v) {
330     if (u.negative || v.negative) {
331     |     pair<big_decimal, big_decimal> o =
332     |         ↳ decimal_div(abs(u), abs(v));
333
334     |     if (u.negative ^ v.negative)
335     |         return make_pair(-o.first, -o.second);
336     |     return o;
337     }
338
339     return decimal_divide(u, v);
340 }
341
342 friend big_decimal operator / (const big_decimal &u,
343   ↳ const big_decimal &v) { // v不能是0
344     if (u.negative || v.negative) {
345     |     big_decimal o = abs(u) / abs(v);
346
347     |     if (u.negative ^ v.negative)
348     |         return -o;
349     |     return o;
350     }
351
352     return decimal_divide(u, v).first;
353 }
354
355 friend big_decimal operator % (const big_decimal &u,
356   ↳ const big_decimal &v) {
357     if (u.negative || v.negative) {
358     |     big_decimal o = abs(u) % abs(v);
359
360     |     if (u.negative ^ v.negative)
361     |         return -o;
362     |     return o;
363     }
364
365     return decimal_divide(u, v).second;
366 }
367 };

```

7.3 xorshift

```

1 ull k1, k2;
2 const int mod = 10000000;
3 ull xorShift128Plus() {
4     ull k3 = k1, k4 = k2;
5     k1 = k4;
6     k3 ^= (k3 << 23);
7     k2 = k3 ^ k4 ^ (k3 >> 17) ^ (k4 >> 26);
8     return k2 + k4;
9 }
10 void gen(ull _k1, ull _k2) {
11     k1 = _k1, k2 = _k2;
12     int x = xorShift128Plus() % threshold + 1;
13     // do sth
14 }
15
16 uint32_t xor128(void) {
17     static uint32_t x = 123456789;
18     static uint32_t y = 362436069;
19     static uint32_t z = 521288629;
20     static uint32_t w = 88675123;
21     uint32_t t;
22
23     t = x ^ (x << 11);
24     x = y; y = z; z = w;
25     return w = w ^ (w >> 19) ^ (t ^ (t >> 8));
26 }
27

```

7.4 枚举子集

(注意这是 $t \neq 0$ 的写法, 如果可以等于0需要在循环里手动break)

```

1 for (int t = s; t; (--t) &= s) {
2     // do something
3 }

```

7.5 STL

1. vector

- `vector(int nSize)`: 创建一个vector, 元素个数为nSize
- `vector(int nSize, const t& t)`: 创建一个vector 元素个数为nSize, 且值均为t
- `vector(begin, end)`: 复制[begin, end)区间内另一个数组的元素到vector中
- `void assign(int n, const T& x)`: 设置向量中前n个元素的值为x
- `void assign(const_iterator first, const_iterator last)`: 向量中[first, last)中元素设置成当前向量元素

2. list

- `assign()` 给list赋值
- `back()` 返回最后一个元素
- `begin()` 返回指向第一个元素的迭代器
- `clear()` 删除所有元素
- `empty()` 如果list是空的则返回true
- `end()` 返回末尾的迭代器
- `erase()` 删除一个元素
- `front()` 返回第一个元素
- `insert()` 插入一个元素到list中
- `max_size()` 返回list能容纳的最大元素数量

- `merge()` 合并两个list
- `pop_back()` 删除最后一个元素
- `pop_front()` 删除第一个元素
- `push_back()` 在list的末尾添加一个元素
- `push_front()` 在list的头部添加一个元素
- `rbegin()` 返回指向第一个元素的逆向迭代器
- `remove()` 从list删除元素
- `remove_if()` 按指定条件删除元素
- `rend()` 指向list末尾的逆向迭代器
- `resize()` 改变list的大小
- `reverse()` 把list的元素倒转
- `size()` 返回list中的元素个数
- `sort()` 给list排序
- `splice()` 合并两个list
- `swap()` 交换两个list
- `unique()` 删除list中重复的元素

7.6 pb_ds

7.7 rope

8. 注意事项

8.1 常见下毒手法

- 高精度高低位搞反了吗
- 线性筛抄对了吗
- sort比较函数是不是比了个寂寞
- 该取模的地方都取模了吗
- 边界情况(+1-1之类的)有没有想清楚
- 特判是否有必要, 确定写对了吗

8.2 场外相关

- 安顿好之后查一下附近的咖啡店, 打印店, 便利店之类的位置, 以备不时之需
- 热身赛记得检查一下编译注意事项中的代码能否过编译, 还有熟悉比赛场地, 清楚洗手间在哪儿, 测试打印机(如果可以)
- 比赛前至少要翻一遍板子, 尤其要看原理与例题
- 比赛前一两天不要摸鱼, 要早睡, 有条件最好洗个澡; 比赛当天不要起太晚, 维持好的状态
- 赛前记得买咖啡, 最好直接安排三人份, 记得要咖啡因比较足的; 如果主办方允许, 就带些巧克力之类的高热量零食
- 入场之后记得检查机器, 尤其要逐个检查键盘按键有没有坏的; 如果可以的话, 调一下gedit设置
- 开赛之前调整好心态, 比赛而已, 不必心急.

8.3 做题策略与心态调节

- 拿到题后立刻按照商量好的顺序读题,前半小时最好跳过题意太复杂的题(除非被过穿了)
- 签到题写完不要激动,稍微检查一下最可能的下毒点再交,避免无谓的罚时
 - 一两行的那种傻逼题就算了
- 读完题及时输出题意,一方面避免重复读题,一方面也可以让队友有一个初步印象,方便之后决定开题顺序
- 如果不能确定题意就不要贸然输出甚至上机,尤其是签到题,因为样例一般都很弱
- 一个题如果卡了很久又有其他题可以写,那不妨先放掉写更容易的题,不要在一棵树上吊死
 - 不要被一两道题搞得心态爆炸,一方面急也没有意义,一方面你很可能真的离AC就差一步
- 榜是不会骗人的,一个题如果被不少人过了就说明这个题很可能并没有那么难;如果不是有十足的把握就不要轻易开没什么人交的题;另外不要忘记最后一小时会封榜
- 想不出题/找不出毒自然容易犯困,一定不要放任自己昏昏欲睡,最好去洗手间冷静一下,没有条件就站起来踱步
- 思考的时候不要挂机,一定要在草稿纸上画一画,最好说出声来最不容易断掉思路
- 出完算法一定要check一下样例和一些trivial的情况,不然容易写了半天发现写了个假算法
- 上机前有时间就提前给需要思考怎么写的地方打草稿,不要浪费机时
- 查毒时如果最难的地方反复check也没有问题,从头到脚仔仔细细查一遍,不要放过任何细节,即使是并查集和sort这种东西也不能想当然
- 后半场如果时间不充裕就不要冒险开难题,除非真的无事可做
 - 如果是没写过的东西也不要轻举妄动,在有其他好写的题的时候就等一会再说
- 大多数时候都要听队长安排,虽然不一定最正确但可以保持组织性
- 最好注意一下影响,就算忍不住嘴臭也不要太大声
- 任何时候都不要着急,着急不能解决问题,不要当喆国王
- 输了游戏,还有人生;赢了游戏,还有人生.