

NAZARIY FIZIKA KURSI

IV

**A.A. ABDUMALIKOV,
R. MAMATQULOV**

TERMODINAMIKA VA STATISTIK FIZIKA

NAZARIY FIZIKA KURSI

*Pfof. A.A. Abdumalikov umumiyl tahriri
ostida*

4- JILD

**«Voris nashriyot» MChJ
Toshkent – 2006**



33, 317
A-15

A.A. ABDUMALIKOV, R. MAMATQULOV

TERMODINAMIKA VA STATISTIK FIZIKA

Ozbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi
tomonidan universitetlar va pedagogika institutlari uchun darslik
sifatida tavsija etilgan

«Voris nashriyot» MChJ
Toshkent – 2006

Taqrizchilar: prof. A. Boydedaev,
prof. M. Rasulova.

Mazkur darslik statistik fizika, termodinamika va kinetika fanining asoslarini o'z ichiga olgan. Mavzularni tanlash va ularni bayon qilishda Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti nazariy fizika kafedrasida ishlab chiqilgan namunaviy o'quv dasturga amal qilindi. Darslikda asosiy e'tibor statistik fizika, termodinamika va kinetika asoslarini ko'rsatishga, ularning mohiyatini ochishga va muhim effektlarni yoritishga qaratilgan. Ushbu darslik oliy ta'lim muassasalari fizika, astronomiya va texnika yo'nalishida ta'lim olayotgan talabalarga mo'ljallangan.

ISBN 978-9943-304-07-09

© A.A.Abdumalikov, R.Mamatqulov.
© «Voris nashriyot» MChJ, 2006- y.

SO'ZBOSHI

Nazariy fizika bo'limlarini qamrab olgan va bir butun holda yozilgan o'zbek tilidagi darslikning mavjud emasligi 4 jildlik «Nazariy fizika kursi» darsligini yaratishni taqozo qiladi. O'quvchilarga taklif qilinayotgan ushbu kitob nazariy fizika kursi bo'yicha darsliklarning to'rtinchi jildi hisoblanadi. Termodynamika, statistik fizika va kinetika nazariy fizikaning asosiy bo'limlaridan bo'lib, bir-biri bilan uzviy bog'langandir. Nazariy fizikaning bu bo'limlari juda ko'p atom va molekulalardan tashkil topgan makroskopik sistemalar – gazlar, suyuqliklar va qattiq jismarda o'tadigan issiqlik jarayonlarini o'rganadi.

Darslikning birinchi bobida statistik fizikaning asosiy tasavvurlari – fazalar fazosi, statistik fizikaning asosi bo'lgan Liuvill teoremasi, termodynamik kattalikni o'rtachalashda ergodik teoremaning o'rni va statistik taqsimot bayon qilingan.

Ikkinci bob statistik mexanikaning umumiy metodlariga bug'ishlangan bo'lib, u yerda Gibbsning mikrokanonik va kichik kanonik taqsimotlarining xarakterli xususiyatlari tahlil qilingan. Gibbsning klassik va kvazi klassik taqsimotlari asosida umumiy fizika kursidan ma'lum bo'lgan Maksvell, Maksvell-Bolsman taqsimotlari nazariy yo'l bilan keltirib chiqarilgan va ularning tatbiq qilinish sohalari ko'rsatilgan.

Statistik va fenomenologik termodynamikaga kitobning uchinchchi bobini bag'ishlangan. Termodynamikaning asosiy tushunchalariga ta'rif berilgan. Muvozanatdagi va muvozanatda bo'l-magan sistemalarda o'tadigan jarayonlar termodynamik metodlar asosida ko'rib chiqilgan. Termik va kalorik tenglamalar, termodynamikaning uchta qonuni batafsil o'rganilgan. Bunday tashqari, qaytmas va qaytuvchi jarayonlar ham ko'rib chiqilgan. Olingan natijalar gazlar, suyuqliklar va qattiq jismlar termodynamikasini o'rganishga tatbiq qilingan.

Kitobning to'rtinchi bobida zarralar soni o'zgaruvchi sistemalar termodynamikasi statistik fizika metodlari yordamida o'rganilgan. Bunday sistemalarni o'rganishda muhim bo'lgan Gibbsning katta kanonik taqsimoti keltirib chiqarilgan. Statistik yig'indi yordamida termodynamik kattaliklarni hisoblash

mumkinligi ko'rsatilgan. Olingen natijalar asosida nürlanish termo-dinamikasi, gomogen va geterogen sistemalardagi muvozanat va barqarorlik shartlari ko'rib chiqilgan. Bobning yakunida faza o'tishlarining Yang-Li va Landau nazariyasi bayon qilingan.

Ideal sistemalar statistikasiga beshinchi bob bag'ishlangan. Statistik nazariya asosida Maksvell, Maksvell-Bolsman, Boze-Eynshteyn va Fermi-Dirak taqsimotlari olingen. Bu taqsimotlarni yuqori va past temperaturalar sohasida tatbiq qilish bayon qilingan. Bir atomli kvant ideal gazlar uchun termodinamik kattaliklarni hisoblash yo'llari ko'rsatilgan. Bu yerda Boze-Eynshteyn kondensatsiyasining fizik ma'nosi kvant nazariyasi asosida ochilgan. Bu boradagi zamonaviy yutuqlarga alohida e'tibor berilgan. Qattiq jismlar issiqlik sig'imi nazariyasi va past temperaturalarda tajriba natijalari bilan mos tushuvchi Debay nazariyasi berilgan. Ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan ideal gazlar issiqlik sig'imi klassik va kvant nazariyalari asosida bayon qilingan. Manfiy absolut temperaturaning mavjudligi termodinamika, statistik fizika va kvant nazariyasi nuqtayi nazaridan ko'rsatilgan.

Kitobning oltinchi bobida noideal sistemalar statistik nazariyasi bayon qilingan. Bu yerda noideal bir atomli gaz holat tenglamasi o'r ganilgan. Bunday sistemalarni o'r ganishda korellatsion funksiyalar metodi muhimdir. Bu metod bir qator olimlar tomonidan ishlab chiqilgan. Bu darslikda N.N.Bogolyubov ishlab chiqqan zanjir tenglamalar sistemasi bayon qilingan va uni tuzish yo'llari ustada to'xtalib o'tilgan.

Fluktuatsiya hodisasi, fluktuatsiyaning termodinamik va statistik nazariyalariga ettinchi bob bag'ishlangan. O'lchov asboblarining sezgirligi fluktuatsiya bilan bevosita bog'liq ekanligi va Naykvist nazariyasi bayon qilingan. Osmonning rangi va Reley sochilishi tahlil qilingan.

Kitobda nomuvozanat jarayonlar termodinamikasi sakkizinchchi bobda keltirilgan. Onzager prinsipi ko'rib chiqilgan va ayqash hodisalarni o'r ganishga tatbiq qilingan. Nochiziqli nomuvozanat termodinamika to'g'risida tushunchalar berilgan.

Darslikda kinetikaga katta e'tibor berilgan. Kinetik muammoning kelib chiqish sabablari va uni bartaraf qilish yo'llari ko'rsatilgan. Broun harakatining Smoluxovskiy va Eynshteyn nazariyalari berilgan. Smoluxovskiy tenglamasi asosida Fokker-Plank va kinetik balans tenglamalarini chiqarish ko'rsatilgan.

Siyrak gazlar uchun Bolsman tenglamasining tahlili, H-teorema va entropiyaning o'sish qonunining isboti o'ninchibobda keltirilgan. Bolsman tenglamasining statssionar yechimi, lokal luqsimot funksiyasi, Gidrodinamika tenglamasi olingan. Bogolyubovning kinetik zanjir tenglamasi metodik nuqtayi nazardan ishlab chiqilgan. Bu tenglamadan xususiy hollarda o'zi moslashgan va Vlasovning chiziqli tenglamalarining olinishi ko'rsatilgan.

Darslikda bayon qilingan nazariy mavzularni amaliy mustahkamlashga katta e'tibor qaratilgan. Shu maqsadda har bir bob oxirida mavzularga mos keluvchi masalalar va sinov savollari keltirilgan. Ba'zi masalalar yechimlari bilan berilgan.

Darslikda mavzularni tanlashda universitetlar uchun ishlab chiqilgan «Statistik fizika, termodinamika va kinetika kursi bo'yicha namunaviy dastur» asos qilib olingan. Kursni bayon qilish metodikasi O'zbekiston Milliy universiteti fizika fakulteti nazariy fizika kafedrasida orttirilgan ko'p yillik katta tajribaga usoslangan.

Darslik O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi qoshidagi «Fan va texnologiyalar markazi» 4 И-2-17 sonli innovatsion loyiha doirasida yozilgan.

Darslikni yaratilishida fikr-mulohazalarini bildirgan taqrizchilar prof. A.A. Boydedaev va prof. M. Rasulovaga mualiflar o'z minnatdorchiliklarini bildiradilar.

KIRISH

Termodinamika va statistik fizika moddaning fizik xossalariini o'rganishda muhim ahamiyat kasb etib, materianing issiqlik harakat formasini o'rganadi. Ularning asosiy mazmuni issiqlik muvozanat holatda bo'lgan ko'p sondagi zarralardan tashkil topgan makroskopik sistemada issiqlik harakat qonuniyatlari va unda o'tayotgan jarayonlarni, eng avvalo termodynamik metod, so'ng esa statistik metod yordamida o'rganishdan iborat.

Termodinamika fenomenologik xarakteriga ko'ra, issiqlik muvozanatda bo'lgan sistemada o'tadigan jarayonlarni o'rganishda oshkora ravishda biror fizik tasavvur yoki modeldan foydalanmaydi. Masalan, moddaning atom yoki molekulalardan tashkil topganligini nazarga olmasdan energiya, entropiya, erkin energiya kabi abstrakt kattaliklar orasidagi bog'lanishlarni aniqlaydi va fundamental qonuniyatlarni kashf qilishga olib keladi. Termodinamika fizik hodisalarni o'rganishda fenomenologik yondashish qanchalik muhim ekanligini namoyish qiladi. Ammo issiqlik harakat qonunlarini o'rganishda qanchalar muhim natijalarga kelsada, uning xususiyatlarini chuqur o'rganishni chegaralaydi va tekshiriladigan fizik hodisalarning ichki tabiatini ochishga imkon bermaydi.

Statistik fizika kvant mexanika bilan bir qatorda zamonaviy fizikaning asosini tashkil qiladi va mikroskopik nazariyaga tayangan holda fizik hodisalarni har tomonlama o'rganadi. Statistik fizika katta sondagi zarralardan (molekulalar, atomlar, protonlar, elektronlar, fotonlar, neytronlar va boshqa zarralardan) tashkil topgan makroskopik sistemalarning xususiyatlarini, unda o'tayotgan jarayonlarni, qonuniyatlarni mikroskopik nuqtayi nazaridan o'rganuvchi va tekshiruvchi bo'limi hisoblanadi.

Moddalarning tuzilish modellariga bog'liq holda statistik fizika – klassik va kvant statistikaga bo'linadi. Agar makroskopik sistemani tashkil qilgan atom va molekulalar klassik mexanika qonuniyatlari bo'yicha harakatlanadi deb hisoblasak,

bir qator hodisalar to'la holda tavsiflanadi. Bu holda moddaning klassik modeli tanlanadi. Ana shu model asosida tuzilgan statistik fizika qisqacha klassik statistika yoki statistik mexanika deb yuritiladi.

Agar makroskopik sistemani tashkil etgan zarralar kvant mexanika qonuniyatlariga bo'ysunsa, u holda moddaning kvant modeli tanlanadi va shu model asosida tuzilgan statistik fizika kvant statistik fizika deb yuritiladi.

Bundan tashqari, statistik fizika, mos ravishda, muvozanatli jarayonlar va nomuvozanatli jarayonlar nazariyasiga bo'linadi. Birinchi holda nazariya vaqtga bog'liq bo'lмаган ehtimollik va o'rtacha qiymat bilan ish ko'rsa, ikkinchi holda esa vaqtga bog'liq bo'lган ehtimollik va o'rtacha qiymat bilan ish ko'radi. Shunday qilib, statistik fizikada to'rtta nazariy bo'lim mavjud (jadvalga qarang).

Jarayonlar tipi	Model	
	klassik	kvant
Muvozanatli jarayonlar	muvozanatli jarayonlar klassik statistikasi (statistik mexanika)	muvozanatli jarayonlar kvant statistikasi (kvant statistika)
Nomuvozanat jarayonlar	nomuvozanat jarayonlar klassik statistikasi (klassik kinetika)	nomuvozanat jarayonlar statistikasi (kvant kinetika)

Statistik fizika metodi fizikaning barcha sohalarida qo'llaniladi: gazlar fizikasida, suyuqlik va qattiq jismlar, atom yadrosgina, kosmik fazolarda yorug'likning tarqalishida, yulduzlar nazariyasida va hokazo.

I bob

STATISTIK FIZIKANING ASOSIY TASAVVURLARI

Sistema holatini xarakterlaydigan fizik kattaliklarning ansambl va vaqt bo'yicha o'rtacha qiymatlari orasidagi bog'lanishni aniqlashda ergodik gipoteza katta o'rinni tutadi.

1.1. Statistik fizika vazifalari

Statistik fizika atom, molekula, ion kabi juda ko'p zarralardan tashkil topgan sistema – makroskopik sistemalarning xossalari, ularda kechadigan jarayonlarni va qonuniyatlarini o'rganadi. Bunday sistemalarning xossalari kam zarrali sistemalar xossalardan tubdan farq qiladi. Makroskopik sistemaning zarralari klassik yoki kvant fizika qonunlariga bo'ysunishiga qarab klassik va kvant statistik fizika bo'linadi. Bu holatdan qat'iy nazar makroskopik sistemalarda statistik qonuniyatlar o'rinali bo'ladi.

Mikroskopik fizika nuqtayi nazaridan makroskopik sistemani tashkil qilgan hamma zarralarning o'rni va harakat qonuniyatlarini ma'lum bo'lsa, uning holati aniqlangan deyiladi, Boshlang'ich vaqtida ayrim zarralarning o'rni va ularning harakati qonuniyatlarini bilgan holda, klassik mexanika yoki kvant mexanika qonunlari bo'yicha ularni keyingi ixtiyoriy vaqt momentidagi holatini aniqlash mumkin. Shunday qilib, berilgan vaqtida makroskopik sistema holatini aniqlab qolmasdan, balki vaqt davomida bu holatning o'zgarishini ham kuzatish mumkin. Ammo sistema mikroholatining vaqt bo'yicha o'zgarishi, zarralarning ko'pligi va ularning doimiy harakati tufayli, g'oyat murakkab va chigal xarakterga ega bo'ladi.

Makroskopik sistemaning xossalari klassik yoki kvant fizika qonunlari yordamida o'rganishga harakat qilish nimalarga olib kelishini ko'rib chiqaylik. Har bir zarra uni o'rab turgan zarralar hosil qilgan maydon va tashqi maydon ta'sirida harakat qiladi. Har ikkala tipdagi maydon ta'sirida harakat qilayotgan zarralar uchun harakat tenglamalarini yozish mumkin. Bunday

tenglamalar soni sistemaning erkinlik darajasiga teng bo'ladi. Sistema ta zarradan tashkil topgan bo'lsa, tenglamalar soni $3N$ ta bo'ladi. Bunday tenglamalarni yechish amalda bajarib bo'lmaydigan vazifadir. Bu masala amalga oshirilgan taqdirda ham barcha zarralar uchun boshlang'ich shartlarni yozib bo'l-maydi, demak, bu shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni ham yozib bo'lmaydi. Shuning uchun uning dinamik harakatlarini amalda tadqiq qilish mumkin emas.

Xulosa. Juda ko'p zarralardan tashkil topgan sistemaning xossalari klassik yoki kvant mexanika tenglamalari orqali o'rjanib bo'lmaydi.

Demak, makroskopik sistema holatini aniqlash uchun yangi tipdagi qonuniyat – statistik qonuniyatni yaratish masalasiga olib keladi. Bu masala ehtimollik nazariyasini bilan uzviy bog'langandir. Shunday qilib, statistik fizikaning asosiy vazifikasi ehtimollik nazariyasiga asoslanib, taqsimot funksiyalarini topish, makroskopik sistemaning fundamental qonuniyatlarini kashf etish, tushuntirish, sistema holatini xarakterlovchi termodinamik kattaliklarni va ular orasidagi asosiy munosabatlarni topishdan iboratdir.

1.2. Fazalar fazosi

Makroskopik sistema holatini, umuman olganda, klassik yoki kvant mexanika yordamida tavsiflash mumkinligini yuqorida eslatib o'tdik. Qulaylik uchun avval klassik mexanika o'rini deb qaraylik.

Makroskopik sistema sifatida N ta bir xil zarralardan tashkil topgan V hajmli ideal gazni olib qaraylik. Statistik fizikada sistema holatini qo'shma parametrlar majmuasi (q_i , p_i) bilan tavsiflash qabul qilingan. Bu yerda q_i – umumlashgan koordinatalar, p_i – umumlashgan impulslar ($i = 1, 2-3N$). Zarralarning har birini uchta erkinlik darajasiga ega bo'lgan moddiy nuqta deb qaraylik.

Klassikada o'zaro ta'sirlashmaydigan N zarradan tashkil topgan mexanik sistemaning har bir erkinlik darajasiga to'g'ri kelgan umumlashgan koordinata va impuls vaqtga bog'lanishi birinchi tartibli $6N$ Gamilton tenglamalar sistemasi

$$p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.1)$$

bilan aniqlanadi. Bu yerda p_i – umumlashgan impulslar quyidagi munosabat bilan aniqlanadi:

$$p_i = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}.$$

$H(q, p) = T(p) + U(q)$ – Gamilton funksiyasi.

Mikroskopik sistemani Gamilton tenglamalari sistemasining o'rniiga $3N$ ta ikkinchi tartibli Lagranj tenglamalari sistemasi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 3N \quad (1.2)$$

bilan ham tavsiflash mumkin. Bu yerda $L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q)$ – sistemaning Lagranj funksiyasi, ($T(\dot{q})$), $U(q)$ – mos ravishda sistemaning kinetik va potensial energiyasi.

Langranj va Gamilton formalizmlari ekvivalent bo'lib, biday natijaga olib keladi. Bu tenglamalar sistemasining yechimi umumlashgan koordinata q_i larning vaqtga va $6N$ ta boshlang'ich shartga bog'lanishini beradi.

Bizga ma'lumki, bunday katta sondagi tenglamalar sistemasini aniq yechish mumkin emas. Shuning uchun, katta sondagi zarralardan tashkil topgan makroskopik sistema holatini tavsiflashda mexanik metoddan tubdan farq qiladigan yangi metodni izlab topish kerak. Ana shunday metod – statistik metoddir. Bu metodni o'rganish bizning asosiy vazifamizdir.

Hozir esa mexanika masalalarini tahlil qilishda ko'p qo'llaniladigan fazalar fazosi metodi bilan tanishib chiqamiz. Bu metod Gamilton prinsipi bilan bog'langan. Koordinata o'qlari umumlashgan koordinatalar q_1, q_2, \dots, q_N va umumlashgan impulslar, p_1, p_2, \dots, p_N dan iborat bo'lgan $6N$ o'chovli faraziy ortogonal fazo kiritamiz. Bunday fazo – fazalar fazosi deyiladi. Bunday fazoning har bir nuqta sistemaning dinamik mikroholatini ifodalaydi.

Birorta metod yordamida kanonik tenglamalar sistemasi (1.1) ning yechimini topdik deb faraz qilaylik. Ya'ni:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(c_1, c_2, \dots, c_{6N}, t), & p_1 &= p_1(c_1, c_2, \dots, c_{6N}, t), \\ q_2 &= q_2(c_1, c_2, \dots, c_{6N}, t), & p_2 &= p_2(c_1, c_2, \dots, c_{6N}, t), \\ &\dots &&\dots \\ q_{3N} &= q_{3N}(c_1, c_2, \dots, c_{6N}, t), & p_{3N} &= p_{3N}(c_1, c_2, \dots, c_{6N}, t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

funksiyalar ma'lum bo'lsin. Bu yerda $c_1, c_2, \dots, c_{6N} - 6N$ ta boshlang'ich shartlarga mos keluvchi harakat integrallaridir. Fazalar fazosidagi har bir nuqta sistemaning aniq vaqt momentindagi mikro holatini aks ettiradi.

Fazoviy koordinata sistemasidagi nuqtadan farq qilish uchun fazalar fazosidagi nuqta tasviriy nuqta deb ataladi. Fazalar fazosidagi sistema holatining o'zgarishini aks ettiruvchi traektoriya tasviriy traektoriya yoki sistemaning faza portreti deyladi. Sodda qilib gapirganda faza portreti (1.1) tenglamalardan kelib chiqadigan $p = p(q, c)$ bog'lanishlar grafigidir. Demak, metodning afzalligi shundan iborat ekanki, (1.1) tenglamalarni yechmasdan sistemaning faza portretidan foydalanim fazalar fazosida sistema harakatining umumiy xususiyatlarini o'rganish mumkin. Shuni ta'kidlash lozimki, bu metod sistemaning erkinlik darajasi juda ko'p bo'lgan (makrosistema) hollarda avvalgiday murakkab matematik masalaga aylanadi. Shunga qaramasdan statistik fizika asoslarini yaratishda muhim rol o'ynaydi.

Bu tushunchalarni bir erkinlik darajasiga ega bo'lgan sistema uchun ko'rib chiqamiz. Soddalik uchun chiziqli garmo-nik ossillatorning fazaviy traektoriyasini o'rganaylik. Garmo-nik ossillator kvazielastik kuch $F = -kx$ ta'siri ostida $x = 0$ nuqta atrofida harakat qilsin. Harakat tenglamasi

$$x + \omega^2 x = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $\omega = \sqrt{k/m}$, k – elastiklik koefitsiyenti, m – ossillatorning massasi. Tenglama yechimini

$$x = A \sin(\omega t + \alpha)$$

ko'rinishda qidiramiz. U holda ossillator impulsi

$$p = A\omega m \cos(\omega t + \alpha).$$

Koordinata va impuls ifodalaridan vaqtini yo'qotamiz hamda natijada:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{p}{A\omega m}\right)^2 = 1 \quad (1.4)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu esa yarimo'qlari $a = A$ va $b = A\omega m$ bo'lgan ellips tenglamasidir. Demak, chiziqli garmonik ossillatorning fazalar fazosidagi tasviriy traektoriyasi yoki faza portreti ellipsdan iborat ekan.

$$S = \oint pdx = \pi m\omega A^2,$$

ossillatorning energiyasi esa

$$H = \varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = \frac{\gamma A^2}{2}$$

teng bo'ladi. Siklik chastota $\omega = 2\pi\nu$ ekanligini hisobga olsak, garmonik ossillyator energiyasi yoki davriy harakat bajarayotgan bitta zarradan tashkil topgan sistemaning energiyasi quydagi teng bo'ladi:

$$\varepsilon = \nu \oint pdq. \quad (1.5)$$

Bu yerda koordinata va impuls umumlashgan koordinata va impuls bilan almashtirildi.

Katta sondagi zarralardan tashkil topgan sistema uchun fazalar fazosi ham ko'p o'lchamli bo'ladi, bu holda (1.1)ni grafik holda tahlil qilish amalda mumkin emas. Shunday bo'lsada bu tushuncha statistik fizikada muhim ahamiyatga ega. Bunda fazalar fazosining elementar hajmini bilish muhimdir va uning elementar hajmi

$$d\Gamma = \prod_i dq_i dp_i, (i = 1, 2, \dots, 3N)$$

ko'rinishda yoziladi.

Biz endi sistema kvant mexanika qonuniyatiga bo'ysunuvchi N ta zarralardan tashkil topgan deb qaraylik, u holda sistema mikroholatlarini aniqlash uchun N ta Shredinger tenglamasini yechish kerak. Bu masalani ham umumiy ko'rinishda yechish mumkin emas. Agar sistemani bir o'lchamli potensial o'rada harakat qilayotgan bitta zarradan tashkil topgan deb qarasak, kvant mexanika umumiy qoidalarga asosan energiya va impuls uchun

$$p_n = \frac{hn}{2a}, \quad \varepsilon_n = \frac{h^2 n^2}{8ma^2} \quad (1.6)$$

ko'rinishdagi ifodalarni yozish mumkin. Bu yerda: p_n va ε_n – mos ravishda kvant zarra impulsi va energiyasi; n – kvant son, a – potensial o'ra o'lchami; $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ erg · s – Plank

dolmiysi. Ikkinchisini misol sifatida garmonik kvant ossillyatororini ko'ramiz. Uning energiyasi

$$\varepsilon_n = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.7)$$

Kvaziklassik yaqinlashishda zarraning fazalar fazosida chizgan yuzasi, ya'ni holat yuzasi Bor-Geyzenberg qoidasiga ko'ra kvantlanadi:

$$\varepsilon_n = \nu \oint p_n dq = h\nu n.$$

n holatga mos kelgan ellips yuzasi esa ($n - 1$) holatga to'g'ri kelgan yuzadan « h » ga farq qiladi, ya'ni

$$\oint p_n dx - \oint p_{n-1} dx = h.$$

Demak, fazalar fazosida ossillyatorning har bir kvant holatiga yuzasi h ga teng bo'lgan «katakcha» to'g'ri kelar ekan. Uch o'lchamli potensial o'rada harakatlanuvchi kvant zarrani olib qarasak, unga fazalar fazosida hajmi h^3 ga teng bo'lgan kvant holati to'g'ri keladi. Ozodlik darajasi f bo'lgan sistemaga h^f hajmli kvant holat to'g'ri keladi. Uch o'lchamli potensial o'rada kvant zarra impulsi $p_n = hn/2a$, energiyasi $\varepsilon_n = h^2n^2/8ma^2$ bo'ladi; bu yerda $n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ ($n = 1, 2, \dots$) – x, y, z yo'nalishlar bo'yicha kvant sonlari.

Bir xil energiyali holatlar soni aynish karraligi yoki kvant holatlar soni, yoki statistik vazn deb ataladi. Kvant holatlar sonini bilish statistik fizikada muhim o'rinni tutadi va odatda $\Omega(\varepsilon)$ yoki $g(\varepsilon)$ kabi belgilanadi, $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ energiya intervaliga to'g'ri kelgan kvant son $d\Omega$ bilan belgilanadi.

Kvant holatlar sonini hisoblash uchun shu energiyaga to'g'ri kelgan fazalar fazosi hajmini bitta kvant holat hajmiga bo'lish kerak, ya'ni $\Omega(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon)/h^3$. Sistemaning erkinlik darajasi f ta bo'lsa, kvant holatlar soni

$$\Omega(\varepsilon) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{h^f}, \quad d\Omega(\varepsilon) = \frac{d\Gamma(\varepsilon)}{h^f} = \frac{1}{h^f} \frac{\partial \Gamma(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\varepsilon,$$

bu yerda Γ – fazalar fazosining hajmi. Kvant holatlar soni multiplikativ qonuniga bo'ysunadi:

$$\Omega = \prod_i \Omega_i,$$

ya'ni, o'zaro bog'lanmagan murakkab sistemalarning kvant holatlar soni, barcha bo'laklar energiyasiga to'g'ri kelgan kvant holatlar sonining ko'paytmasiga teng bo'ladi.

1.3. Liuvill teoremasi

Fazalar fazosi $q = \{q_1, q_2, \dots, q_{3N}\}$, $p = \{p_1, p_2, \dots, p_{3N}\}$ da ixtiyoriy yopiq S_0 sohani tanlab olamiz va undagi birorta A nuqtani ko'rib chiqamiz. Fazalar fazosida nuqtani tanlash barcha umumlashgan koordinata va impulslarning qiymatlarini oldindan belgilab beradi. Shuning uchun birorta t_0 momentdagi boshlang'ich shartlar A nuqta orqali beriladi, deb faraz qilish mumkin. Ushbu fikrni S_0 sohadagi barcha nuqtalarga qo'llaymiz, ya'ni S_0 sohadagi barcha A_i nuqtalarni t_0 vaqt momentida «boshlang'ich» deb qaraymiz.

Tanlangan sohadagi A_i nuqtalar vaqt o'tishi bilan fazalar fazosida tasviriy traektoriyalarni chizadi va $t = t_0 + \tau$ vaqt momentida ular B_i nuqtalarga o'tadi. Bu nuqtalar yangi soha S_τ tashkil qiladi. S_τ sohaning shakli albatta S_0 ning shaklidan farq qilishi mumkin. Tanlangan sohadagi tasviriy nuqtalar soni sistemaning harakati davomida o'zgarmas qoladi, chunki ularning birortasi ham tanlangan sohadan hech qachon chiqib ketolmaydi. Nuqtalardan birortasi soha chegarasidan o'tib ketdi deb faraz qilaylik, bu holda u shu momentda chegaradagi boshqa nuqtaning joyini egallagan bo'ladi. Lekin tasviriy nuqtalarning harakati uning fazalar fazosi berilgan vaqt momentida egallagan holati bilan to'liq aniqlanadi. Demak, bitta nuqtaning chiqib ketishi ikkinchi nuqtaning kirib kelishiga olib keladi. Shunday qilib boshlang'ich vaqt momentida tanlangan sohada joylashgan birorta ham nuqta undan tashqariga chiqib ketolmaydi.¹

Demak, boshlang'ich momentda berilgan Γ_0 hajmli S_0 soha yordamida $t = t_0 + \tau$ momentda Γ_τ hajmli S_τ sohani tuzish mumkin ekan. Shu ma'noda Γ_τ vaqtning funksiyasi bo'ladi. Tabiiy ravishda savol tug'iladi: $\Gamma_\tau = \Gamma(t)$ funksiya qanday ko'rinishga ega va u sistemaning harakati davomida qanday o'zgaradi? Liuvill teoremasining asosiy mazmuni bilan tanishib chiqdik, endi uni ta'riflaymiz.

¹ Nochiziqli sistemalarda dinamik xaos rejimiga o'tganda, tasviriy traektoriyalar bir-biri bilan kesishib ketadi. Bu holda boshlang'ich shartlar sistemaning holatini aniqlab bermaydi.

Liuvill teoremasi. Har bir tasviriy nuqtaning fazaviy traektorijasi bo'ylab harakati tufayli vaqt o'tishi bilan fazalar fazosida tanlangan sohaning shakli o'zgaradi, ammo uning hajmi o'zgarmas qoladi.

Fazalar fazosida tanlangan sohaning hajmi Γ va undagi tasviriy nuqtalar soni N o'zgarmas bo'lganligi uchun nuqtalar zinchligi

$$\rho(p_i, q_i, t) = \frac{dN}{d\Gamma}$$

ham o'zgarmas bo'lishi kerak. Bu fikrni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d\rho(p_i, q_i, t)}{dt} = 0. \quad (1.8)$$

Vaqt bo'yicha to'liq hosilani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\}, \quad (1.9)$$

bu yerda $[H, \rho]$ – Puasson qavslari

$$\{\rho, H\} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).$$

Shunday qilib, Liuvill teoremasidan kelib chiqadigan xulosa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\{\rho, H\}. \quad (1.10)$$

Liuvill teoremasi statistik fizikaning asosini tashkil qiluvchi markaziy teoremadir. Bu teorema birinchi marta odatda nazarriy fizikaning mexanika qismida ta'riflanadi va isbot qilinadi.

1.4. Statistik taqsimot

Yuqorida, ko'p zarralardan tashkil topgan makroskopik sistema dinamik holatini aniqlash amaliy jihatdan mumkin emasligini, ammo yangi qonuniyat ehtimollik nazariyasi bilan bog'langan statistik qonuniyat o'rinli ekanligini eslatib o'tgan edik.

Katta sondagi zarralardan tashkil topgan makroskopik sistema holatini aniqlash uchun termodinamik kattaliklarning o'rtacha qiymatini aniqlash zarurdir.

Statistik fizikaning asosiy vazifalaridan biri dinamik kattaliklar xossalardan foydalaniib makroskopik kattaliklarni, masalan, termodinamik funksiyalarni hisoblashdir. Shuning uchun birinchi navbatda tajribada o'lchaniladigan kattaliklarning statistik ta'rifi bilan tanishib chiqamiz.

Ixtiyoriy fizik kattalik L ni tajribada oniy o'lchab bo'lmaydi, o'lchash uchun qandaydir vaqt kerak. Tajribada dinamik kattalikning vaqt bo'yicha o'rtacha qiymati

$$\bar{L}_t = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} L(q, p) dt \quad (1.11)$$

o'lchaniladi deb hisoblash mumkin. Bu yerda t_0 va $t_0 + \tau$ mos ravishda o'lchash jarayonining boshlang'ich va oxirgi vaqt momentlari; τ – o'lchash vaqt. Muvozanatdagi sistema uchun \bar{L}_t boshlang'ich vaqtga bog'liq bo'lmaydi va o'rtachalash cheksiz vaqt intervali bo'yicha hisoblanadi.

Amalda yuqorida gapirligan tenglamalarni yechishdagi qiyinchiliklar sababli vaqt bo'yicha o'rtalarni hisoblab bo'lmaydi. Qiyinchiliklarni ergodik² gipotezaga (nazariya) tayanib chetlab o'tish mumkin. Bunga asosan vaqt bo'yicha o'rtachalarni ansambl bo'yicha o'rtachalar bilan almashtirish mumkin. Ansambl – bir sharoitda tayyorlangan bir xil sistemalar to'plami. Keyinroq bu ta'rifga yana qaytamiz.

Ehtimollik nazariyasiga ko'ra termodinamik kattalik ning o'rtacha qiymati quyidagicha aniqlanadi:

$$\bar{L}_t = \bar{L} = \int L dw, \quad (1.12)$$

bu yerda: \bar{L}_t – vaqt bo'yicha olingan o'rtacha qiymat; \bar{L} – tasodifiy qiymatlar to'plami yoki ansambl bo'yicha olingan o'rtacha qiymat; $dw = L, L + dL$ intervalda bo'lish ehtimolligi.

Juda ko'p zarralardan tashkil topgan berk makroskopik sistemani ko'p sonli faraziy sistemachalarga (bo'laklarga) bo'lib chiqamiz. Sistemachalar yana ko'p zarralardan tashkil topgan

² Ergodik so'zi Bolsman tomonidan kiritilgan bo'lib, grek so'zlari $\varepsilon\rho\gamma\sigma\nu$ – ish (bu so'zdan energiya so'zi paydo bo'lgan) va $o\delta\circ\zeta$ – yo'ldan kelib chiqqan. Bolsman «ergoda» atamasini hozirgi ma'nolada ishlatmagan, u energiya sirtida yo'lni belgilash uchun ishlatgan. Ammo, Bolsman aslini olganda hozir «kvazi-ergodik» gipoteza deb nomlanuvchi konsepsiyanidan foydalangan.

bo'lib, asosiy sistemadan kichik bo'lishi kerak. Bunday sistemachalar holatlarining to'plami makrosistema holatini aniqlaydi. Sistemachalar makrosistemadan farqli ravishda berk bo'la olnaydi, chunki ularning har biri o'zini o'rab olgan qolgan bo'laklar bilan ta'sirlashadi. Ta'sirlashish kuchsiz bo'lib uzoq vuqt davom etishi mumkin yoki kuchli bo'lib qisqa vaqt davom etishi mumkin. Ikkinchini holda ikkita ketma-ket ta'sirlashish oralig'ida sistema erkin bo'ladi (ideal gazlar). Har ikkala holda ta'sirlashish natijasi nisbatan kichik effektlarga olib keladi.

Bu sistemachalarning makrosistemaga nisbatan kichik bo'lganligi sababli uncha katta bo'lмаган vaqt oralig'ida ularni taxminan berk sistema deb qarash mumkin. Bu holatni butafsilroq ko'rib chiqamiz. Sistemachalarning o'zini o'rab olgan makro sistema bilan ta'sirlashuvni asosan uning sirtidagi zarralar orqali amalga oshadi. Sirdagi zarralar soni uning hajmidagi zarralar soniga nisbatan kichik bo'ladi. Bu holda ta'sirlashish energiyasi $\frac{\varepsilon_{\text{sirt}}}{\varepsilon_{\text{ich}}}$ (sirt energiyasi) ichki energiya ε_{ich} dan kichik bo'ladi, chunki energiyalar taxminan zarralar soniga proporsionaldir. Sistemachaning o'lchamlari oshishi bilan energiyalar nisbati tez kamaya boradi va o'lchami yetarli darajada katta bo'lganda makrosistema bilan o'zaro ta'sir energiyasi ichki energiyasidan juda kichik bo'lib qoladi. Xususan, sistemachani sfera ko'rinishida deb olsak, energiyalar nisbatini quyidagicha baholash mumkin:

$$\frac{\varepsilon_{\text{sirt}}}{\varepsilon_{\text{ich}}} \sim \frac{\frac{4\pi R^2}{3}}{\frac{4\pi}{3}R^3} \sim \frac{1}{R} \sim N^{-1/3} \ll 1,$$

Bu yerda R – sfera radiusi va N – zarralar soni. Yuqoridagi shart bajarilganda birinchi yaqinlashishda sistemani kvaziberk o'zaro bog'lanmagan sistemachalardan tashkil topgan deb qarash mumkin. Demak, katta sondagi zarrarlardan tashkil topgan sistema holatini aniqlash faqat ehtimolligini topish bilan bog'langandir.

Bu ehtimollikni aniqlash uchun katta sondagi zarralardan tashkil topgan berk makroskopik sistemani juda ko'p sondagi sistemachalarga bo'lamic. Bu yerda sistemachalar ham katta sondagi zarralardan tashkil topgan deb olinadi. Ko'pincha sistemachalar to'plami statistik *ansambl* deb ham yuritiladi. Agar sistemachalarning o'zaro ta'sir energiyasi shu sistemachalar ichki energiyasidan juda kichik bo'lsa, bunday sistemachalar o'zaro bog'lanmagan yoki mustaqil sistemachalar deb yuritiladi.

Sistemachalar tamomila berk bo'la olmaydi. Aksincha, ular boshqa sistemachalar bilan doimo uzlusiz ta'sirlashadi. Sitemachaning kvaziberkligi uncha katta bo'limgan vaqt orlig'ida o'rinali bo'ladi, chunki ta'sirlashish kuchsiz bo'lishiga qaramasdan yetarlicha uzoq vaqt davomida u katta effektlarga olib kelishi mumkin. Shuni tak'kidlash lozimki, sistemachada kuchsiz ta'sirlar natijasida statistik muvozanat holat yuzaga keladi.

O'zarro ta'sir tufayli sistemacha holati vaqt davomida o'ta murakkab va chigal holda o'zgaradi. Agar uni yetarlicha katta vaqt oralig'ida kuzatsak, sistemacha o'zining bo'lishi mumkin bo'lgan holatlarida ko'p marta bo'la oladi. Bu holni aniqroq ko'rsataylik.

Faraz qilaylik, $\Delta p \Delta q$ – fazalar fazosida sistemaning qandaydir kichik bo'lagining hajmi bo'lsin. U holda katta T vaqt davomida sistemacha fazalar fazosining ana shu kichik bo'lagi $\Delta p \Delta q$ dan ko'p marta o'tadi. Agar Δt to'la vaqt T ning kichik bo'lagi bo'lib, shu vaqt ichida sistemacha fazalar fazosining berilgan $\Delta p \Delta q$ bo'lagida bo'lsa, u vaqtida to'la vaqt T ni yetarli darajada oshirganda $\Delta t/T$ nisbat qandaydir limitga intiladi:

$$dW = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta t}{T}.$$

Bu esa sistemani ixtiyoriy vaqt momentida fazalar fazosining $\Delta p \Delta q$ bo'lagida topish ehtimolligini beradi.

Fazalar fazosining cheksiz kichik bo'lgan $dp_i dq_i$ ga o'tishi esa p_i impuls va koordinata q_i ni $p_i, p_i + dp_i$ va $q_i, q_i + dq_i$ intervalda bo'lish ehtimolligini beradi:

$$dW = W(q, p) dp_i dq_i,$$

bu yerda $W(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N)$ – fazalar fazosida ehtimollik taqsimotining zichligi yoki berilgan sistemaning mikroholatlari bo'yicha statistik taqsimot funksiyasi deb yuritiladi. Taqsimot funksiyasi normirovka shartini qanoatlantiradi:

$$\int W(q, p) dp dq = 1. \quad (1.13)$$

Bu ifoda shu narsani anglatadiki, hamma mumkin bo'lgan mikroholatlar ehtimolliklarining yig'indisi birga teng bo'lishi kerak.

Agar statistik taqsimot ma'lum bo'lsa, u holda sistemacha holatini aniqlovchi termodinamik kattaliklarning o'rtacha qiyamatlarini hisoblay olamiz:

$$\bar{L} = \int L(q, p) W(q, p) dq dp. \quad (1.14)$$

Sistemaning fazaviy hajm elementida topish ehtimolligi shu hajmga proporsionaldir. Bu hajm shakli vaqt o'tishi bilan o'zgarib turadi, lekin uning kattaligi o'zgarmaydi.

1.5. I bobga oid masala va savollar

1. Bitta to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanuvchi ikkita zarranining elastik to'qnashishi uchun Liuvill teoremasi o'rini ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish. Sistema uchun energiya va impulsning saqlanish qonunlarini yozamiz:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}, \quad p_1 + p_2 = p_1 + p_2.$$

Zarralarning to'qnashuvvgacha va to'qnashuvdan keyingi fazalar fazosining differensial hajmlari quyidagicha bog'langan:

$$d\Gamma = D d\Gamma \text{ yoki } dp_1 p_2 = D dp_1 dp_2,$$

bu yerda $D = o'tishi yakobiani$:

$$D = \left| \frac{\partial(q_1, q_2, p_1, p_2)}{\partial(q_1, q_2, p_1, p_2)} \right| = \left| \frac{\partial(p_1, p_2)}{\partial(p_1, p_2)} \right|$$

Energiya va impulsarning saqlanish qonunlaridan quyidagi larni topamiz:

$$p'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_1 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} p_2, \quad p'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} p_2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1.$$

Ushbu ifodalardan foydalanim o'tish yakobianini hisoblash natijasida $D = 1$ ekanligini, ya'ni $dp'_1 p'_2 = dp_1 p_2$ ni hosil qilamiz. Demak, ikki zarranining elastik to'qnashishida fazalar fazosi hajmi saqlanar ekan.

2. So'nuvchi kichik tebranishlar bajarayotgan ossillyatorning fuzaviy traektoriyasi aniqlansin va chizilsin. Vaqt o'tishi bilan fuzaviy hajmning o'zgarishi topilsin.

Yechish. Bizga mexanikadan ma'lumki, so'nuvchi kichik tebranishlar bajarayotgan ossillatorning harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

bu yerda ω_0 – erkin tebranishlar chastotasi, γ – so'nish koefitsiyenti. $\gamma < \omega$ bo'lganda sistema so'nuvchi kichik tebranishlar bajaradi. Bu holda koordinata va impulsni quyidagicha yozish mumkin:

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(x_0 \cos \omega_0 t + \frac{p_0}{m\omega_0} \sin \omega_0 t \right),$$

$$p = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (p_0 \cos \omega_0 t - mx_0 \omega_0 \sin \omega_0 t).$$

Bu yerda x_0 va p_0 mos ravishda ossilatorning boshlang'ich vaqtdagi koordinatasi va impulsi. Tenglama yechimlari yordamida fazaviy hajmni hisoblash quyidagi natijani beradi:

$$\Gamma(t) = \int \int dx dp = e^{-\gamma t} \Gamma(0).$$

Shunday qilib, fazaviy hajm vaqt o'tishi bilan eksponensial kamayar ekan. Fazaviy traektoriya spiraldan iborat bo'dadi.

3. Ideal qaytaruvchi quti devorlariga perpendikular yo'nalishda, doimiy tezlik bilan harakatlanuvchi zarrachaning fazaviy traektoriyasini (p , q) tekislikda chizing. Harakat yo'nalishida quti o'lchami $2a$.

4. Boshlang'ich z_0 nuqtadan vertikal yuqoriga yo'nalgan v_0 tezlik bilan gravitatsiya maydonida harakatlanuvchi m massali jismning fazaviy traektoriyasini aniqlang.

5. Kulon kuchi ta'sirida qo'zg'almas +e zaryadga tomon harakatlanuvchi m massali -e zaryadga ega zarra uchun fazaviy traektoriyani aniqlangan va chizing. Boshlang'ich momentda zarranning impulsi $p_0 = 0$ va qo'zg'almas zaryaddan r_0 masofada joylashgan.

6. Boshlang'ich holati $A(p_0, z_0)$, $B(p_0, z_0 + a)$, $C(p_0 + b, z_0)$ fazaviy nuqtalar bilan aniqlangan, doimiy og'irlik maydonida harakatlanayotgan uchta zarra uchun Liuvill teoremasini tekshiring.

7. Ikkita sharning absolut noelastik to'qnashishi uchun Liuvill teoremasini tekshiring.

8. Gamilton formalizmidan foydalanib $\int f(w(\Gamma, t)) d\Gamma = \text{const}$ ekanligini isbotlang. Bu yerda $f(\omega)$ – cheksizda nolga intiluvchi;

normirovka shartini va $\frac{\partial w}{\partial t} = \{H, w\}$ tenglamani qanoatlan-tiruvchi ehtimollik zichligi; $f(w) - \omega = 0$ da nolga aylanuvchi ixtiyoriy funksiya; H – Gamilton funksiyasi.

Yechish. $F = \int f(w(\Gamma, t)) d\Gamma = \text{const}$ dan vaqt bo'yicha hosilani Puasson qavslaridan foydalanib o'zgartiramiz, ya'ni

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \int \frac{df}{dw} \frac{\partial w}{\partial t} d\Gamma = \int \frac{df}{dw} \{H, w\} d\Gamma = \\ &= \int \frac{df}{dw} \sum_{i=1}^{3N} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial w}{\partial p_i} \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial w}{\partial q_i} \right) \right] d\Gamma = \\ &= \sum_{i=1}^{3N} \int \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \right] d\Gamma.\end{aligned}$$

Kinetik energiya faqat impulslarga va potensial energiya faqat koordinatalarga bog'liqligini, ya'ni $H(q, p) = T(p) + U(q)$ ekanligini hisobga olsak, masala shartiga binoan

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i - f \Bigg|_{\tilde{\Gamma}}, \quad \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i - f \Bigg|_{\tilde{\Gamma}} = 0.$$

Shunday qilib, haqiqatan ham berilgan integralning vaqt bo'yicha o'zgarishi nolga teng bo'ladi.

9. Ishqalanish kuchi tezlikka proporsional bo'lgan muhitda harakatlanayotgan zarra uchun (p, q) tekislikda fazaviy traektoriyani topping va $dpdq$ fazaviy hajmning vaqt bo'yicha o'zgarishini hisoblang.

10. Energiya gipersirti bilan chegaralangan ε energiyali chiziqli garmonik ossillyator uchun fazaviy hajm Γ ni hisoblang.

Energiya spektri formulasi $\varepsilon_n = h\nu \left(n + \frac{1}{2}\right)$ dan foydalanib, elementar fazaviy hajmni baholang. ($n = 0, 1, 2, \dots$ – kvant soni.)

11. V hajmda harakatlanuvchi ε energiyali va tinch holatida massasi m_0 bo'lgan relativistik zarra uchun fazaviy hajmni hisoblang.

12. Potensial qutida harakatlanuvchi ε energiyali zarra uchun $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ energiya intervalida kvant holatlar sonini hisoblang.

13. Zarralar energiyasi impuls bilan $\varepsilon = cp$ munosabat orqali bog'langan va erkinlik darajasi s bo'lgan sistema uchun $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ energiya intervalida kvant holatlar sonini toping.

14. Gibbs mikrokanonik taqsimotiga bo'y sunuvchi bir atomli ideal gazning N ta zarrasi V hajmda joylashgan. Shu sistema uchun kvant holatlar sonini toping. Sistema energiyasi ε ga teng.

Yechish.

$$\Omega(\varepsilon) = \frac{\Gamma(\varepsilon, V)}{h^{3N}}, \quad \Gamma(\varepsilon, V) = \prod \int dq_i dp_i = V^N \prod \int dp_i.$$

Impulslar fazosida integrallash sohasi ideal gaz uchun

$$H(p) = \sum \frac{p_i^2}{2m}$$

shart bilan aniqlanadi va $p = \sqrt{2m\varepsilon}$ radiusli $3N$ o'lchovli fazo deb qaraladi. Bu hol uchun hisoblash natijasi $\Gamma(\varepsilon, V) = A_N V^N \varepsilon^{3N/2}$ ni beradi. Bundan

$$\Omega(\varepsilon) = A_N V^N \left(\frac{\varepsilon}{h^2} \right)^{3N/2}$$

kelib chiqadi. Bu yerda $A_N = \frac{(2\pi m)^{3N/2}}{\Gamma(3N/2 + 1)}$ – energiya va hajmga bog'liq bo'lмаган doimiy, $\Gamma(3N/2 + 1)$ – gamma funksiya.

15. N ta bog'lanmagan garmonik ossillyatorlar to'plami uchun kvant holatlar soni $\Omega(\varepsilon)$ ni hisoblang.

16. Quyidagi sistemalar uchun ehtimollik zichligi $p(\varepsilon)$ ni aniqlang: a) V hajmdagi N ta bir atomli ideal gaz; b) N ta bog'lanmagan chiziqli garmonik ossillatorlar to'plami.

17. Statistik fizikaning asosiy vazifalari.

18. Fazalar fazosi deb qanday fazo tushuniladi?

19. Tasviriy nuqta qanday nuqta?

20. Fazoviy chiziq deb qanday chiziqga aytildi?

21. Bor-Geyzenberg kvantlanish qoidasini tushuntiring.

22. Kvant holatlar soni deb nimaga aytildi?

23. Kvant holatlar soni qanday qonuniyatga bo'y sunadi?

24. Statistik taqsimot funksiyasi qanday ta'riflanadi?

25. Normirovka sharti nimani anglatadi?

26. Fazalar fazosining birlik hajmidagi tasviriy nuqtalar soni

$\rho = \text{const}$ yoki $\frac{d\rho}{dt} = 0$ ekanligini tushuntiring.

27. Puasson qavsi nima?

II bob

STATISTIK MEXANIKANING UMUMIY METODLARI

2.1. Gibbsning mikro va kichik kanonik taqsimotlari

Zamonaviy statistik fizikada tashqi sistemalar bilan issiqlik kontaktida bo'lgan sistemaning mikroholatlaridagi energiya qiymatlari Gibbsning kanonik taqsimoti bilan tavsiflanadi. Muvozanat holatning taqsimot funksiyasini aniqlash uchun Gibbs (1901-yil) termodinamik muvozanatdagi berk sistema mikroholatlari teng ehtimollarga ega degan farazni aytadi.

Tabiiyki, sistemaning tashqi muhit bilan bog'lanish xarakteriga qarab aniqlanishi lozim bo'lgan taqsimot funksiyalari ham har xil (mikrokanonik, kichik kanonik va katta kanonik taqsimotlar) bo'ladi.

Yuqorida statistik ansambl yoki mustaqil sistemachalar ustida fikr yuritilgan edi. Biz ta zarradan tashkil topgan hajmli muvozanatdagi termodinamik (statistik) sistemani olib qaraylik. Sistemadagi zarralar kvant mexanika qonuniyatiga bo'y sunuvchi zarralar bo'lsin. Sistemani juda ko'p kvazi-bog'lanmagan mustaqil sistemachalarga ajratamiz. Bu sistemachalar orasidagi o'zaro ta'sir energiyasining, sistema to'la energiyasiga hissasi juda kam bo'lsada, ammo sistema va sistemachaning turli xil energiyali kvant holatlarga o'tishiga ta'sir ko'rsatadi. Vazifa: sistema holatini aniqlash. Buning uchun ixtiyoriy tanlab olingan sistemachaning qandaydir ε_i energiyali holatga tushish ehtimolligi $W(\varepsilon_i)$ ni topaylik. Sistemachalar ham katta sondagi zarralardan tashkil topgan, biz bundan keyin sistemachani sistema deb qabul qilamiz. Berk sistemani $\varepsilon_i, \varepsilon_i + \delta\varepsilon_i$ energiya intervalida topish ehtimolligi $W(\varepsilon_i) = W_i \varepsilon_i$ energiyali kvant holatlar soniga proporsional bo'ladi, chunki ε_i energiyali kvant holatlar soni qancha ko'p bo'lsa, sistemaning ana shunday energiyали holatda topish ehtimolligi ham shuncha katta bo'ladi. Demak,

berk sistemaning berilgan energiyali holatlardan birida bo'lish ehtimolligi kvant holatlar soni $\Omega(\varepsilon_i)$ ga proporsional bo'ladi, ya'ni

$$W_i \sim \Omega(\varepsilon_i). \quad (2.1)$$

Bu ifoda Gibbsning mikrokanonik taqsimoti deyiladi. Bu yakkalangan berk sistema holati uchun, ya'ni tashqi muhit bilan o'zaro ta'sirda bo'lмаган, energiyasi va zarralar soni doimiy bo'lган берк система holati uchun mikrokanonik taqsimot deb yuritiladi.

(2.1) formulani oshkora ko'rinishda yozish uchun ikkita turli xil holatda bo'la oladigan N ta o'zaro ta'sirlashmaydigan zarralar dan tashkil topgan sistemani ko'rib chiqamiz. Spinlari $\pm \frac{1}{2}$ ga teng bo'lган zarralardan tashkil topgan sistema bunga misol bo'la oladi. Tashqi magnit maydon bo'lмаган holda sistema energiyasi zarralar spinining orientatsiyasiga, hamda sistemaning to'liq spini $S = \sum s$ ga bog'liq bo'lmaydi. Bundan berilgan energiyali holatga spini yuqoriga yo'nalgan zarralarning o'rnini o'zaro almashtirish va, shunga o'xshash, spini pastga yo'nalgan zarralarning ham o'rnini almashtirish yo'li bilan juda ko'p teng ehtimollikka ega bo'lган holatlar mavjud ekanligi kelib chiqadi.

Faraz qilamiz, spini $s_{\uparrow} = +\frac{1}{2}$ ga teng bo'lган zarralar soni N_1 va $s_{\downarrow} = -\frac{1}{2}$ bo'lган zarralar soni N_2 bo'lsin. Qulaylik uchun $n = N_1 - N_2$ va $N = N_1 + N_2$ ko'rinishda aniqlangan kattaliklar kiritamiz. Bu belgilashlarda sistema to'liq spini $S = s(N_1 - N_2)$, spinlari (\uparrow) yuqoriga yo'nalgan zarralar soni $N_1 = \frac{1}{2}(N + n)$ va spinlari (\downarrow) pastga yo'nalgan zarralar soni $N_1 = \frac{1}{2}(N - n)$ bo'ladi.

Mikrokanonik taqsimotni, ya'ni sistemaning to'liq spini $S = sn$ ga teng bo'lish ehtimolligini topamiz. Buning uchun spin orientatsiyalari ikki xil bo'lган $N_1 = \frac{1}{2}(N + n)$ va $N_1 = \frac{1}{2}(N - n)$ ta zarralardan o'zaro bog'lanmagan joylashishlar soni $\Omega(n)$ ni topish kerak. Chunki topishimiz kerak bo'lган to'liq spinlari

bo'yicha holatlar ehtimolligi $W(n) \sim \Omega(n)$ bo'ladi. N ta zarrani $N!$ marta o'zaro bog'lanmagan yo'l bilan joylashtirish mumkin. Spinlari yuqoriga yo'nalgan zarralarni bir-biri bilan o'rinn almashtirganda va xuddi shunday spinlari pastga yo'nalgan zarralarning o'rnini almashtirish natijasida sistemaning to'liq spini o'zgarmaydi. Bunday o'rinn almashtirishlar soni mos ravishda $\left(\frac{N+n}{2}\right)!$ va $\left(\frac{N-n}{2}\right)!$ ga teng bo'ladi. U holda

$$W \sim \Omega(n) = \frac{N!}{\left(\frac{N+n}{2}\right)\left(\frac{N-n}{2}\right)}. \quad (2.2)$$

Zarralar soni N juda katta bo'lganligi uchun faktoriallarni hisoblashda Stirling formulasi, $N! \approx N^N e^{-N} (2\pi N)^{1/2}$ dan va $n \ll N$ shartdan foydalanamiz. Bir qator soddalashtirishlarni bajarib, $\ln W$ uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\ln W \approx N \ln 2 - \frac{n^2}{2N}. \quad (2.3)$$

Bu ifodadan

$$W \sim e^{-\frac{n^2}{2N}} \quad (2.4)$$

taqsimot funksiyani olamiz. Bu esa n bo'yicha Gauss taqsimotidir. Proporsionallik koeffitsiyenti normirovka shartidan topiladi. Bu ifodadan eng katta ehtimollikka $n = 0$ holat to'g'ri kelishini topamiz, ya'ni qarama-qarshi spinli zarralar soni teng bo'lgan holat bo'lar ekan ($S = 0$).

Real hollarda sistema tashqi muhit bilan har doim o'zaro ta'sirda bo'ladi. Chunki uni tashqi sistemadan mutlaqo yakkallash mumkin emas. Shuning uchun ko'pincha termostatga tushirilgan sistema qaraladi. Biz qaraydigan hol uchun sistema deb ixtiyoriy tanlangan sistemachani, termostat deb esa o'sha qolgan sistemachalar to'plami olinadi. Termostat va sistemacha energiyasi:

$$E = E_k^{(0)} + \varepsilon_i + \varepsilon_{int} \simeq E_k^{(0)} + \varepsilon_i = \text{const}, \quad (2.5)$$

bu yerda $E_k^{(0)} - k$ holatda yotgan termostat energiyasi, $\varepsilon_i - i$ holatda yotgan sistema energiyasi, ε_{int} - sistemaning termostat bilan o'zaro ta'sir energiyasi. Sistemani ε_i , $\varepsilon_i + \delta\varepsilon_i$ energiyali intervalda bo'lish ehtimolligi

$$W_i \sim \Omega(E) = \Omega(E_k^{(0)} + \varepsilon_i) = \Omega_0(E_k^{(0)})\Omega(\varepsilon_i). \quad (2.6)$$

(2.5) ga asosan (2.6) ni quyidagicha yozamiz:

$$W_i \sim \Omega_0(E - \varepsilon_i)\Omega(\varepsilon_i). \quad (2.7)$$

Bizga ma'lumki kvant holatlar soni multiplikativ qonuniyatga, sistema energiyasi esa additivlik qonuniyatga ega. Bir xil qonuniyatga o'tkazish uchun kvant holatlar soni

$$\Omega_0(E - \varepsilon_i) = \exp(S) = \exp[S(E - \varepsilon_i)]$$

bilan almashtiramiz. Bu yerda $S = S(E - \varepsilon_i)$ o'lchamsiz kattalik, $\varepsilon_i << E$ bo'lganligi uchun $S(E - \varepsilon_i)$ ni ε_i ning darajalari bo'yicha qatorga yoyib, birinchi darajali had bilan chegaralanamiz. Nati-jada (2.7) quyidagi ko'rinish oladi:

$$W_i = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right)\Omega(\varepsilon_i), \quad (2.8)$$

bu yerda const normirovka sharti (1.13) dan topiladi:

$$\text{const} = \frac{1}{\sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right)\Omega(\varepsilon_i)}.$$

Bu ifodani (2.8) ifodaga qo'yamiz:

$$W_i = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right)\Omega(\varepsilon_i)}{\sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right)\Omega(\varepsilon_i)}. \quad (2.9)$$

(2.9) ifoda zarralar soni doimiy bo'lgan muvozanatlari sistema holatini aniqlovchi kanonik taqsimot bo'lib, Gibbsning kichik kanonik taqsimoti deb yuritiladi. Bu sistema faqat tashqi sistema (termostat) bilan energiya almashinishi mumkin bo'lgan hol

uchun o'rinnlidir. $\theta = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{\varepsilon_i=0}$ – statistik temperatura deb yuritiladi.

$$Z = \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) \quad (2.10)$$

holat funksiyasi (yoki holat summasi, integrali) deyiladi. $\Omega(\varepsilon_i)$ – ε_i energiyali yoki bir xil energiyali holatlar soni. Ko'pincha kvant holatlar soni yoki statistik vazn deb yuritiladi.

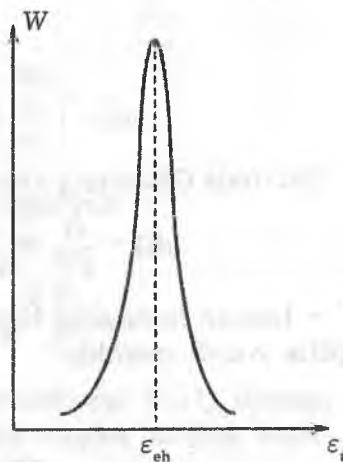
Gibbs taqsimotining muhim xususiyatlardan biri bu sistemaning eng katta ehtimoliik bilan yagona bitta « ε_{eh} » energiyali holatda bo'la olishidir (2.1- rasm). Bu esa sistema holatini aniqlovchi termodinamik kattaliklarning o'rtacha qiymatini oddiygina topish imkonini beradi, ya'ni

$$\bar{L} = \sum L(\varepsilon_i) W(\varepsilon_i) - L(\varepsilon_{eh}).$$

Keyingi vazifa: ana shu ε_{eh} energiyani hisoblashdir.

2.2. Gibbs kvaziklassik va klassik taqsimotlari

Agar muvozanatdagi berk sistema katta sondagi zarralardan tashkil topgan bo'lса, sistema energiyasi uzlusiz bo'ladi. Chunki har bir kvant zarra diskret energiya spektriga ega. Shu sababli sistema energiyasi uzlusiz ko'rinishni oladi, sistemani aniq bir energiyali holatda topish mumkin bo'lmay qoladi. Bunday hollarda sistemaning aniq energiyali holatda emas, balki $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ energiyali intervalda bo'lish ehtimolligi qaraladi. Bu holatda ehtimollik taqsimoti ham uzlusiz funksiya deb qaraladi va oldingi mavzudagi (2.9) ifoda asosida yoziladi. Buning uchun uzlukli funksiya $\exp(-\varepsilon_i/\theta)$ bilan, uzlusiz funksiya $\exp(-\varepsilon/\theta)$ bilan, kvant holatlar soni $\Omega(\varepsilon)$ energiya $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ intervalidagi kvant holatlar soni $d\Omega(\varepsilon)$ bilan statistik yig'indi statistik integrallari bilan, demak, sistemani ε_i energiyali holatda topish ehtimolligi W_i sistemani energiya intervalida topish ehtimolligi dW bilan almashtiriladi va natijada quyidagi ko'rinishdagi ifodani olamiz:



2.1- rasm.

$$dW = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Omega}{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Omega}. \quad (2.11)$$

Bu ifoda Gibbsning kvaziklassik taqsimoti deyiladi. Bu yerda

$$d\Omega = \frac{d\Gamma}{h^{3N}} = \frac{1}{h^{3N}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon, \quad \Gamma = \prod_i \int dp_i dq_i,$$

Γ – fazalar fazosining hajmi. Natijada (2.11) ifodanini qyyidagicha yozish mumkin:

$$dW = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Gamma}{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Gamma}. \quad (2.12)$$

(2.12) ifoda Gibbsning klassik taqsimoti deyiladi. (2.12) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$dW = \rho(p, q) d\Gamma, \quad (2.13)$$

bu yerda $\rho(p, q)$ – ehtimollikning normirovkalangan zichligi:

$$\rho(p, q) = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right)}{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Gamma}.$$

Kvaziklassik taqsimot (2.11) dan foydalanib, statistik temperatura θ ni hisoblashni ko'raylik. Faraz qilaylik, muvozanatlari berk sistema $N = 1$ zarradan tashkil topgan bo'lsin. Bu holda fazaviy hajm

$$\Gamma = \int dp_x dp_y dp_z dx dy dz = 4\pi V \int_0^{\sqrt{2m\varepsilon}} p^2 dp$$

ga teng bo'ladi. Bu yerdagi integralni hisoblab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\Gamma = \frac{4\pi V}{3} (2m\varepsilon)^{3/2}$$

yoki

$$d\Omega = \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{1}{h^3} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Natijada bitta zarra uchun holat funksiyasi

$$Z = \int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) d\Omega = \left(\frac{2\pi m\theta}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} V$$

ifodaga tengligini olamiz. Olingan kattaliklarni (2.11) ifodaga qo'yish natijasida bitta zarradan tashkil topgan sistema taqsimot funksiyasi

$$dW = \frac{2}{\sqrt{\pi(\theta)^3}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \quad (2.14)$$

ko'rinishni oladi. Energiyasi $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ intervalda bo'lган ideal gazlar uchun Maksvell taqsimot funksiyasi

$$dW = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \quad (2.15)$$

ga tengligi umumiy kursdan ma'lum. (2.14) va (2.15) larni solish-tirishdan $\theta = kT$ ekanligini olamiz.

Agar N ta zarradan tashkil topgan berk sistemani V hajmgaga ega bo'lган ideal gaz deb qarasak, u holda taqsimot funksiya (2.11) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dW = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)\sqrt{\theta^{3N}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \varepsilon^{\frac{3N}{2}-1} d\varepsilon, \quad (2.16)$$

bu yerda $\Gamma(3N/2)$ – gamma funksiya. Katta sondagi zarralardan tashkil topgan sistemaning taqsimot funksiyasi (2.16) keskin maksimumga ega bo'ladi. Taqsimot funksiyasi

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} = \left(\frac{3N}{2} - 1\right) \theta$$

nuqtada maksimumga erishadi. Sistemada energiyaga ega bo'lgan zarralarni topish ehtimolligi eng katta bo'ladi. Demak,

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{\text{eh}} \approx \frac{3N}{2} \theta.$$

Bu yerda $N \gg 1$ ekanligini hisobga oldik. Energiyaning o'rtacha qiymatini (2.16) taqsimot funksiyasidan foydalanib hisoblash quyidagi natijani beradi:

$$\bar{\varepsilon} = \int \varepsilon dW = \frac{3N}{2} \theta.$$

Demak,

$$\varepsilon_{\text{eh}} = \bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} N \theta = \frac{3}{2} NkT.$$

Bu esa N ta zarradan tashkil topgan ideal gaz ichki energiyasidir. Bundan muhim xulosa kelib chiqadi: *N ta zarradan tashkil topgan har qanday makroskopik sistemaning ichki energiyasi statistik metod asosida hisoblangan sistemaning o'rtacha energiyasiga teng ekan.*

2.3. Maksvell va Maksvell–Bolsman taqsimotlari

Gibbsning kichik kanonik taqsimoti zarralar soni doimiy bo'lgan muvozanatdagi sistemalar uchun umumiy taqsimot bo'lib hisoblanadi. Masalan, xususiy holda Maksvell, Bolsman va Maksvell–Bolsman taqsimotlarini oddiygina keltirib chiqarish mumkin. Buning uchun ta zarradan tashkil topgan ideal gazni olaylik. Shu sistemadan ixtiyoriy bitta molekulani sistema deb qarasak, qolgan ($N - 1$) ta molekula termostatni tashkil qiladi.

Amalda ko'pincha bir jinsli tashqi kuch maydonida bo'lgan gaz bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Masalan, og'irlilik kuchi maydonida bo'lgan gaz. Ana shunday maydonda har bir molekulaning to'la energiyasi

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{lig}} + U(x, y, z) \quad (2.17)$$

bo'ladi. Bu yerda ε_{lig} – zarraning kinetik energiyasi; $U(x, y, z)$ – zarraning potensial energiyasi.

(2.17) ifodani Gibbsning klassik taqsimoti (2.11) ga qo'yish natijasida u ikkita ko'paytuvchiga ajraganini ko'ramiz, ya'ni

$$dW_{\Gamma} = dW_M \cdot dW_B. \quad (2.18)$$

(2.18) ifoda *Maksvell-Bolsman taqsimoti* deyiladi. Bu yerda

$$dW_M = \left(\frac{1}{2\pi m k T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m k T} \right) dp_x dp_y dp_z, \quad (2.19)$$

$$dW_B = \frac{\exp \left(-\frac{U(x,y,z)}{kT} \right) dV}{\int \exp \left(-\frac{U(x,y,z)}{kT} \right) dV}. \quad (2.20)$$

(2.19) ifoda molekulani impulslar fazosida $d\mathbf{p}$ hajmda topish ehtimolligini beradi va unga *Maksvell taqsimoti* deyiladi. (2.20) ga esa molekulani koordinatalar fazosida dV hajmda topish ehtimolligini beradi va *Bolsman taqsimoti* deb yuritiladi. Bu ikkala taqsimot birlgilikda molekulani bir vaqtga impulslar fazosining $d\mathbf{p}$ va koordinatalar fazosining dV elementar hajmlarida topish ehtimolligini beradi va *Maksvell-Bolsman taqsimoti* deyiladi. Ehtimolliklarni ko'paytirish qoidasiga asosan (2.18) shuni anglatadiki, zarraning impuls komponentlari intervalida bo'lish ehtimolligi va zarrani berilgan nuqtada topish ehtimolligi o'zaro bog'lanmagan voqealar ekan. Bu esa zarrani bir vaqtning o'zida ham impulslar, ham koordinatalar fazosida topish mumkin ekanligini ko'rsatadi.

2.4. Maksvell taqsimoti

Maksvell taqsimotini mukammal qarab chiqaylik. Avvalo ifoda (2.19) ning ko'rinishini o'zgartiraylik. Buning uchun eng avvalo (2.19) da sferik koordinatalar sistemasiga o'tamiz, ya'ni $d\mathbf{p} = p^2 dp \sin\theta d\theta d\varphi$ va $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ ekanligini hisobga olamiz va burchaklar bo'yicha integrallab zarrachani impulslar intervali p , $p + dp$ topish ehtimolligini aniqlovchi Maksvell taqsimotini olamiz:

$$dW(p) = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi m k T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{p^2}{2m k T} \right) p^2 dp. \quad (2.21)$$

Agar (2.16) da $p = mv$ ekanligini hisobga olsak, u holda zarra tezliklarining v , $v + dv$ tezlik intervalida bo'lish ehtimolligini olamiz:

$$dW(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z. \quad (2.22)$$

Bu yerda yana sferik koordinatalar sistemasiga o'tsak, tezlik moduli bo'yicha Maksvell taqsimotini olamiz:

$$dW(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv. \quad (2.23)$$

Energiya va $p = \sqrt{2m\varepsilon}$ impuls ifoda bilan bog'langanligini inobatga olsak, (2.21) zarra energiyasining ε , $\varepsilon + d\varepsilon$ energiya intervalida bo'lish ehtimolligi uchun Maksvell taqsimotiga o'tadi:

$$dW(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \quad (2.24)$$

Agar (2.21), (2.23) va (2.24) ifodalarning hajm birligidagi zarralar sonini «n» ga ko'paytirsak, u holda berilgan impuls, tezlik va energiya intervalidagi zarralar soni uchun taqsimot funksiyalarini hosil qilamiz.

Maksvell taqsimoti amaliyotda keng qo'llaniladi. Fizik ja-rayonlarning kechishiga qarab, Maksvell taqsimoti (2.21), (2.23) yoki (2.24) ko'rinishlarda ishlataladi. Bu taqsimot sistema holatini xarakterlovchi kattaliklarni hisoblash imkonini beradi. Misol tariqasida termoelektron emissiya tokining zichligini hisoblaymiz.

Metall ichidagi elektronning potensial energiyasi tashqaridagi elektronnikidan chiqish ishi $w = e\varphi$ ga farq qiladi. Tok zichligining ta'rifiga asosan termoelektron tokining zichligi $j = en\mathbf{v}$ ko'rinishda yoziladi. Bu yerda e – elektron zaryadi, n – elektron gazning zichligi, \mathbf{v} – elektron tezligi. Xususan Ox o'qi yo'nali shida tok zichligi

$$j_x = en\bar{v}_x. \quad (2.25)$$

Metall ichidagi elektron gazni ideal deb qaraymiz. Bu fikr nazariy va tajribalarda isbotlangan.

Metall ichidagi elektron gazga tezliklar bo'yicha Maksvell taqsimoti (2.22)ni tadbiq qilamiz. U holda (2.25) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$j_x = en \int v_x dW(v) = en \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{v_{ox}}^{\infty} v_x dv_x, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right) dv_y dv_z, \quad (2.26)$$

bu yerda v_{ox} elektronning metalldan chiqish ishi uning kinetik energiyasiga tenglidan, ya'ni $e\varphi = \frac{mv_{ox}^2}{2}$ tenglikdan aniqlanadi. (2.26) ifodadagi integrallarni hisoblab tok zichligi uchun quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$j_x = \frac{en\bar{v}}{4} \exp \left(-\frac{e\varphi}{kT} \right), \quad (2.27)$$

bu yerda $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ – o'rtacha tezlik. (2.27) ifoda Richardsonning klassik formulasi deyiladi.

Maksvell taqsimotini ikkita zarraning nisbiy va massa markazi tezliklarining o'rtacha qiymatini aniqlashga tatbiq qilamiz. Gibss taqsimotiga asosan birinchi zarra v_1 ikkinchi zarra v_2 tezlikka bir vaqtida ega bo'lish ehtimolligini quyidagicha yozish mumkin:

$$dW(v_1, v_2) = C \cdot \exp \left(-\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2kT} \right) dv_1 dv_2. \quad (2.28)$$

Normirovka sharti

$$\int dW(v_1, v_2) = 1 \quad (2.29)$$

O'zgarmas kattalik C uchun quyidagi natijani beradi:

$$C = \left(\frac{m_1 m_2}{4\pi^2 k^2 T^2} \right)^{3/2}.$$

Taqsimot funksiyasi (2.28) ni tezliklarning modullari bo'yicha yozamiz:

$$dW(v_1, v_2) = 16\pi^2 \left(\frac{m_1 m_2}{4\pi^2 k^2 T^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2kT}\right) v_1^2 v_2^2 dv_1 dv_2. \quad (2.30)$$

Endi taqsimot funksiyasini nisbiy v' va massa markazi v_0 tezliklarining modullari orqali yozamiz:

$$dW(v', v_0) = dW(v') dW(v_0). \quad (2.31)$$

Bu yerda

$$dW(v') = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu v'^2}{2kT}\right) v'^2 dv', \quad (2.32)$$

$$dW(v_0) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{M v_0^2}{2kT}\right) v_0^2 dv_0, \quad (2.33)$$

$$v' = v_1 - v_2, \quad v_0 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2.$$

Gaz bir atomli bo'lsa, $m_1 = m_2$ bo'ladi. U holda (2.32)–(2.33) dan nisbiy va massa markazi tezliklarining o'rtacha qiymatlari uchun quyidagilarni olamiz:

$$\bar{v}' = \int_0^\infty v' dW(v') = \sqrt{2\bar{v}}, \quad \bar{v}_0 = \int_0^\infty v_0 dW(v_0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{v}.$$

2.5. Bolsman taqsimoti

Bolsman taqsimotining xususiy hollar uchun tadbig'iini Yer atmosferasi uchun ko'rib chiqamiz. Ma'lumki havoga Yerning gravitatsion maydoni ta'sir qiladi. Agar z o'qini vertikal holda yuqoriga yo'naltirsak, gaz molekulasingning potensial energiyasi $U = mgz$ bo'ladi va natijada (2.20) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dW_B = \frac{\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz}{\int \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz}. \quad (2.34)$$

Agar hajm birligidagi zarralar sonini kirtsak, u vaqtida $z, z + dz$ intervalidagi zarralar soni

$$dn(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz \quad (2.35)$$

yoki z balandlikdagi zarralar zichligi quyidagiga teng bo'ladi:

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right), \quad (2.36)$$

bu yerda n_0 koordinata $z = 0$ shartli hisoblash sathida hajm birligidagi zarralar soni. Bosimni zarralar soniga proporsional ekanligini hisobga olsak, barometrik formulani olamiz:

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right). \quad (2.37)$$

$z_0 = \delta = kT/mg$ xarakteristik balandlik deb yuritiladi. Xarakteristik balandlikda gaz molekulalar soni $n(\delta) = n_0/e$, ya'ni $z = 0$ sathdagiga nisbatan e marta kamayar ekan.

Tajriba kuzatuvlari shuni ko'rsatadiki, atmosferaning birjinsli emasligi, turli balandliklarda temperaturaning farqlanishi va natijada atmosfera muvozanat holda bo'lmasligi tufayli, atmosferaning juda yuqori qatlamlarida (2.36) formula bilan aniqlanuvchi zarralar sonining taqsimotidan chetlashish kuzatiladi. Planetalarining katta-kichikligiga qarab atmosferasining kosmik fazoga sochilib ketish hodisasi ro'y beradi. Zarralarining, xususan atmosferani tashkil etuvchi gaz molekulalarining tezligi planeta uchun xos bo'lgan ikkinchi kosmik tezlikdan katta bo'lsa, ular planetani tark etadilar. Planetaning o'lchami qancha kichik va temperaturasi qancha yuqori bo'lsa, tark etish jarayoni shuncha tez bo'ladi. Masalan Merkuriy va Oyda atmosfera yo'qligi shu hodisa bilan tushuntiriladi. Yer uchun bu jarayon juda sekin sodir bo'ladi. Bolsman taqsimotidan farqli ravishda Maksvell taqsimoti atmosferaning yuqori qatlamlarida ham o'rinni bo'ladi.

Gaz zichligining balandlik bo'yicha taqsimlanishidan kelib chiqadigan ba'zi bir xulosalarni ko'rib chiqaylik:

1. Balandligi h bo'lgan idish ichidagi gazning og'irligini hisoblaylik. Gaz og'irligini ikki yo'l bilan hisoblash mumkin. Birinchi yo'l, gaz og'irligi undagi hamma molekulalarning og'irligidan iborat deb hisoblash mumkin, ikkinchi yo'l esa, h balandlikdagi gaz og'irligi idish tagiga ($z = 0$) va idish qopqog'iga ($z = h$) bergan bosimlar farqi orqali. Har ikkala yo'l bir xil natija beradi:

$$p = SkT(n_0 - n_h),$$

bu yerda S – yuza, n_0 va n_h mos ravishda $z = 0$ va $z = h$ balandliklardagi hajm birligidagi zarralar soni.

2. Cheksiz balandlikdagi gaz ustunining issiqlik sig‘imini (2.34) ifoda asosida hisoblaylik. Buning uchun eng avval bitta zarringan o‘rtacha potensial energiyasini hisoblash kerak, ya’ni

$$\bar{u} = mg\bar{z} = mg \int z dW_B(z).$$

Bu ifodani gaz ustunidagi (N) zarralar soniga ko‘paytirsak, idishdagi gazning potensial energiyasini topamiz. Hisoblashda ikki holni qaraymiz.

Birinchi hol, gaz ustunining balandligi xarakteristik balandlikdan kichik bo‘lsin ($z = h \ll \delta$), bu holda $\bar{u} = mgh/2$ va $u = \bar{u}N = mghN/2$ bo‘ladi. Issiqlik sig‘imi $C_v^{\text{pot}} = 0$. Demak, bu holda potensial energiya issiqlik sig‘imiga hissa qo‘shmas ekan.

Ikkinci hol, $z = h \gg \delta$, shu sababli integralda yuqori chegarani $h \rightarrow \infty$ bilan almashtirish mumkin. Hisoblash natijasida bitta zarringan o‘rtacha energiyasi $\bar{u} = kT$ va gaz ustunining potensial energiyasi $u = NkT$ ga tengligi kelib chiqadi.

Bu holda $C_v^{\text{pot}} = Nk$ bo‘ladi. Cheksiz balandlikda gaz ustunining to‘liq energiyasi

$$E = E_{\text{ile}} + U = \frac{3}{2} NkT + NkT = \frac{5}{2} NkT,$$

demak, cheksiz balandlikdagi gaz ustunining issiqlik sig‘imi $C_{\text{gaz}} = \frac{5}{2} Nk = C_p$ bo‘ladi.

3. Bolsman taqsimoti (2.36) dan foydalanib, Avagadro sonini topish mumkin. Gaz massalari m_1 va m_2 bo‘lgan molekulalardan tashkil topgan bo‘lsin. Ularning zinchiliklari $z = 0$ balandlikda bir xil bo‘lsa, h balandlikdagi zinchiliklar $n_1(h)$ va $n_2(h)$ nisbatidan Avagadro sonini aniqlash uchun quyidagi ifodani topamiz:

$$N_A = \frac{RT}{(m_2 - m_1)gh} \ln \left(\frac{n_1(h)}{n_2(h)} \right).$$

J an P erren (1908–1911) Avagadro sonini tajribada birinchi bo‘lib aniqlagan va $N_A = 6,84 \cdot 10^{23} \text{ l/mol}$ qiymatni

topgan. Tajribalarni takomillashtirib $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} l/mol$ ga teng ekanligini aniqladi. Avagadro sonining bu qiymati hozirgi kunda eng aniq hisoblanadi.

2.6. II bobga oid masala va savollar

1. N ta bir atomli molekuladan tashkil topgan ideal gaz holat integralini hisoblang va bitta molekula holat integrali orqali ifodalang.

2. Energiya intervali $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ da Gibss taqsimotini a) bitta molekuladan tashkil topgan; b) N ta molekuladan tashkil topgan bir atomli ideal gaz uchun aniqlang.

3. Chiziqli garmonik ossillyator uchun klassik yaqinlashishda energiya bo'yicha Gibss taqsimotini yozing va ossillator ener-giyasining o'rtacha qiymatini hisoblang.

4. N ta zarradan tashkil topgan bir atomli ideal gaz uchun H^n ning ($n > 0$) o'rtacha qiymatini hisoblang.

Yechish.

$$\overline{H^n} = \int H^n dW, \quad dW = \frac{\exp\left(-\frac{H}{\theta}\right) d\Omega}{\int \exp\left(-\frac{H}{\theta}\right) d\Omega} = \frac{\exp\left(-\frac{H}{\theta}\right) d\Gamma}{\int \exp\left(-\frac{H}{\theta}\right) d\Gamma}.$$

Gamilton funksiyasi vaqtga oshkora bog'liq bo'limganligi uchun $H = \varepsilon$ bo'ladi. Bu holda $\overline{H^n} = \overline{\varepsilon^n}$,

$$\overline{\varepsilon^n} = \frac{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \varepsilon^{\frac{3N}{2}+n-1} d\varepsilon}{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \varepsilon^{\frac{3N}{2}-1} d\varepsilon} = \theta^n \frac{\Gamma(3N/2+n)}{\Gamma(3N/2)}.$$

5. Katta sondagi zarralardan tashkil topgan sistemaning hisiqlik sig'imi $C_v = \alpha T^n$ ($\alpha > 0, n > 1$). Sistemaning kvant holatlar sonini aniqlang.

Yechish.

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = k \left(\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_V = \alpha T^n = \alpha \left(\frac{\theta}{k}\right)^n.$$

$\Omega(E) = e^{\delta(E)}$, $\ln \Omega(E) = \delta(E)$, θ – statistik temperatura. Bu ifodadan

$$dS = \frac{dE}{\theta}, \quad d \ln \Omega(E) = dS(E) = \frac{1}{\theta} dE \quad \ln \Omega(E) = \frac{E}{\theta}.$$

Bu ifodadan

$$\Omega(E) = \exp\left(\frac{E}{\theta}\right).$$

Issiqlik sig‘imi ta’rifi va masala shartiga asosan $dE = \alpha \frac{\theta^n d\theta}{k^{n+1}}$ ni olamiz. Bu ifodani integrallab, $\theta = \frac{k}{\alpha^{1/(n+1)}} [(n+1)E]^{1/(n+1)}$ ifodani olamiz. Bu natijani $\Omega(E)$ ifodasiga qo‘yib, holatlar soni quyidagi teng ekanligini olamiz:

$$\Omega(E) \sim \exp\left(\frac{\alpha^{1/(n+1)}}{k(n+1)^{1/(n+1)}} E^{n/(n+1)}\right).$$

6. Qandaydir sistema uchun x , y va z kattaliklarning qiyamatlari x , $x + dx$; y , $y + dy$ va z , $z + dz$ intervallarda yotish ehtimolligi $dW(x, y, z) = Ce^{-a(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz$ ifoda ko‘rinishida berilgan.

x , y , z o‘zgaruvchilarning o‘zgarish sohalari $(-\infty, \infty)$ deb hisoblab, normalashtirish doimiysini toping.

7. Oldingi masaladagi x ning qiyamatlari x , $x + dx$ intervalda bo‘lish ehtimolligini toping.

8. Maksvell tezliklar bo‘yicha taqsimotidan foydalanib, quyidagi kattaliklarni toping: a) $\overline{v^n}$, $n > -2$; b) \overline{v} va $\overline{v^2}$; d) eng katta ehtimollikka mos kelgan tezlik v_e ning qiymati. 22

Yechish.

$$a) \overline{v^n} = \int_0^\infty v^n d\rho(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int v^{n+2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv.$$

Bu yerdagi integralni hisoblab, quyidagini topamiz:

$$\overline{v^n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right).$$

Ushbu natijadan foydalanim, masala shartidagi qolgan savol-larga javoblarni topamiz:

$$b) n = 1 \text{ da } \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, n = 2 \text{ da } \bar{v}^2 = \frac{3kT}{m};$$

d) eng katta ehtimollikka mos kelgan tezlik v_e

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \right] = 0$$

shartdan $v_e = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ ekanligini topamiz.

9. $\bar{\epsilon}$ va zarranining kinetik energiyasining eng katta ehtimollik qiymati ε_e ni toping. Bu qiymatlarning teng emaslik sababini tushuntiring.

10. Ideal gazda zarralar soni N bo'lsa, tezligi $0 \leq v \leq v_e$ intervalda bo'lган zarralar soni N_e ni hisoblang.

11. Gaz molekulalarining qanday qismi o'rtacha kinetik energiya $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT$ dan katta bo'lган ilgarilanma harakat kinetik energiyasiga ega?

12. Idish sirtining birlik yuzasiga bir sekundda urilayotgan gaz molekulalarining soni $\nu = \frac{1}{4} n\bar{v}$ (n – birlik hajmdagi zarralar soni) ko'rinishda bo'lishini ko'rsating.

$$Yechish. d\nu = v_x dn(v_x) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) v_x dv_x.$$

Bu ifodani integrallab, quyidagi natijani olamiz:

$$\nu = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) v_x dv_x = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = \nu = \frac{1}{4} n\bar{v}.$$

13. Havosi so'rib olingan idishning tor tirqishidan molekulalar dastasi chiqmoqda. Dastada zarralarning o'rtacha tezligi va o'rtacha kvadratik tezligini toping.

14. Bitta molekulaning birlik vaqt ichida barcha molekulalar bilan tuqnashish to'la soni va uning o'rtacha yugurish yo'lini toping. Molekulalar R_0 radiusli mutlaq elastik sharlar deb qaralsin.

15. Energiyasi $\epsilon_1 = kT$ dan kichik va katta energiyalarga ega bo'lgan zarralar sonining nisbatini aniqlang.

16. Bir jinsli gravitatsion maydondagi ideal gaz ustunining og'irlik markazini toping. Temperatura T , erkin tushish tezlanishi g .

17. Radiusi R , balandligi h bo'lgan silindr idishda molekulalarining massalari m_1, m_2, \dots, m_n bo'lgan ideal gaz aralashmasining massa markazini toping. Idishdagi turli navdagagi gazlarning miqdori bir xil.

18. 300 K temperaturada Yer atmosferasidagi kislород molekulalarining qanday qismi Yerning gravitatsion maydonini yenga oladi?

19. Bosim va temperaturalari mos ravishda p_1, T_1 va p_2, T_2 bo'lgan ikki idish S kesimli qisqa naycha bilan tutashtirilgan. Agar gaz molekulalarining massalari $m_1 = m_2 = m$, bosimlari $p_1 = 2p_2$ va temperaturalari $T_1 = 2T_2$ munosabatda bo'lsa, bir idishdan ikkinchisiga oqib o'tgan gaz massasini aniqlang.

Ko'rsatma: biridan ikkinchisiga oqib o'tgan gaz massasi oqimlar farqidan topiladi, ya'ni

$$\begin{aligned} M &= S \left(n_1 \overline{v_{1x}} - n_2 \overline{v_{2x}} \right) = \\ &= S n_1 \left(\frac{m}{2\pi k T_1} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT_1}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m(v_y^2 + v_z^2)}{2kT_1}} dv_y dv_z - \\ &\quad - S n_2 \left(\frac{m}{2\pi k T_2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT_2}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m(v_y^2 + v_z^2)}{2kT_2}} dv_y dv_z. \end{aligned}$$

Bu yerda $n_i = \frac{p_i}{kT_i}$, $i = 1, 2$.

20. Siyraklashgan gaz p bosim ostida berk idishga joylashgan. Agar idishda S_0 yuzali kichkina tirqish ochilsa, undan gaz qanday tezlik bilan chiqadi? Gaz Maksvell tezliklar bo'yicha taqsimotiga bo'ysunadi deb hisoblang.

Yechish. $u = -\frac{dN}{dt}$, $dN = -S_0 n_0 \overline{v_x} dt$. Bu yerda

$$\overline{v_x} = \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2 + mv_z^2}{2kT}} dv_y dv_z = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = \frac{1}{4} \bar{v}.$$

Demak, $u = \frac{p}{4kT} S_0 \bar{v}$.

- 21.** Gibbsning mikro va kichik kanonik taqsimotlarining farqi. Nima uchun kvant holatlar soni $\Omega \sim e^S$ (S – o'lchamsiz entropiya) ko'rinishda olinadi?
- 22.** Gibbs kichik kanonik taqsimotining asosiy vazifasi va xossalari.
- 23.** Holat funksiyasi va uning vazifasi.
- 24.** Bitta zarra uchun Gibbs taqsimoti.
- 25.** N ta zarra uchun Gibbs taqsimoti.
- 26.** Impuls, tezlik va energiya bo'yicha Maksvell taqsimotlari qanday olinadi?
- 27.** Maksvell–Bolsman taqsimoti.
- 28.** Xarakteristik balandlik qanday balandlik?
- 29.** Cheksiz balandlikdagi gazning issiqlik sig'imi nimaga teng?
- 30.** Avagadro sonini Jan-Perren qanday formula yordamida hisoblagan? Bu formula qanday olinadi?
- 31.** Zarralar sonining taqsimot funksiyasi qanday hollarda o'rinali va o'rinsiz bo'ladi?
- 32.** Maksvell taqsimotining tadbiq qilinish sohasi.

III bob

STATISTIK VA FENOMENOLOGIK TERMODINAMIKA

Termodinamika birinchi qonunining asoschilari: Yulius Robert Mayer (1814–1878), bomsoli dunyoga bittayu-bitta maqsad bilan, ya’ni ushu qonunni kashf qilish uchun kelgan haqiqiy daho edi. German Lyudvig Ferdinand Gelmgols (1821–1894) bu qonunni «Erhalting der Kraft», ya’ni energiya saqlanish qonuni deb atagan.

Jeys Preskott Jouл (1816–1889) issiqlik va ishning ekvivalentligi ustida tajribalarini 40 yildan ortiq olib borgan.

3.1. Kirish

Termodinamika va statistik fizika materiyaning issiqlik harakat formasini o’rganadi. Ularning asosiy mazmuni issiqlik muvozanat holatda bo’lgan ko’p sondagi zarralardan tashkil topgan makroskopik sistemada issiqlik harakat qonuniyatları va unda o’tayotgan jarayonlarni, eng avvalo termodinamik metod, so’ng esa statistik metod yordamida o’rganishdan iboratdir.

Termodinamikaning fenomenologik xarakteriga ko’ra, issiqlik muvozanatda bo’lgan sistemada o’tadigan jarayonlarni o’rganishda muhim natijalarga kelsada, uning xususiyatlarini chuqur o’rganishni chegaralaydi va tekshiriladigan fizik hodisalarning ichki tabiatini ochishga imkon bermaydi. Termodinamika muvozanat holatdagi makroskopik sistemada issiqlik bilan bog’liq bo’lgan jarayon, hodisa va qonuniyatlarini tiklashda va tekshirishda nafaqat tajriba yo’li bilan olingen muhim natijalardan foydalanaladi, balki statistik fizika metodlari asosida olinigan umumiy qonuniyatlar, formulalar va xulosalardan foydalanadi.

Muvozanatdagi makroskopik sistemalar o’rtacha kattaliklar uchun Statistik fizika metodi asosida o’tkazilgan nazariy tadqiqotlar fenomenologik termodinamika qonuniyatlarini tiklashga

olib keldi va asoslab berdi. Shuning uchun muvozanatdagi sistema statistik fizikasi statistik termodinamika degan nom oldi.

Birinchi navbatda fenomenologik termodinamikada ko'rildigan masalalarni ko'rib chiqamiz. So'ngra termodinamika qonunlarini statistik fizika metodlari yordamida o'rganamiz.

Termodinamika uch qismga bo'linadi:

1. Fizikaviy termodinamika.
2. Kimyoviy termodinamika.
3. Texnik termodinamika.

Fizikaviy termodinamika – termodinamikaning umumiy nazariy asoslarini va aksiomalarini o'rganadi. Kimyoviy termodinamika kimyoviy va fizikaviy muvozanatlarni tekshirishda termodinamikaning nazariy asoslaridan va metodlaridan foydalanadi. Texnik termodinamika esa issiqlik va ishning o'zaro bir-biriga almashinishini o'rganishda termodinamikaning asosiy qonunlaridan foydalanadi. Texnik termodinamikaning asosiy maqsadi – issiqlik mashinalar nazariyasini ishlab chiqishdan iborat.

Termodinamikada asosiy tushunchalar:

1. Termodinamik sistema yoki makroskopik sistema.
2. Termodinamik sistema holati.
3. Termodinamik muvozanat.
4. Termodinamik jarayon.
5. Temperatura.
6. Termodinamik sistema ichki energiyasi.
7. Energiyaning saqlanish va aylanish qonuni.
8. Termodinamik ish. Issiqlik miqdori.
9. Holat funksiyasi.
10. Holat tenglamasi.

Termodinamikaning tekshirish metodlari:

1. Davriy jarayonlar metodi.
2. Termodinamik potensiallar metodi.

Jarayonlar, xususan, siklik jarayonlar metodi fransuz olimi Sadi Karko va nemis olimi Klauzius tomonidan ishlab chiqilgan. Termodinamik potensial metodi esa amerikalik olim Gibbsga tegishlidir.

Termodinamika asosini tashkil qiluvchi qonunlar:

1. Termodinamikanining birinchi qonuni.
2. Termodinamikaning ikkinchi qonuni.
3. Termodinamikaning uchinchi qonuni.

3.2. Termodinamikada asosiy tushunchalar

Yuqorida sanab o'tilgan termodinamikadagi asosiy tushunchalar bilan tanishib chiqamiz.

1. Makroskopik sistema.

Makroskopik yoki termodinamik sistema juda katta sondagi zarralardan tashkil topgan bo'lib, uning o'lchamlari zarralar o'lchamlaridan juda katta va yashash vaqtida ham yetarlicha katta bo'lishi kerak. Bunday sistemaning tashkil etuvchilari mo'ddiy zarralardan (atom, molekula, ion, elektron va boshqalar) va maydonlardan (masalan, elektr va magnit maydonlari) iborat bo'lishi mumkin.¹ Makroskopik sistema qanday zarralardan tashkil topgan bo'lishidan qat'iy nazar u katta sondagi erkinlik darajasiga ega bo'lgan dinamik sistema bo'lib hisoblanadi. Erkinlik darajasi kichik sistemalar termodinamikada o'rganilmaydi.

Agar sistemaning faqat bir qismida o'tayotgan jarayonlarni o'rganayotgan bo'sak, sistemaning qolgan qismini atrof-muhit deb hisoblaymiz. Keng ma'noda atrof-muhitni sistemaning o'rganilayotgan qismiga qandaydir shartlar qo'yadigan *termostat* deb qarash mumkin (masalan bosim, temperatura, kimyoviy potensial va boshqalarning o'zgarmasligini ta'minlaydi).

Termodinamik sistemalar izolatsiyalangan va izolatsiyalangan bo'ladi. Mustaqil, atrof-muhit bilan mutlaq ta'sirlashmaydigan sistema *izolatsiyalangan* deyiladi.

Atrof-muhit bilan modda (energiya, modda, nurlanish) almashmaydigan sistema *yopiq* deyiladi.

2. Termodinamik sistema holati.

Makroskopik sistema holatini aniq fizik ma'noga ega bo'lgan makroskopik parametrlar (ichki energiya, entalpiya, entropiya, temperatura, bosim va boshqalar) aniqlaydi. Bu kattaliklar holat funksiyasi deb yuritiladi. Yuqorida sanab o'tilgan kattaliklar tor ma'noda holat o'zgaruvchilari hisoblanadi. Keng ma'noda holat o'zgaruvchilariga lokal termodinamik muvozanatni belgilovchi kattaliklar kiradi. O'zaro bog'liq bo'limgan termodinamik kattaliklarni shunday tanlash mumkinki, ular sistema holatini aniqlash uchun zaruriy va yetarli bo'lishi kerak, qolgan o'zgaruvchilar esa ularning funksiyasi bo'ladi. O'zaro bog'liq bo'limgan o'zgaruvchilar soni empirik yo'l bilan aniqlanadi.

¹ Koinot va galaktika miqqosidagi gravitatsion maydon bundan istisnodir.

O'zgaruvchilar ichki va tashqi bo'ladi. Tashqi o'zgaruvchilar sistemani o'rab turgan muhitning holatini aniqlaydi. Masalan, silindrargi porshenning holati, sistemaga ta'sir qiluvchi elektr yoki magnit maydon kuchlanganligi tashqi o'zgaruvchilarga misol bo'ladi. Ko'rilayotgan sistema holatini bevosita aniqlovchi kattaliklar ichki o'zgaruvchilar deyiladi. Umuman olganda o'zgaruvchilarni ichki va tashqiga ajratish shartli bo'ladi. Yuqoridagi misolda, masalan, maydonni o'rganilayotgan sistema bilan birga ko'rsak, maydon kuchlanganliklari ichki o'zgaruvchiga o'tib qoladi. Shuning uchun eng avvalo masalani o'rganishda o'zgaruvchilarni ichki va tashqiga ajratish shartlarini belgilab olish kerak, bu ayniqsa mexanik kontaktlarda juda muhimdir.

O'zgaruvchilar o'z navbatida *intensiv* va *ekstensivga* ajraladi. Termodinamik muvozanatda turgan bir jinsli sistemani faraziy mutlaq o'tkazmaydigan chegara bilan ikkiga ajratsak, bo'laklar o'z muvozanat holatini o'zgartirmaydi. Ya'ni muvozanat holatda qolishni davom ettiradi. Demak, bir jinsli sistemaning muvozanat holati uning ichki xossasi bo'lib, sistemaning o'lchamlariga bog'liq bo'lмаган o'zgaruvchilar bilan aniqlanadi. Bunday o'zgaruvchilar intensiv deyiladi. Masalan, temperatura, bosim, kimyoviy potensial. Sistema yuqoridagi kabi bo'linganda uni xarakterlovchi o'zgaruvchilar bo'laklar o'lchamlariga yoki massalariga proporsional ravishda o'zgarsa, ekstensiv deyiladi. Masalan, massa, ichki energiya, entropiya va boshqalar.

3. Termodinamik muvozanat.

Fizika materianing struktur ko'rinishlariga mos keluvchi harakatning (mexanik, issiqlik, elektromagnit) eng oddiy shakllari bilan bog'liq bo'lgan qonuniyatlarni o'rganadi. Ularning bir holatdan ikkinchi holatga o'tishida harakat shakllarining umumiyligi o'chovi energiya deb yuritiladi. Atrof-muhit bilan issiqlik yoki boshqa kontaktda bo'lмаган, izolatsiyalangan sistema (masalan, devorlari o'tkazmaydigan idish ichidagi gaz) boshlang'ich holatidan qat'iy nazar, pirovardida shunday holatga o'tadi-ki, bu holat vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi. Bu fikrni umumiyligi holda quyidagicha ta'riflash mumkin. Agar sistema holatini aniqlovchi parametrlar vaqt o'tishi bilan o'zgarmasa, holat statsionar deyiladi. Bundan tashqari hamma parametrlar vaqt bo'yicha o'zgarmas bo'libgina qolmay, qandaydir tashqi manbalar ta'siri hisobiga hech qanday statsionar oqimlar bo'lmasa, u holda bunday sistema muvozanat holatda deyiladi

(yoki termodinamik muvozanat holatda deyiladi). Muvozanat holat sistemada yetarlicha katta vaqt oralig'ida yuzaga keladi. Sistemaning termodinamik muvozanat holatga o'tish vaqt relaksatsiya vaqtı deyiladi. Mikroskopik manzara, ya'ni sistemani tashkil qilgan zarralar o'zining murakkab va tartibsiz harakatini davom ettiraveradi. Makroskopik holat sodda bo'lib, bir nechta parametrlar bilan aniqlanadi, masalan, temperatura, bosim, hajm.

Termodinamik muvozanat holat vaqt o'tishi bilan yuzaga keladi va hech qachon o'z holicha ana shu muvozanat holatidan chiqa olmaydi. Bu tasdiq termodinamikaning birinchi, yoki asosiy postulati bo'lib, termodinamikaning birinchi dastlabki fikri, yoki termodinamikaning umumiy boshlanishi deb yuritiladi.

4. Termodinamik jarayon.

Termodinamik sistemaning bir muvozanat holatidan ikkinchi muvozanat holatga o'tishi termodinamik jarayon deb yuritiladi. Ikki holat o'rtasida holatlар termodinamik bo'lishi shart emas. U yerda kechadigan jarayonlar o'ta murakkab va chigal bo'lishi mumkin. Agar jarayon juda sekin kechsa, oraliq holatlар termodinamik bo'ladi. Bu holda sistema oraliq holatlarda termodinamik muvozanatga o'tib ulguradi. Termodinamikada ikkita jarayon farq qilinadi:

Jarayon davomida sistema atrof-muhit bilan doimo termodinamik muvozanatda qoladigan ideal jarayonlar *kvazistatik* deyiladi. Jarayon bunday bo'lishi uchun u juda sekin kechishi kerak, ya'ni sistema parametrlarining o'zgarishi juda sekin bo'lishi kerak. Masalan, gazni kvazistatik siqish (shartli ravishda to'g'ri jarayon deb qabul qilamiz) uchun tashqi bosim ichki bosimdan juda kichik miqdorga katta bo'lishi kerak. Aksincha, gazni xuddi shunday yo'l bilan kengaytirishda (teskari yoki qaytish jarayoni) tashqi bosim ichki bosimdan juda kichik miqdorga kichik bo'lishi kerak. Yuqoridagi misolda to'g'ri va teskari jarayonlar tekislikda turli trayektoriyalar bo'yicha o'tadi. Chegaraviy holda, o'ta sekin jarayonda ikkala traektoriya bitta traektoriya bo'ylab turli yo'nalishlarda o'tadi va jarayon *qaytuvchi* bo'ladi.

Nokvazistatik (qaytmas) jarayon. Bunday holda to'g'ri va teskari jarayonlar turli ssenariy bo'yicha o'tadi va faza diagrammlari hech qachon ustma-ust tushmaydi.

5. Temperatura.

Tajribalar shuni ko'rsatadiki, termodinamik muvozanat issiqlik harakatining maxsus ko'rinishi sifatida ham yuzaga kelar ekan. Agar turli muvozanat holatdagi ikkita sistema kontaktga (xususan, issiqlik kontakti) keltirilsa, tashqi parametrlar qanday bo'lishidan qat'iy nazar, ular ilgaridagidek termodinamik muvozanat holatda qolishi yoki ulardagi muvozanat holatlar buzilishi mumkin.

Birinchi holni uchta sistema misolida ko'rib chiqamiz. Agar muvozanat holatdagi uchta sistemalardan birinchi va ikkinchisi har biri uchinchi sistema bilan muvozanatda bo'lsa, u holda birinchi va ikkinchi sistemalar ham o'zaro termodinamik muvozanat holatda bo'ladi. Sistemalarning bunday xossasi termodinamik muvozanatning tranzitivligi deyiladi.

Ikkinci holda o'zaro kontaktga keltirilgan ikkita sistema ma'lum vaqt o'tgandan so'ng issiqlik (energiya) almashinishi natijasida ikkala sistema bir sistema bo'lib boshqa muvozanat holatga o'tadi. Demak, sistemaning termodinamik muvozanat holati faqat tashqi parametrlar λ , bilan aniqlanmasdan, sistemaning ichki holatini xarakterlovchi yana bitta kattalik T bilan aniqlanadi. Bu kattalik ichki parametr bo'lib, sistemaning muvozanat holatini xarakterlaydi. Bir biri bilan muvozanatdagi sistemalar issiqlik kontaktda, kontakt davomida va kontakt olingandan keyin ham T ning qiymati bir xil bo'lib qoladi.

Bu fikr shunday xulosaga olib keladiki, termodinamik muvozanat holatining tranzitivlik xossasi turli xil sistemalarni to'g'ridan-to'g'ri, o'zaro issiqlik kontaktiga keltirmasdan turib uchinchi sistema (jism) yordamida T ning qiymatini solishtirish imkonini beradi. Muvozanatdagi sistemaning barcha nuqtalari -la bir xil bo'lgan, zarrachalar soniga bog'liq bo'lman, energiya va tashqi parametrlarga bog'liq bo'lgan bu kattalik sistemaning ichki harakat holatini aniqlaydi va *temperatura* deyiladi. Temperatura intensiv parametr bo'lganligi uchun sistemadagi issiqlik harakatining o'lchovi hisoblanadi.

Muvozanatdagi sistema holatining maxsus funksiyasi sifatida *temperaturaning mavjudligi to'g'risidagi fikr termodinamikani*ning ikkinchi dastlabki fikri yoki «nolinch**i** boshlanishi» deb yuritiladi.

Temperatura termodinamik muvozanatdagi sistemalar holatini belgilovchi termodinamik funksiyadir. Muvozanatda

bo'limgan sistemalar uchun temperatura tushunchasini kiritish ma'noga ega emas. Bunday sistemalarda energiya intensiv almashinib turadi va sistemaning energiyasi uning bo'laklari energiyalarining yig'indisiga teng bo'lmaydi, chunki o'zaro ta'sir energiyasi katta bo'ladi va energiyaning oddiy additivlik xossasi bajarilmaydi.

Muvozanatdagi sistemaning hamma ichki parametrlari – tashqi parametrlar va temperaturaning funksiyasidir (termodynamikaning ikkinchi postulati).

Sistema energiyasi uning ichki parametridir, shuning uchun energiya, tashqi parametr va temperaturaning funksiyasidir. Bu funksiyadan temperaturani energiya va tashqi parametr orqali ifodalab, termodynamikaning ikkinchi dastlabki fikrini quyidagicha ta'riflash mumkin: *termodynamik muvozanatda sistemaning hamma ichki parametrlari – tashqi parametrlar va energiyaning funksiyasidir*.

Termodynamikaning ikkinchi dastlabki fikri jism temperaturasining o'zgarishini uning birorta ichki parametrining o'zgarishi bo'yicha aniqlash imkonini beradi. Temperaturani o'lchovchi turli xil termometrlarning qurilishi shunga asoslangan.

Amalda temperaturani aniqlashda modda bilan bog'langan qandaydir aniq shkaladan foydalanishga to'g'ri keladi. Termometrik parametr sifatida odatda shu modda hajmidan foydalaniladi. Odatda temperatura – *Selsiy* shkalasi bo'yicha o'lchanadi. Temperatura Kelvin shkalasi bo'yicha ham o'lchanadi. Bu ikki shkala orasida quyidagi bog'lanish mavjud:

$$T = \frac{1}{\alpha} + t = 273,15 + t,$$

bu yerda t va T – mos ravishda Selsiy va Kelvin shkalalari bo'yicha olingan temperatura; α – hajmiy kengayish koefitsiyenti.

Temperatura tushunchasining mexanik sistemalarga mutlaqo aloqasi yo'q. Shunga o'xshash statistik fizikada, xususan termodinamikada, olinadigan natijalarni va kiritiladigan kattaliklarni to'g'ridan-to'g'ri mexanik sistemalarga tatbiq qilib bo'lmaydi. Chunki, termodinamika mexanik harakatdan tubdan farq qiladigan harakatning maxsus ko'rinishi – issiqlik harakati bilan ish ko'radi.

6. Termodinamik sistema ichki energiyasi.

Termodinamik sistemani tashkil etuvchi ko'p sonli zarralarning uzlusiz doimiy harakat, o'zaro va tashqi maydon bilan ta'sirlashish energiyasi birgalikda sistemaning energiyasi deyladi. To'liq energiya tashqi va ichkilarga ajraladi. Sistemaning bir butun holdagi harakat kinetik energiyasi va uning tashqi maydondagi potensial energiyasi tashqi energiya deyladi. Energiyaning qolgan qismi ichki energiyani tashkil qiladi. Termodinamikada sistemaning tashqi energiyasi o'rganilmaydi. Shuning uchun sistemaning energiyasi deganda odatda ichki energiya tushuniladi. Termodinamikaning ikkinchi boshlanishi-ga asosan ichki energiya temperatura va tashqi parametrleriga bog'liq bo'ladi. Temperatura uzlusiz oshishi bilan u ham uzlusiz oshadi va limitda cheksizga intiladi.²

Statistik fizikada ichki energiya bir necha qismdan iborat bo'ladi, ya'ni molekulalarning ilgarilanma, aylanma va tebranma harakat kinetik, ularning o'zaro ta'sir va molekula yoki atomlarning tashqi maydondagi potensial energiyalaridan tashkil topgan.

N ta zarradan tashkil topgan real gaz ichki energiyasini umumiy holda quyidagicha yozish mumkin:

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} u(|r_i - r_j|) + \sum_{i=1}^N u(r_i), \quad (3.1)$$

bu yerda p_i – i - zarra impulsi, r_i – i zarraning koordinatasi. Birinchi had zarralarning kinetik energiyalarining yig'indisi; $u(|r_i - r_j|)$ – i - va j - zarralarning o'zaro ta'sir energiyasi; $u(r_i)$ – i - zarraning tashqi maydondagi potensial energiya.

Ichki energiya sistemaning ichki parametri bo'lib hisoblanadi. Ichki energiya muvozanat holatda tashqi parametrlar λ_i va temperatura T ga bog'liq bo'ladi:

$$E = E(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, T). \quad (3.2)$$

Bu ifoda holatning kalorik tenglamasi deb yuritiladi. Ichki energiyaning oshkora ko'rinishini II bobda olingan: «makro-
nokopik sistema ichki energiyasi statistik metod asosida hisoblangan sistema o'rtacha energiyasi ($\bar{\varepsilon}$) ga teng, ya'ni $E = \bar{\varepsilon}$ » degan muhim qoidaga asoslanib topish mumkin.

² Bu qoidaga bo'y sunmaydigan sistemalar ham mavjud ekan. Masalan, kristall panjura tugunlaridagi atom yadrolarining spin-spin ta'sir energiyasi temperatura oshishi bilan chekli qiymatga intiladi.

7. Energiyaning saqlanish va aylanish qonuni.

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, termodinamikada energiya, xususan ichki energiya harakat shakllarining umumiy o'lchovi ekan. Harakatning yo'qolmasligi va uning bir shakldan boshqa shaklga o'tishi energiyaning saqlanish va aylanish qonuni deyiladi. Energiyaning saqlanish va aylanish qonuni: Gess (1840- y.), Joul (1840- y.), Mayer (1842- y.) va Gelmgols (1847- y.) tomonidan shakllantirilgan. Energiyaning saqlanish va aylanish qonuni miqdoriy va sifat ko'rinishlariga ega. Energiyaning saqlanish va aylanish qonuni issiqlik jarayonlari uchun tadbiq qilishda tajribalarda olingan miqdoriy natijalar termodinamika birinchi qonunining matematik ifodasini shakllanishiga olib kelgan.

8. Termodinamik ish. Issiqlik miqdori.

Termodinamikada «ish» tushunchasi muhim rol o'ynaydi. Chunki, sistemaning holati o'zgargandagina termodinamik ish bajariladi. Sistema tashqi jismlar bilan o'zaro ta'sirda bo'lгандагина, uning holati o'zgaradi va ishni miqdoriy tomondan aniqlash mumkin bo'ladi. Haqiqatan ham, sistema noldan farqli ish bajarishi uchun, u tashqi jismlarni «siljitishi» kerak. Bunda o'zining holati albatta o'zgaradi.

Tajribalar shuni ko'rsatadiki, sistema va uni o'rabi olgan muhit o'zaro ta'sirlashishi natijasida energiya almashinishi yuz beradi. Energiya almashinishi ikki xil yo'l bilan amalga oshishi mumkin: tashqi parametrlari o'zgarishi bilan va bu parametr larning o'zgarishisiz.

Tashqi parametrlarning o'zgarishi bilan bog'liq bo'lган energiya almashinishing birinchi usuli ish deyiladi. Tashqi parametrlarning o'zgarishisiz, ammo yangi termodinamik parametr – *entropiyaning o'zgarishi bilan bog'liq bo'lган energiya almashinishi issiqlik almashinishi* deyiladi.

Ish energiya uzatishning makroskopik tartiblangan shakli bo'lsa, issiqlik almashinish jarayoni esa, sistema zarralari tashqi muhit zarralari bilan o'zaro ta'sirlashish bilan bog'liq bo'lib, negizida mikroskopik jarayon yotadi. Tajribalar yana shuni ko'rsatadiki, sistema holati o'zgargandagina, u aniq energiya miqdorini oladi yoki boshqa biror sistemaga beradi. Agar sistema holati o'zgarmasa energiya qabul qilish yoki uzatish ham bo'lmaydi.

Bir jismdan ikkinchi jismga energiyaning birinchi yo'l bilan uzatilishi, birinchi jismning ikkinchi biror jism ustida «ish» bajarilishi deb yuritiladi. Sistema holati cheksiz kichik o'zgargandagi bajarilgan ish

$$\delta A = \sum_i f_i d\lambda_i \quad (3.3)$$

formula yordamida topiladi. Bu yerda δA – cheksiz kichik bajarilgan ish, f_i – sistemaga ta'sir etuvchi umumlashgan kuch, λ_i – umumlashgan «koordinata» (parametr).

Termodinamikada bajarilgan ishning ishorasi quyidagicha qabul qilingan: agar sistema tashqi kuchlarga qarshi ish bajarsa – musbat, agar sistema ustida tashqi kuchlar ish bajarsa – manfiy, yoki sistema kengayish jarayonida bajarilgan ishni ifodalovchi yuza (tekislikda) jarayon yo'naliшини ifodalovchi egri chiziqning o'ng tomonida yotsa – musbat, agar chap tomonida yotsa – manfiy deb qabul qilingan. Bu fikrlardan shu narsa kelib chiqadiki, sistema bir holatdan ikkinchi holatga o'tganda bajarilgan kengayish va siqilish ishining ishorasi o'tish yo'liga qarab, o'zgarib turar ekan. Shunday qilib, bajarilgan ish o'tish yo'liga bog'liq ekan. Bu esa ish jarayon funksiyasi bo'lishini ko'rsatadi. Shuning uchun bajarilgan ish δA ko'rinishda ya'ni, to'liqmas differensial ko'rinishda yoziladi. Shunga o'xshash issiqlik ham hech qanday kattalikning to'liq differensiali bo'la olmaydi. Lekin ularning yig'indisi to'liq differensial bo'ladi. Bu masalaga keyinroq qaytamiz.

Ishning ishorasini aniqlashga doir misollar keltiramiz.

Agar oddiy sistema kengayish ishi bajarayotgan bo'lsa $\delta A = pdV$, agar siqilish ishi bajarilayotgan bo'lsa $\delta A = -pdV$ ko'rinishda bo'ladi; bu yerda p – yuza birligida ta'sir etuvchi kuch bo'lib, bosim deyiladi. Agar tashqi elektr maydon ta'siri ostida izotrop dielektrik ustida qutlash ishi bajarilayotgan bo'lsa, $\delta A = -EdP$ bo'ladi; bu yerda E – tashqi elektr maydon kuchlanganligi; P – qutblanish vektori. Agar tashqi magnit maydon magnitlash ishi bajarilayotgan bo'lsa, $\delta A = -HdM$ bo'ladi. Bu yerda H – magnit maydon kuchlanganligi, M – magnitlanish vektori. Yana shunga o'xshash qator misollar keltirish mumkin.³

³ $\delta A = -EdP$ va $\delta A = -HdM$, bu ifodalar tashqi elektr va magnit maydonlangan birlik hajmda bajargan ishiga teng. To'liq ishni topish uchun bu ifodalarни V ga ko'paytirish kerak, lekin bajarilgan ish ifodalarida «tashqi kuch ko'paytiruv yeddi parametr differensiali» shaklini saqlash uchun bu ifodalar hajmga ko'paytiriljon deb qabul qilamiz.

9. Holat funksiyasi.

O'zaro bog'lanmagan makroskopik parametrlar to'plami sistema holatini belgilaydi. Berilgan vaqtida sistema holatini to'la holda aniqlovchi va sistemaning oldingi tarixiga (holatlari to'plamiga) bog'liq bo'lmasan kattaliklar holat funksiyalari deyiladi.

3.3. Holatning termik va kalorik tenglamalari

Termodinamikaning ikkinchi dastlabki fikridan ichki parametrlar – tashqi parametrlar va temperaturaning funksiyasi bo'lishidan sistema holatining termik va kalorik (holat tenglamalari) tenglamalari mavjudligi kelib chiqadi.⁴ Yuqoridagiga asosan birorta ichki parametr b_k uchun kalorik tenglama (ichki parametr, temperatura va tashqi parametrlar λ_i ga bog'lovchi tenglama) quyidagicha yoziladi:

$$b_k = f_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n, T). \quad (3.4)$$

Agar ichki parametr ichki energiya ($b_k = E$) bo'lsa, u holda (3.4) energiya tenglamasiga yoki holatning kalorik tenglamasiga aylanadi:

$$E = E(\lambda_1, \dots, \lambda_n, T). \quad (3.5)$$

Shunday nomlanishiga sabab, bu tenglama yordamida kaloriyada ifodalanuvchi issiqlik sig'imi va boshqa shunga o'xshagan kattaliklarni topish mumkin.

Agar ichki parametr b_k tashqi parametr λ_i ga qo'shma bo'lgan umumlashgan kuch f_i bo'lsa, u holda tenglama (3.4) holatning termik tenglamsiga aylanadi:

$$f_i = f_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n, T); \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.5)$$

Bunday nom bilan yuritilishiga sabab, (3.5) yordamida temperaturani hisoblash mumkin.

Holatning termik va kalorik tenglamalarning umumiyligi soni sistema holatini harakterlovchi bog'lanmagan parametrlar soniga teng. Bu tenglamalar xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan bog'langan bo'ladi.

⁴ Sistemaning holatini aniqlovchi parametrlar alohida ta'kidlanmasa, muvozanat holatga tegishli bo'ladi.

Agar holatning termik va kalorik tenglamalari ma'lum bo'lsa, u holda termodinamikaning boshlanishlari yordamida sistemaning hamma termodinamik xossalari aniqlash mumkin. Termodinamikaning boshlanishlariga asoslanib, holat tenglamalarini chiqarish mumkin emas. Ular kirish qismida eslatilganligi kabi tajribadan tiklanadi yoki statistik fizika metodi yordamida topiladi. Bu hol esa termodinamika va statistik fizika bir-birini to'ldirishini ta'kidlaydi.

Muvozanatdagi sistemalarning xususiyatini o'rghanishda termodinamika eng avval oddiy sistemalarning xossalari o'rGANADI. Oddiy sistema deganda ikkita parametr bilan aniqlanuvchi bir fazali sistemalarga aytildi.

Oddiy sistema holatining termik va kalorik tenglamalari mos ravishda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{aligned} f &= f(\lambda, T), \\ E &= E(\lambda, T). \end{aligned}$$

Agar $f = p$ bosim, $\lambda = V$ sistema hajmi bo'lsa, sistemaning holat tenglamalari

$$p = p(V, T), \quad E = E(V, T) \quad (3.6)$$

ko'rinishni oladi.

Ideal gaz uchun holatning termik tenglamasi Mendeleyev-Klapeyron tenglamasi deyiladi. Xususan: $pV = RT$ – bir mol gaz uchun, $pV = \nu RT$ – ν mol gaz uchun. Bu yerda $\nu = m/\mu$, m – gaz massasi, μ – molar massa.

O'zgarmas temperaturada ideal gazning ichki energiyasi uning hajmiga bog'liq emasligidan (Joul-Tomson effekti 3.24- bandga qarang), ya'ni

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = 0$$

tenglamadan foydalanib, ideal gaz kalorik tenglamasini quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T dV = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V dT$$

$$E = \int C_V dT + E_0.$$

Tajriba ko'rsatishicha, bir atomli ideal gazning issiqlik sig'imi temperaturaga bog'liq emas, shuning uchun uning kalorik tenglamasi $E = C_v T + E_0$ bo'ladi. Sistemaning ichki energiyasi umumiyl holda quyidagicha yoziladi:

$$E = \int C_v dT + \int \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T dV + E_0. \quad (3.7)$$

Ushbu formula yordamida har qanday sistema ichki energiyasini topish mumkin.

Real gazlar uchun nazariy va empirik holda holatning 150 dan oshiq termik tenglamalari olingan. Masalan, Van-der-Vals tenglamasi real gazlarning halotini aniqlovchi eng sodda tenglamadir:

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT. \quad (3.8)$$

Bu tenglama ideal gaz holat tenlamasidan ikki jihatdan farq qiladi. Birinchidan, gazni tashkil qiluvchi molekulalar hajmi chekli ekanligini hisobga olib hajmga $b = 4v_0 N$ ($v_0 = 4\pi r_0^3 / 3$ – bitta molekulaning hajmi) ikkinchidan, ichki bosimga molekulalarning o'zaro tortishishi bilan bog'liq a/V^2 tuzatmalar kiritilgan. Van-der-Vaals tenglamasi sodda bo'lishiga qaramasdan real gazlarning xossalari katta aniqlikda to'g'ri aks ettiradi. Ideal gaz tenglamasidagi real gazlar uchun tuzatma kiritishni birinchi marta M.V. Lomonosov (issiqlikning tabiatini to'g'risidagi molekular-kinetik tasavvurga asoslanib) taklif qilgan.

Real gaz tenglamalaridan ba'zi birlarini keltiramiz:

$$p(V - b) = RT \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right) \text{ – Diterichening I tenglamasi;}$$

$$\left(p + \frac{a}{V^{5/3}} \right) (V - b) = RT \text{ – Diterichening II tenglamasi;}$$

$$\left(p + \frac{a'}{V^2 T} \right) (V - b) = RT \text{ – Bertlo tenglamasi;}$$

$$pV = RT \left(1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \frac{D}{V^3} + \dots \right) \text{ – holatning virial shakldagi tenglamasi.}$$

Bu yerda B, C, D, \dots – temperatura funksiyasi bo'lib, ular virial koeffitsiyentlar deb yuritiladi. Birinchi had ideal gazga

mos keladi, qaysiki molekulalar orasida o'zaro ta'sir yo'qdir, ikkinchi had esa molekulalar orasidagi juft to'qnashishlarni hisobga oladi va hokazo.

Real gazlarda molekulalar orasidagi o'zaro ta'sir kuch yaqin-dan ta'sir xarakterdaligini hisobga olib, turli xil metodlar yorda-mida Mayer va Bogolyubov tomonidan holat uchun quyidagi tenglama olingan:

$$pV = RT \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{V^n} \right), \quad (3.9)$$

bu yerda virial koefitsiyentlar B_n gaz zarralari orasidagi o'zaro ta'sir potensiali orqali ifodalanadi. Masalan, agar molekulalar orasidagi potensial U faqat molekulalar orasidagi masofa r ning funksiyasi bo'lsa, u holda N ta zarradan tashkil topgan gazning ikkinchi virial koefitsiyenti

$$B(T) = -2\pi N \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{U(r)}{kT}\right) - 1 \right] r^2 dr. \quad (3.10)$$

$B(T)$ ni eksperimentda o'lchab, o'zaro ta'sir potensial funksiyasi-ning parametrini aniqlash mumkin.

Sistema holat tenglamalaridan uchta termik koefitsiyentlar (kengayish, siqilish va elastiklik) orasida quyidagi bog'lanishni hosil qilish mumkin:

$$\alpha = p_0 \beta \gamma, \quad (3.11)$$

bu yerda α, β, γ – mos ravishda kengayish, siqilish va elastiklik koefitsiyentlari bo'lib, quyidagicha aniqlanadi:

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad \beta = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T, \quad \gamma = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V,$$

V_0 va $p_0 = 0$ °C temperaturadagi sistema hajmi va bosimi.

3.4. Termodinamikaning birinchi qonuni

Termodinamika birinchi qonunining yuzaga kelishi tarixiy jihatdan, biror ko'rinishdagi energiyani sarflamasdan va tash-quridan issiqlik miqdori olmasdan davriy ish bajara olish qobi-liyntiga ega bo'lgan mashinani qurish yo'lidagi urinishlarning oqibatsiz bo'lib chiqqanligi bilan bog'langandir.

Termodinamikaning birinchi qonuni energiyaning saqlanish va aylanish qonunining xususiy holi bo'lib, issiqlik jarayonlari uchun tatbiq qilinadi.

Birinchi qonunning miqdoriy ifodasini olishni ko'rib chiqamiz. Ikkita termodinamik sistema berilgan bo'lsin deb faraz qilamiz. Ularni bir-biriga kontaktga keltirganimizda birinchi sistemadan ikkinchi sistemaga δQ issiqlik miqdori o'tsin. Natijada ikkinchi sistema ichki energiyasi oshadi va sistema kengayadi. Bu hol uchun energiyaning saqlanish va aylanish qonuniga asosan

$$\delta Q = dE + \delta A, \quad (3.12)$$

bu yerda dE – ichki energiyaning o'zgarishi; δA – kengayishda tashqi kuchlarga qarshi bajarilgan ish. (3.12) tenglik termodinamika birinchi qonunining miqdoriy ifodasi deyiladi. δA to'liq differensial emas. Ichki energiya sistema holatini xarakterlaydi va holat funksiyasi bo'lib hisoblanadi, shuning uchun dE to'liq differensial bo'ladi. Ichki energiyaning holat funksiyasi ekanligini ikki yo'l bilan, ya'ni:

- 1) energiyaning saqlanish va aylanish qonuniga asosan;
- 2) doiraviy jarayonlarni qarash natijasida isbotlash mumkin.

Doiraviy jarayon oxirida sistema o'zining boshlang'ich holatiga qaytib keladi. Demak, hamma issiqlik va bajarilgan ishlar yig'indisi nolga teng bo'ladi. Natijada $\oint dE = 0$ bo'ladi.

Bundan ichki energiya sistema holatini bir qiymatli funksiyasi ekanligi kelib chiqadi. δA – to'liq differensial bo'lmasligi va dE – to'liq differensial bo'lganligi sababli, issiqlik miqdor δQ – to'liqmas differensial bo'lib, bajarilgan ish kabi jarayon funksiyasi bo'ladi.

Termodinamika birinchi qonunining miqdoriy ifodasi (3.12) bajarilgan ishning turiga qarab umumiy holda

$$dE = \delta Q + \delta A \quad (3.13)$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda δA noldan katta yoki kichik bo'lishi mumkin.

Shunday qilib, termodinamikaning birinchi qonuni: «*bir davr davomida miqdor jihatdan tashqaridan olingen energiya miqdoriga qaraganda, ko'proq miqdorda ish bajara oladigan davriy harakatlanuvchi mashinani qurish mumkin emasligiga olib keladi*».

Qaytuvchi jarayon uchun (3.12) ifoda

$$Q = \Delta E + A \quad (3.14)$$

ko'inishni oladi. (3.12) ifodani qaytmas jarayonlar uchun ham tatabiq etish mumkin.

Agarda termodinamik sistema murakkab bo'lsa, ya'ni bir necha kuchlar ta'sir etayotgan bo'lsa, u holda termodinamika birinchi qonuning miqdoriy ifodasi

$$\delta Q = dE + \sum_i f_i d\lambda_i \quad (3.15)$$

ko'inishni oladi. Bu yerda f_i – umumlashgan kuchlar, λ_i – umumlashgan parametr («ko'chish»).

Agar sistema ustida bir vaqtning o'zida mexanik va nomexanik kuchlar ish bajarayotgan bo'lsa, u holda (3.15) ifoda quyidagicha yoziladi:

$$\delta Q = dE + \delta A_{\text{mex}} + \delta A_{\text{nomex}}, \quad (3.16)$$

Bu yerda δA_{mex} – mexanik, δA_{nomex} – nomexanik kuchlarning bajargan ishi. Agar sistema tashqi kuchlarga qarshi kengayish ishi bajarayotgan bo'lsa, $\delta A = pdV$ va termodinamikaning birinchi qonuni $\delta Q = dE + pdV$ ko'inishda yoziladi.

Sodda misollar keltiramiz. Agar bir vaqtning o'zida kengayish va tashqi elektr maydoni ta'siri ostida izotrop dielektrikni qutblash ishi bajarilayotgan bo'lsa,

$$\delta A_{\text{nomex}} = -EdP, \Rightarrow \delta Q = dE + pdV - EdP.$$

Agar tashqi magnit maydoni ta'siri ostida magnetikni magnitlash ishi bajarilayotgan bo'lsa,

$$\delta A_{\text{nomex}} = -HdM, \Rightarrow \delta Q = dE + pdV - HdM$$

bo'ladi. Bu yerda **E** va **H** tashqi elektr va magnit maydon kuchlanganliklari, **P** va **M** esa qutblanish va magnitlanish vektorlari.

Termodinamika birinchi qonuni miqdoriy ifodasi (3.15)ni sof mehanika qonunlari asosida ham keltirib chiqarish mumkin. Zarralar sistemasini mehanika qonunlari nuqtai nazaridan ko'rib chiqamiz. Buning uchun Gamilton tenglamalaridan foydalanamiz. Bu formalizimga asosan sistemaning harakat qonunlari

umumlashgan koordinatalar q_i va umumlashgan impulslar p_i bilan aniqlanadi. Bundan tashqari, sistemani o'ragan muhit zarralarining umumlashgan koordinatalari q'_i , umumlashgan impulsleri p'_i va qandaydir qo'shimcha tashqi parametrlar λ_k sistemaning holatini belgiladaydi. Sistemaning energiyasi E (Gamilton funksiyasi H) yuqorida sanab o'tilgan kattaliklarning hammasining funksiyasi bo'ladi, ya'ni $H = H(q, p, \lambda, q', p')$. Bu yerda sistema uchun Gamilton funksiyasini yozish mumkin deb faraz qilinmoqda. Sistemaning mexanik holatini Gamilton tenglamalari

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (3.17)$$

aniqlaydi. Gamilton funksiyasidan vaqt bo'yicha to'liq hosila olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \\ &+ \sum \frac{\partial H}{\partial \lambda_k} \dot{\lambda}_k + \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q'_i} \dot{q}'_i + \frac{\partial H}{\partial p'_i} \dot{p}'_i \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Bu yerda birinchi had Gamilton funksiyasi vaqtga oshkora bog'-liq bo'lмаганлиги учун, иккинчи had esa, (3.17) ga asosan nolga tengligini hisobga olib energiyaning to'liq differensialini yozamiz:

$$dE = \sum \frac{\partial H}{\partial \lambda_k} d\lambda_k + \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q'_i} dq'_i + \frac{\partial H}{\partial p'_i} dp'_i \right). \quad (3.19)$$

Bu ifodani katta vaqt oralig'ida o'rtachalaymiz:

$$dE = \sum \frac{\overline{\partial H}}{\partial \lambda_k} d\lambda_k + \sum \left(\frac{\overline{\partial H}}{\partial q'_i} dq'_i + \frac{\overline{\partial H}}{\partial p'_i} dp'_i \right). \quad (3.20)$$

Ushbu natijani termodinamikaning birinchi qonuni

$$dE = -\sum \Lambda_k d\lambda_k + \delta Q \quad (3.21)$$

bilan taqqoslab, (3.20) ifodadagi birinchi had tashqi parametrlarning o'zgarishi bilan bog'liq bo'lганлиги учун tashqi kuch-

larga qarshi bajarilgan ishga, ikkinchi had esa sistemaga berilayotgan issiqlikka teng ekanini ko'ramiz. Yana shuni ta'kidlash lozimki, (3.20) ning ikkinchi hadi to'liq differensial emas.

3.5. Termodinamika birinchi qonunining suyuqliklarning statsionar oqimiga tatbig'i

Statsionar harakatdagi suyuqlik uchun termodinamikaning birinchi qonunini tatbiq qilamiz. Statsionar oqimda tok chiziqlari vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi. Suyuqlik harakatda bo'lganligi uchun tezligi $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$, zichligi ρ va bosimi p koordinataning funksiyasi bo'ladi. Shuning uchun u bir butun holda termodinamik muvozanatda bo'lmaydi. Ammo uning yetarli kichik elementi termodinamik muvozanatda bo'ladi, ya'ni ko'rيلayotgan element holatining o'zgarishini kvazistatik deb qarash mumkin. Bu holda bosim holat tenglamasi yordamida element zichligi va temperaturasi T orqali to'liq aniqlanadi.

Suyuqliknинг tezligi, zichligi va temperatura Nyuton harakat tenglamasi, uzuksizlik tenglamasi va energiya saqlanish qonuni, ya'ni termodinamikaning birinchi boshlanishi orqali aniqlanadi:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0,$$

$$\delta Q = dE + \delta A.$$

Ushbu tenlamalar sistemasi suyuqlik harakatining umumiyligi uchun yozilgan. Bu yerda fazoning har bir nuqtasida suyuqliknинг holati vaqt o'tishi bilan o'zgarmas bo'lgan statsionar oqim holini ko'rib chiqamiz. Suyuqliknинг atrof-muhit bilan issiqlik almashishini hisobga olmaymiz, ya'ni jarayon adiabatik bo'lgin ($\delta Q = 0$). Bu holda jarayon qaytuvchi bo'lmaydi. Adiabatik jarayon uchun termodinamikaning birinchi qonuni quyidagi ko'rishnida yoziladi:

$$dE + \delta A = 0, \tag{3.22}$$

ya'ni ichki energiya faqat bajarilgan ish hisobiga o'zgaradi.⁵

⁵ Xususan, adiabatik jarayonlarda ichki energiya bilan bir qatorda ish ham to'liq differensial bo'ladi.

Oqim yo'nalishida ixtiyoriy tanlangan nay orqali suyuqlik oqimini kuzataylik (3.1- rasm). Harakat statsionar bo'lganligi uchun nayning ixtiyoriy ko'ndalang kesimidan vaqt birligida bir xil miqdorda massa oqib o'tadi.

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 \text{ yoki } \frac{v_1 S_1}{V_{01}} = \frac{v_2 S_2}{V_{01}}, \quad (3.23)$$

bu yerda S_1 va S_2 – nayning ixtiyoriy ikkita ko'ndalang kesim yuzasi, $\rho = m/V = 1/V_0$. Yuqoridagi natija uzlusizlik tenglamasi – massa saqlanish qonunidan bevosita kelib chiqadi.

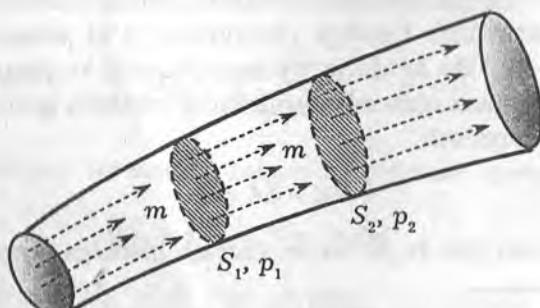
Massasi m bo'lgan suyuqlikning energiyasini aniqlaylik. Energiya ikki qismdan, ichki energiya va harakat bilan bog'liq bo'lgan kinetik energiyalardan iborat bo'ladi:

$$\varepsilon = E(V, T) + \frac{mv^2}{2}, \quad (3.24)$$

bu yerda $E(V, T)$ – ichki energiya; V – hajm; m – gaz yoki suyuqlikning shu hajmdagi massasi.

Harakatdagi suyuqlik tomonidan bajarilgan elementar δA ish ni topamiz. Tashqi kuchlar yo'q bo'lganda ish m massani o'rab turgan sirdagi bosim kuchlarining bajargan ishiga teng bo'ladi. Nayning yon sirtidagi bosim kuchi ish bajarmaydi. Demak, bajarilgan ish S_1 va S_2 ko'ndalang kesimlardagi bosimlarning bajargan ishlarining ayirmasidan iborat bo'ladi. S_1 va S_2 kesimlar bir biriga cheksiz yaqin bo'lsa, dt vaqtida bajarilgan ish quyidagiga teng bo'ladi:

$$\delta A = (p_2 S_2 v_2 - p_1 S_1 v_1) dt = \frac{\partial(pSv)}{\partial l} dl dt. \quad (3.25)$$



3.1- rasm.

Ko'chish ham cheksiz kichik bo'lganligi uchun ayirmani differensial bilan almashtirish mumkin:

$$p_2 S_2 v_2 - p_1 S_1 v_1 - d(pSv) - \frac{\partial(pSv)}{\partial l} dl, \quad (3.26)$$

bu yerda dl oqim chizig'i elementi yoki m massa egallagan kesma uzunligi. Oqim statsionar bo'lganligi uchun quyidagi tenglik o'rinali bo'ladi:

$$\frac{\partial(pSv)}{\partial l} = \frac{1}{v} \cdot \frac{d(pSv)}{dt}. \quad (3.27)$$

Shunday qilib, (3.25) va (3.26) ifodalarga asosan bajarilgan ish uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\delta A = \frac{dldt}{v} \cdot \frac{d(pSv)}{dt}. \quad (3.28)$$

(3.28) va (3.24) ifodalarni energiya saqlanish qonuni (3.22)ga qo'yamiz:

$$\frac{d}{dt} \left(E + \frac{mv^2}{2} \right) + \frac{dl}{v} \cdot \frac{d(pSv)}{dt} = 0. \quad (3.29)$$

Bu yerda massa $m = \rho S dl$ ga tengligini hisobga olib oxirgi ifodani qayta yozamiz:

$$d \left(E + \frac{mv^2}{2} \right) + \frac{m}{\rho S v} d(pSv) = 0. \quad (3.30)$$

Tenglik (3.23)ga asosan harakat davomida $\rho S v = \text{const}$ bo'lganligi uchun quyidagini yozish mumkin:

$$d(pSv) = d \left(p v \rho \frac{S}{\rho} \right) = \rho S v d \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (3.31)$$

va nihoyat energiya saqlanish qonuni quyidagi ko'rinishni oladi:

$$d \left(E + \frac{mv^2}{2} + pV \right) = 0, \quad (3.32)$$

yoki

$$m d \left(\chi_0 + \frac{v^2}{2} \right) = 0, \quad (3.33)$$

bu yerda χ_0 – solishtirma entalpiya bo'lib, quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$\chi_0 = \frac{E + pV}{m}.$$

Agar oqim sekin bo'lsa, (3.33)da $v^2 \ll 2\chi_0$ shart o'rini bo'ladi va $d\chi_0 = 0$. Demak, harakat davomida solishtirma entalpiya o'zgarmas bo'lar ekan. Shunday qilib, oqim statsionar bo'lishini ta'minlash uchun solishtirma entalpiyani o'zgarmas ushslash kerak ekan yoki statsionar oqimlarda solishtirma entalpiya o'zgarmas bo'ladi.

Yuqorida olingan natijani olishda uzlusiz muhitning zichligiga hech qanday shart qo'yilmaganligi sababli uni gazlar uchun ham tatbiq qilish mumkin.

Statsionar oqimlarda entalpiyaning o'zgarmasligi to'g'risidagi nazariy natija Joule–Tomson issiqlik effektini, ya'ni siyrak gazlarda energiya hajmga bog'liq bo'lmasligini tajribada tekshirishda katta ahamiyat kasb etgan. Effektni tajribada (1852–1862- yillarda) kuzatish amalda og'ir bo'lgan, chunki gazning issiqlik sig'imi idishning issiqlik sig'imidani juda kichik bo'lganligi sababli tajriba natijalari katta noaniqlikka ega bo'lgan va to'g'ri xulosa chiqarib bo'lmas edi. Bu holdan qutilish uchun tajribada qaytmas adiabatik jarayondan foydalanilgan. Oqimning statsionar va tezlikni kichik bo'lishini ta'minlash uchun esa idishlarni bir-biriga ulashda g'ovak tiqindan foydalanilgan.

3.6. Kvazistatik jarayonda sistema ichki energiyasining o'zgarishi

Bu mavzuda, o'zini o'rabi olgan muhit (jismlar) bilan o'zarotu'sirlashuvchi, ya'ni to'g'ridan-to'g'ri kontaktga keltirilganda u bilan energiya almashinuvchi sistema ichki energiyasining o'zgarishini umurniyroq holda ko'rib chiqamiz.

Bu yerda sistemada statistik muvozanat buzilmaydigan jarayonlarni qarash bilan chegaralanamiz. Statistik muvozanat-

da bo'lgan sistemaning holati, bosimi, hajmi, temperaturasi va boshqa parametrlari tashqi sharoitga bog'liq bo'ladi. Jism yotgan tashqi sharoit esa jismga ta'sir etuvchi tashqi maydonlar bilan aniqlanib, tashqi parametrlar to'plami λ orqali xarakterlanadi.

Sistema kvazistatik jarayon davomida muvozanat holatda bo'lganligi uchun ehtimolliklar taqsimoti Gibbsning kichik kanonik taqsimoti bilan aniqlanadi. Bu holda sistema o'rtacha energiyasining to'la o'zgarishi uchun quyidagini yozish mumkin:

$$dE = d\bar{\varepsilon} = d \left(\sum_i \varepsilon_i W_i \right) = \left(\sum_i W_i d\varepsilon_i \right)_{W_i} + \left(\sum_i \varepsilon_i dW_i \right)_{\lambda}, \quad (3.34)$$

bu yerda, birinchi had sistema ustida bajarilgan ish (yoki sistemaning tashqi kuchlarga qarshi bajargan ishi), ikkinchi had esa, sistema energiyasi o'zgarishining bir qismi bo'lib, bu o'zgarish tashqi (muhit) parametrlarning o'zgarishi bilan bog'liq emas. Boshqacha qilib aytganda, muhit zarralari tomonidan sistema zarralariga (va aksincha) uzatilgan energiya o'zgarishi bo'lib, sistemaga berilgan (yoki sistemadan olingan) issiqlik miqdorini beradi. Demak,

$$dE = \delta A + \delta Q. \quad (3.35)$$

Ushbu tenglama issiqlik jarayonlari uchun energiya saqlanish qonunini, ya'ni termodinamikaning birinchi boshlanishini ifodalaydi.

Statistik fizika yordamida (3.35) tenglamaga kiruvchi kattaliklarning molekular ma'nosini ochib berish va sodda sistemalar uchun nazariy tomonidan ularni hisoblash mumkin.

Issiqlik miqdorining molekular ma'nosini ochish uchun kvazistatik jarayon o'tayotgan berk bo'lмаган ixtiyoriy sistemani olib qaraymiz. Kvazistatik jarayonlar uchun (3.35) dan quyidagini olamiz:

$$\begin{aligned} \delta Q &= \left(\sum_i \varepsilon_i \delta W_i \right)_{\lambda} = dE - \left(\sum_i W_i d\varepsilon_i \right)_{W_i} = \\ &= dE - \frac{\sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) d\varepsilon_i}{Z}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Bu yerda ikkinchi hadni quyidagicha yozish mumkin:

$$d \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) = \\ = -\frac{1}{\theta} \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) d\varepsilon_i + \sum_i \varepsilon_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) \frac{d\theta}{\theta^2},$$

bundan

$$\sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) d\varepsilon_i = \\ = -\theta d \left(\sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) \right) + \frac{d\theta}{\theta} \sum_i \varepsilon_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i).$$

Bu ifodani (3.36) ga qo'ysak, natijada quyidagini olamiz:

$$\delta Q = dE + \theta d \ln Z - E \frac{d\theta}{\theta} = \theta d \left(\frac{E}{\theta} + \ln Z \right). \quad (3.37)$$

Shunday qilib, biz muhim xulosaga kelamiz.

Agar makroskopik sistemada qandaydir jarayon o'tayotgan bo'lsa va sistema jarayon davomida termostat bilan muvozanat holatda qolsa, u vaqtda ichki energiyasining o'zgarishi quyidagicha yoziladi:

$$dE = \delta A + \delta Q = -\Lambda d\lambda + \theta d \left(\frac{E}{\theta} + \ln Z \right) \quad (3.38)$$

va termodinamika birinchi qonunining miqdoriy ifodasini beradi. Bu yerda

$$\Lambda = \left(\sum_i f_i W_i \right)_{W_i}$$

tashqi parametr o'zgarishida hamma sistemachalarga ta'sir etuvchi o'rtacha kuch bo'lib, uning bajargan ishi $\delta A = -\Lambda d\lambda$. (3.38) formuladan shu narsa ko'rindiki, sistema ichki energiyasining o'zgarishi ikki qismga ajraladi: sistema ustida (yoki sistema tomonidan) bajariladigan ish δA ga va sistema oladigan

(yoki beradigan) issiqlik miqdor δQ ga. Bu yerda issiqlik miqdori – muhit zarrasi tomonidan sistema zarralariga uzatilgan (va aksincha) energiya bo‘lib hisoblanadi.

3.7. Termodinamikada issiqlik sig‘imi tushunchasi

Issiqlik sig‘imi tushunchasi fizikada eng muhim o‘rin tutadi. Chunki issiqlik sig‘imi tekshiriladigan sistema bilan uzviy holda bog‘langan fizik kattalikdir.

Termodinamikada issiqlik sig‘imi tushunchasi quyidagicha kiritiladi: «issiqlik sig‘imi deb, qandaydir jarayonda sistemaga berilgan (yoki undan olingan) δQ issiqlik miqdorining shunga mos kelgan temperatura o‘zgarishi dT ga nisbatiga aytildi», ya’ni

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (3.39)$$

Bu ifodada δQ – to‘liqmas, dT esa to‘liq differensial bo‘lganligi uchun issiqlik sig‘imini bunday aniqlash, uning bir qiymatli emasligidan dalolat beradi. Termodinamikada issiqlik sig‘imini bir qiymatli qilib, aniqlash uchun sistema atrof-muhit bilan qanday jarayonda issiqlik almashayotganligini ko‘rsatish zarur va shart.⁶

Faraz qilaylik, oddiy termodinamik sistema holati makroskopik parametrlar p , T , V orqali aniqlansin. Bunday sistemaga (3.39) ta’rifni qo‘llasak, izoxorik⁷ va izobarik jarayonlarda issiqlik sig‘imi turlichcha ekanligini ko‘ramiz, ya’ni

$$C_V = \frac{\delta Q_V}{dT} = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V,$$

$$C_p = \frac{\delta Q_p}{dT} = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p,$$

Bu yerda $\chi = E + pV$ – entalpiya deyiladi. Ichki energiya va entalpiya holat funksiyasi, demak, uning o‘zgarishlari to‘liq differensial bo‘lganligi uchun C_p va C_V lar bir qiymatli bo‘ladi.

⁶ Nima uchun biz qishda uyda o‘t yoqamiz? Mutaxassis bo‘lmagan aytadi – uyni issiqliq qilish uchun. Termodinamikadan xabardar bo‘lgan kishi – yetishmayotgan energiyani berish uchun deb javob beradi. Bu holda birinchi kishi buq bo‘lib chiqadi. Nima uchun?

⁷ Izoxorik jarayonda ish bajarilmaydi, ya’ni $\delta A = 0$.

Murakkab sistemalar uchun issiqlik sig‘imi quyidagicha aniqlanadi. Umumlashgan kuch va sistema ichki energiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin:

$$f_i = f_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n, T) \text{ va } E = E(\lambda_1, \dots, \lambda_n, T).$$

Bu holda sistema issiqlik sig‘imi uchun (3.15) va (3.39) ga asosan quyidagi ifodani olamiz:

$$C = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{\lambda_i} + \sum_i L_{\lambda_i} \frac{d\lambda_i}{dT}. \quad (3.40)$$

Issiqlik sig‘imi orqali termodinamika birinchi qonuni (3.15) ning differensial ko‘rinishi quyidagicha yoziladi:

$$\delta Q = C_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} dT + \sum_i L_{\lambda_i} d\lambda_i, \quad (3.41)$$

bu yerda L_{λ_i} – yashirin issiqlik bo‘lib, temperatura va i parametrdan boshqa parametrler doimiy bo‘lganda qandaydir tashqi parametrning bir birlikka o‘zgarishi uchun zarur bo‘lgan issiqlik miqdoridir, ya’ni

$$L_{\lambda_i} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda_i} \right)_{T, \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n} = \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right)_{T, \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n} + f_i. \quad (3.42)$$

(3.41) ko‘rinishdagi chiziqli differensial shakl Pfaffa formasi deyiladi.

Issiqlik sig‘imlari C_p va C_V orasidagi bog‘lanishni topamiz. Faraz qilaylik, sistema oddiy sistema bo‘lsin: $f_i = p$, $\lambda_i = V$. Bu holda sistema holati p , V , T kattaliklar yordamida aniqlanadi, ya’ni $p = p(V, T)$ va $E = E(V, T)$ bo‘ladi. Qaytuvchi kvazistatik jarayonda bo‘lgan bunday sistemaning olgan issiqlik miqdorini (3.41) ga asosan quyidagicha yozish mumkin:

$$\delta Q = C_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] dV \quad (3.43)$$

va demak, umumiy holda issiqlik sig‘imi

$$C = C_V + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] \frac{dV}{dT}. \quad (3.44)$$

Xususan, sistemaga issiqlik berish jarayoni $p = \text{const}$ ostida o'tayotgan bo'lsa, bu holda (3.44) ga asosan

$$C_p = C_v + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{dV}{dT} \right)_p . \quad (3.45)$$

Ushbu ifodadan $C_p > C_v$ ekanligi kelib chiqadi. Agar gaz ideal bo'lsa, (3.45) Mayer tenglamasiiga o'tadi:

$$C_p = C_v + R.$$

Ideal gazda o'tayotgan turli xil jarayonlar uchun termodinamika birinchi qonuniga asosan sig'imilar orasidagi munosabatlarni topish mumkin.

Masalan, ideal gazda 1) $X = pV^2 = \text{const}$; 2) $X = p^2V = \text{const}$ yoki 3) $X = \frac{p}{V} = \text{const}$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi jarayonlar o'tayotgan bo'lsin. Har bir jarayon uchun issiqlik sig'imi topamiz. Ko'rilib yotgan hollar uchun ichki energiya $E = E(T, X)$, hajm $V = V(T, X)$ bog'lanishda deb issiqlik sig'imi uchun quyidagini yozamiz:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dE + pdV}{dT};$$

$$C_X = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_X + \left(p \frac{\partial V}{\partial T} \right)_X . \quad (3.46)$$

Ideal gaz ichki energiya $E = C_v T + E_0$ bo'lganligi uchun (3.46) tenglikdagi birinchi had C_v ga teng, ya'ni har qanday jarayonda ideal gazning ichki energiyasi absolut temperaturaga proporsional bo'lib qoladi va proporsionallik koeffitsiyenti C_v ga tengdir. Demak, (3.46) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$C_X = C_v + \left(p \frac{\partial V}{\partial T} \right)_X . \quad (3.47)$$

Sodda hisoblashlar natijasida ko'rilib yotgan jarayonlarda issiqlik sig'imi quyidagilarga teng ekanligini topamiz:

$$C_{1X} = C_v - R, \quad C_{2X} = C_v + 2R, \quad C_{3X} = C_v - \frac{R}{2}.$$

3.8. Asosiy termodinamik jarayonlar va ularning tenglamalari

Har qanday oddiy yoki murakkab termodinamik sistemalarda har doim uchta asosiy jarayon mavjud bo'ladi:

1. Izotermik jarayon ($T = \text{const}$, $C_T = \infty$).
2. Adiabatik jarayon ($\delta Q = 0$, $C_s = 0$).
3. Politropik jarayon ($C = \text{const}$).

Murakkab sistemalarda yuqoridagilardan tashqari yana ko'p sonli turli xil jarayonlar o'tishi mumkin. Jarayonlarning soni va xarakteri sistemaning tabiatiga bog'liq bo'ladi.

Agar termodinamik sistema oddiy bo'lsa, u holda qo'shimcha yana ikkita: izoxorik va izobarik jarayonlar o'tadi. Ko'pincha ana shu jarayonlar asosiy termodinamik jarayonlar deb yuritiladi. Amalda sistemada o'tayotgan jarayon yuqorida sanab o'tilgan asosiy jarayonlarning aralashmasidan iborat bo'ladi. Shuning uchun real jarayonlarning xususiy holi bo'lgan politropik jarayonni olib qaraymiz. Chunki yuqorida eslatib o'tilgan jarayonlar politropik jarayonning xususiy hollaridir.

Izotermik, izoxorik va izobarik jarayonlardan farqli ravishda adiabata va politropa tenglamalarini faqat termik tenglama yordamida hosil qilib bo'lmaydi, chunki termik tenglamada issiqlik miqdori va sig'imi qatnashmaydi. Bu jarayonlar uchun holat tenglamalarini olishda termodinamikaning birinchi qonuni, calorik va termik tenlamalardan foydalanish kerak bo'ladi. Murakkab termodinamik sistemalar uchun politropa tenglamasini ko'rib chiqamiz. Holat tenglamasi $F(T, f_i, \lambda_i) = 0$, umumlashgan kuch $f_i = f_i(T, \lambda_i)$ va energiya $E = E(T, \lambda_i)$ ko'rinishda berilgan bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda (3.41) ifodadan

$$C_{f_i} - C_{\lambda_i} = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right)_T + f_i \right] \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial T} \right)_{f_i} \quad (3.48)$$

ifodani olamiz. (3.48)ni (3.40) tenglikka qo'yish natijasida o'zgaruvchilarga nisbatan murakkab sistema uchun quyidagi politropa tenglamasini olamiz:

$$dT + (n - 1) \left(\frac{\partial T}{\partial \lambda_i} \right)_{f_i} d\lambda_i = 0, \quad (3.49)$$

bu yerda

$$n = \frac{C_{f_i} - C}{C_{\lambda_i} - C}$$

- politropa ko'rsatkichi deyiladi.

Agar politropa tenglamasini f_i, λ_i o'zgaruvchilarga nisbatan olish uchun $T = T(f_i, \lambda_i)$ deb politropa tenglamasi (3.49) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial f_i} \right)_{\lambda_i} df_i + n \left(\frac{\partial T}{\partial \lambda_i} \right)_{f_i} d\lambda_i = 0. \quad (3.50)$$

Agar sistema har tomonlama bosim kuchi ta'siri ostida bo'l-gan oddiy termodinamik sistema bo'lsa, ya'ni $f_i = p, \lambda_i = V$ bo'lsa, u vaqtida (3.50) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V dp + n \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV = 0, \quad (3.51)$$

$$n = \frac{C_p - C}{C_V - C}.$$

Ideal gazlar uchun (3.51) tenglamadan

$$pV^n = \text{const} \quad (3.52)$$

tenglamani olamiz. Bu tenglama ideal gazlar uchun politropa tenglamasi deb yuritiladi. Politropa koeffitsiyenti $n > 1$ bo'l-ganda, ideal gaz siqilganda qiziydi, $n < 1$ da soviydi. (3.52) tenglamadan issiqlik sig'imi C ning qabul qilgan qiymatlariga qarab, eslatib o'tilgan jarayonlarning tenglamalari kelib chiqadi. Xususan, $C = 0$ da

$$n = \frac{C_p}{C_V} = \gamma \quad \text{va} \quad pV^\gamma = \text{const} \quad (3.53)$$

ideal gaz adiabata tenglamasini olamiz.

3.9. Termodinamikaning ikkinchi qonuni

Termodinamika ikkinchi qonuning yuzaga kelishi issiqlik mashinalarining ishlashini tahlil qilish bilan bog'langan. Issiqlik mashinalarining ishlash prinsipi nazariy holda 1824- yilda Sadi Karko tomonidan ko'rib chiqilgan. Keyinchalik [Klauzius va Tomson ularning] zamonaviy ta'rifini berdi.

Ikkinci qonun birinchi qonun kabi tajriba natijalarini umum-lashtirilishidir. Kishilarning ko'p yillik amaliyoti – issiqlikni ishga va ishni issiqlikka aylanishini tahlil qilish termodynamika ikkin-chi qonuning shakllanishiga olib keldi. Bu qonun entropiyaning mavjudligi to'g'risida bo'lib, u izolatsiyalangan yoki adiabatik izolatsiyalangan sistemalarda kechayotgan har qanday jarayonlarda entropiya kamaymasligi bilan ta'riflanadi.

Tajribalar shuni ko'rsatadiki, issiqlikni ishga kompensatsiyasiz aylantirish mumkin emas, ishni esa to'la holda kompensatsiyasiz issiqlikka yoki boshqa ko'rinishdagi energiyalarga aylantirish mumkin. Bu teng huquqsizlik tabiiy jarayonlarning bir tomonlama ekanligini ko'rsatadi.

Termodynamikaning ikkinchi qonuning umumiyligi ta'rifi bu ikkita qoidaning bir-biriga bog'lanmaganligidan kelib chiqadi:

$$Q \geq A, \quad A \equiv Q. \quad (3.54)$$

$Q \geq A$ – birinchi qoida muvozanatdagi sistemalar uchun absolut termodynamik temperatura va holatning yangi bir qiymatli funksiyasi entropiyaning mavjudligiga olib keladi. (3.54) dan termodynamika ikkinchi qonuning turli xil ta'riflari kelib chiqadi: «Issiqlik o'z holicha sovuq jismdan issiqlik jismga o'ta olmaydi» – Klauzius ta'rifi; «O'zini o'rab olgan muhitda hech qanday o'zgarish hosil qilmasdan, faqat biror jismning sovishi hisobiga issiqlikni uzluksiz holda musbat ishga aylantirib turuvchi davriy harakatlanuvchi mashinani qurish mumkin emas» – Tomson–Plank ta'rifi. Bu ta'riflar teng kuchlidir.

Biror jism issiqligini kompensatsiyasiz to'la holda ishga aylantiruvchi qurilma ikkinchi xil *perpetuum mobile* deb yuritiladi. Ammo, issiqlikni kompensatsiyasiz to'la holda ishga aylantirish mumkin emas.

Ikkinci xil abadiy dvigatejni qurish mumkin emasligi to'g'risidagi ikkinchi qonunning umumiyligi ta'rifi (3.54) dan muvozanatlari jarayonlarda, termik tomonidan bir jinsli sistemalarning har bir holati yaqinida, shunday holatlar mavjud bo'ladiki, unga muvozanatlari adiabatik yo'l bilan etishish mumkin emasligi kelib chiqadi. Bu Karateodorining «adiabatik yo'l bilan etishish mumkin emas» prinsipi deb yuritiladi. Karateodori shu prinsipi asosida absolut temperatura va entropiya tushunchasini kiritadi va matematik isbotini beradi.

3.10. Entropiya. Termodinamikaning asosiy tenglamasi

Formula (3.37) kvazistatik jarayonda sistema tomonidan olin-gan yoki berilgan issiqlik miqdorini quyidagi ko'rinishda yozish mumkinligini ko'rsatadi:

$$\delta Q = \theta dS, \quad (3.55)$$

bu yerda $dS = d(E/\theta + \ln Z)$ qandaydir funksiyaning o'zgarishini beradi. Bu o'zgarish to'liq differensialdir. Odatda, $S = E/\theta + \ln Z + \text{const}$ sistemaning (o'lchamsiz) entropiyasi deb yuritiladi.⁸ Bu o'lchamsiz kattalik Gibbsning kichik kanonik taqsimotini chiqarishda kiritilgan edi. Bu yerda integrallash doimiysi. Ifoda (3.55) ga termodinamika ikkinchi qonunining miqdoriy ifodasi deyiladi.

Termostat bilan muvozanat holatda bo'lgan makroskopik sistemada qandaydir kvazistatik jarayon o'tayotgan bo'lsa, energiya o'zgarishi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$dE = \delta A + \delta Q = -\Lambda d\lambda + \theta d\left(\frac{E}{\theta} + \ln Z\right) = -\Lambda d\lambda + \theta dS \quad (3.56)$$

yoki

$$\theta dS = dE + \Lambda d\lambda. \quad (3.57)$$

Oddiy sistema uchun $\Lambda = p$ va $\lambda = V$ ekanligini hisobga olib, (3.57)ni qayta yozamiz:

$$\theta dS = dE + pdV \quad (3.58)$$

Formulalar (3.57) va (3.58)ga termodinamikaning asosiy tenglamalari deb yuritiladi. Bu tenglamalardan Λ va θ ni topib (3.56) ga qo'yamiz. Natijada energiyaning o'zgarishi uchun ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_\lambda dS + \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda}\right)_S d\lambda. \quad (3.59)$$

⁸ *Eslatma.* O'lchamsiz entropiya qulaylik uchun kiritilgan. Biz darslik davomida o'lchamsiz va o'lchov birligi bor bo'lgan entropiyani farq qilmaymiz. Ular bir-biridan Bolsman doimiysi *k* bilan farqlanadi.

Shunday qilib, termodinamik sistemaning ichki energiyasini o'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilar S va λ (yoki V)ning funksiyasi deb qarash mumkin. Shu bilan birga

$$\theta = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{\lambda}$$

va $\theta > 0$ shartidan, ichki energiya entropiyaning monoton funksiyasi ekanligi kelib chiqadi. (3.55) ifodadan $dS = \delta Q/\theta$, dS to'liq differensial bo'lganligi uchun $\delta Q/\theta$ ham to'liq differensial bo'ladi. Demak, entropiya S sistema holatining bir qiyamatli funksiyasi bo'ladi va quyidagi shart o'rinni:

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q}{\theta} = 0. \quad (3.60)$$

Bu munosabat Klauzius tengligi deyiladi.

Integrallash doimiysi sistema holatini xarakterlovchi parametrlarga bog'liq bo'limganligi uchun, ushbu doimiyni entropiyani hisoblashning sanoq boshi deb olish mumkin. U holda entropiya

$$S = \frac{E}{\theta} + \ln Z \quad (3.60)$$

ko'rinishni oladi. Sistema holat funksiyasining ko'rinishini o'zgartiramiz. Sistema statistik muvozanat holatida yagona bitta $\varepsilon_{eh} = \bar{\varepsilon}$ energiyali holatda bo'la olishini hisobga olsak:

$$Z = \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i) \simeq \exp\left(-\frac{\bar{\varepsilon}}{\theta}\right) \Omega(\bar{\varepsilon}) = \exp\left(-\frac{E}{\theta}\right) \Omega(\bar{\varepsilon}).$$

Bu yerda yig'indida eng katta haddan boshqalarini tashlab yubordik. Yuqoridagini hisobga olsak, entropiya uchun ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$S = \frac{E}{\theta} + \ln \left[\exp\left(-\frac{E}{\theta}\right) \Omega(\bar{\varepsilon}) \right] = \ln \Omega(\bar{\varepsilon}). \quad (3.62)$$

Bu ifodadan makroskopik kvaziberk sistemaning entropiyasi muvozanat holatda yotgan sistema kvant holatlar soni $\Omega(\bar{\varepsilon})$ ning logarifmiga teng bo'lishi kelib chiqadi. Kvant holatlar soni $\Omega(\bar{\varepsilon})$

multiplikativ qonunga bo'ysunadi. Shuning uchun, murakkab sistema entropiyasi sistema qismlarining entropiyalarining yig'indisiga teng deyilgan muhim additivlik qonuniyat kelib chiqadi, ya'ni

$$S = \ln \Omega = \ln \prod_n \Omega_n = \sum_n \ln \Omega_n = \sum_n S_n. \quad (3.63)$$

3.11. Entropiyaning o'sish qonuni

Biz oldingi paragraflarda bir qator makroskopik kattaliklar – ichki energiya, bajarilgan ish, issiqlik miqdorining molekular talqinini ko'rib chiqdik. Shunday tushunchalarga makroskopik kattalik – entropiya ham kiradi. Entropiyaning molekular ma'nosini ochish uchun berk sistemani qaraymiz. Bunday sistemada muvozanat holat bilan bir qatorda nomuvozanat holatni ham qarash mumkin. Nomuvozanat berk sistemada jarayon shunday o'tadiki, sistema uzlucksiz holda kichik entropiyali holatdan katta entropiyali holatga to'la muvozanat holat yuzaga kelguncha o'tib boradi.

Shunday qilib, agar berk sistema qandaydir vaqt momentida nomuvozanat holatda bo'lsa, u holda keyingi vaqt momentidagi yangi holatga o'tishda sistemaning entropiyasi katta ehtimollik bilan monoton o'sib boradi. Bu entropiyaning o'sish qonunini yoki termodynamikaning ikkinchi qonuni deb ham yuritiladi. Bu qonun 1865- yilda Klauzius tomonidan ochilgan, uning statistik talqini 1870- yillarda Boltzman tomonidan berilgan.

Endi entropiyaning o'sish qonunini ko'rsatuvchi miqdoriy ifodani topamiz. Buning uchun ko'p sonli bo'laklar to'plamidan iborat berk makroskopik sistemani qaraylik. Har bir bo'lak (sistemacha) yetarlicha katta sondagi zarralarga ega va kvazi-berk sistema bo'lib hisoblanadi. Faraz qilaylik, murakkab sistema bo'laklari statistik muvozanat holatga kelgan bo'lsin. U holda har bir bo'lak entropiyasi uchun quyidagi ifodani yozish mumkin:

$$S_n = \ln \Omega_n (\bar{\varepsilon}_n). \quad (3.64)$$

Har bir bo'lak o'zi statistik muvozanat holatda bo'lsada, ammo murakkab makroskopik sistema nomuvozanat holatda bo'ladi. Bunday sistema entropiyasi

$$S = \sum_n S_n. \quad (3.65)$$

Sistemaning har bir bo'lagi uchun muvozanat holatdagi entropiyasini (3.62) yordamida hisoblasak, sistema entropiyasi

$$S = \sum_n S_n = \sum_n \ln \Omega_n(\bar{\varepsilon}) = \ln \prod_n \Omega_n(\bar{\varepsilon}_n) = \ln \Omega, \quad (3.66)$$

bu yerda

$$\Omega = \prod_{n=1}^N \Omega_n(\bar{\varepsilon}_n)$$

N ta zarradan tashkil topgan bir butun sistemaning to'la kvant holatlar soni. Demak, berk sistema entropiyasi sistema to'la holatlar sonining logarifmiga teng bo'lar ekan.

Qaralayotgan berk sistema uchun Gibbsning mikrokanonik taqsimoti $W(\varepsilon_i) \sim \Omega(\varepsilon_i)$ o'rini bo'ladi. Bundan $S = \ln W + \text{const}$ kelib chiqadi. (3.66) termodinamika ikkinchi qonunining statistik talqinini beruvchi ifoda bo'lib, Boltzman formulasi deb yuritiladi. Boltzman formulasi berk sistema entropiyasini uning bu holatda bo'lish ehtimolligi bilan bog'laydi. Berk sistema bir holatdan boshqa holatga o'tganda entropiya o'zgarishi

$$S_2 - S_1 = \Delta S = \ln \frac{W_2}{W_1} \quad (3.67)$$

bo'ladi. Bu yerda W_1 va W_2 , S_1 va S_2 – mos holda birinchi va ikkinchi holatlar ehtimolliklari va entropiyalari. Bu ifoda entropiyaning o'sish qonunini ko'rsatadi.

Kvaziberk sistema entropiyasini ehtimollik zichligi $\rho(q, p)$ orqali ifodalash mumkin. Ehtimollik zichligi $\rho(q, p)$ normalash-tirish shartini qanoatlantiradi, ya'ni

$$\int \rho(q, p) d\Omega = 1.$$

$\rho(q, p)$ ni $\varepsilon_{eh} = \bar{\varepsilon}$ da keskin maksimumga ega bo'lishini hisobga olsak:

$$\int \rho(q, p) d\Omega = \rho(\bar{\varepsilon}) \Omega(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\bar{\varepsilon}}{\theta}\right) \Omega(\bar{\varepsilon}) = 1.$$

Sistema entropiyasi

$$S = \ln \Omega(\bar{\varepsilon}) = \ln \frac{1}{\rho(\bar{\varepsilon})} = -\ln \rho(\bar{\varepsilon}) = \frac{E}{\theta} + \ln Z.$$

Bu ifodaga asoslanib, quyidagi ifodani olamiz:

$$\overline{\ln \frac{1}{\rho(\bar{\varepsilon})}} = \int \ln \frac{1}{\rho(\bar{\varepsilon})} \rho(\bar{\varepsilon}) d\Omega =$$

$$\int \left(\ln Z + \frac{\varepsilon_{eh}}{\theta} \right) \rho(\varepsilon) d\Omega = \ln Z + \frac{\varepsilon_{eh}}{\theta} = \ln Z + \frac{E}{\theta}.$$

Demak, kvaziberk sistemaning entropiyasini quyidagicha yozish mumkin:

$$S = \overline{\ln \frac{1}{\rho(\bar{\varepsilon})}}. \quad (3.68)$$

Bu formula keyinchalik Boltzmaning H -teoremasini va entropianing vaqt bo'yicha o'sish qonunini kinetikada isbotlash imkonini beradi. Entropiyani vaqt bo'yicha o'sish qonunini faqat kinetikada ko'rsatish mumkin.

Boltzman formulasidan kelib chiqadigan xulosa shuki, agar berk makroskopik sistema bir holatdan ikkinchisiga o'tish jarayonda uning entropiyasi oshsa yoki doimiy bo'lib qolsa, bunday jarayon eng katta ehtimollik bilan sodir bo'ladi. U holda

$$\Delta S \geq 0, \quad (3.69)$$

bu yerda «katta» belgisi, sistema statistik muvozanatga yaqinlashish jarayonlariga taaluqli, «tenglik» belgisi esa sistema muvozanat holatda bo'lish jarayoniga tegishlidir. Bu hollarni esa, ya'ni entropiya o'zgarishini yoki doimiyligini qaytmas va qaytuvchi jarayonlar kriteriysi deb qarash mumkin. Qaytmas jarayonlarda, qaysiki sistema muvozanat holatga yaqinlashadi va entropiya oshadi, qaytuvchi jarayonlarda esa sistema entropiyasi doimiy bo'lib qoladi.

Agar sistemaning statistik temperaturalari θ_1 va θ_2 ($\theta_2 > \theta_1$ hol uchun ko'raylik) bo'lgan ikkita bo'lagini bir-biriga tegizsak, u holda berk sistema entropiyasining o'zgarishi quyidagicha aniqlanadi:

$$dS = dS_1 + dS_2 = \frac{\partial S_1}{\partial E_1} dE_1 + \frac{\partial S_2}{\partial E_2} dE_2 = \frac{dE_1}{\theta_1} + \frac{dE_2}{\theta_2} \geq 0. \quad (3.70)$$

Sistema berk bo'lganligi uchun, uning to'la energiyasi o'zgarmasdan qoladi:

$$dE = dE_1 + dE_2 = 0.$$

Natijada (3.70)ga asosan entropiyaning o'zgarishi uchun quyidagini olamiz:

$$dS = dE_1 \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \geq 0. \quad (3.71)$$

Ushbu ifodadan ko'rindan, agar $\theta_2 > \theta_1$ bo'lsa, u holda entropiyaning o'sish qonunidan $dE_1 \geq 0$ kelib chiqadi. Bu shuni anglatadiki past temperaturaga ega bo'lgan sistema bo'lagi, yuqori temperaturali ikkinchi bo'lagidan energiya olar ekan. Boshqa-cha qilib aytganda, issiqlik har doim issiq jismdan sovuq jismga o'tadi. Bu esa ikkinchi qonunni sifat ta'rifiga olib keladi.

3.12. Qaytuvchi va qaytmas jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi

Biz olgan entropiyaning o'sish qonunini berk bo'lмаган системалар учун умумлаштирайлик. Умумлаштиришни иссиқликтан изолатсиyalangan берк bo'lмаган системалarda ко'raylik. Иssiqlikdan izolatsiyalangan система deb, tashqi parametrlari o'zgaradigan sistemani tushunamiz. Tashqi parametrлarning o'zgarishi, система energetik sathlarining o'zgarishiga olib keladi, ammo ehtimolliklar taqsimotining o'zgarishiga olib kelmaydi. Shuning uchun, issiqlikdan izolatsiyalangan системада kam ehtimolli holatdan katta ehtimolli holatga o'tish, xuddi берк системада o'tish каби bo'ladi. Demak, bunday системалarda entropiya o'zgarishi $dS \geq 0$ тенгсизлик билан aniqlanadi.

O'zini o'rab olgan jismlar bilan ixtiyoriy ravishda energiya almashinuvchi берк bo'lмаган системалар учун умумий holda quyidagi tengsizlikni yozish mumkin:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{\theta}. \quad (3.72)$$

Bu tengsizlikni hisobga olsak, qaytuvchi va qaytmas jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tengsizligi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dE \leq \theta dS + \delta A, \quad (3.73)$$

bu yerda «tenglik» belgisi qaytuvchi jarayonlarga, «kichik» belgisi esa qaytmas jarayonlarga tegishlidir. (3.73) energiyaning saqlanish va entropiyaning o'zgarish qonunlarini birlashtiruchi tongsizlik bo'lib, u ko'pincha termodinamika birinchi va ikkinchi qonunlarini birlashgan shakli ham deb yuritiladi.

Olingan ifodalar statistik va absolut temperaturani hisoblash usullarini aniqlashga imkon beradi. Bu temperaturalar ma'no jihatdan bir xil. Ma'lumki statistik temperatura $\theta = kT$. Bu yerda k – Boltzman doimiysi; T – absolut temperatura. Sistema o'lchamli entropiyasi $S = kS$ (bu yerda o'lchamli entropiyani yana S bilan belgiladik, 71- betdag'i eslatmaga qarang.) ekanligini hisobga olsak, u holda entropiya yoki termodinamikaning asosiy tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$S = k \ln W + \text{const} = \frac{E}{T} + k \ln Z + \text{const}. \quad (3.74)$$

Oddiy sistema uchun (3.72) tongsizlik esa quyidagi ko'rinishni oladi:

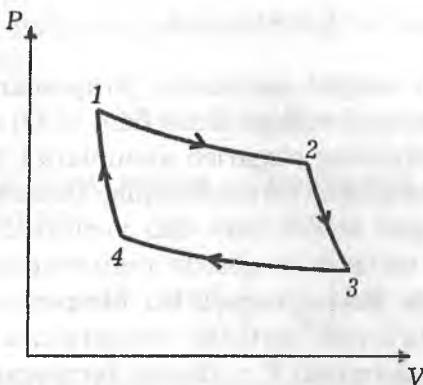
$$TdS \geq dE + pdV. \quad (3.75)$$

3.13. Karko sikli va Karko teoremasi

Issiqlik mashinalarining ishlash prinsipi Sadi Karko tomonidan 1924-yilda «Olovning harakatga keltiruvchi kuchi haqida fikrlash va bu kuchni yuzaga keltiruvchi mashinalar to'g'risida» degan asarida ishlab chiqilgan. Karko ideal gazlarda qaytuvchi aylanma jarayonlarni o'rganib, ikkita teoremag'a ta'rif beradi.

Karko birinchi teoremasi quyidagicha: *qaytuvchi jarayonlar bilan ishlovchi davriy mashinalarning FIK fagat isitgich vasovutgichning temperaturalariga bog'liq bo'lib, ishlovchi jism-larning tabiatiga va turiga bog'liq bo'lmaydi.*

Birinchi teoremani isbot qilish uchun Karko nomi bilan atlavchi siklni ko'rib chiqamiz. Bu sikl navbat bilan takrorlanuvchi ikkita izoterma ($1 \rightarrow 2$; $3 \rightarrow 4$) va ikkita adiabatadan ($2 \rightarrow 3$ va $4 \rightarrow 1$) iborat bo'lgan aylanma jarayondir (3.2-rasm).



3.1- rasm. Kärno sikli.

Diagrammada $1 \rightarrow 2$ jarayonda ishlovchi jism Q_1 issiqlik miqdorini isitgichdan oladi. $3 \rightarrow 4$ jarayonda ishlovchi jism Q_2 issiqlik miqdorini sovitgichga qaytaradi. Bunday aylanma jarayon bilan ishlovchi issiqlik mashinalarining foydali ish koeffitsiyenti sikl davomida bajarilgan ishning isitgichdan olgan issiqlik miqdoriga nisbatiga teng, ya'ni

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (3.76)$$

Bu ifodani absolut temperaturalar orqali yozish uchun Klauzius tengligi (3.60) dan foydalanamiz. Kärno sikli uchun (3.60) dagi integral to'rt qismga, ya'ni ikkita izoterma va ikkita adiabata bo'yicha olingan integralga ajraladi. Adiabatalarda $\delta Q = 0$ bo'lganligi uchun integrallar nolga teng bo'ladi. Izotermalarda $T = \text{const}$ bo'lganligi uchun integrallar sodda ko'rinishni oladi. Natijada Klauzius tengligini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{1}{T_1} \int_1 \delta Q + \frac{1}{T_2} \int_2 \delta Q = 0, \quad T_1 > T_2.$$

Bu yerda birinchi integral T_1 temperaturada mashina olgan issiqlik miqdori Q_1 ga teng. Ikkinci integral mashina sovitgichga qaytargan issiqlik miqdori $-Q_2$ ga teng. Bularni hisobga olib oxirgi tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (3.77)$$

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (3.78)$$

Ushbu nisbatdan foydalanib Karko sikli uchun foydali ish koefitsiyentini quyidagicha yozish mumkin:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (3.79)$$

Olingen ushbu natija Karko birinchi teoremasining isboti hisoblanadi. Demak, birinchi teoremaga asosan issiqlik mashinasi davriy ishlashi uchun isitgichdan tashqari sovitgich ham bo'lishi shart ekanligini ko'rsatadi. Bundan tashqari (3.79) dan ko'rinish turibdiki, isitgich va sovitgich absolut temperaturalarining o'zgarishi foydali ish koeffitsiyentining turlicha o'zgarishiga olib keladi. Haqiqatan ham, η dan T_1 va T_2 bo'yicha hosilalarni solishtirib,

$$\left| \frac{\partial \eta}{\partial T_1} \right| < \left| \frac{\partial \eta}{\partial T_2} \right| \quad (3.80)$$

shartni hosil qilamiz. Bunga asosan sovitgich temperaturasining o'zgarishi isitgich temperaturasining o'zgarishiga nisbatan η ga ko'proq ta'sir qilar ekan. Karko birinchi teoremasini entropiya dan foydalanmasdan isbot qildik. Teoremani entropiya yordamida ham isbot qilish mumkin. Buning uchun holat diagrammasini (S, T) o'zgaruvchilarda ko'rish kerak.

Karnoning ikkinchi teoremasi quyidagicha: *qaytmas jarayonlar bilan ishlovchi issiqlik mashinalarining FIK qaytuvchi jarayonlar bilan ishlovchi mashinalarning FIK dan kichik bo'ladi*, ya'ni

$$\eta_{qaytmas} < \eta \text{ yoki } \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (3.81)$$

Bu tengsizlik isitgich va sovitgichga ega bo'lgan sistema uchun termodinamika ikkinchi qonunining miqdoriy ta'rifini beradi. Shu bilan birga (3.81) sifat ta'rifini ham beradi:

1. Issiqlik bir jismdan ikkinchi jismga ish bajarmasdan o'tayotgan bo'lsin, ya'ni $Q_1 - Q_2 = 0$ bo'lsin. U holda (3.81) dan $T_1 \geq T_2$ kelib chiqadi. Bu esa Klauzius ta'rifini isbotlaydi.

2. Mashina issiqlikni to'la ravishda ishga aylantirsin, ya'ni $Q_2 = 0$ bo'lsin. Bu holda (3.58) dan $T_2 = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. $T_2 = 0$ bo'lishi mumkin emas. Har ikkala hol termodinamika ikkinchi qonuning sifat ta'rifini ko'rsatadi.

Amalda Karko siklida ishlaydigan birorta ham issiqlik mashinasi bo'lmaseda, Karko teoremlari issiqlik mashinalarining foydali ish koeffitsiyentini oshirish yo'llarini ko'rsatadi. Bu siklida ishlaydigan issiqlik mashinalarining foydali ish koeffitsiyenti berilgan temperaturalarda eng katta bo'lib, boshqa sikllarda ishlaydigan mashinalarning foydali ish koeffitsiyentlari uchun chegaraviy qiymatni ko'rsatadi.

3.14. Entropiyani fenomenologik aniqlash

Karko siklidan farq qiluvchi qaytuvchi va qaytmas doiraviy jarayonlarni ko'rib chiqamiz va ularga termodinamikaning ikkinchi qonunini tatbiq qilamiz. Ammo har qanday murakkab jarayonlarni oddiy jarayonlarga olib kelib, tekshirish mumkin. Buning uchun eng avvalo (3.81) tengsizlikni quyidagi ko'rinishda yozaylik:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (3.82)$$

Bu yerda $-Q_2 = Q_2 < 0$ deb yozdik. (3.82) ga Klauzius tengsizligi deb yuritiladi.

Issiqlik mashinasi har qaysisi o'z siklini bajaruvchi bir nechta ishlovchi termodinamik sistemaga ega bo'lsa, u vaqtida bunday murakkab siklning har biri uchun (3.82) ni qo'llash mumkin va bunday jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonuning miqdoriy ta'rifi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sum \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (3.83)$$

Qaytuvchi murakkab jarayonlar uchun

$$\sum \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (3.84)$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik, qandaydir sistema murakkab doiraviy qaytuvchi siklini bajarayotgan bo'lsin. Bu siklning konturi ichida

temperatura uzlusiz ravishda o'zgarib tursin. Bunday siklni izoterma va adiabata setkalar bilan kesib, ularning sonini oshirib borish natijasida, bu konturlar qaraladigan konturga qo'shilib ketadi va bu holda (3.84) ko'rinishdagi yig'indidan yopiq kontur bo'yicha olingan integralga o'tamiz:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Bu ifodadan va entropiyaning ta'rifidan

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (3.85)$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib, (3.85) dan kelib chiqadigan

$$\delta Q = T dS \quad (3.86)$$

tenglama qaytuvchi jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonunining yana bir ko'rinishi bo'ladi. Demak, sistema entropiyasi S - holat funksiyasi va uning o'zgarishi to'liq differensial ekan.

Termodinamikaning birinchi va ikkinchi qonunlari (3.12), (3.86)ga asosan quyidagini yozish mumkin:

$$TdS = dE + \sum_i f_i d\lambda_i. \quad (3.87)$$

Ma'lumki, bu termodinamikaning asosiy tenglamasidir.

Qaytuvchi jarayonlarda sistema bir holatdan ikkinchi holatga o'tganda (3.87) ga ko'ra entropiyaning o'zgarishini hisoblash formulasi

$$S_2 - S_1 = \int \frac{1}{T} \left[dE + \sum_i f_i d\lambda_i \right] \quad (3.88)$$

ko'rinishni oladi. Bu ifodadan entropiyaning o'zgarishini hisoblash uchun holatning termik va kalorik tenglamalarini bilish kerakligi kelib chiqadi. Kalorik va termik kattaliklarni bog'-lovchi ((3.103) ga qarang)

$$T \left(\frac{\partial f_i}{\partial T} \right)_{\lambda_i} = \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right)_T + f_i$$

differensial tenglamadan foydalanib (3.88) ifodani qayta yoza-miz:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 C_V \frac{dT}{T} + \sum_{i=1}^2 \int \left(\frac{\partial f_i}{\partial T} \right)_{\lambda_i} d\lambda_i. \quad (3.89)$$

Agar sistema oddiy, ya'ni $f_i = p$ va $\lambda_i = V$ bo'lsa, entropiyaning o'zgarishini hisoblash formulasi quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 C_V \frac{dT}{T} + \int_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV + S_0. \quad (3.90)$$

Bir mol ideal gaz uchun $pV = RT$, $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{V}$ ekanligini inobatga olib, entropiyaning o'zgarishini hisoblash uchun nihoyat quyidagi ifodani olamiz:

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}, \quad (3.91)$$

bu yerda v bitta molekulaga to'g'ri kelgan hajm. Berilgan holatda entropiyani topish uchun «2» nuqtani ixtiyor, ya'ni entropiyasi aniqlanishi lozim bo'lgan holat deb qaraymiz, «1» nuqtani esa, hisob boshi deb olamiz. Natijada ideal gaz entropiyasi uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$S = C_V \ln T + R \ln v + S_0, \quad (3.92)$$

bu yerda S_0 – birinchi nuqta bilan bog'liq bo'lgan o'zgarmas. Ya'ni, asosan sistemaning entropiyasini qandaydir o'zgarmas S_0 aniqlikda topilar ekan. T temperaturada V hajmni egallagan v mol ideal gazning entropiyasi

$$S = v \left[C_V \ln T + R \ln \frac{V}{N} + S_0 \right] \quad (3.93)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu yerda N – molekulalar soni.

Yuqoridagi natijalarni tahlil qilib Gibbs quyidagi teoremani ta'riflaydi: agar aralashmaga kirgan har bir ideal gaz butun hajmni egallasa, gaz aralashmasining entropiyasi har qaysi gaz entro-

piyalarining yig'indisiya teng bo'ladi, ya'ni $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$. Shunday qilib, entropiya ichki energiya kabi additiv kattalikdir.

Bu teoremaning mazmunini ochish uchun bir xil temperaturada ($T_1 = T_2 = T$) turli hajmlarni ($V_1 \neq V_2$) egallagan va gazlar miqdori turlicha ($\nu_1 \neq \nu_2$ yoki $N_1 \neq N_2$) bo'lgan ikki xil ideal gazning entropiyasini hisoblaymiz.

Avval gazlar bir-biridan to'siq bilan ajratilgan bo'lsin, u holda teoremaga asosan umumiylar entropiya ikkala gaz entropiyalarining yig'indisiga teng bo'ladi:

$$S_I = S_1 + S_2 = \nu_1 \left[C_{V_1} \ln T + R \ln \frac{V_1}{N_1} + S_{1o} \right] + \\ + \nu_2 \left[C_{V_2} \ln T + R \ln \frac{V_2}{N_2} + S_{2o} \right]. \quad (3.94)$$

Endi to'siqni olib tashlaymiz, bunda har bir gaz izotermik kengayadi. Bu kengayishda ish bajarilmaydi, demak, ichki energiya va entropiya o'zgarmaydi. Aralashmaning entropiyasini hisoblashda endi ularning har biri $V_1 + V_2$ hajmni egallanligini inobatga olamiz, ya'ni

$$S_{II} = \nu_1 \left[C_{V_1} \ln T + R \ln \frac{V_1 + V_2}{N_1} + S_{1o} \right] + \\ + \nu_2 \left[C_{V_2} \ln T + R \ln \frac{V_1 + V_2}{N_2} + S_{2o} \right]. \quad (3.95)$$

Har ikkala yo'l bilan topilgan entropiyalarning farqi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\Delta S = \nu_1 \left[R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} \right] + \nu_2 \left[R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} \right]. \quad (3.96)$$

Xususiy holda $\nu_1 = \nu_2$, $V_1 = V_2$ bo'lsa,

$$\Delta S = 2\nu R \ln 2. \quad (3.97)$$

Vaholanki, gazlarni boshidan bir xil sharoitda va miqdori bir xil deb qarasak bunday farq chiqmaydi. Bir-biridan to'siq bilan ajratilgan teng hajmlarni egallagan, teng miqdordagi va bir xil temperaturadagi ideal gazdan tashkil topgan ikkita sharoiti qaraymiz. To'siq mavjud bo'lganda (3.92)ga asosan

umumiylar entropiya alohida olinganiga nisbatan ikki marta katta bo'ladi. To'siqni olib tashlasak, sistema bir butun bo'lib $2V$ hajmni egallaydi va molekulalar soni $2N$ ga teng bo'ladi. Demak, (3.92) ifodada $\nu \rightarrow 2\nu$, $N \rightarrow 2N$ va $V \rightarrow 2V$ almashtirishlarni bajarish kerak. Bunday ikki xil yo'l bilan hisoblangan umumiylar entropiya yuqoridagi natijadan farqli o'laroq bir-biridan farq qilmaydi.

Bunday ziddiyatning paydo bo'lishi, ya'ni bir xil gazlar aralashmasi turli gazlarning aralashmasining chegaraviy holi emasligi Gibbs paradoksi deyiladi. Bu paradoksni Gibbs hayratga soluvchi intuitsiyani ko'rsatib hal qilgan.⁹

3.15. Nomuvozanat jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonunining asosiy tenglamasi

Tabiatda uchraydigan jarayonlar qaytuvchi va qaytmash bo'ladi. Ana shu jarayonlarda entropiya tushunchasini ko'rib o'taylik. Bu holda (3.83) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (3.98)$$

Bu tengsizlikni Afanasova-Ernfest ko'rsatib bergan. Chizmadaagi hol uchun integral (3.98)ni ACB va BDA qaytmas va qaytuvchi bo'laklariga to'g'ri kelgan ikkita integralga ajratish mumkin (3.3-rasm):

$$(C) \int_A^B \frac{\delta Q}{T} + (D) \int_B^A \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad \text{yoki} \quad (C) \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \leq -(D) \int_B^A \frac{\delta Q}{T},$$

$$(D) \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \geq (C) \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \quad \text{yoki} \quad (D) \int_A^B dS \geq (C) \int_A^B \frac{\delta Q}{T}.$$

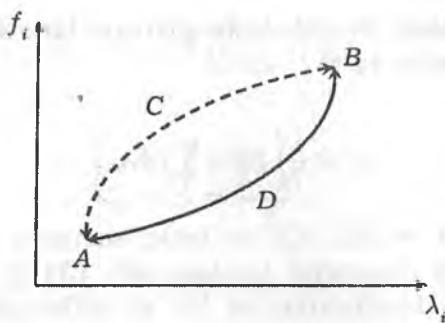
Integralash natijasida

$$\Delta S = S_B - S_A \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$$

yoki differensial formada

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (3.99)$$

⁹ Bu davrda kvant fizikasi, jumladan, zarralarning aynanligi to'g'risida hech qanday gap yo'q edi. Gibbs paradoksi kvant fizikasi nuqtayi nazaridan juda oson hal bo'ladi.



3.3- rasm. Murakkab sistemalarda qaytuvchi (D) va qaytmas (C) jarayonlarni ko'rsatuvchi diagramma.

tengsizlikni olamiz. Bu tengsizliklardan shu narsa ko'rinish turibdiki, qaytmas jarayonlarda sistema entropiyasi o'sib borar ekan. O'sish muvozanat holat yuzaga kelguncha davom etadi. Adiabatik qaytmas jarayonlarda esa $dS \geq 0$ yoki $\Delta S \geq 0$ bo'ladi, ya'ni

$$\Delta S > \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \quad \text{yoki} \quad dS > \frac{\delta Q}{T},$$

bu tengsizlik nomuvozanat jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonunining miqdoriy ifodasi deb yuritiladi.

Qaytmas va qaytuvchi jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy qonuni umumiyl holda quydagicha yoziladi:

$$TdS \geq dE + \sum_i f_i d\lambda_i. \quad (3.100)$$

3.16. Holatning termik va kalorik tenglamalari orasidagi bog'lanish

Termodinamikaning birinchi va ikkinchi qonuni sistema holatining termik va kalorik tenglamalarini bilmagan holda ular orasidagi bog'lanishni aniqlash imkonini beradi. Bu masalani avval murakkab sistema uchun ko'rib chiqamiz. Bizga ma'lumki, termodinamika birinchi va ikkinchi qonunlari

$$\delta Q = dE + \sum_i f_i \delta \lambda_i,$$

$$\delta Q = TdS$$

ko'rinishda yoziladi. Bu ikkala tenglamani birlashtirib umumiy tenglamani olamiz, ya'ni

$$dS = \frac{1}{T} \left(dE + \sum_i f_i \delta \lambda_i \right). \quad (3.101)$$

Entropiya ($S = S(T, \lambda_i)$) va ichki energiya ($E = E(T, \lambda_i)$) holat funksiyasi ekanligini hisobga olib, (3.101) tenglamadagi differensiallarni hisoblaymiz va bir xil differensiallar oldidagi kattaliklarni tenglashtiramiz:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\lambda_i} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{\lambda_i}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right)_T + f_i \right]. \quad (3.102)$$

Bu tenglamalardan, mos ravishda, o'zgarmas temperaturadada λ_i va o'zgarmas λ_i da temperatura bo'yicha hosila olamiz va natijalarни tenglashtirib termik va kalorik kattaliklar orasidagi muhim bog'lanishni olamiz:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial T} \right)_{\lambda_i} = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right)_T + f_i \right]. \quad (3.103)$$

Bu ifodalarga asosan entropiyani hisoblash formulalari (3.88) va (3.90) quyidagi ko'rinishlarni oladi:

$$S - S_0 = \int \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{\lambda_i} dT + T \sum_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial T} \right)_{\lambda_i} d\lambda_i \right] \quad (3.104)$$

va

$$S = \int C_V \frac{dT}{T} + \int \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV + S_0. \quad (3.105)$$

Oddiy sistema uchun (3.103) bog'lanish quyidagicha yoziladi:

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p. \quad (3.106)$$

(3.106) ifoda bir qator termodinamik masalalarni yechish uchun qulaylik yaratadi.

Masalan, (3.106) tenglama yordamida (3.45)ni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$C_p - C_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

yoki

$$C_p - C_V = \frac{TV_0\alpha^2}{\beta}, \quad (3.107)$$

bu yerda $\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ – hajm kengayishi; $\beta = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ – siqilish koeffitsiyentlari. (3.107) formuladan $t = 4^\circ\text{C}$ da $C_p = C_V$ ekanligi kelib chiqadi, chunki bu temperaturada $\alpha = 0$. Demak, $t = 4^\circ\text{C}$ da suv o'zini qattiq jism kabi tutar ekan.

Agar $0 < t < 4^\circ\text{C}$ temperatura intervalda suv adiabatik siqlsa, uning temperaturasi ko'tarilish o'rniga pasayadi, ya'ni soviydi. Haqiqatan ham, termodinamika birinchi qonuniga asosan

$$\begin{aligned} \delta Q &= C_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] dV = \\ &= C_V dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV = C_V dT + \frac{\alpha T}{\beta} dV = 0. \end{aligned}$$

Oxirgi ifodani integrallash natijasida quyidagini hosil qilamiz:

$$\Delta T = - \frac{T}{C_V} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \Delta V. \quad (3.108)$$

Bu ifodadagi α temperatura $0 < t < 4^\circ\text{C}$ intervalida manfiy bo'lganligi uchun suv sinqilganda ($\Delta V < 0$) uning temperaturasi pasayadi, ya'ni $\Delta T < 0$. Bu anomal effektdir.

Van-der-Vaals gazi uchun adiabata tenglamasini yozaylik. Bu masalani echish uchun (3.105) tenglamaga kiruvchi kattaliklarni Van-der-Vaals gazi uchun yozamiz. Ya'ni

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{V-b}.$$

Bu ifodani (3.105) qo'ysak, Van-der-Vaals gazi entropiyasi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$S = \int C_V \frac{dT}{T} + R \ln(V-b) + S_0.$$

Bu yerda issiqlik sig'imi temperaturaga kuchsiz bog'langan deb faraz qilsak, yuqoridagi ifoda

$$S = C_v \ln T + R \ln(V - b) + S_0 \quad (3.109)$$

ko'rinish oladi. Adiabatik jarayonlarda entropiya o'zgarmas bo'lganligi sababli $C_v = \text{const}$ holi uchun Van-der-Vaals adiabata tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$T(V - b)^{R/C_v} = \text{const}$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamani o'zgaruvchilarda yozamiz:

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b)^{1+R/C_v} = \text{const.}$$

Issiqlik sig'imi temperaturaga bog'liq bo'lsa, quyidagi tenglamani olamiz:

$$(V - b) \exp\left(-\frac{1}{R} \int \frac{C_v}{T} dT\right) = \text{const.}$$

3.17. Bolsman prinsipi

Bolsman prinsipiga ko'ra sistema entropiyasi S holat ehti-molligi W bilan funksional bog'langan bo'ladi, ya'ni $S = f(W)$. Bu bog'lanishni aniqlash uchun sistemani ikki bo'lakdan tashkil topgan deb faraz qilamiz. U holda prinsipga asosan $S_1 = f(W_1)$, $S_2 = f(W_2)$ bo'ladi. Entropiya additiv bo'lganligi uchun esa

$$S = S_1 + S_2 = f(W_1) + f(W_2) = f(W) \quad (3.110)$$

bo'ladi. O'zaro bog'lanmagan sistemalar uchun $W = W_1 W_2$. Shunga ko'ra (3.110) dagi $f(W)$ ni aniqlash uchun funksional ko'rinishdagi

$$f(W_1) + f(W_2) = f(W_1 W_2) \quad (3.111)$$

tenglamani olamiz. Bu tenglamadan W_1 va W_2 bo'yicha hosila olib, mos ravishda, ikkita tenglama olamiz:

$$\begin{aligned} f'(W_1) &= W_2 f'(W_1 W_2), \\ f'(W_2) &= W_1 f'(W_1 W_2). \end{aligned} \quad (3.112)$$

(3.110) ifodadagi tenglamalarni hadlab nisbatini olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$W_1 f(W_1) = W_2 f(W_2). \quad (3.113)$$

Ushbu tenglamaning chap tomoni faqat W_1 ga o'ng tomoni esa W_2 ga bog'liq bo'lganligi uchun

$$W f(W) - \text{const} - k \quad (3.114)$$

shart kelib chiqadi. Ikkinchchi tomonidan $S = f(W)$ ekanligini hisobga olib quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$dS = k \frac{dW}{W}. \quad (3.115)$$

Bu tenglamani integrallab, sistema entropiyasi holat ehtimolligi bilan

$$S = k \ln W \quad (3.116)$$

ko'rinishda bog'langan ekanligini olamiz. Bunday bog'lanish Bolsman prinsipi deyiladi.

3.18. Termodinamika ikkinchi qonunini tatbiq qilish chegarasi

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, termodinamika katta sondagi zarralardan tashkil topgan muvozanatdagi sistemalarda o'tayotgan jarayonlarni va qonuniyatlarni o'rganadi. Termodinamika ikkinchi qonuni ish, energiya va issiqlik orasidagi munosabatni belgilaydi. Shu uchta kattaliklardan uchinchisi, ya'ni issiqlik faqat katta sondagi zarralardan tashkil topgan sistemalarda ma'no kasb etadi. Molekulalar o'lchami tartibidagi sistemalar uchun issiqlik tushunchasining ma'nosi yo'q. Bunday sistemalar uchun termodinamikaning ikkinchi qonunini yozib bo'lmaydi. Shunday qilib ikkinchi qonun uchun, va demak, butun termodinamika uchun uni tatbiq qilishning quyi chegarasi mavjudligi, ya'ni uni «mikrosistemalar uchun tatbiq qilish mumkin emasligi» kelib chiqadi.

Termodinamika ikkinchi qonuning tatbiq qilishni yuqori chegarasini uzoqdan ta'sir qiluvchi xarakterga ega bo'lgan gravitatsion kuchlar belgilaydi. Koinotdagi galaktikalar va ularni tashkil qiluvchi osmon jismlarining ichki energiyasi ular orasidagi ta'sir energiyasi tartibida bo'lganligi sababli sistema-

ning energiyasini alohida qismlar energiyalarining yig'indisi ko'rinishida yozib bo'lmaydi. Termodinamikaning asosiy sharti – o'zaro ta'sir kuchisiz bo'lishi kerak. Shu sababli termodinamikani koinot jismlariga tatbiq qilib bo'lmaydi. XIX asrda ikkinchi qonunni bir butun koinotga asossiz tatbiq qilinishi «koinotning issiqlik o'limi» degan noto'g'ri fikrga olib keldi. Rudolf Klauziusning fikri bo'yicha «dunyo energiyasi o'zgarmaydi, entropiyasi esa maksimumga intiladi». Boshqacha qilib aytganda termodinamik muvozanat barqaror topadi, demak, hamma makroskopik jarayonlar, jumladan hayot ham to'xtaydi.

Bu g'oyaga qarshi «katta fluktuatsiya» g'oyasi ilgari suriladi va ikkinchi qonunning statistik tabiatini ochib beriladi. Bolsman bo'yicha Koinot termodinamik muvozanat holatda bo'ladi, lekin yetarli darajada katta fluktuatsiyalar ham yuzaga kelib turadi. Har qanday fluktuatsiya kabi Koinotning bir qismida paydo bo'lgan fluktuatsiya so'rilib ketadi, shu vaqtning o'zida uning yana boshqa qismida paydo bo'ladi. Bolsmanning bu fikri M.P. Bronshteyn tomonidan asosli tanqid qilinadi. Zamonaviy nazariyaga asosan Koinot kengayib boruvchi nostatsionar sistemadir.

3.19. Termodinamikaning uchinchi qonuni. Nernst issiqlik teoremasi

Past temperaturalar sohasida jismlarning xususiyatlarini tekshirish natijasida Nernst XX asr boshlarida (1906- yil) termodinamikaning uchinchi qonunini ta'riflaydi. Uchinchi qonunni to'g'ridan-to'g'ri tatbiq qilish sohasi past temperaturalarda o'tadigan jarayonlardir. Ammo, uchinchi qonunni keng temperatura intervalida ham tatbiq qilish mumkin.

Termodinamika uchinchi qonuning yaratilishi, turli moddalarining bir-birlari bilan kimyoviy reaksiyaga kirish qobiliyatini aniqlash bilan bog'langandir. Bu esa kimyoviy reaksiya vaqtida kuchning bajargan maksimal ishi bilan aniqlanadi. Nernst uchinchi qonunni quyidagicha ta'riflaydi:

absolut nol temperaturaga yaqinlashishda har qanday muvozanatdagi sistema entropiyasi, izotermik jarayonlarda, holatning termodinamik parametrlariga bog'liq bo'lmay qoladi va T = 0 yaqinida hamma sistemalar uchun bir xil doimiy universal qiymat qabul qiladi, bu qiymatni nolga teng deyish mumkin. Ya'ni

$$\lim_{T \rightarrow 0} [S(T, \chi_2) - S(T, \chi_1)] = 0 \quad (3.117)$$

yoki

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial S}{\partial \chi} \right)_T = 0, \quad \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial S}{\partial f_i} \right)_T = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)_T = 0, \quad (3.118)$$

bu yerda χ – qandaydir termodinamik parametr (f_i yoki λ_i). (3.117)ga asosan, $T \rightarrow 0$ da sistema entropiyasining doimiyligi ($S \rightarrow 0$) shuni anglatadiki, izotermik jarayon $T = 0$ K bir vaqtning o'zida izoentropik jarayon ham bo'ladi va, demak, adiabatik jarayon hamdir.

Demak, uchinchi qonun bo'yicha: *nol izotetrma nol izoentropiya va adiabata bilan mos tushadi*. Bu ta'rif Nernstning issiqlik teoremasi deb yuritiladi. Termodinamikaning uchinchi qonunidan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1. Absolut nol temperaturaga yetishish mumkin emas.
2. $T \rightarrow 0$ K da termik koefitsiyentlar nolga intiladi.
3. $T \rightarrow 0$ K da issiqlik sig'imi lar nolga teng bo'ladi.
4. $T \rightarrow 0$ K da sistema entropiyasini hisoblash faqat issiqlik sig'imirining temperaturaga bog'liqligini topishga olib keladi, ya'ni

$$S(T, V) = \int_0^T \frac{C_V}{T} dT \quad \text{va} \quad S(T, p) = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT. \quad (3.119)$$

Uchinchi qonunga asosan, $T \rightarrow 0$ da entropiya $S \rightarrow 0$ ga intilishi uchun C_V va C_p lar T chiziqli funksiyasiga nisbatan tezroq nolga intilishi kelib chiqadi. $T \rightarrow 0$ da ideal gaz o'zining ideal gazlik xususiyatini yo'qotadi, ya'ni aynigan holatda bo'ladi.

Termodinamikaning uchinchi qonuni sistemaning kvant xususiyatidan kelib chiqadi va barcha urinishlarga qaramasdan klassik fizika doirasida uni nazariy isbot qilib bo'lmaydi. Klassik fizikada bu qonun tajriba natijalari asosida yaratilgan. Nernstning issiqlik teoremasi va undan kelib chiqadigan xulosalar statistik fizika qonunlari asosida juda oson tushintiriladi.

Issiqlik sig'imi aniq musbat bo'lganligi uchun temperatura oshishi bilan sistemaning ichki energiyasi ham oshib boradi, va aksincha, temperatura pasayishi bilan energiya kamayadi. Temperatura absolut nolga intilganda energiya nolga intiladi.

Sistema bir jinsli, xususan, kimyoviy bir jinsli bo'lsin. Sistemani faraziy bo'laklarga ajratamiz, bu bo'laklarning energiyasi temperatura absolut nolga intilganda o'zining minimum qiy-matiga intiladi, demak, bir butun sistemaning energiyasi ham minimumga intiladi. Bunga asosan, kvant nazariyasiga ko'ra, sistema mikroholatlarining statistik vazni biday bo'lib birga teng bo'ladi. Entropiya statistik vazndan olingan logorifm bo'lganligi uchun u nolga teng bo'ladi.

Faraz qilaylik, kvant mexanika qonunlariga bo'ysuninuvchi sistema $\bar{\epsilon}_i$ diskret energetik holatlardan birortasida statistik muvozanatda yotgan bo'lsin. Temperatura pasayishi bilan yuqorida ta'kidlaganimizdek u pastki energetik holatlarga tusha boshlaydi va temperatura nolga intilganda eng quyi holatga tushadi. Ikkinchini tomonidan, o'ta past temperaturalarda eng quyi va birinchi holatlarning energiyalarining farqi issiqlik energiyasidan juda katta bo'ladi, ya'ni

$$kT \ll \Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_0.$$

Demak, sistemaning ϵ_0 holatdan ϵ_1 holatga o'tishi uchun issiqlik energiyasi etarli emas va sistema ϵ_0 energetik holatda qoladi.

Bunday sistema entropiyasi $S = k \ln W_0$ Boltzman formulasi yoki $S = k \ln \Omega_0$ formula bilan aniqlanadi. Bu yerda W_0 – sistemaning asosiy holatda bo'lish ehtimolligi, Ω_0 – eng quyi sath energiyasi ϵ_0 ga to'g'ri kelgan kvant holatlar soni. Absolut nolda sistema asosiy holatdan chiqib ketolmaganligi uchun temperatura o'zgarishi bilan energiya o'zgarmaydi. Bu holda

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial \epsilon_0}{\partial T} \right)_V = 0$$

bo'ladi. Sistemaning asosiy holatda bo'lish ehtimolligi va holatlar soni (vazni) $\Omega_0 = \Omega(\epsilon_0) = 1$ bo'ladi. Demak,

$$S = k \ln \Omega(\epsilon_0) = 0.$$

Shunday qilib, Nernst teoremasini isbot qildik.

Yana shuni ta'kidlash lozimki, termodinamikaning uchinchi qonuni, ikkinchi qonun kabi, keng ko'lamda tajribalarda o'z isbotini topmagan. Masalan, metostabil (amorf, shishasimonlar va boshqalar) sistemalar uchun uchinchi qonun bajarilmaydi. Bunday sistemalarga uchinchi qonun tatbiq qilinmaydi.

3.20. Termodinamik metodlar

Termodinamikada ikkita tekshirish metodi qo'llaniladi. Bular doiraviy jarayonlar va termodinamik potensiallar metodidir. Doiraviy jarayonlar metodining mazmuni shundan iboratki, fizik hodisalar uchun aniq qonuniyatlarni tiklashda, unga mos holda tanlangan qaytuvchi sikl olib qaraladi va bu tanlangan siklni tahlil qilish uchun termodinamikaning birinchi va ikkinchi qonunlarining miqdoriy ifodalarini:

$$\oint \delta Q = A, \quad (3.120)$$

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad \text{yoki} \quad dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (3.121)$$

tatbiq qilinadi.

Tanlangan qaytuvchi siklni faraziy kichik bo'laklarga bo'lamiz. Bunda aksariyat hollarda har bir bo'lakka Karno siklini mos keltirish mumkin. Kichik Karno sikllari uchun (3.121) o'rinli bo'ladi, demak, to'liq sikl uchun ham (3.121) o'rinli bo'ladi. Bu yo'l sistemaning xususiyatlarini ochishi mumkin. Shunday qilib sikl uchun (3.120) yordamida maksimal ishni topish va (3.121) ifodalarga kiruvchi zaruriy kattaliklarni hisoblash imkoniyatini beradi. Bu ifodalar yordamida siklning hamma elementlari uchun izlanayotgan noma'lum qonuniyatlarni ochish mumkin bo'ladi.

Sikllar metodi ustida ko'p to'xtalmaymiz, faqat shuni ta'kidlaymizki, uning yordamida elektr yurituvchi kuchni, sirt taranglik koeffitsiyentining va to'yingan bug' bosimining va h. k. larning temperaturaga bog'liqligini aniqlash mumkin.

Termodinamik potensiallar metodi to'g'risida batafsilroq to'xtalamiz. Bu metod Gibbs tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, termodinamikaning asosiy tenglamasi (3.87)ga asoslanadi. Termodinamik potensiallar metodining mazmuni shundan iboratki, (3.87) tenglama har xil sharoitlarda sistema holatini xarakterlovchi yangi funksiyalarni kiritish imkonini beradi. Sistema holati o'zgarganda bu funksiyalarning o'zgarishi to'liq differensialni beradi. Bu funksiyalar yordamida fizikaviy hodisalarini tahlil qilishda zarur bo'lgan termik, kalorik va boshqa tifdagi tenglamalarni tuzish mumkin.

Biz eng avval oddiy sistemani olib qaraylik. (3.87) da $f_i = p$ va $\lambda_i = V$ desak, u holda

$$TdS = dE + pdV. \quad (3.122)$$

Bu tenglama beshta termodinamik kattalik T, S, E, p, V larni bir-biriga bog'laydi. Bunday oddiy sistema holati o'zaro bog'lanmagan ikkita parametr orqali aniqlanadi. Agar beshta o'zgaruvchisi kattaliklardan ikkitasini o'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilar deb tanlab olsak, u vaqtida (3.122) tenglama uchta noma'lumni o'z ichiga oladi. Bu uchta noma'lum kattaliklarni topish uchun (3.122) dan tashqari yana ikkita tenglama bo'lishi zarurdir. Bunday tenglama – holatning termik va kalorik tenglamalari bo'lishi mumkin. Natijada uchta tenglama yordamida noma'lum bo'lgan uchta kattaliklarni aniqlash mumkin bo'ladi.

Ammo noma'lum kattaliklarni hisoblashda qulayroq metod mavjud ekan. Buni Gibbs ko'rsatadi. Gibbs bo'yicha shunday funksiyani topish kerakki, uchta tenglama tuzmasdan turib, uchta noma'lum kattalikni topish mumkin bo'lsin. Bu termodinamik potensiallar metodi deb yuritiladi.

Oddiy sistema holatini aniqlovchi shunday funksiyalardan o'ntasini topish mumkin. Ammo bu funksiyalar ichida eng ko'p ishlataladiganlari to'rtadir:

$$E = E(S, V), \quad F = F(T, V), \quad \Phi = \Phi(T, p), \quad \chi = \chi(S, p).$$

1. Ichki energiya

Agar ichki energiya entropiya va hajmnning funksiyasi bo'lsa, u holda ichki energiya termodinamik funksiya bo'la olar ekan. Haqiqatan ham, (3.122) tenglamadan:

$$dE = TdS - pdV. \quad (3.123)$$

Bu ifoda yordamida qolgan ikkita noma'lum termik o'zgaruvchanlar T va p ni topish mumkin:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V = T \quad \text{va} \quad \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = -p. \quad (3.124)$$

Bu ifodadan ikkinchi tartibli differensial olsak:

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V \quad \text{va} \quad \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S. \quad (3.125)$$

Ushbu tengliklardan issiqlik sig'imi C_v va izoentropik elastiklik modeli K_s ni olamiz. (3.124) dan ikkinchi tartibli aralash differential olish natijasida muhim tenglikni olamiz:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = - \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V . \quad (3.126)$$

Bu tenglama adiabatik va izoxorik jarayonlarda sistema xossalari bir-biriga bog'laydi. Ana shunday bog'lanishlarni topish termodinamik potensiallar metodining mazmunini tashkil qiladi. Yuqorida kattaliklarni olish uchun ichki energiyani oshkora bilish shart emas. Shuning uchun $E(S, V)$ sistema holtini to'liq aniqlaydi, ya'ni sistema uchun xarakteristik funksiya yoki termodinamik potensial bo'ladi.

2. Erkin energiya

Agar oddiy sistema uchun o'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilar sifatida T va V tanlansa, u holda Lejandr metodiga ko'ra (3.122)ning ikkala tomoniga $d(-TS)$ ni qo'shish tufayli

$$dF = -SdT - pdV \quad (3.127)$$

tenglikni olamiz. Bu yerda $F = E - TS$ bo'lib, erkin energiya yoki Gelmgols energiyasi ham deb yuritiladi, chunki bu tushunchani Gelmgols kiritgan. (3.127) tenglamadan temperatura va hajm bo'yicha differensiallash tufayli noma'lum kattaliklar entropiya S ni, bosim p ni va $E = F + TS$ dan ichki energiyani topamiz. (3.127) dan ikkinchi tartibli differensial olish natijasida issiqlik sig'imi C_v va termik siqilish koeffitsiyenti β ni olamiz.

Agar (3.127) tenglamadan T va V bo'yicha ikkinchi tartibli aralash differensial olsak, termodinamikada muhim bo'lgan ikkinchi tenglikni olamiz:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V . \quad (3.128)$$

Erkin energiya shunday energiyaki, adiabatik jarayonlarda ichki energiya qanday rol o'ynasa, izotermik jarayonlarda erkin energiya shunday rol o'ynaydi. Boshqacha qilib aytganda, izotermik jarayonlarda ish erkin energyaning kamayishi hisobiga bajariladi, ya'ni

$$\delta A = -(\Delta F)_T = -(F_2 - F_1)_T . \quad (3.129)$$

Bir mol Van-der-Vaals gazining qaytuvchi izotermik kengayishida bajarilgan ishni ko'rib chiqamiz. Ish uchun olingan (3.129) ifoda yordamida bir mol Van-der-Vaals gazining qaytuvchi izotermik kengayishida bajarilgan ishni hisoblaymiz:

$$\delta A = -(\Delta F)_T = -d(E - TS)_T = -(dE - TdS)_T = pdV.$$

Bu ifodadagi p ni bir mol gaz uchun yozilgan Van-der-Vaals tenglamasidan topib o'rniqa qo'yamiz va «1» va «2» nuqtalar orasida integrallaymiz. Natijada bajarilgan ish uchun quyidagi natijani olamiz:

$$A = RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} + a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

3. Gibbs termodinamik potensiali

Agar o'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchi sifatida T va p bo'lsa, u holda $\Phi = \Phi(T, p)$ funksiya termodinamik potensial bo'la oladi. Ana shu termodinamik potensialining ko'rinishini olish uchun (3.127) tenglamani har ikki tomoniga $d(pV)$ to'la differensialni qo'shamiz, natijada

$$d\Phi = -SdT + Vdp \quad (3.130)$$

tenglamani olamiz. Bu yerda $\Phi = F + pV = E - TS + pV$ ga teng bo'lib, Gibbs termodinamik potensiali deb yuritiladi. Bu Gibbs tomonidan kiritilgan (3.130) tenglamadan doimiy temperatura va bosimda differensiallash tufayli noma'lum kattaliklar entropiya S , hajm V va $E = \Phi + TS - pV$ dan ichki energiyani olamiz. (3.130) dan ikkinchi marotaba differensiallash tufayli issiqlik sig'imi C_p va termik siqilish koeffitsiyenti β ni topamiz. (3.130) tenglamadan T va p bo'yicha ikkinchi tartibli aralash differensial olsak, u holda termodinamikada muhim bo'lgan uchinchi munosabatni olamiz:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T. \quad (3.131)$$

Gibbs termodinamik potensialining fizik ma'nosi izotermik-izobarik jarayonlarda nomexanik kuchlarning bajargan ishi Gibbs termodinamik potensialining kamayishi hisobiga o'tadi, ya'ni

$$A_{\text{nomex}} = -(\Delta\Phi)_{T,p} = -(\Phi_2 - \Phi_1)_{T,p}. \quad (1.32)$$

4. Entalpiya

Agar oddiy sistema uchun o'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilar qilib, entropiya S va bosim p jufti olinsa, u holda (3.122) tenglamaning har ikki tomoniga $d(pV)$ to'liq differensialni qo'shish tufayli

$$d\chi = TdS + Vdp \quad (3.133)$$

tenglamani olamiz. Bu yerda $\chi = E + pV$ bo'lib, entalpiya deb yuritiladi. (3.133) tenglamadan noma'lum bo'lgan kattaliklar temperatura T , hajm V va ichki energiya $E = \chi - pV$ topiladi. (3.133) tenglamadan S va p bo'yicha ikki marotaba differensiallash natijasida issiqlik sig'imi C_p va izoentropik elastiklik moduli K_s ni topish mumkin bo'ladi. (3.133) dan S va p bo'yicha ikkinchi tartibli aralash differensial olganimizda termodinamikada muhim bo'lgan to'rtinchi munosabatni olamiz:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_p. \quad (3.134)$$

Murakkab sistemalarda adiabatik–izobarik jarayonlarda hajarilgan ish entalpiyaning kamayishi hisobiga bo'ladi, ya'ni

$$A_{\text{nomex}} = -(\Delta\chi)_{S,p} = -(\chi_2 - \chi_1)_{S,p}. \quad (3.135)$$

Oddiy sistema misolida termodinamik potensiallar metodi bilan tanishib chiqdik. Bu metodni ideal gazlarga tatbiq qilamiz.

3.21. Ideal gaz uchun termodinamik potensiallar

Oldingi mavzuda sistema holatini aniqlovchi xarakteristik funksiyalar, ya'ni termodinamik potensiallar metodi termodinamuning muhim yutug'i ekanligini ko'rib chiqdik. Lekin termodinamika doirasida potensialarning oshkora ko'rinishini topish mumkin emas. Faqat ayrim hollarda, xususan, ideal gaz va mayozanatlari nurlanish uchun potensialarning oshkora ko'rinishini topish mumkin. Boshqa hollarda potensiallar tajriba natijalari ororda tiklanadi yoki statistik metodlar yordamida hisoblanadi.

Bizga ma'lumki ideal gaz ichki energiyasi

$$E = C_V T + E_0 \quad (3.136)$$

ko'rinishga ega. Ichki energiya bu ko'rinishda termodinamik potensial bo'la olmaydi. Termodinamik potensial bo'lishi uchun u hajm va entropiyaning funksiyasi, ya'ni $E = E(S, V)$ ko'rinishda bo'lishi kerak. Ichki energiya termodinamik potensial bo'lishi uchun temperaturani entropiya orqali ifodalash kerak. Bizga ma'lumki, ideal gaz entropiyasi $S = C_V \ln T + R \ln V + S_0$ ko'rinishda yoziladi. Bu ifodadan temperaturani topib (3.136) ifodaga qo'yamiz va ichki energiya uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$E(S, V) = \frac{C_V}{V^{\gamma-1}} \exp\left(\frac{S-S_0}{C_V}\right) + E_0. \quad (3.137)$$

Bu ifoda termodinamik potensial bo'la oladi. Undan foydalanib, ideal gaz holat tenglamasi $pV = RT$ va adiabata tenglamasi $pV^\gamma = \text{const}$ ni topish mumkin.

Erkin energiya $F(T, V) = E - TS$ ni, ichki energiya va entropiya ifodalarini bilgan holda, quyidagicha yozish mumkin:

$$F(T, V) = C_V T(1 - \ln T) - RT \ln V - TS_0 + F_0, \quad (3.138)$$

bu yerda F_0 – erkin energiyaning $T = 0$ dagi qiymati. Shunga o'xshash Gibbs energiyasini quyidagicha yozamiz:

$$\Phi(T, p) = C_p T(1 - \ln T) - RT \ln p - TS_0 + \Phi_0, \quad (3.139)$$

bu yerda Φ_0 – Gibbs energiyasining $T = 0$ dagi qiymati. Ichki energiyani termodinamik potensialga keltirish yo'li bilan erkin va Gibbs energiyalarini ham termodinamik potensial ko'rinishiga keltirish mumkin. Boshqa termodinamik kattaliklarni ham termodinamik potensial ko'rinishda yozish mumkin. Masa-lan, ideal gaz entalpiyasining potensial ko'rinishini keltiramiz:

$$\chi(S, p) = E + pV = C_p p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{S-S_0}{C_p}} + \chi_0. \quad (3.140)$$

3.22. Murakkab sistemalar termodinamik potensiallari

Bir nechta tashqi kuchlar ta'siri ostida murakkab sistema termodinamik potensiallarini ko'raylik. Bu holda termodinamikaning asosiy tenglamasi

$$TdS = dE + \sum_i f_i d\lambda_i$$

dan foydalanamiz. Agar sistemaning holati umumlashgan tashqi parametrlar λ_i va entropiya S orqali aniqlansa, u termodinamik potensial bo'lib, ichki energiya $E = E(S, \lambda_i)$ hisoblanadi, o'zgarishi esa

$$dE = TdS - \sum_i f_i d\lambda_i.$$

Agar sistemaning holati tashqi parametrlar λ_i va T temperatura orqali aniqlansa, u holda termodinamik potensial bo'lib, erkin energiya $F = F(S, \lambda_i)$ hisoblanadi:

$$dF = -SdT - \sum_i f_i d\lambda_i.$$

Agar sistemaning holati berilgan o'zgaruvchilar $T, p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ orqali aniqlansa, u holda termodinamik potensial bo'lib, Gibbs termodinamik potensiali $\Phi = \Phi(T, p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ hisoblanadi. O'zgarishi esa

$$d\Phi = -SdT + Vdp - \sum_i f_i d\lambda_i$$

bo'ladi. Agar o'zaro bog'lanmagan parametrlar bo'lib, $p, S, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ hisoblansa, u holda $\chi = \chi(p, S, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, entalpiya termodinamik potensial bo'lib, hisoblanadi. O'zgarishi esa

$$d\chi = TdS + Vdp - \sum_i f_i d\lambda_i$$

bo'ladi. Bu termodinamik potensiallar additiv va holatning bir qiyimatli funksiyalari bo'lib hisoblanadi. Bu termodinamik potensiallarning kamayishi to'g'ri kelgan sharoitda sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarning bajargan ishini aniqlaydi.

3.23. Gibbs–Gelmgols tenglamalari

Termodinamik xarakteristik funksiyalar o'zaro bog'langandir. Agar ulardan birortasi ma'lum bo'lsa, qolganlarini aniqlash mumkin.

I- hol. Erkin energiya $F = E - TS$ berilgan bo'lsa, u holda ichki energiya E ni hisoblash mumkin. Entropiya S ni (3.127)dan topib, o'rniqa qo'yish natijasida ichki energiya quyidagiga teng bo'ladi:

$$E = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V . \quad (3.141)$$

II- hol. Gibbs termodinamik potensiali $\Phi = \chi - TS$ berilgan bo'lsa, u holda entalpiya χ ni hisoblash mumkin. Entropiyani (3.130)dan topib, o'rniga qo'yish natijasida entalpiyani aniqlash mumkin:

$$\chi = \Phi - T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_p . \quad (3.142)$$

(3.141) va (3.142) tenglamalar Gibbs-Gelmgols tenglamalari deb yuritiladi. Agar $T = 0$ da $F = E_0$ va $\Phi = \chi_0$ bo'lishini hisobga olsak, u holda (3.141) va (3.142)larning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$F = E_0 - T \int_0^T \frac{E - E_0}{T^2} dT , \quad (3.143)$$

$$\Phi = \chi_0 - T \int_0^T \frac{\chi - \chi_0}{T^2} dT , \quad (3.144)$$

bu yerda integrallash doimisi $I(V)$ va $I(p)$ lar $T = 0$ da nolga teng bo'lishligi hisobga olindi.¹⁰ (3.143) va (3.144) ifodalar ichki energiya va entalpiyaning temperaturaga bog'liqligi berilganda erkin energiya va Gibbs termodinamik potensialini topish mumkinligini beradi.

Gibbs-Gelmgols tenglamalari yordamida, izotermik jarayonda mexanik kuchlarni va izotermik-izobarik jarayonda nomechanik kuchlarning bajargan maksimal ishini hisoblash mumkin.

Agar sistema izotermik holda F_1 erkin energiyali F_2 holatdan erkin energiyali holatga o'tsa, u holda bajarilgan ish erkin energyaning kamayishi hisobiga o'tadi:

$$A = -(\Delta F)_T = -(F_2 - F_1)_T .$$

Gibbs-Gelmgols tenglamasi (3.141)ga asosan quyidagi ifodani olamiz:

$$A = -\Delta E + T \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_V ,$$

¹⁰ Noaniq integrallash doimiylari $I(V)$ va $I(p)$ ning nolga tengligini termodinamikaning birinchi va ikkinchi qonunlari orqali isbotlab bo'lmaydi. Bu masalani o'rganish Nernst tomonidan termodinamikaning uchuinchi qonuning kashf qilinishiga olib keldi.

Bu yerda $\Delta E = E_2 - E_1$ – ichki energiya kamayishi (tajribadan uniplanishi mumkin) izoxorik jarayonda reaksiya vaqtida ajralib chiqqan issiqlik miqdoriga teng: $\Delta E = Q - Q_v$. U holda

$$A = Q_v + T \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_v . \quad (3.145)$$

(3.145) ifoda har qanday izotermik jarayonda sistemaning hamma kuchlarga qarshi bajargan to'la ishi uchun Gibbs–Gelmgols tenglamasi bo'lib hisoblanadi.

Agar sistema izobarik–izotermik holda Φ_1 energiyali holatdan Φ_2 energiyali holatga o'tsa, u holda mexanik bo'limgan kuchlarning bajargan ishi Gibbs energiyasining kamayishi hisobiga o'tadi:

$$A_{\text{nomex}} = -(\Delta\Phi)_{T,p} = -(\Phi_2 - \Phi_1)_{T,p} .$$

Gibbs–Gelmgols tenglamasi (3.142)ga asosan

$$A_{\text{nomex}} = Q_p + T \left(\frac{\partial A_{\text{nomex}}}{\partial T} \right)_p . \quad (3.146)$$

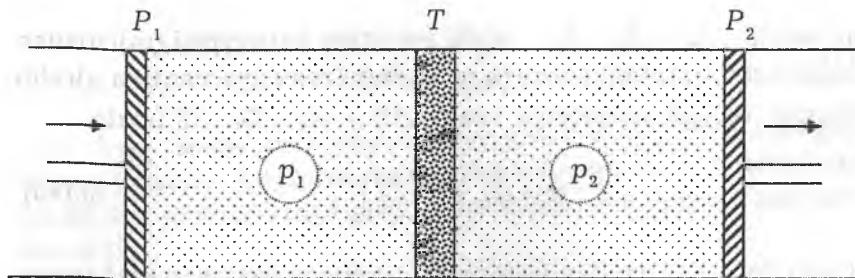
Tenglamani olamiz. Bu yerda Q_p – izobar jarayonda issiqlik effekti: $Q_p = \chi_1 - \chi_2 = E_1 - E_2 + p(V_1 - V_2) = -Q = Q_p$.

Olingan (3.145) va (3.146) Gibbs–Gelmgols tenglamalari ko'rib chiqilgan jarayonlarda bajarilgan maksimal ishni hisoblash imkonini beradi.

3.24. Qaytmas va qaytuvchi adiabatik kengayishda gazlarning sovishi

Gazlarni suyultirish masalasi amaliyotda muhim o'rinn tutadi. Gazlarni suyultirish uchun eng avval uni past temperatura-gacha sovitish kerak. Buning uchun gazning adiabatik holda kengayishida ish bajarishga majbur qilish kerak. Bu holda bajarilgan ish ichki energiyaning kamayishi hisobiga o'tadi. Natijada gaz temperaturasi pasayadi. Adiabatik holda kengayish jarayoni qaytmas yoki qaytuvchi bo'lishi mumkin.

Joul–Tomson tajribasida adiabatik izolatsiyalangan silindrlardan birinchisidagi katta p_1 bosim ostidagi gaz kichik p_2 bosim ostidagi ikkinchi silindrغا statsionar holda o'tkaziladi (3.4- rasm).



3.4- rasm. Joul-Tomson tajribasi qurilmasi: P_1 va P_2 – porshenlar; T – g'ovak to'siq.

Oqimni statsionarligini gazni o'tkazuvchi g'ovak to'siq (T) ta'minlab beradi. Jarayon sekin o'tganligi uchun bosimlarni P_1 va P_2 porshenlarni sekin surish yordamida o'zgarmas ushlab turish mumkin. To'siq borligi bunday jarayon qaytmas adiabatikligidan dalolat beradi. Bu Joul-Tomson jarayoni yoki hodisasi deyiladi. Gazlarni sovutishda katta ahamiyatga ega bo'lган bu jarayon ustida 10 yil tajribalar olib borilgan (1852–1862- yy.).

Demak, Joul-Tomson jarayonida $\Delta p = p_2 - p_1 < 0$ va $\Delta T = T_2 - T_1$ bo'ladi. $\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p}$ nisbat Joul-Tomson hodisasini aniqlovchi koeffitsiyentdir. Agar $\frac{\Delta p}{p_1} \ll 1$ bo'lsa, differensial, agar $\frac{\Delta p}{p_1} < 1$ bo'lsa, integral hodisa deb yuritiladi. Gazning o'tishi statsionar jarayon bo'lганligi uchun entalpiya doimiy bo'ladi, shuning uchun Joul-Tomson jarayoni izoentalpik bo'ladi, ya'ni $\Delta\chi = \chi_2 - \chi_1 = 0$ yoki $\chi_2 = \chi_1$ bo'ladi. $\chi = \chi(T, p)$ desak,

$$\Delta\chi = \left(\frac{\partial\chi}{\partial T}\right)_{\bar{p}} \Delta T + \left(\frac{\partial\chi}{\partial p}\right)_{\bar{T}} \Delta p ,$$

$$d\chi = T dS + V dp \quad \text{va} \quad d\Phi = -S dT + V dp$$

ifodalardan

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V}{C_p} = \frac{T^2}{C_p} \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right) \right]_p \quad (3.147)$$

Joul-Tomson hodisasini ifodalovchi tenglamani olamiz. Agar

$$\left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right) \right]_p > 0$$

bo'lsa, u vaqtida gaz soviydi. Agar

$$\left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right) \right]_p < 0$$

bo'lsa, u vaqtida gaz qiziyydi.

Shu masalani aniq misolda qaraylik. Agar ideal gazni olib qarasak, u holda

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} = 0$$

bo'ladi. Tajriba ham shunday bo'lishini ko'rsatadi. Agar Van-der-Vaals gazini olib qarasak, u holda quyidagi ifodani olamiz:

$$\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{1}{C_p} \left(\frac{2a}{RT} - b \right), \quad (3.148)$$

bu ifodadan $\Delta T \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Ya'ni ideal gazdan chetlanishini ko'rsatadi. (3.148) dan Joul-Tomson hodisasining kattaligi « a » va « b » parametrleriga bog'liq bo'lar ekan.

1. Agar « a » juda katta bo'lib, $b \rightarrow 0$ desak, bu holda

$$\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{2a}{RTC_p} > 0$$

bo'ladi. Bunday holda gaz adiabatik kengayganda sovir ekan, chunki $\Delta T = T_2 - T_1 < 0$ bo'ladi.

2. Agar « b » juda katta bo'lib, $a \rightarrow 0$ desak, bu holda

$$\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p} = -\frac{b}{C_p} < 0$$

bo'ladi. Bu holda gaz isiydi.

Ma'lum bir temperaturada real gazlar uchun Joul-Tomson koefitsiyenti $\mu = 0$, ya'ni $\Delta T = 0$ bo'ladi. Bu shart (3.148) dagi $\frac{2a}{RT} - b = 0$ bo'lsa bajariladi. Umuman, agar (3.147) ning surati

$T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V = 0$ bo'lsa, real gazlar uchun $\mu = 0$ bo'ladi. Bu inversiya nuqtasi, temperatura esa inversiya temperaturasi va

$$T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V = 0 \quad (3.148)$$

esa inversiya egriligi deb yuritiladi. Van-der-Vals gazi uchun inversiya temperaturasi T_i ni aniqlaymiz. Bir mol gaz uchun yozilgan Van-der-Vaals tenglamasi (3.8) dan $p = \text{const}$ deb temperatura bo'yicha hosila olamiz va (3.148) tenglikdagi $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ kattalik uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \simeq \frac{V}{T} - \frac{b}{T} + \frac{2a}{RT^2},$$

Bu ifodani olishda gazning noidealliliga bo'lgan tuzatmalar a va b ning kichik ekanligi hisobga olingan. Inversiya nuqtasida inversiya egriligi nolga teng bo'lishidan Van-der-Vaals gazi uchun inversiya temperaturasi quyidagiga tengligi kelib chiqadi:

$$T_i = \frac{2a}{Rb} = 2T_B,$$

bu yerda $T_B = \frac{a}{Rb}$ bo'lib, Boyl temperaturasi deyiladi.

Inversiya temperaturasi yaqinida Joule-Tomson hodisasi ishorasini o'zgartiradi:

a) inversiya temperaturasidan pastda ($T < T_i$ da) Joule-Tomson hodisasi musbat ($\mu > 0$). Bu holda gaz kengayishida soviydi, chunki va $\Delta T < 0$;

b) inversiya temperaturasidan yuqorida ($T > T_i$ da) Joule-Tomson hodisasi manfiy ($\mu < 0$). Bu holda gaz qiziydi. Aksariyat inert gazlar kengayganda qizishi kuzatilgan.

Sababi shundaki, eksperimental kuzatishlar hamma inert gazlarning inversiya temperaturasi kritik temperurasidan ancha yuqorida bo'lishini ko'rsatadi.

Demak, inert gazlarni adiabatik holda kengayishida sovitish uchun, eng avval, ularning inversiya temperurasini kritik

temperaturagacha keltirish zarur ekan. Inversiya nuqtasida (3.149) ga asosan gazning issiqlik sig‘imlar farqi

$$C_p - C_V = V \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

ko‘rinishni oladi. Bu formula yordamida Van-der-Vaals va Diterichining ikkinchi tenglamasi bilan tavsiflanuvchi gazlar uchun issiqlik sig‘imlar farqi inversiya nuqtasida bir xil qiymat qabul qilishini ko‘rsatish mumkin:

$$C_p - C_V = R \left(1 + \frac{b}{V} \right).$$

Gazlarni qaytuvchi adiabatik kengayishida sovitish uchun tashqaridan ish bajarish kerak. Bu holda temperatura o‘zgarishini $d\chi = Vdp = 0$ va $d\chi = TdS + Vdp$ ifodalar asosida topish mumkin:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \frac{T}{C_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (3.150)$$

Holat tenglamasi qanday bo‘lishidan qat’iy nazar, har qanday gaz uchun har doim $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p > 0$ bo‘ladi. Demak, $\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S < 0$ bo‘ladi. Gaz kengayishida soviydi, chunki $\Delta p < 0$ va $\Delta T < 0$ bo‘ladi. Gazlarning qaytuvchi adiabatik jarayon ostida kengayishida past temperaturalarni olish metodi P.L. Kapitsa tomonidan ishlab chiqilgan va amalda ko‘rsatilgan.

3.25. Magnetiklar va dielektriklar termodinamikasi

Elektr va magnit maydoniga kiritilgan dielektrik va magnetiklarning tabiatini termodinamika nuqtayi nazaridan qarab chiqaylik.

Izotrop dielektrikda tashqi elektr maydonining bajargan ishi

$$\delta A = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{E} d\mathbf{D} \quad (3.151)$$

bo'ladi. Bu yerda elektr maydon kuchlanganligi \mathbf{E} tashqi parametr bo'lib, bunga ikkita ichki parametr – qutblanganlik \mathbf{P} va elektr induksiya vektori \mathbf{D} to'g'ri keladi (3.151) ifoda bilan aniqlanuvchi ish qutblanish ishi emas. Chunki, elektr induksiya vektori, birinchidan, tashqi parametr emas ((3.151) da u tashqi parametr vazifasini o'tamoqda), ikkinchidan elektrodinamikadan ma'lumki, u hosilaviy kattalik, asosiy kattalik elektr maydon kuchlanganlidir. Shuning uchun (3.151) ifodani dielektrikning qutplashdagi ishgia aylantirish kerak. Bu masala ikki yo'l bilan amalgalashdirilishi mumkin:

$$\delta A = -d\left(\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}\right) - d(\mathbf{PE}) + \mathbf{PdE}$$

yoki

$$\delta A = -d\left(\frac{\mathbf{E}^2}{4\pi}\right) - d(\mathbf{PE}) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{DdE}.$$

Bu yerda birinchi had vakuumda elektr maydonini hosil qilishda bajarilgan ish, ikkinchi had tashqi maydonga qarshi bajarilgan ish, uchinchi had esa tom ma'noda dielektrikni qutplashda bajarilgan ish yoki dielektrikning tashqi elektr maydon-dagi potensial energiyasi. Birinchi tenglamada qutblanish, ikkinchida esa elektr induksiya vektori ichki parametr vazifasini o'taydi.

Biz qaytuvchi jarayonlarda tom ma'noda dielektrikning qutblanish ishini qarab chiqamiz. Odatda tom ma'nodagi bajarilgan ish deb,

$$\delta A_\chi = \mathbf{PdE} + d(-\mathbf{PE}) = \delta A + d\left(\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}\right) = -\mathbf{EdP}$$

kattalik qabul qilinadi. U holda qaytuvchi jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$TdS = dE + pdV - \mathbf{EdP}. \quad (3.152)$$

(3.152) dan, termodinamik potensiallarning differensiallari uchun Lejandr metodiga asosan, quyidagilarni olamiz:

$$dE = TdS - pdV + \mathbf{EdP},$$

$$\begin{aligned} dF &= -SdT - pdV + \mathbf{E}d\mathbf{P}, \quad F = E - TS, \\ d\Phi &= -SdT + Vdp - \mathbf{P}d\mathbf{E}, \quad \phi = E - TS + pV - \mathbf{E}\mathbf{P}, \\ d\chi &= TdS + Vdp - \mathbf{P}d\mathbf{E}, \quad \chi = E + pV - \mathbf{E}\mathbf{P}. \end{aligned} \quad (3.153)$$

Magnetiklar uchun termodinamik potensiallarning differensiali quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} dE &= TdS - pdV + Hd\mathbf{M}, \\ dF &= -SdT - pdV + \mathbf{H}d\mathbf{M}, \quad F = E - TS, \\ d\Phi &= -SdT + Vdp - \mathbf{M}d\mathbf{H}, \quad \Phi = E - TS + pV - \mathbf{H}\mathbf{M}, \\ d\chi &= TdS + Vdp - \mathbf{M}d\mathbf{H}, \quad \chi = E + pV - \mathbf{H}\mathbf{M}, \end{aligned} \quad (3.154)$$

bu yerda \mathbf{H} – tashqi magnit maydon kuchlanganligi, \mathbf{M} – magnitlanganlik.

(3.153) va (3.154) tenglamalar yordamida dielektriklar va magnetiklar uchun zarur munosabatlarni olish mumkin. Masa-lan, (3.153) dagi uchinchi tenglamadan:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{E}}\right)_{T,p} = -\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p}\right)_{T,\mathbf{E}}, \quad (3.155)$$

bu yerda $\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{E}}\right)_{T,p}$ – elektr maydoni ta'sirida yuzaga kelgan dielektrik hajmining o'zgarishi bo'lib, bunga hajm elektrostrik-siya hodisasi deyiladi. $\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p}\right)_{T,\mathbf{E}}$ – bosim o'zgarishi bilan dielektrik qutblanganligining o'zgarish hodisasi *pyezoelektrik hodisasi* deyi-ladi.

(3.154) dagi uchinchi tenglamadan quyidagi tenglikni olamiz:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{H}}\right)_{T,p} = -\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p}\right)_{T,\mathbf{H}}, \quad (3.156)$$

bu yerda $\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{H}}\right)_{T,p}$ – hajmiy magnitostriksiya hodisasi deyiladi. $\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p}\right)_{T,\mathbf{H}}$ – magnitoelastik ($\mathbf{H} \neq 0$) yoki pyezomagnit ($\mathbf{H} = 0$) hodisasi deb yuritiladi.

3.26. Magnit va yadro sovitish metodlari

Jismni sovitish faqat adiabatik holda kengaytirish usuli bilan emas, balki sistemada boshqa ko'rinishdagi adiabatik holda bajarilgan ish orqali ham amalga oshirilishi mumkin.

Hozirgi vaqtida o'ta past temperaturalarni ($T < 1 \text{ K}$) ni olishda asosiy metodlardan biri, bu paramagnit tuzlarni adiabatik magnitsizlash metodi bo'lib hisoblanadi. Bu metod 1926-yilda Debay tomonidan taklif qilingan.

Adiabatik magnitsizlashda temperaturaning o'zgarishi magnitokolorik hodisasi deb yuritiladi. Bu hodisaning miqdoriy qiy-mati $\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{H}}\right)_{S,p}$ ni entalpiyaning o'zgarishi $d\chi = TdS + Vdp - M d\mathbf{H}$ dan

topish mumkin. Buning uchun (3.150) da $p \rightarrow -\mathbf{H}$ va $V \rightarrow \mathbf{M}$ almashtirish, ya'ni kengayishda bajarilgan ishni magnitlanishda bajarilgan ish bilan taqqoslash kerak. Natijada

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{H}}\right)_S = -\frac{T}{C_H} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial T}\right)_H. \quad (3.157)$$

Bu yerda C_H – magnit maydon kuchlanganligi o'zgarmas bo'l-gandagi issiqlik sig'imi. Paramagnetiklar uchun $\mathbf{M} = \kappa \mathbf{H}$ bog'-lanishni va Kyuri qonuniga asosan muddaning paramagnit kirituvchanlik absolut temperaturaga teskari proporsionalligini, ya'ni $\kappa = \frac{C}{T}$ munosabatni hisobga olib, (3.157)-ni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{H}}\right)_S = \frac{CH}{TC_H} > 0. \quad (3.158)$$

Bundan ko'rindiki, adiabatik magnitsizlanishda ($d\mathbf{H} < 0$), paramagnit kristall temperaturasi pasayar ekan ($dT < 0$). Debay nazariyasiga ko'ra kristallarning issiqlik sig'imi past temperaturalarda $C_{p,H} = \alpha T^3$. Shuning uchun

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = \frac{CH}{\alpha T^4} \sim \frac{1}{T^4}.$$

Demak, past temperaturalarda temperaturaning o'zgarishi juda katta o'zgarishlarga olib keladi, chunki magnitokolorik

effekt temperaturaning to'rtinchi darajasiga teskari proporsional. Bu metod yordamida 10^{-3} K temperatura olingan. Bu temperaturalarda issiqlik energiya elektron spinlari orasidagi o'zaro ta'sir energiyasi tartibida bo'ladi. Termodinamikaning uchinchi qonuniga asosan temperatura nolga intilganda termodynamik parametrlar, xususan, temperaturaga bog'liq bo'lmay qoladi va magnitokalorik effekt yo'qoladi. Past temperatura olish uchun ishlovchi moddalarda o'ta kuchsiz o'zaro ta'sirni hisobga olish kerak. 0 K temperaturani olishga yaqin yo'l yadro magnitizmidan foydalanish, ya'ni yadrolar spinlarini adiabatik holda magnitsizlash kerak. Bu holda o'zaro ta'sir kuchi 10^{-5} K da namoyon bo'ladi. Bu metod yordamida spinlar temperatura-sini $\sim 10^{-6}$ K da olish mumkin bo'ladi.¹¹

Ferromagnetiklar uchun magnitokalorik effektni hisoblash yuqorida kabi yo'l bilan amalga oshiriladi. Ferromagnetiklar uchun $\mathbf{M} - \kappa\mathbf{H} - \frac{CH}{T-\theta}$ va magnitokalorik effekt kattaligi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = \frac{CTH}{C_H(T-\theta)^2}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu yerda θ – paramagnit nuqtasidagi Kyuri temperaturasi.

3.27. Termodynamik kattaliklarni statistik fizika metodi bo'yicha hisoblash

Muvozanatdagи berk sistema holatini aniqlovchi termodynamik kattaliklarni hisoblashda yuqorida olingan muhim farazni qabul qilamiz: «Makroskopik sistemaning ichki energiyasi E statistik fizika metodi asosida hisoblangan o'rtacha energiyasi $\bar{\varepsilon}$ ga teng». Ya'ni, $E = \bar{\varepsilon}$. Bu yerda Gibbsning kichik kanonik taqsimotini qo'llash natijasida muvozanatdagи berk makroskopik sistemaning ichki energiyasini hisoblash formulasini olamiz:

$$E = \bar{\varepsilon} = \sum_i \bar{\varepsilon}_i W_i = \theta^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial \theta} = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}. \quad (3.159)$$

¹¹ Oxirgi 5–10 yillarda fizikada juda katta yutuqlarga erishildi. Jumladan, lazer yordamida va bug'latish yo'li bilan temperaturani 10^{-6} K gacha pasaytirishga erishildi. Bu to'g'risida Boze kondensat masalasida batafsil to'xtalib o'tamiz.

Entropiyani hisoblash uchun (3.61) ifodaga asosan sistemaning holat funksiyasini bilish yetarli ekan, ya'ni

$$S = \frac{E}{T} + k \ln Z(T, V). \quad (3.160)$$

Erkin energiya $F = E - TS$ (3.160) ga asosan

$$F = -kT \ln Z(T, V). \quad (3.161)$$

Makroskopik sistemada bosim bajargan ish ifodasi

$$\delta A = \sum (W_i d\varepsilon_i) W_i = -pdV$$

dan

$$p = \theta \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \quad (3.162)$$

yoki (3.127) yordamida

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad (3.163)$$

ifodani topamiz.

Bir qator fizik hodisalarni tushuntirishda Gibbs termodinamik potensiali $\Phi(T, p)$ katta rol o'ynaydi. Agar sistemaning holat funksiyasi $Z(T, p)$ ni topish mumkin bo'lsa, u holda

$$\Phi(T, p) = -kT \ln Z(T, p) \quad (3.164)$$

va sistema hajmi uchun

$$V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_T = -kT \frac{\partial \ln Z(T, p)}{\partial p} \quad (3.165)$$

ifodalar olinadi. Yuqorida olingan ifodalardan shu narsa ko'ri nadiki, sistema termodinamik kattaliklarini hisoblashda yagona kattalik holat funksiya Z ni bilish kifoyadir.

3.28. III bobga oid masala va savollar

1. 100 °C va normal bosimda bir mol suvning bug' holiga o'tishida bug'lanish ishi va berilgan issiqlik miqdorini hisoblang.

2. Izotrop dielektrikning qutplashda tashqi maydon bajargan ishni hisoblang.

3. Tashqi parametr λ ga qo'shma bo'lgan umumlashgan kuch f ta'sir etayotgan har qanday oddiy sistema uchun

$$\left(\frac{\partial T}{\partial f} \right)_{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_T \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \right)_f = -1, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{\lambda} = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial f} \right)_{\lambda} \right]^{-1}$$

ayniyat o'rini ekanligini ko'rsating.

4. Van-der-Vaals tenglamasi bilan tavsiflanuvchi gazning kritik parametlari p_k , V_k , T_k va kritik koeffitsiyenti $s = \frac{RT_k}{p_k V_k}$ ni hisoblang.

5. Diterichi birinchi tenglamasi $p(V - b) = RT e^{-a/RTV}$ bilan tafsiflanuvchi gazning kritik parametrlari p_k , V_k , T_k va kritik koeffitsiyenti s ni hisoblang. Katta hajmlarda Diterichi tenglamasi Van-der-Vaals tenglamasiga o'tishini ko'rsating.

6. Diterichi ikkinchi tenglamasi $\left(p + \frac{a}{V^5/3} \right)(V - b) = RT$ bilan tavsiflanuvchi gazning kritik koeffitsiyenti s ni hisoblang. Nati-jani s ning eksperimental qiymati va Van-der-Vaals gazi uchun olingan qiymatlari bilan solishtiring.

7. Klauzius tenglamasi $\left(p + \frac{a}{T(V+C)^2} \right)(V - b) = RT$ bilan tavsiflanuvchi gazning kiritik parametrlari p_k , V_k , T_k va kritik koeffitsiyenti s ni hisoblang.

8. Bertlo tenglamasi $\left(p + \frac{a'}{TV^2} \right)(V - b) = RT$ dagi o'zgarmas kattaliklar a' , b va R larni kritik parametlar p_k , V_k , T_k orqali ifodalang.

Yechish. Kritik nuqtadagi Bertlo tenglamasini:

$$\left(p_k + \frac{a'}{T_k V_k^2} \right)(V_k - b) = RT_k,$$

va

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{T_k} = -\frac{RT_k}{(V_k - b)^2} + \frac{2a'}{T_k V_k^3} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{T_k} = \frac{RT_k}{(V_k - b)^3} - \frac{3a'}{T_k V_k^4} = 0$$

tenglamalarni birgalikda a' , b va R ga nisbatan echib, bu kattaliklarni bosim, hajm va temperaturaning kritik nuqtadagi qiymatlari orqali ifodalarini topamiz, ya'ni

$$a' = 3p_k T_k V_k^2, \quad b = \frac{1}{3} V_k, \quad R = \frac{8p_k V_k}{3T_k}.$$

Eslatma: 4–7- masalalar 8- masala kabi yechiladi.

9. Van-der-Vaals tenglamasini keltirilgan kattaliklar $\pi = p/p_k$, $\varphi = V/V_k$, $\tau = T/T_k$ orqali yozing va $v \gg 1$ holida bu tenglama Klayperon–Mendeleyev tenglamasiga o'tishini ko'rsating.

Ko'rsatma: Van-der-Vaals tenglamasi $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$ dagi

p , V , T , a , b va R larni p_k , V_k va T_k orqali ifoda qilinadi.

10. Van-der-Vaals tenglamasidan foydalanib, gaz uchun ikkinchi, uchinchi, to'rtinchi virial koeffitsiyentlar va Boyl temperurasini toping.

Yechish. Gazning holat tenglamasining virial shakli

$$pV = RT \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{V^n} \right)$$

ko'rinishida yoziladi, bu yerda B_n virial koeffitsiyent deb yuri-tiladi. Van-der-Vaals tenglamasining virial ko'rinishini olaylik:

$$\begin{aligned} p &= \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V} \left(\frac{V}{V-b} - \frac{a}{RTV} \right) = \\ &= \frac{RT}{V} \left(1 + \frac{RTb-a}{RTV} + \frac{b^2}{V^2} + \frac{b^3}{V^3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Bundan

$$B_1 = b - \frac{a}{RT}, \quad B_2 = b^2, \quad B_3 = b^3$$

kelib chiqadi. Boyl temperurasiga $B_1 = 0$ bo'lganda erishiladi.

Demak, Van-der-Vaals gazi uchun $T_B = \frac{a}{Rb}$.

11. Diterichi birinchi va ikkinchi tenglamalari bilan tavsiflanuvchi gaz uchun ikkinchi va to'rtinchi virial koeffitsiyentlar va Boyl temperaturasini aniqlang.

12. Ideal gaz politropa va adiabata tenglamalarini (V , T) va (p , V) o'zgaruvchilarda yozing va boshqa termodinamik jarayonlar uchun tahlil qiling.

13. Elastik muhitda tovushning tarqalish tezligi $v = \sqrt{K/\rho}$ (K – elastiklik moduli; ρ – muhit zichligi) ma'lum deb hisoblab:
a) issiqlik sig'imlar nisbati γ bilan izotermik elastiklik moduli orasidagi bog'lanishni; b) ideal gazda tovush to'lqinining tarqalish tezligining temperaturaga bog'lanishini toping ($\gamma = C_p/C_v$).

14. Van-der-Vaals tenglamasi bilan tavsiflanuvchi gazda tovush tezligini toping.

15. Ideal gaz ichki energiyasi va entalpiyasini issiqlik sig'imlar nisbati va tovush tezligi orqali ifodalang.

16. Sterjen cho'zilishida deformatsiya elastik deb hisoblab, izotermik va adiabatik uzayish koeffitsiyentlari

$$\left(\frac{\partial l}{\partial f} \right)_{ad} = \frac{C_l}{C_f} \left(\frac{\partial l}{\partial f} \right)_{zot}$$

munosabat orqali bog'langanligini ko'rsating. Bu yerda C_l va C_f , mos ravishda, l va f o'zgarmas bo'lgandagi issiqlik sig'imlari, l – sterjening uzunligi, f – sterjenga ta'sir etuvchi kuch.

Ko'rsatma. Bu holda termodinamika birinchi qonuni $\delta Q = dE - fdl$ ko'rinishni oladi.

17. Ideal paramagnetik uchun issiqlik sig'imlari farqi $C_H - C_M$ ni hisoblang.

18. Ideal paramagnetik uchun adiabata tenglamasini yozing.

19. Har qanday bir jinsli modda uchun

$$(C_p - C_v) \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial V} + \left(\frac{\partial C_p}{\partial V} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p - \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V = 1$$

munosabat o'rini ekanligini ko'rsating.

Yechish. Moddaning ichki energiyasi bosim va hajm funksiyasi bo'lsin, ya'ni $E = E(p, V)$. Ichki energiyaning o'zgarishi

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial p} \right)_V dp + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_p dV$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu kirgan xususiy hosilalarni topaylik:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_p &= \left(\frac{\partial(\chi-pV)}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial \chi}{\partial V}\right)_p - p = \\ &= \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - p = C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - p. \end{aligned}$$

Bularni ichki energiya o'zgarishi ifodasiga qo'yamiz va ichki energiya holat funksiyasi, ya'ni bosim va hajm bo'yicha aralash hosila simmetrik ekanligini hisobga olamiz. Bir qator murakkab bo'lмаган soddalashtirishlarni amalga oshirsak, masala sharti isbotlanadi.

20. Entropiya $S = k \ln \Gamma(\varepsilon)$ yoki $S = \ln \Omega(\varepsilon)$ ko'rinishda aniqlanadi. Katta sondagi zarralardan tashkil topgan sistema uchun bu ikkala ifoda ekvivalent ekanligini ko'rsating.

21. Bir jinsli og'irlik kuchi maydonida silindrda joylashgan, yuqorida chegaralanmagan ideal gaz ustuningning issiqlik sig'imi C_p ga tengligi ko'rsatilsin.

22. Balandlikka qarab troposfera temperaturasining pasa-yish sababi tushintirilsin va havoni ideal gaz deb hisoblab, atmosferaning balandlik bo'yicha temperatura gradientini aniqlang.

Yechish. Havo balandlikka ko'tarilganda, kichik bosim soha-siga o'tishi tufayli kengayadi. Bu kengayishni adiabatik deb hisoblash mumkin, chunki havoning issiqlik o'tkazuvchanligi juda kichik. Adiabatik jarayonda $T p^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const.}$ Bu ifodadan

$$\frac{dT}{T} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{dp}{p} = 0.$$

Ikkinci tomondan, balandlik ortishi bilan bosim o'zgarishi $dp = -\rho g dh$, ρ – havo zichligi. Ideal gaz holat tenglamasi

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \text{ dan } \rho = \frac{\mu p}{RT},$$

u holda

$$\frac{dp}{p} = \frac{\mu g}{RT} dh \text{ yoki } \frac{dT}{T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{RT} dh.$$

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R},$$

havo uchun $\gamma = 1,4$; $\gamma = 0,029$ kg/mol. Balandlikka qarab atmosferada gradienti $\frac{dT}{dh} = -9,8 \cdot 10^{-5}$ K/m.

23. Termodinamika birinchi qonunidan foydalanib Klajperon-Mendeleyev tenglamasiga bo'ysunuvchi gaz uchun

$$C_p - C_V = R + V \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_p - p \left(\frac{\partial C_p}{\partial p} \right)_V$$

ekanligini ko'rsating.

24. Ideal elektron gaz holatining termik va kalorik tenglamalari $pV = \frac{2}{3} E$ munosabat bilan bog'langan. Shu gaz uchun adiabata tenglamalari (p, V) va (T, V) o'zgaruvchilarda topilsin.

Yechish: Birinchi qonun ifodasi $\delta Q = dE + pdV$ ga ko'ra

$$\delta Q = \left(\frac{\partial E}{\partial p} \right)_V dp + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_p + p \right] dV$$

yoki

$$\begin{aligned} \delta Q &= \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] dV = \\ &= \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV \end{aligned}$$

bo'ladi. Adiabatik jarayonlarda $\delta Q = 0$ ekanligini hisobga olib, yuqoridaqgi birinchi ifodadan $pV^{5/2} = \text{const}$ va ikkinchi ifodadan $TV^{2/3} = \text{const}$ larni olamiz.

25. Van-der-Vaals gazining entropiyasi hisoblansin va uning adiabata tenglamasi p, V o'zgaruvchilarda topilsin.

26. $C_p - C_V$ ayirmaning hajmiy kengayish koeffitsiyenti α va sifilish koeffitsiyenti β bilan bog'liqligi ko'rsatilsin.

27. Ideal paramagnetklarda ichki energiya magnitlanish vektoriga bog'liq emasligi ko'rsatilsin.

28. Bosimi temperaturaning chiziqli funksiyasi bo‘lgan moddalar uchun C_V ning hajmga bog‘liq emasligi ko‘rsatilsin.

Van-der-Vaals gazi uchun $\frac{\partial C_V}{\partial V} = 0$ tenglik olinsin.

29. Doimiy bosim ostida jism kengayishida uning entropiya-sining o‘zgarishi hisoblansin.

30. Bir xil temperatura orilig‘ida Karko sikli boshqa sikllarga nisbatan eng katta FIK ega ekanligi ko‘rsatilsin.

31. N_1 va N_2 ta zarralardan tashkil topgan ikki xil gaz aralashtirilganda entropiyaning o‘zgarishi hisoblansin.

32. Termodinamikaning uchinchi qonuniga asosan paramagnetiklar uchun Kyuri qonuni ($\theta = C/T$) yetarlicha past temperaturalarda buzilishi ko‘rsatilsin.

33. Sikllar metodi yordamida to‘yingan bug‘ bosimining temperaturaga bog‘lanishini toping.

34. Bir atomli bir mol ideal gaz uchun F , Φ va χ termodynamik potensiallarni toping.

35. Gibbs energiyasi o‘zgarmas bo‘lgan sistemalar uchun holat va kalorik tenglamalar topilsin.

36. Past temperaturalarda metallarda elektron gazining entropiyasi temperaturaga proporsionaldir. Issiqlik sig‘imlar ayirmasi $C_p - C_v$ ning temperaturaga bog‘liqligi topilsin.

37. Siyrak Van-der-Vaals gazi bitta inversiya nuqtasiga ega bo‘ladi. Umumiy holda qanday zichliklarda ikkita inversiya nuqtasi mavjud bo‘ladi. (T , p) o‘zgaruvchilarda Van-der-Vaals gazining inversiya egriligi grafigini tasvirlang.

38. Kyuri qonuniga bo‘ysunuvchi moddalar uchun magnitokalorik effekt kattaligi topilsin.

39. Termodinamika va statistik fizikaning farqi nimada?

40. Ichki parametrlar qanday fizik xususiyatiga qarab ajraladi?

41. Termodinamikaning dastlabki birinchi va ikkinchi fikrlari.

42. Ichki va tashqi energiya deb qanday energiyani tushunasiz?

43. Nima uchun termik va kalorik tenglama deyiladi?

44. Van-der-Vaals tenglamasi verial qatorga yozilsin.

45. Kritik nuqta. Kritik kattaliklar qanday hisoblanadi?

46. Bajarilgan elementar ish va issiqlik miqdori nima uchun to‘liqmas differensianal ko‘rinishida, ichki energiya esa to‘liq differensial ko‘rinishida yoziladi?

47. Issiqliq miqdorining molekular ma’nosи ochilsin.

48. Yashirin issiqlik, Pfaffa tenglamasi.
49. Nima uchun gazlarda bosim o'zgarmas bo'lgandagi issiqliq sig'imi hajm o'zgarmas bo'lgandagi issiqliq sig'imidan katta bo'ladi?
50. Ideal gazlarda har qanday jarayon uchun issiqliq sig'imini qanday hisoblash mumkin?
51. Ideal gazni siqishda gazni sovishi yoki qizishi nimaga bog'liq?
52. Ideal gaz politropa tenglamasidan qanday jarayonlar tenglamasini keltirib chiqarish mumkin?
53. Entropiya va uning xossalari. Entropiyani hisoblash.
54. Qaytuvchi va qaytmas jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi.
55. Entropianing o'sish qonunini tushuntiring.
56. Gibbs paradoksi nima?
57. Suvni $0 < t < 4$ °C temperatura intervalda siqqanda nima hodisa yuz beradi? Shuni tushuntiring.
58. Qanday shart bajarilganda, suv qattiq jism xususiyatiga ega bo'ladi?
59. Uchinchi qonunga asosan $T = 0$ K da $S = 0$ bo'lish sababini tushuntiring.
60. Termodinamik potensiallar metodi deb qanday metodga aytildi?
61. Gibbs-Gelmgols tenglamalari.
62. Maksimal bajarilgan ish formulasi.
63. Integrallash doimiysi $T = 0$ K da qanday hisoblanadi?
64. Inversiya nuqtasi, inversiya egriligi, inversiya temperaturasi qanday tushunchalar?
65. Qanday hodisa magnitokalorik hodisa deyiladi?

IV bob

ZARRALAR SONI O'ZGARUVCHAN SISTEMALAR. FAZA O'TISHLAR

4.1. Zarralar soni o'zgaruvchan sistema termodinamik potensiallari

Oldingi boblarda sistema va uni o'rab turgan muhit, ya'ni termostat o'zaro ta'sirlashish natijasida ular bir biri bilan faqat energiya almashinadi deb ko'rdik. Ko'p hollarda o'zaro ta'sirda energiya almashish bilan bir qatorda zarralar almashinishi ham yuz beradi. Sistemaga kiruvchi va undan chiqib ketuvchi zarralar o'zi bilan energiya tashiganligi uchun, bu yo'l bilan ham energiya almashinishi ro'y beradi. Ushbu bobda zarralar soni o'zgaruvchi sistemalarning xossalarni termodinamika metodlari bilan o'rganamiz. Sistemada zarralar turli sabablar bilan o'zgarishi mumkin. Masalan, quyidagi hollarda sistemada zarralar soni o'zgaruvchi bo'ladi:

To'yingan bug'i bilan muvozanatdagi suyuqlik. Bunday sistemada umumiy hajm yoki temperaturaning o'zgarishi suyuqlik va uning bug'idagi zarralar sonining nisbati o'zgarishiga olib keladi.

Temperatura yoki boshqa parametrlar o'zgarishi natijasida sistemada boradigan kimyoviy reaksiya vaqtida reaksiyada ishtirok etayotgan va hosil bo'layotgan zarralar soni o'zgarib turadi va uzlusiz biri ikkinchisiga o'tib turadi.

Muvozanatlari nurlanishda temperatura o'zgarishi nurlanish spektrida nurlanish kvanti – fotonlarning soni o'zgarishiga olib keladi.

O'zaro bog'lanmagan mustaqil sistemalar orasidagi o'zaro ta'sir paydo bo'lganda ham zarralar soni o'zgarishi mumkin.

Bu ro'yxatni yana davom ettirish mumkin. Shuni esda saqlash kerakki, tashqi yoki ichki parametrlar o'zgarishida sistemadagi muvozanat buziladi. Biz muvozanatdagi sistemalarni o'rganish bilan cheklanamiz. Demak, o'rganilayotgan sistemada

zarralar soni o'zgaruvchi bo'lsa ham, u muvozanat holatdan chiqib ketmasligi kerak.

Zarralar soni o'zgarib turuvchi sistema holati temperatura T , parametrlar va berilgan turdag'i zarralar soni N_1, N_2, \dots, N_r yoki bunga to'g'ri keluvchi konsentratsiya $c_i = N_i / \sum N_k$ bilan aniqlanadi. Bunday sistemalarda ichki energiyasining o'zgarishi faqat uzatilgan issiqlik va sistema tomonidan bajarilgan ish hisobiga yuzaga kelmasdan, balki sistemada zarralar sonining o'zgarishi hisobiga ham yuzaga keladi. Bu holni hisobga oluvchi qaytuvchi va qaytmas jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tengsizligi quyidagicha yoziladi:

$$TdS \geq dE + \sum_i f_i d\lambda_i - \sum_k \mu_k dN_k. \quad (4.1)$$

Bu yerda $\mu_k - k$ navdagi zarralarning kimyoviy potensiali. (4.1)dagi oxirgi had zarralar sonining o'zgarishini aks etdiradi.

Umumiyligida qoidalarga asosan yozilgan (4.1) tengsizlikni oddiy sistema uchun hosil qilishni ko'rib chiqamiz. Zarralar soni o'zgarmaydigan sistema uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi (3.86) ga kiruvchi kattaliklar E, S va V additivlik xossasiga ega bo'lganligi uchun tenglamani bu kattaliklarning bitta zarraga to'g'ri kelgan solishtirma qiymatlari uchun ham yozish mumkin, ya'ni

$$d\left(\frac{E}{N}\right) = Td\left(\frac{S}{N}\right) - pd\left(\frac{V}{N}\right). \quad (4.2)$$

Bu tenglama umumiyligka ega bo'lib, unga kiruvchi solishtirma kattaliklarning nima sababdan o'zgarishiga bog'liq emas. Haqiqatan ham, solishtirma kattaliklar uchun o'zgarish kattaliklarning o'zining o'zgarishi hisobigami yoki zarralar soni o'zgarishi sabablimi tamoman farqi yo'q. Demak, (4.2) tenglamada zarralar soni N o'zgaruvchi bo'lishi va uni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{dE}{N} = E \frac{dN}{N^2} + T \frac{dS}{N} - TS \frac{dN}{N^2} - p \frac{dV}{N} + pV \frac{dN}{N^2}.$$

Belgilash kiritamiz:

$$\mu = \frac{E - TS + pV}{N}, \quad (4.3)$$

bundan

$$dE = TdS - pdV + \mu dN, \quad (4.4)$$

tenglamani hosil qilamiz. (4.4) zarralar soni o'zgaruvchi oddiy sistema uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi hisoblanadi. Bu tenglamaga asosan kimyoviy potensial

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S,V}; \quad \frac{\mu}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{E,V}. \quad (4.5)$$

Sistema turli xil gazlardan tashkil topgan bo'lsa va unga qandaydir tashqi kuchlar ta'sir qilayotgan bo'lsa, asosiy tenglama (4.1) ko'rinishni qabul qiladi.

Har tomondan p bosim ta'siri ostida bo'lgan sistemadagi qaytuvchi jarayon uchun termodinamik potensiallar differensialini Lejandr metodi bilan topamiz:

$$dE = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i,$$

$$dF = -SdT - pdV + \sum_i \mu_i dN_i,$$

$$d\Phi = -SdT + Vdp + \sum_i \mu_i dN_i,$$

$$d\chi = TdS + Vdp + \sum_i \mu_i dN_i. \quad (4.6)$$

Bu yerda dE , dF , $d\Phi$, $d\chi$ mos ravishda erkin, Gelmgols, Gibbs energiyasi va entalpiya differensiallari. Bu tenglamalardan zarralar soni o'zgaruvchan sistemada kimyoviy potensial μ_i ni aniqlaymiz:

$$\mu_i = \left(\frac{\partial E}{\partial N_i} \right)_{S,V} = \left(\frac{\partial F}{\partial N_i} \right)_{T,V} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N_i} \right)_{T,p} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial N_i} \right)_{S,p}. \quad (4.7)$$

Bu ifodalardan ko'rinib turibdiki, kimyoviy potensialni ixtiyoriy termodinamik potensialdan zarralar soni bo'yicha olingan hosila bilan aniqlash mumkin ekan.

Hamma termodinamik potensiallar additiv funksiyalardir. Bir xil sortdagi zarralardan tashkil topgan sistema uchun bu shuni anglatadiki, agar zarralar soni N necha marta o'zgarsa, termodinamik potensiallar shuncha marta o'zgaradi:

$$E = Nf_1 \left(\frac{S}{N}, \frac{V}{N} \right), \quad F = Nf_2 \left(T, \frac{V}{N} \right), \\ \Phi = Nf_3 (T, p), \quad \chi = Nf_4 \left(\frac{S}{N}, p \right). \quad (4.8)$$

(4.8) tenglamalar sistemasidan quyidagini hosil qilamiz:

$$\mu = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N} \right)_{T,p} = f_3 (T, p).$$

Demak, bitta zarraga to‘g‘ri kelgan Gibbs termodinamik potensiali (energiyasi) kimyoviy potensialga teng ekan.

Agar sistema har xil navdagisi zarralardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda Gibbs termodinamik potensiali quyidagicha yoziladi:

$$\Phi = \sum_i N_i \mu_i. \quad (4.9)$$

Zarralar soni o‘zgaruvchan bo‘lgan sistemalarni o‘rganishda, odatda, katta termodinamik potensial

$$B(T, V, \mu_i) = E - TS - \sum_i N_i \mu_i = F - \Phi = -pV \quad (4.10)$$

ishlatiladi. Bu potensial yordamida sistemadagi har bir navdagisi zarralar soni N_i ni topish mumkin bo‘ladi. Haqiqatdan ham (4.6) va (4.10) dan Lejandir metodiga asosan

$$dB = -SdT - pdV - \sum_i N_i d\mu_i \quad (4.11)$$

ni olamiz. Bu tengliklardan entropiya S , bosim p va zarralar soni N_i ni topish mumkin.

4.2. Gibbsning katta kanonik taqsimoti

Gibbsning kichik kanonik taqsimoti zarralar soni o‘zgarmagan bo‘lgan muvozanatdagi berk sistemalar uchun chiqarilgan edi. U yerda sistemani termostat bilan o‘zar o‘siri faqat energiya almashinishidan iborat deb qaradik. Muvozanat holatda sistema va termostat o‘rtasida energiya va zarralar almashinishi uzluksiz holda o‘tib turadi. Umumiy holda sistema va termostatning

energiya almashinishi faqat o'zaro ta'sir orqali emas, balki sistemaga kirayotgan va sistemadan chiqib ketayotgan zarralar orqali ham amalga oshadi. Chunki zarralar o'zi bilan birga energiyani olib yuradi. Bu holda faqat energiya emas, balki sistemani tashkil qiluvchi zarralar soni ham o'zgaruvchan kattalik bo'ladi. Shuning uchun sistema holatini xarakterlashda berk sistemaning to'liq energiyasi bilan birlgilikda zarralar sonini ham ko'rsatish kerak bo'ladi. Zarralar soni o'zgarmas bo'lgan sistema va termostat o'zaro muvozanatda bo'lishi uchun ularning temperaturalari va bosimlari ham teng bo'lishi kerak edi. Zarralar soni o'zgaruvchi sistemaning muvozanatda bo'lishi uchun yuqoridagidan tashqari ularning kimyoviy potensiallari ham teng bo'lishi kerak ekan.

O'zaro ta'sir tufayli sistema va termostat turli xil energiyali va zarralar soni o'zgaruvchan bo'lgan holatlarda bo'la oladi.¹ Sistema i -holatida bo'lishi va shu holatda n ta zarraga ega bo'lish ehtimolligini Gibbsning katta kanonik taqsimoti $W_{i,n}$ aniqlaydi. Gibbs katta kanonik taqsimoti $W_{i,n}$ ning oshkora ko'rnishini aniqlashga kirishamiz. Sistema bilan termostatdagi to'liq zarralar soni N o'zgarmas bo'ladi. Taqsimot funksiyasini olish uchun (2.6) ifodadagi kattaliklarni quyidagi kattaliklar bilan almashtiramiz:

$$\Omega(\varepsilon_i) \rightarrow \Omega(\varepsilon_i, n) \text{ va } \Omega_0(E_i) \rightarrow \Omega_0(E_i, N_0).$$

Bu yerda $E_i = E - \varepsilon_i$ va $N_0 = N - n$, mos ravishda, termostat energiyasi va termostatdagi zarralar sonidir. E, N – sistema va termostatning to'liq energiyasi va zarralar soni. Ehtimollikliklarni ko'paytirish xossasiga asosan (2.6) ifodani quyidagicha yozish mumkin bo'ladi:

$$W_{i,n} \sim \Omega_0(E - \varepsilon_i, N - n) \Omega(\varepsilon_i, n). \quad (4.12)$$

Holatlar soni $\Omega_0(E - \varepsilon_i, N - n)$ ni quyidagi

$$\Omega_0(E - \varepsilon_i, N - n) = e^{S(E - \varepsilon_i, N - n)}$$

¹ Sistema va termostatning o'zaro ta'sirini oshkor holda foydalanmasak ham, uni kuchsiz deb olamiz. Agar o'zaro ta'sir kuchli bo'lsa, nochiziqli effektlar rol o'ynay boshlaydi va masala murakkablashadi. Bunday holni o'rganish ushbu o'quv dasturi doirasiga kirmaydi.

ifoda bilan almashtirib, $\varepsilon_i \ll E$ va $n \ll N$ ekanligini hisobga olib, $\Omega(E - \varepsilon_i, N - n)$ ni kichik kattaliklarning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz va o'zgaruvchanlarning birinchi darajalari ishtirot etgan hadlar bilan chegaralanamiz, natijada (4.12) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$W_{i,n} = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n). \quad (4.13)$$

Bu yerda const — normirovka sharti $\sum_i \sum_n W_{i,n} = 1$ dan topiladi.

Natijada energiyasi va zarralar soni o'zgaruvchan va termostat bilan muvozanatda bo'lgan sistema uchun Gibbsning katta kanonik taqsimotining oshkora ko'rinishini olamiz:

$$W_{i,n} = \frac{\exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n)}{\sum_i \sum_n \exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n)} = \frac{\exp\left(\frac{-\varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n)}{\tilde{Z}}, \quad (4.14)$$

$$\tilde{Z} = \sum_i \sum_n \exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n). \quad (4.15)$$

Bu yerda $\mu = -\theta \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{n=0}$ — kimyoviy potensial yoki parsial potensial, $\Omega(\varepsilon_i, n)$ — energiyasi ε_i va zarralar soni n bo'lgan holatlar soni yoki oddiygina holatlar soni deb yuritiladi, \tilde{Z} esa energiyasi va zarralar soni o'zgaruvchan sistema holat funksiyasi yoki *katta statistik yig'indi* deyiladi. Agar sistemadagi zarralar soni $n = \bar{n} = N$ bo'lsa, u holda katta kanonik taqsimot (4.14) kichik kanonik taqsimotga o'tadi.

Sistemadagi holatlar soni

$$\Omega(\varepsilon_i, n) = \Delta \Gamma_n / h^{3n}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu yerda $\Delta \Gamma_n$ — n ta zarrani o'z ichiga olgan ε_i energiyali fazalar fazosining hajmi:

$$\Delta \Gamma_n = \Delta p_1 \Delta p_2 \dots \Delta p_{3n} \Delta q_1 \Delta q_2 \dots \Delta q_{3n}.$$

Yuqoridagilarni hisobga olib, (4.14)ni quyidagicha yozish mumkin:

$$dW_{i,n} = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{\theta}\right) d\Gamma_n}{Z h^{3n}}.$$

Gibbsning katta kanonik taqsimotidan foydalananib, energiyasi va zarralar soni o'zgaruvchan bo'lgan sistemalarning holatini aniqlovchi termodinamik kattaliklarning o'rtacha qiymatini aniqlash mumkin:

$$\bar{L} = \sum_i \sum_n L W_{i,n}. \quad (4.16)$$

Xususan, ixtiyoriy energiyali holatdagi zarralar sonining o'rtacha qiymati, (4.14)–(4.16) ga asosan, quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\bar{n} = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_i \sum_n \exp\left(\frac{n\mu - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n). \quad (4.17)$$

Bu ifoda juda muhim bo'lib, uning yordamida Maksvell, Boze–Eynshteyn va Fermi–Dirak taqsimotlarini olish mumkin.

Ko'pincha qulaylik uchun $z = \exp(\mu/kT)$ aktivlik kiritilib, holat funksiyasi \tilde{Z} quyidagicha yoziladi:

$$\tilde{Z} = \sum_{n=1}^N z^n Z_n,$$

bu yerda Z_n – zarralari soni n ta bo'lgan sistema uchun statistik yig'indi. Klassik yaqinlashishda

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \sum_{n=1}^N \exp\left(\frac{\mu n}{\theta}\right) Z_n \simeq \sum_{n=1}^N \exp\left(\frac{\mu n - F_n}{\theta}\right) \simeq \\ &\simeq \exp\left(\frac{\mu \bar{n} - F}{\theta}\right) \simeq \exp\left(\frac{\mu N - F}{\theta}\right) = \exp\left(\frac{\Phi - F}{\theta}\right). \end{aligned}$$

Bu yerda $\Phi = \mu N$ Gibbs termodinamik potensiali, F – erkin energiya, $\mu N - F = \Phi - F = pV$. Demak,

$$\tilde{Z} = \exp\left(\frac{pV}{\theta}\right), \quad p = \frac{\theta}{V} \ln \tilde{Z} \quad (4.18)$$

bo'ladi.

Gibbs kichik kanonik taqsimot funksiyasini olishda (2.1- band) formal kiritilgan kattalik, θ – statistik temperatura, chuqur fizik ma'noga ega bo'lgani kabi, bu yerda yana formal ravishda kiritilgan, μ – kimyoviy potensial ham shunday ma'noga ega. Buni ochish uchun statistik muvozatda bo'lgan birorta sistemani ko'ramiz. Unda bir-biri bilan kuchsiz ta'sirlashayotgan ikkita sistemachani (μ_1, n_1 va μ_2, n_2) faraziy ajratamiz. O'zaro ta'sir sistemachalar orasida energiya va zarralar bilan alma-shuvni ta'minlab beradi. Har ikkala sistemacha uchun va ularni bitta sistemacha deb qarab, (4.13) ko'rinishdagi holatlarning taqsimot funksiyasini yozish mumkin. Bunday taqsimot funksiyalarini ehtimolliklarni ko'paytirish qoidasiga asosan solishtirib quyidagi ikkita tenglamani olamiz:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta, \quad (4.19)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu. \quad (4.20)$$

Bu tenglamalardan birinchisi, bizga ma'lum bo'lib, termostat va u bilan statistik muvozanatdagi sistemachaning statistik temperaturasi bir xil ekanligini ko'rsatadi. Ikkinchi tenglama umuman yangi bo'lib, μ termostatga tegishli kattalik ekanligini ko'rsatadi. Statistik muvozanatda termostatni tashkil qilgan barcha sistemachalarda birday qiymat qabul qilar ekan. Demak, ikkita sistema statistik muvozatda bo'lishi uchun ularning temperaturalirli bir xil bo'lishidan tashqari ularning kimyoviy potensiallari ham bir xil bo'lishi kerak ekan.

4.3. Holat kattaliklari

Bir atomli N zarradan tashkil topgan ideal gaz holatini xarakterlovchi kattaliklarni Gibbs katta kanonik taqsimotidan foydalananib, hisoblashni ko'rib chiqamiz. Buning uchun katta statistik yig'indini, ya'ni sistemaning holat funksiyasini hisoblash kerak. Ideal gazda atomlar erkin harakatda bo'lganligi uchun holatlar kvantlanmagan bo'ladi. Shuning uchun $\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ va yig'indini integral bilan almashtiramiz, ya'ni

$$\begin{aligned}\tilde{Z} &= \sum_{i,n} \exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon_i}{\theta}\right) \Omega(\varepsilon_i, n) = \\ &= \sum_n \exp\left(\frac{\mu n}{\theta}\right) \int \exp\left(-\frac{\varepsilon(p)}{\theta}\right) d\Omega(\varepsilon(p), n).\end{aligned}\quad (4.21)$$

Kichik kononik taqsimotni hisoblashdagi amallarni bajarib \tilde{Z} uchun quyidagi ifodani yozamiz:

$$\tilde{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3n/2} V^n \exp\left(\frac{\mu n}{kT}\right). \quad (4.22)$$

Bu yerda

$$\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} = \lambda$$

belgilash kiritamiz va uni de-Broyl «issiqlik» to‘lgini uzunligi deb ataymiz. Bu belgilashda \tilde{Z} quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\tilde{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^n \exp\left(\frac{\mu n}{kT}\right). \quad (4.23)$$

Ushbu yig‘indini hisoblab, \tilde{Z} uchun quyidagi hosil qilamiz:

$$\tilde{Z} = \exp\left[\frac{V}{\lambda^3} \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)\right]. \quad (4.24)$$

Holat funksiyasi yordamida istalgan termodinamik kattliklarni hisoblash mumkin. Birinchi navbatda ko‘rilayotgan V hajmdagi o‘rtacha zarralar sonini topamiz. Bu kattalikni ikki yo‘l bilan hisoblash mumkin. Birinchisi Gibbsning katta kanonik taqsimoti yordamida bo‘lsa, ikkinchisi esa bevosita katta statistik yig‘indi yordamida hisoblash mumkin. Natijada N uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\bar{n} = N = kT \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \mu} = \frac{V}{\lambda^3} \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right). \quad (4.25)$$

Bu ifodadan kimyoviy potensial

$$\mu = kT \ln \frac{\bar{n} \lambda^3}{V}. \quad (4.26)$$

Ideal gaz bosimi

$$p = kT \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial V} = \frac{kT\bar{n}}{V}. \quad (4.27)$$

Ideal gaz ichki energiyasi

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial T} = \frac{3}{2} kT\bar{n}. \quad (4.28)$$

Ideal gaz entropiyasi

$$S = \frac{E}{T} + k \ln \tilde{Z} = \frac{5}{2} k\bar{n}. \quad (4.29)$$

Boshqa termodinamik kattaliklarni ham shu yo'l bilan hisoblash mumkin bo'ladi.

4.4. Nurlanish termodinamikasi

Termodinamika qonunlarini tatbiq qilish sohasi juda kengdir. U klassik va kvant sistemalarga, moddaga va maydonga, eng avval nurlanishning elektromagnit maydoniga tatbiq qilinadi. Nurlanish nazariyasi nazariy fizikaning eng katta mustaqil bo'limlaridan biri bo'lib hisoblanadi va uni to'la bayon qilish darslikning vazifasiga kirmaydi. Shuning uchun bu bo'limda nurlanish termodinamikasini o'rganish bilan chegaralanamiz. Termodinamika muvozanat holatdagi sistemalar bilan ish ko'rganligi uchun, muvozanatlari nurlanish masalalarini ko'rib chiqamiz.

Agar nurlanish o'zini o'rab olgan muhit bilan termodinamik muvozanatda bo'lsa, u muvozanatlari nurlanish deyiladi. Muvozanatlari nurlanish temperaturasi muvozanat holatda bo'lgan jism temperaturasiga teng bo'ladi. Bu fikrni (1893- y.) Galitsin bildirgan.

Termodinamikada muvozanatlari nurlanish: hajm, temperatura va bosim bilan xarakterlanuvchi sistema ko'rinishida tasavvur qilinadi. Shunga ko'ra, holat tenglamasi $F(p, V, T) = 0$ bo'ladi.

Devorlarining temperaturasi T bo'lgan berk kovak idishni ko'ramiz. Idish devorlarining nurlanishi hisobiga kovakning ichi turli yo'nalishda tarqalayotgan, mumkin bo'lgan chastota va qutblanishga ega bo'lgan elektromagnit to'lqinlari bilan

to'lgan bo'ladi. Muvozanatda idishning barcha nuqtalari nurlanish energiyasining zichligi bir xil bo'lib, faqat temperaturaga bog'liq bo'ladi. Bundan tashqari nurlanish muvozanatli va statsionar bo'lganligi uchun idishning barcha nuqtalari nurlanish energiyasining chastota bo'yicha taqsimoti bir tekis bo'ladi. Termodinamikada bunday nurlanish elektromagnit to'lqinlarining to'plami deb qaraladi. Agar ν , $\nu + d\nu$ chastota intervalida nurlanishning spektral zichligi $p_\nu d\nu$ bo'lsa, u vaqtda nurlanish energiyasi zichligi

$$u = \int_0^\infty p_\nu d\nu. \quad (4.30)$$

Nurlanish hajm bo'yicha tekis taqsimlanganligi uchun V hajmdagi nurlanish to'la energiyasi $E = uV$.

Solishtirma entropiya

$$s = \int_0^\infty s_\nu d\nu, \quad (4.31)$$

to'la entropiya esa $S = sV$.

Agar jismga ν , $\nu + d\nu$ chastota intervalida tushadigan nurlanish energiyasi $I_\nu d\nu$ bo'lsa, nurlanish energiyasining $I_{\nu A} d\nu$ qismi jism tomonidan yutiladi, $I_{\nu R} d\nu$ qismi qaytadi va $I_{\nu D} d\nu$ qismi jismdan o'tib ketadi. Bu holatni quyidagicha yozish mumkin:

$$I_{\nu A} d\nu + I_{\nu R} d\nu + I_{\nu D} d\nu = I_\nu d\nu \quad (4.32)$$

yoki

$$\frac{I_{\nu A}}{I_\nu} + \frac{I_{\nu R}}{I_\nu} + \frac{I_{\nu D}}{I_\nu} = 1, \quad (4.33)$$

bu yerda $\frac{I_{\nu A}}{I_\nu} = A_\nu$, $\frac{I_{\nu R}}{I_\nu} = R_\nu$, $\frac{I_{\nu D}}{I_\nu} = D_\nu$ – mos ravishda jismning yutish, qaytarish va o'tkazish qobiliyatları.

Agar $R_\nu + D_\nu = 0$ va $A_\nu = 1$ bo'lsa, bunday jism absolut qora jism deyiladi; agar $A_\nu + D_\nu = 0$ va $R_\nu = 1$ bo'lsa, jism qaytarish ko'rsatkichi 100% bo'lgan ko'zgu bo'ladi; $A_\nu + R_\nu = 0$ va $D_\nu = 1$ bo'lsa, jism absolut shaffof bo'ladi. Tabiatda absolut

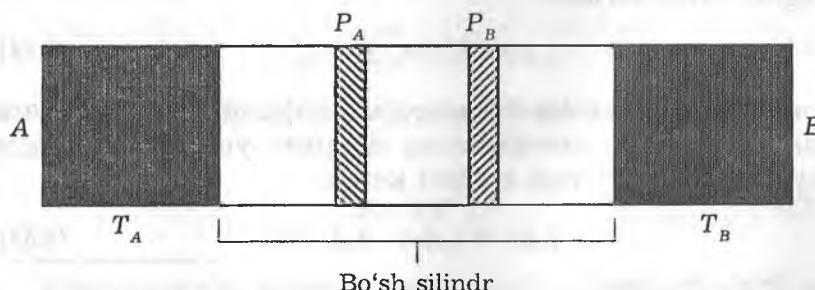
qora, to'liq qaytaruvchi ko'zgu va butunlay shaffof jismlar bo'lmaydi, ammo yuqoridagi shartlarni taxminan qanoatlan-tiruvchi jismlar mavjud.

Amaliy nuqtayi nazardan absolut qora jismni hosil qilish metodi 1895- yil Vin va Lummer tomonidan taklif qilingan. Bu metodga ko'ra ichi g'ovak izolatsiyalangan tirkishli jism olib, bu tirkish orqali yuborilgan nur idish ichida ko'p marta qaytish natijasida tamoman yutiladi, nurning hamma energiyasi issiqlik energiyasiga aylanadi. G'ovak ichida muvozanatli nurlanish hosil bo'ladi. Endi teskari holni ko'ramiz, ya'ni berk g'ovak olib, uni T temperaturagacha qizdiramiz va undan tirkish ochamiz. Tirkishdan chiqadigan nurlanish yana muvozanatli bo'ladi. Bunday nurlanishni absolut qora jismning nurlanishi deb qabul qilish mumkin.

Termodinamikaning umumiy qonunlarini muvozanatli nurlanishga tatbiq qilish natijasida quyidagi qonuniyatlarni aniqlash mumkin:

1. *Nurlanish bosimining mavjudligi (yorug'lik bosimi)*. Nazariy jihatda nurlanish bosimining mavjudligini birinchi marta (1876- yil) Bartoli tomonidan termodinamikaning ikkinchi qonuniga asoslanib isbot qilingan. Tajribada yorug'lik bosimi (1901- yil) birinchi bo'lib Lebedev aniqlagan.

Nurlanish bosimi borligini quyidagi faraziy tajribada aniqlash mumkin. Temperaturalari T_A va T_B ($T_A > T_B$) bo'lgan ikkita absolyut qora jism bir-biriga oq devorli bo'sh silindr bilan birlashtirilgan (4.1- rasm.). Silindr ichiga devorlari oq P_A va P_B porsheni joylashtirilgan. P_B porshenni silindr ichidan olamiz va P_A porshenni A jismga zich qilib yaqinlashtiramiz. Bu holda silindrning ichi B jism bilan muvozanatda bo'lgan nurlanish bilan to'ladi. Endi P_A porshenni olib tashlab, P_B porshenni kiri-



4.1- rasm.

tamiz va A jism tomon unga zich yaqinlashguncha suramiz. Silindr ichidagi nurlanish A jism tomonidan to'liq yutiladi. Bu jarayonni birnecha marta takrorlaymiz. Natijada temperaturasi yuqori bo'lishiga qaramasdan A jism qiziydi, ya'ni issiqlik sovuq jismdan issiq jismga o'tadi. Bunday bo'lishi uchun, termodinamikaning ikkinchi qonuniga asosan, ish bajarilishi kerak. Qanday kuchga nisbatan ish bajariladi? Bu yerda faqat bitta kuch bo'lishi mumkin, u ham bo'lsa nurlanishning porshenga bosim kuchidir. Shunday qilib, nurlanishning bosimi borligi isbotlandi. Bosimni termodinamika qonunlari orqali hisoblab bo'lmaydi. Nurlanishning kvant nazariyasida uning bosimi borligi oson tushintiriladi. Nurlanish foton gazidan iborat ekanligini eslasak yetarli. Hisoblashlar natijasida bosim $p = u/3$ ekanligi aniqlangan.

2. Kirxgof qonuni. Bu qonunga asosan, nurlanish intensivligining yutish koeffitsiyentiga nisbati jismlar tabiatiga bog'liq bo'lmasdan, barcha jismlar uchun temperatura va chastotaning universal funksiyasidir.

Izolyatsiyalangan yopiq kovakda biri absolut qora va ikkinchisi «oddiy» (absolut qora bo'lman) bo'lgan ikkita jism bo'lsin. Sistema yopiq bo'lganligi uchun kovak ichida nurlanish va jismlar termodinamik muvozanatda bo'ladi. Demak, birinchidan, ularning temperaturalari bir xil bo'ladi, ikkinchidan, birlik vaqt ichida jismlar yutadigan energiya ularning nurlanish energiyasiga teng bo'ladi, uchinchidan, nurlanish izotrop va bir jinsli bo'lganligi uchun jismlarning birlik sirtga birlik vaqt ichida tushadigan nurlanish energiyasi ham o'zgarmas bo'ladi. Kovakdagi nurlanish intensivligi I_ν bo'lsin. U vaqtida birlik sirtga tushayotgan nurlanish energiyasining zichligi $I_\nu d\nu$ ga teng. Absolut qora jismning nurlanish qobiliyatি ε_ν^k bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinali bo'ladi:

$$I_\nu d\nu = \varepsilon_\nu^k d\nu, \quad I_\nu = \varepsilon_\nu^k. \quad (4.34)$$

«Oddiy» jism sirtiga tushayotgan nurlanish energiyasi yana $I_\nu d\nu$ ga teng. Bu energiyaning A_ν qismi yutilganligi uchun quyidagi tenglik o'rinali bo'lishi kerak:

$$A_\nu I_\nu d\nu = \varepsilon_\nu d\nu, \quad A_\nu I_\nu = \varepsilon_\nu. \quad (4.35)$$

(4.34) va (4.35) ifodalarni solishtirib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\frac{\varepsilon_\nu}{A_\nu} - \varepsilon_\nu^k = f(\nu, T). \quad (4.36)$$

Bu tenglik Kirxgof qonunini ifodalaydi. Bu qonunni hisoblab topishda «oddiy» jismning xossalari to'g'risida hech qanday fikr bildirmadik. Shu sababli $f(\nu, T)$ funksiya universal bo'lib, jism-larning tabiatini va boshqa parametrlariga bog'liq emas. U faqat absolut qora jismni xarakterlaydi. Universal funksiyaning oshkora ko'rinishini aniqlash uchun izlanishlar olib borilgan (Bolsman, Vin, Jins, Plank). Bu yo'nalishdagi urinishlar bir qator qonuniyatlarning ochilishiga sababchi bo'lgan. Fizikaga yangi – energiya kvanti tushunchasini kiritish bilan Plank bu masalaga nuqta qo'ydi. Plank formulasini olishni keyinroq ko'rib chiqamiz.

3. Stefan-Bolsman qonuni. Tajriba natijalariga asoslanib Stefan (1879- y.) va termodinamika ikkinchi qonuniga va yorug'-likning bosimi mavjudligiga asoslanib Bolsman (1884- y.) tomonidan absolut qora jismning muvozanatlari nurlanish to'liq (integral) energiyasining zichligi temperaturaning to'rtinchidagi darajasiga proporsional ekanligi aniqlangan.³

Ushbu qonunni termodinamikaning ikkinchi qonuniga asoslanib keltirib chiqarishni ko'rib chiqamiz. Muvozanatlari nurlanishga holatning termik va kalorik kattaliklarini bog'lovchi tenglamani

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \quad (4.37)$$

tatbiq qilamiz. Yorug'lik bosimi $p = u/3$ nurlanish energiyasi $E = uV$ ekanligini hisobga olib, yuqoridaagi tenglamani qayta yozamiz:

$$T \frac{du}{dT} = 4u. \quad (4.38)$$

Bu tenglamani integrallab Stefan–Bolsman qonunini hosil qilamiz:

$$u = \sigma T^4, \quad (4.39)$$

² Ushbu qonunni Stefan ixtiyoriy jismning issiqlik nurlanishi uchun ta'riflagan, lekin keyingi o'tkazilgan o'lchashlar bu fikr noto'g'ri ekanligini ko'rsatdi.

bu yerda σ o'zgarmas kattalik Stefan–Bolsman doimiysi deyiladi va tajribadan yoki statistik fizika yordamida topiladi:

$$\sigma = 7,64 \cdot 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{grad}^4 \cdot \text{m}^3} = 1,82 \cdot 10^{-23} \frac{\text{kkal}}{\text{grad}^4 \cdot \text{m}^3}.$$

Stefan–Bolsman qonunidan foydalanib, muvozanatli nurlanish uchun termodynamik kattaliklarni aniqlaymiz. Buning adiabatik jarayon uchun entropiya tenglamasini yozamiz:

$$dS = \frac{dE + pdV}{T}. \quad (4.40)$$

Ushbu tenglamadagi nurlanish energiyasi va bosimini temperatura va hajm orqali yozib quyidagini olamiz:

$$dS = d\left(\frac{4}{3}\sigma T^3 V\right). \quad (4.41)$$

Yuqoridagi tenglamani integrallash natijasida muvozanatli nurlanish entropiyasini topamiz:

$$S = \frac{4}{3}\sigma T^3 V + S_0, \quad (4.42)$$

bu yerda S_0 – integrallash doimiysi. Adiabatik jarayonda $S - S_0 = \text{const}$ bo'lganligi uchun muvozanatli nurlanish adiabata tenglamasini bosim, temperatura, hajm va energiya zichligi orqali quyidagicha yozish mumkin:

$$T^3 V = \text{const} \quad \text{yoki} \quad pV^{4/3} = \text{const} \quad \text{yoki} \quad uV^{4/3} = \text{const}. \quad (4.43)$$

Muvozanatli nurlanishda bosim hajmga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni hajm o'zgarmas bo'lganda bosim ham o'zgarmaydi. Demak, muvozanatli nurlanishda o'zgarmas bosimdagi issiqlik sig'imi $C_p = \infty$ bo'ladi. Shunga ko'ra nurlanish uchun muvozanatning

barqarorlik shartlari $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T < 0$ va $\frac{T}{C_p} > 0$ tatbiq qilinmaydi. Ammo nurlanishning muvozanatda bo'lishi adiabatik koeffitsiyent qo'yiladigan quyidagi shart bilan xarakterlanadi:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -\frac{4}{9} \frac{\sigma T^4}{V} < 0. \quad (4.44)$$

Quyida muvozanatli nurlanish termodinamik kattaliklar – erkin energiya, entalpiya, Gibss termodinamik potensiali va kimyoviy potensiallari uchun ifodalarni keltiramiz:

$$F = -\frac{1}{3}\sigma T^4 V, \quad \chi = \frac{4}{3}\sigma T^4 V, \quad \Phi = 0, \quad \mu = 0.$$

4. Vin qonuni. Muvozanatli nurlanish energiyasi zichligining spektral taqsimotining maksimumi temperatura ortishi bilan katta chastotalar tomoniga siljiydi.

Stefan-Bolsman qonuni muvozanatli nurlanishning to'la energiyasiga taalluqli bo'lib, uning spektr bo'yicha taqsimoti haqida hech narsa aytolmaydi. Bo'shliqda nurlanish masalasini o'rganish natijasida Vin (1893-y.) muvozanatli nurlanish energiyasi zichligining spektrini aniqlovchi funksiya xususiyatini topdi. Spektral taqsimot $f(\nu/T)$ aniq ko'rinishi no'malum bo'lib, u chactota va temperaturaga mustaqil ravishda emas, balki ularning nisbati ν/T orqali bog'langan bo'lishi kerak degan fikrni ilgari suradi. Shu bilan birga Stefan-Bolsman qonunidagi temperaturaning to'rtinchisi darajasini olish uchun nurlanish energiyasining spektral taqsimot funksiyasini

$$\rho_\nu(T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (4.45)$$

ko'rinishda yozishni taklif qiladi. Haqiqatan ham (4.45) ifodada $x = \nu/T$ yangi o'zgaruvchiga o'tsak, (4.30) Stefan-Bolsman qonuniga o'tadi va u yerdag'i doimiy

$$\sigma = \int_0^\infty f(x) x^3 dx \quad (4.46)$$

ifoda bilan aniqlanishini topamiz.

Nurlanish energiyasining spektral taqsimot funksiyasidan chastota bo'yicha hosila olamiz va uni nolga tenglashtirish natijasida quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$3f\left(\frac{\nu}{T}\right) + \frac{\nu}{T} f'\left(\frac{\nu}{T}\right) = 0. \quad (4.47)$$

Bu ifodaga ko'ra $p_\nu(\nu/T)$ maksisum nuqtasida chastota va temperatura quyidagicha bog'langanligi kelib chiqadi:

$$\frac{\nu_{max}}{T} = \text{const.} \quad (4.48)$$

Shunday qilib, absolut qora jismning (muvozanatli) nurlanish energiyasi spektral taqsimotining maksimumi temperatura oshishi bilan katta chastotalar tomoniga siljir ekan. Bu Vinning siljish qonuni deyiladi. Bu qonunni nurlanish to'lqin uzunligi orqali ham yozish mumkin, ya'ni

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (4.49)$$

bu yerda $b = 2,98 \cdot 10^{-3}$ m · K bo'lib, u Vin doimiysi deyiladi. Vin qonunini to'lqin uzunligi tilida ham ta'riflash mumkin, nurlanish energiyasi spektral taqsimotining maksimumiga to'g'ri keluvchi to'lqin uzunlik λ_{\max} temperaturaga teskari proporsional bo'ladi.

4.5. Termodinamik sistemalarining muvozanati va barqarorlik shartlari

Termodinamik sistemalarda muvozanat nazariyasi Gibbs tomonidan, statistik mexanikadagi kichik qo'zg'alishlar principini umumlashtirish va yoyish yo'li bilan, ishlab chiqildi. Bu nazariyaga ko'ra, sistemaning muvozanat holatdan chetga chiqishi, uning ichki parametrlari muvozanat holatidagi qiymatlaridan kichik chetlashish natijasi deb qaraladi va (4.50) dan foydalanib, termodinamik sistemalarda muvozanat va barqarorlikning umumiyligi shartlari topiladi. Nokvazistatik jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tengsizligi

$$TdS > dE + pdV - \sum_i \mu_i dN_i \quad (4.50)$$

muvozanat va barqarorlikning umumiyligi shartlarini tiklash mumkinligini ko'rsatadi. Bu shartlar termodinamika nuqtayi nazaridan yetarli hisoblanadi. Lekin sistemalarda fluktuatsiyalarning mavjudligi esa, zaruriy shart bo'lib hisoblanadi. Bu masalani aniq misollarda qaraylik.

1. Qaytmas adiabatik jarayon yuz beruvchi izolatsiyalangan berk sistemada muvozanat shartini qarab chiqaylik. Bunday sistemada $E = \text{const}$, $V = \text{const}$ va $N = \text{const}$ bo'ladi. Bu holda (4.50) dan $dS > 0$ kelib chiqadi. Demak, nokvazistatik jarayonlarda izolatsiyalangan berk sistemalarda entropiya o'sib borar ekan. Bunday sistemalarda muvozanatning umumiyligi sharti

$$\Delta S < 0 \text{ yoki } \delta S = 0, \quad \delta^2 S < 0 \quad (4.51)$$

bo'ladi. Bu yerda $\Delta S = S - S_0$, S – boshlang'ich muvozanatda bo'lmagan holatdagi, S_0 – muvozanat holatdagi entropiya, δS – birinchi variatsiyasi, $\delta^2 S$ – ikkinchi variatsiyasi. Sistema muvozanat holatida $S = S_{\max}$ bo'lishi kerak ekan.

Aniq misol sifatida, bir komponentli ikki fazali sistemada (suv–bug') muvozanat shartini ko'rib chiqaylik. Agar fazalar-dagi kattaliklar: temperatura, bosim, zarralar soni, bitta zarraga to'g'ri kelgan energiya, entropiya va hajmni belgilab olib, birin-chi fazadagi (suv) solishtirma energiya, hajm, zarralar soni N bog'lanmagan parametrlar deb qabul qilsak, u holda sistemaning muvozanat sharti $\delta S = 0$ ni sistemadagi kichik o'zgarishni aniq-lovchi $\delta E = 0$, $\delta V = 0$, $\delta N = 0$ tenglamalar bilan birga yechish va

$$\delta S = \frac{\delta E + p \delta V}{T}, \quad \delta S = \frac{\delta E + p \delta V}{T}$$

ifodalarni hisobga olish natijasida quyidagi tenglamani olamiz:

$$N' \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T''} \right) \delta E' + N' \left(\frac{p'}{T'} - \frac{p''}{T''} \right) \delta V' + \\ + \left[\left(S' - \frac{\delta E' + p' V'}{T'} \right) - \left(S'' - \frac{\delta E'' + p'' V''}{T''} \right) \right] \delta N' = 0. \quad (4.52)$$

Qaraladigan sistema muvozanat holatda bo'lishi uchun bu ifodadan temperatura, bosim va kimyoviy potensiallari muvozanat nuqtasida demak, muvozanat egriligidagi teng bo'lishi kerak, ya'ni $T' = T''$, $p' = p''$, $\mu'(T, p) = \mu''(T, p)$.

Kimyoviy potensiallarining tengligidan, ya'ni $\mu'(T, p) = \mu''(T, p)$ dan bosimning temperaturaga bog'liqlik ifodasini olish mumkin. Bu esa muvozanat egriligi grafigini chizish imkonini beradi. U muvozanat egriligi $p = p(T)$ ga asosan chiziladi.

2. O'zgarmas hajmli sistema termostatda bo'lsin, ya'ni $T = \text{const}$, $V = \text{const}$, $N = \text{const}$. Bu holda (4.50) tengsizlikdan Lejandr metodidan foydalanib, erkin energiya differensiali uchun

$$dF < -SdT - pdV + \mu dN \quad (4.53)$$

ni olamiz. Bu esa sistema muvozanat holatda bo'lishi uchun erkin energiyasi minimum bo'lishi kerak ekan, ya'ni

$$\Delta F > 0 \text{ yoki } \delta F = 0, \quad \delta^2 F > 0. \quad (4.54)$$

the first time in history that the majority of the world's population lives in urban areas. This is a major challenge for cities, which must now manage the needs of billions of people while conserving resources and protecting the environment. Cities also play a critical role in addressing climate change, as they are major sources of greenhouse gas emissions. By promoting sustainable development and green technologies, cities can help to mitigate the effects of climate change and build a more sustainable future.

In conclusion, cities are at the forefront of the global transition to a sustainable future. By embracing innovation, collaboration, and a commitment to social justice, cities can lead the way towards a more sustainable and equitable world.

3. Xuddi shuningdek, $T = \text{const}$, $p = \text{const}$, $N = \text{const}$ bo'lganda $\Delta\Phi > 0$ yoki $\delta\Phi = 0$, $\delta^2\Phi > 0$ bo'ladi.
4. $S = \text{const}$, $V = \text{const}$, $N = \text{const}$ bo'lganda $\Delta E > 0$ yoki $\delta E = 0$, $\delta^2 E > 0$ bo'ladi.
5. $S = \text{const}$, $p = \text{const}$, $N = \text{const}$ bo'lganda $\Delta\chi > 0$ yoki $\delta\chi = 0$, $\delta^2\chi > 0$ bo'ladi.
6. $T = \text{const}$, $V = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ bo'lganda $\Delta B > 0$ yoki $\delta B = 0$, $\delta^2 B > 0$ bo'ladi.

Shunday qilib, termodinamik sistemada muvozanat holating umumiy sharti aniq hollar uchun termodinamik potensial-larning maksimum yoki minimum shartidan keltirib chiqariladi.

4.6. Gomogen sistemaning muvozanati

Turli komponentli sistemalarda uning tashkil etuvchi qism-lari o'rtasida kimyoviy reaksiyalar va boshqa jarayonlar o'tishi mumkin. Bu jarayonlar to'g'ri va teskari yo'nalishda o'tadi, ya'ni umumiy zarralar soni o'zgarmagan holda turli komponetdagi zarralar soni uzlusiz ravishda bir-biriga o'tib o'zgarib turadi. O'zgarishlar sistemada muvozanat holat yuz berganda to'xtaydi. To'g'ri va teskari reaksiyalar bir xil tezlikda o'ta boshla-ganda muvozanat barqaror topadi. Bunday sistemalar gomogen deyiladi. Har qanday kimyoviy reaksiya quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\sum_i \nu_i g_i = 0. \quad (4.55)$$

Bu yerda g_i –reaksiyada qatnashuvchi moddalarning kimyoviy belgisi, ν_i – reaksiyada qatnashuvchi moddalarning molekulalari soni.

Endi kimyoviy reaksiya uchun muvozanat shartini yozaylik. Agar sistemada kimyoviy reaksiya o'zgarmas temperatura va o'zgarmas bosim ostida o'tayotgan bo'lsa, u holda Gibbs termo-dinamik potensiali minimum bo'lishi kerak, ya'ni

$$\delta\Phi = V\delta p - S\delta T + \sum_i \mu_i \delta N_i = 0.$$

Bu ifodadan

$$\sum_i \mu_i \delta N_i = 0. \quad (4.56)$$

Bu yerda δN_i kimyoviy reaksiyada ishtirok etuvchi komponentlar molekulalarining o'zgarish soni bo'lib, ular molekulalar soniga proporsional bo'lganligi uchun kiyoviy muvozanat sharti (4.56)ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\sum_i v_i \mu_i = 0 \quad (4.57)$$

(4.55) va (4.57) tenglamalarni solishtirib, quyidagi xulosaga kelamiz. Birinchi tenglamadagi modda belgisini shu modda kimyoviy potensiali bilan almashtirsak, kimyoviy reaksiyalarda termodinamik muvozanat shartini olar ekanmiz. (4.57) ifoda kimyoviy muvozanat sharti deyiladi. Demak, termodinamik muvozanat shartini topish uchun kimyoviy potensialni bilish kerak ekan.

Ideal gazlar uchun kimyoviy reaksiyalarda muvozanat shartini ko'rib chiqamiz. Ideal gazlar aralashmasidagi har bir komponent o'zini mustaqil ravishda tutadi. Shu sababli ularning kimyoviy potensiallari parsial bosim orqali aniqlanadi. Kimyoviy potensialning oshkora ko'rinishi termodinamik metod yordamida ideal gazlar uchun olinadi:

$$\mu = kT \ln p + \mu_0(T), \quad (4.58)$$

bu yerda $\mu_0(T)$ – entropiya bilan bog'liq bo'lgan o'zgarmasdir. Agar gazlar aralashmasi berilgan bo'lsa, u holda i - komponenti uchun

$$\mu_i = kT \ln p_i + \mu_{0i}(T). \quad (4.59)$$

Bu yerda

$$p_i = p \frac{N_i}{\sum N_i} = pc_i$$

parsial bosim, c_i – gaz komponentining konsentratsiyasi. Bu holda kimyoviy potensial

$$\mu_i = kT \ln pc_i + \mu_{0i}(T). \quad (4.60)$$

(4.59) va (4.60) ifodalarni (4.56) dagi μ_i ni o'rniga qo'yish va kimyoviy reaksiyaning to'g'ri va teskari yo'nalishda o'tishini hisobga olish natijasida, parsial bosim p_i va moddalar konsentratsiyasi uchun ta'sir etuvchi massalar qonuni olinadi:

$$\frac{\prod_j p_j^{v_j}}{\prod_p p_p^{v_p}} = K_c(T) \text{ va } \frac{\prod_j c_j^{v_j}}{\prod_p c_p^{v_p}} = K_c(T, p).$$

bu yerda $K_c(T)$ va $K_c(T, p)$ lar kimyoviy muvozanat konstantalari deyiladi va ularni nazariy holda va eksperiment orqali aniqlash mumkin.

4.7. Geterogen sistemalarda muvozanat sharti

Ma'lumki, ko'p fazali sistema geterogen sistema deb yuritiladi. k ta komponentli n ta fazadan tashkil topgan sistemada fazalar muvozanatini tekshiraylik.

Yuqorida shu narsa ko'rindik: ikkita fazali bir komponentli sistemada (suv-bug') muvozanatda bo'lishi uchun temperaturalari, bosimlari va kimyoviy potensiallari har ikkala fazada teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$T = T, \quad p = p, \quad \mu(T, p) = \mu(T, p). \quad (4.61)$$

Agar ikki fazali ikki komponentli sistemada (suv-kerosin) muvozanatini qarasak, bu holda temperaturalari va bosimlari teng bo'lib, ammo kimyoviy potensiallari teng bo'lmaydi. Chunki muvozanat holatda har xil moddalar orasida zarralar almashinishi yuz bermaydi.

Biz yuqorida ko'ranimizdek, n ta fazali va k komponentli sistemaning muvozanatda bo'lishining umumi sharti – Gibbs potensialining birinchi variatsiyasi $\delta\Phi = 0$ bo'lishi kerak. Bu potensial additiv kattalik bo'lganligi uchun to'liq potensial har bir fazadagilarning yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi^i(T, p, N_1^i, \dots, N_k^i)$$

bo'ladi. Bu yerda

$$\sum_{i=1}^n N_j^i = N_j, \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Bu tenglamalarga asosan minimum sharti, to'liq Gibbs potensialidan olingan birinchi variatsiyaga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$\delta\Phi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{\partial\Phi^i}{\partial N_j^i} \delta N_j^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \mu_j^i \delta N_j^i = 0 \quad (4.62)$$

Bundan

$$\sum_{i=1}^n \delta N_j^i = 0 \quad (4.63)$$

kelib chiqadi. (4.63) shartning har birini $\sum_{i=1}^k \lambda_i$ ga ko'paytirib, (4.62) ga qo'shamiz, natijada

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\mu_j^i + \lambda_j) \delta N_j^i = 0 \quad (4.64)$$

ifodani olamiz. Bu yerda δN_j^i variatsiyalarning k tasi (4.63) ifoda orqali bog'langan. Faraz qilaylik, bu δN_j^i ($j = 1, 2, \dots, k$) bo'lsin, ya'ni birinchi fazaga kirgan har bir komponentdagi zarralar sonining variatsiyasi bo'lsin. λ_j ni shunday tanlaymizki, (4.64) ifodaga kirgan bog'langan variatsiyalar N_j^i ning koeffitsiyentlari nolga aylansin, ya'ni $\mu_j^i + \lambda_j = 0$ yoki $\lambda_j = -\mu_j^i$ bo'lsin. U holda (4.64) ifodada o'zaro bog'lanmagan zarralar sonining variatsiyasi δN_j^i lardan $i \neq 1$ qoladi:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\mu_j^i - \mu_j^1) \delta N_j^i = 0. \quad (4.65)$$

Bundan $\mu_j^i = \mu_j^1$, ya'ni bitta komponentdagi barcha fazalardagi zarralarning kimyoviy potensiallari teng ekan.

Demak, k ta komponentli n ta fazadan tashkil topgan sistemalarda muvozanat yuzaga kelishi uchun: temperaturalari, bosimlari va har bir komponentning kimyoviy potensiallari hamma fazalarda teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$\begin{aligned} T &= T_1 = \dots = T^{(n)}, \\ p &= p_1 = \dots = p^{(n)}, \\ \mu_1 &= \mu_1 = \dots = \mu_1^{(n)}, \\ \mu_2 &= \mu_2 = \dots = \mu_2^{(n)}, \\ &\dots \\ \mu_k &= \mu_k = \dots = \mu_k^{(n)}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Bu shartlardan birinchisi – termik, ikkinchisi – mexanik, qolganlari kimyoviy muvozanatni ta'minlab beradi. Bu tengliklar k ta komponentli, n ta fazadan tashkil topgan geterogen sistemalarda muvozanat sharti deb yuritiladi.

4.8. Gibbsning fazalar qoidasi. Uchlamchi nuqta

Olingan k ta komponentli n ta fazadan iborat bo'lgan geterogen sistemalarda muvozanat sharti (4.66), bir vaqtning o'zida fazalardan qancha qismi muvozanat holatda bo'la olishini yoki geterogen sistemaning muvozanat holatini buzmasdan, unda o'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchanlar sonini o'zgartirishni aniqlash mumkinligini beradi. Bu masala Gibbs (1875–1878) tomonidan hal qilingani uchun Gibbsning fazalar qoidasi deb yuritiladi.

Ana shu qoidaning tiklanishini qarab chiqaylik. (4.66) ga asosan, muvozanat holatda har bir komponentning kimyoviy potensiallari hamma fazalarda bir xilda bo'lishi kerak:

$$\mu_j^i = \mu_j^s \quad (j = 1, 2, \dots; i, s = 1, 2, \dots, n). \quad (4.67)$$

Geterogen sistemalarda muvozanat shartini ifodalovchi bunday tenglamalar soni $k(n - 1)$ ta bo'ladi. Geterogen sistemaning holati temperatura, bosim va har bir fazada o'zaro bog'lanmagan ($k - 1$) ta konsentratsiya bilan aniqlanadi (har bir fazadagi barcha komponentlar konsentratsiyalarining yig'indisi birga teng). Demak, geterogen sistemada temperatura va bosimni o'zgaruvchi deb hisoblasak, u vaqtida sistemadagi hamma o'zgaruvchanlar soni $n(k - 1) + 2$ ta bo'ladi. $k(n - 1)$ ta tenglama yechimga ega bo'lishi uchun $k(n - 1) \leq n(k - 1) + 2$ bo'lishi kerak. Bundan

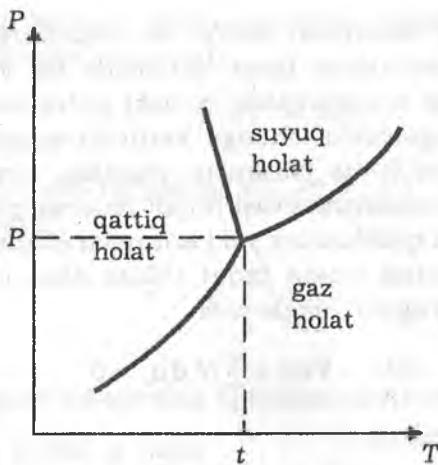
$$n \leq k + 2 \quad (4.69)$$

shart kelib chiqadi. Bu «Gibbsning fazalar qoidasi» deyiladi. Demak, geterogen sistemalarda bir vaqtning o'zida eng ko'pi bilan $k + 2$ faza muvozanat holatda bo'la olar ekan.

Agar $n > k + 2$ bo'lsa, u holda farqi

$$f = k + 2 - n. \quad (4.69)$$

(4.69) tenglik ham Gibbsning fazalar qoidasi deyiladi. Bu qoida geterogen sistema holatini, ya'ni (4.69) shartni buzmasdan



4.2- rasm. Uchlamchi nuqta.

komponent k va fazalar soni n ni istalgancha o'zgartirish mumkinligini ko'rsatadi. Shuning uchun, f ga sistema termodynamik erkinlik darajasining soni deb yuritiladi.

Agar geterogen sistemaga umumlashgan q ta kuch ta'sir etayotgan bo'lsa, u holda Gibbsning fazalar qoidasi (4.68) va (4.69) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$n \leq k + q + 1; \quad f = k + q + 1 - n.$$

Agar sistema bir komponentli bo'lsa, bu holda sistemaning muvozanat holatida bir vaqtning o'zida uchta faza muvozanat holatda bo'la oladi. Haqiqatan ham, $n = k + 2$ dan $n = 3$. Bu nuqta *uchlamchi nuqta* deyiladi (4.2- rasm). Uchlamchi nuqta quyidagi tenglamalar asosida chizilgan uchta egri chiziqlarning – fazalarning muvozanat egri chiziqlarining kesishgan nuqtasidir:

$$\mu(T, p) - \mu(T, p), \quad \mu(T, p) - \mu(T, p).$$

$$\mu(T, p) = \mu(T, p)$$

– bu tenglama birinchi ikki tenglama natijasidir.

Suv uchun uchlamchi nuqtada bosim $p = 509$ Pa = 4,58 mm. sim. ust., temperatura $t = 0,0100$ °C tengligi tajribada olingan.

Binar sistemalar uchun ham faza egri chiziqlari olish mumkin. Ikki komponentli binar sistemada Gibbs fazalar qoidasiga asosan bir vaqtning o'zida to'rtta faza muvozanatda bo'lishi

mumkin. Bunday sistemalar kimyo va metallurgiyada asosiy rol o'ynaydi. Bu sohalarda binar sistemada bir vaqtning o'zida ikkita fazaning muvozanatda bo'lishi katta ahamiyat kasb etadi. Chunki qolganlarini shunga keltirish mumkin. Bunday holda muvozanatni ikkita parametr, masalan, temperatura va birorta fazaning konsentratsiyasi orqali nazorat qilish mumkin. Bu kerakli tarkibli qotishmalar yoki eritmalar olishning imkonini beradi. Bir vaqtning o'zida faqat ikkita faza muvozanatda bo'lishi Gibbs-Dyugem tenglamasi

$$SdT - Vdp + \sum N_i d\mu_i = 0$$

yordamida o'rganiladi.

4.9. Sirt hodisalar termodinamikasi

Sirt hodisalar termodinamikasi Gibbs tomonidan ishlab chiqilgan. Gibbs sirt qatlamini yangi «sirt faza» deb qabul qiladi. Fazalar muvozanatini qarashda sirtda mavjud bo'lgan ikkita narsani:

- 1) ikkita fazaning o'zaro ta'sir energiyasini,
- 2) fazalarni chegaralovchi sirt yaqinida moddaning holati modda ichidagi holatidan farq qilishligini hisobga olmadik.

Hisobga olinmagan bu ikkala faktor ta'siri, fazalarni chegaralovchi sirtning ko'payishi bilan yanada oshadi. Shuning uchun chegaraviy sirtni yana bir faza deb muvozanat shartlarini chiqaraylik.

Agar sirt o'zgarishi izotermik-izoxorik jarayon ostida o'tsa, u holda sirtni o'zgartirishdagi ish erkin energiyaning kamayishi hisobiga bajariladi, ya'ni $dF = -SdT + pdV + \gamma d\Sigma$ dan

$$\delta A = -(dF_\Sigma)_{T,V} = -\gamma d\Sigma$$

kelib chiqadi. Bu yerda $\gamma = dF_\Sigma/d\Sigma$ birlik sirtga to'g'ri kelgan erkin energiya bo'lib, sirt tarangligi deyiladi. Sirdagi erkin energiya $F_\Sigma = \gamma\Sigma$, Σ – chegaraviy sirtning yuzasi.

Agar sirt fazasini hisobga olgan holda, bir komponentli ikki fazali (suv-bug') sistema uchun muvozanat shartini yozsak, u holda (4.61) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$T = T, \mu = \mu, \text{ ammo } p \neq p.$$

Muvozanat holatda erkin energiya minimum bo'lishidan ($\delta F = 0$), izotermik jarayonda

$$-p \, dV - p \, dV + \gamma d\Sigma = 0$$

bo'ladi. Sistema berk bo'lganligi uchun $V + V = V$, $dV = -dV$ bo'ladi, natijada

$$p = p + \gamma \frac{d\Sigma}{dV}.$$

$\frac{d\Sigma}{dV}$ – chegaraviy sirtning egriligini aniqlaydi. Agar chegaraviy sirt sfera bo'lsa, u holda

$$p = p + \frac{2\gamma}{r}. \quad (4.70)$$

Agar sirt ixtiyoriy bo'lsa,

$$p = p + \gamma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right). \quad (4.71)$$

Bu yerda r, r, r – chegaraviy sirtning asosiy egrilik radiuslari.

(4.70) va (4.71) ga Laplas formulasi, $\frac{2\gamma}{r}$ – Laplas bosimi deyiladi.

Fazalarning muvozanatda bo'lishini belgilovchi kimyoviy potensiallarga qo'yilgan shartlar va Laplas formulasi suyuqlik tomchisi radiusi va uning ustidagi to'yingan bug' bosimi orasidagi bog'lanishni aniqlash imkonini beradi.

Faraz qilaylik, r radiusli suyuqlik tomchisi bug'i bilan muvozanatda bo'lsin, ya'ni

$$\mu(p, T) = \mu(p, T).$$

Bunday shartni chegaraviy sirt uchun ham yozamiz:

$$\mu(p, T) = \mu(p, T).$$

Yuqoridagi ikkita shartni birlashtirib, quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\mu(p, T) - \mu(p, T) - \mu(p, T) - \mu(p, T), \quad (4.72)$$

bu yerda () kattaliklarning suyuqlikka, () esa bug'ga tegishli ekanligini ko'rsatadi. Suyuqlik bug'ini ideal gaz deb, (4.72)ning o'ng tomonini quyidagicha yozamiz:

$$\mu''(p'', T) - \mu''(p, T) = kT \ln p'' - kT \ln p = kT \ln \frac{p''}{p}. \quad (4.73)$$

Suyuqlik kam siqilishini hisobga olsak, (4.72) ning chap tomonini esa,

$$\begin{aligned} \mu'(p', T) - \mu'(p, T) &= \mu'(p + \Delta p, T) - \mu'(p, T) = \\ &= \Delta p \frac{\partial \mu'(p, T)}{\partial p} = \Delta p v' \end{aligned} \quad (4.74)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $\mu'(p + \Delta p, T)$ Δp ning darajalari bo'yicha qatorga yoyilgan. v suyuqlik fazasida bitta zarraga to'g'ri keluvchi hajm. (4.70) tenglikka asosan, (4.74) ni sirt taranglik koeffitsiyenti orqfali yozamiz:

$$\mu'(p', T) - \mu'(p, T) = \frac{2\gamma}{r} v'. \quad (4.75)$$

Yuqoridagi (4.73) va (4.75) ifodalarni solishtirib, bug' bosimining tomchi radiusiga bog'lanishini topamiz:

$$p'' = p \exp\left(\frac{2\gamma v'}{rkT}\right). \quad (4.76)$$

4.10. Faza o'tishlar. Birinchi xil faza o'tishlar

Kritik nuqta mavjudligini ilk bor Endryu (1869) CO_2 ni o'rganganda kuzatgan. Bir qancha vaqtidan keyin Van-der-Vaals o'zining mashhur tenglamasini taklif qiladi. Van-der-Vaals holat tenglamasi kondensatsiya nazariyasi tarixiy rol o'ynagan. Bu tenglamaning muhim xossasi, bitta tenglama bir vaqtning o'zida ham gaz, ham suyuq holatni tavsiflay olgan. Bizga umumiy fizika kursidan ma'lumki, bu tenglama ma'lum temperaturalar intervalida nomuvozanat sohaga ega. Bunday holdan qutilish uchun Maksvell teng yuzalar qoidasini kiritadi. Van-der-Vaals tenglamasi va Maksvell teng yuzalar qoidasi birgalikda kondensatsiya hodisasini tushuntirib bergen. O'sha vaqtida moddaning bir agregat holatdan ikkinchisiga o'tishi

faza o'tishi degan nom olgan. Shunday qilib, fazalar o'tishining nazariyasiga asos solingan. Turli sistemalar ustida olib borilgan tadqiqotlar faza o'tish gaz holatdan suyuqlik holatiga o'tish bilan chegaralangan, juda ko'p qirrali ekanligi namoyon bo'ldi.

Muvozanat holatdagi geterogen sistemada tashqi ta'sirlarning o'zgarishida modda bir fazadan boshqa fazaga o'tishi mumkin. Masalan: suyuq holatdan gaz holatga, bir kristall modifikatsiyadan boshqasiga, normal o'tkazgich holatdan o'ta o'tkazgich holatga, ferromagnit holatdan paramagnit holatga va h.k. Bu faza o'tishlarning qisqacha ro'yxati bo'lib, uni yana davom ettirish mumkin. Faza o'tishlar nazariyasi hozirgi kunda juda rivojlangan bo'lib, ushbu darslik doirasida barcha nazariyalarni qamrab olish mumkin emas.

Faza o'tishlar nazariyasini avval termodinamik nuqtayi nazardan ko'rib chiqamiz. Faza o'tishlar har doim ba'zi bir termodinamik kattaliklar uzlusizligining buzilishi bilan bog'-langandir. O'tish nuqtasida Gibbs termodinamik potensialining birinchi yoki ikkinchi tartibli hosilalarining uzilishga duchor bo'lishiga qarab, faza o'tishlar birinchi va ikkinchi xil faza o'tishlarga bo'linadi. Agar Gibbs termodinamik potensialidan olingen birinchi tartibli hosila uzilishga duchor bo'lsa, ikkinchi tartibli hosila esa uzlusiz bo'lsa, bunday faza o'tish birinchi xil faza o'tishlar deb yuritiladi. Agar aksincha bo'lsa, u holda ikkinchi xil faza o'tishlar deb yuritiladi.

Birinchi xil faza o'tishlarda solishtirma hajm, solishtirma entropiya o'tish nuqtasida uzilishga duchor bo'ladi. Birinchi xil faza o'tishlarda yashirin issiqlikning yutilishi yoki ajralishi kyzatiladi. Bunday o'tishga erish, bug'lanish, sublimatsiya, bir kristall holatdan ikkinchi kristall holatga o'tish kiradi.

Birinchi xil faza o'tishlar tenglamasi Klapeyron-Klauzius tomonidan berilgan. Bu tenglamani olishda fazalar muvozanatida ikkala fazadagi kimyoviy potensiallarning tenglik sharti $\mu(T, p) = \mu(T, p)$ dan foydalanamiz. Buning uchun ushbu tenglikning har ikkala tomonidan to'liq differensial olamiz:

$$\begin{aligned} d\mu &= -s dT + v dp, \\ d\mu &= -s dT + v dp, \\ d\mu(T, p) &= d\mu(T, p). \end{aligned} \tag{4.77}$$

Mos differensiallarni solishtirib quyidagi ifodani olamiz:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s - s}{v - v}. \quad (4.78)$$

Bu yerda s va v – bitta zarraga to'g'ri kelgan entropiya va hajm. (4.78) muvozanat egriligining differensial tenglamasi bo'lib, u *Klayperon-Klauzius tenglamasi* deyiladi. Ko'pincha bu tenglama quyidagi ko'rinishda ham yoziladi:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v - v)} \quad (4.79)$$

yoki

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V - V)}. \quad (4.80)$$

Bu yerda λ yoki $L = \lambda N$ – o'tish issiqligi yoki yashirin issiqlik deb yuritiladi, $\Delta v = v - v$ yoki $\Delta V = V - V$ – mos ravishda molyar solishtirma hajm yoki molyar hajm o'zgarishi. (4.79) yoki (4.80) tenglamalarning

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T\Delta v}{\lambda} \text{ yoki } \frac{dT}{dp} = \frac{T\Delta V}{L}$$

ko'rinishda yozilishi – faza o'tishda, bosim o'zgarishiga qarab o'tish temperaturasining o'zgarishini aniqlaydi (masalan, muzlash yoki qaynash nuqtasi).

Suyuqlikning bug'ga o'tishida issiqlik beriladi va hajm har doim ortadi, va demak,

$$\frac{dT}{dp} > 0$$

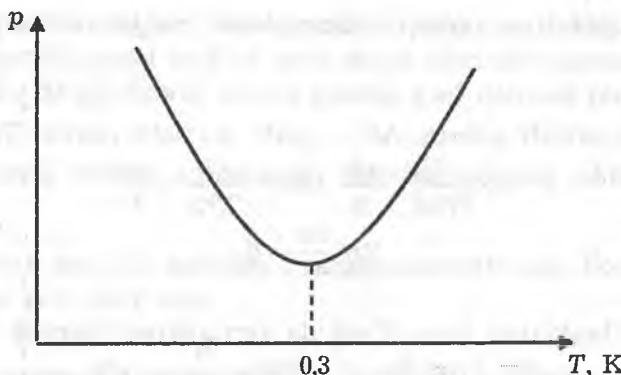
bo'ladi, ya'ni bosim oshganda qaynash temperaturasi har doim ortadi. Ammo, erishda esa ikki hol uchraydi:

1) $\Delta v = v - v > 0$ bo'lsa, u holda $\frac{dT}{dp} > 0$ bo'ladi, demak,

bosim ortishi bilan erish temperaturasi ko'tariladi. Bunday hol deyarli barcha qattiq jismlar uchun bajariladi.

2) $\Delta v = v - v < 0$ bo'lsa, u holda $\frac{dT}{dp} < 0$ bo'ladi, demak,

bosim ortishi bilan erish temperaturasi pasayadi. Bunday hol



4.3- rasm. Qattiq geliyning erish egri chizig'i.

qoidadan istesno bo'lib, qattiq fazadagi suv, cho'yan, vismut, germaniy va galliy uchun bajariladi. Bu moddalar erishda hajmi kamayadi. Shuning uchun $\frac{dT}{dp} < 0$ bo'ladi, ya'ni bosim oshishi bilan erish temperaturasi pasayadi.

3) Bosim oshishi bilan erish temperaturasining pasayishi tajribada geliy izotopi ${}^3\text{He}$ da kuzatilgan. Buning sababi ikkinchi holdan farq qiladi. $T < 0,3 \text{ K}$ da geliy izotopi ${}^3\text{He}$ da $v > v'$ bo'sada, bosim oshishi bilan erish temperaturasi kamayadi. Sababi shuki, $T < 0,3 \text{ K}$ da solishtirma erish issiqligi $\lambda - T(s - s') < 0$, chunki suyuq ${}^3\text{He}$ ning entropiyasi qattiq ${}^3\text{He}$ ning entropiyasidan kichik. Bunga Pomeranchuk effekti deyiladi. $T = 0,3 \text{ K}$ da erish solishtirma issiqligi ishorasini o'zgartiradi va demak, bu temperaturada erish egriligi minimumga ega bo'ladi (4.3- rasm). $T < 0,3 \text{ K}$ da suyuq ${}^3\text{He}$ qotishida issiqlik yutiladi. Demak, bu temperaturalar intervalida ${}^3\text{He}$ qotishi uchun uni adiabatik holda siqish kerak ekan, bu esa erish (qotish) temperaturaning pasayishiga olib keladi.

Birinchi xil faza o'tishlariga termodinamikaning uchinchi qonunini tatbiq qilamiz. Absolut nol temperatura yaqinida, termodinamikaning uchinchi qonuniga asosan,

$$\lim_{T \rightarrow 0} (S - S_0) = 0.$$

Bu shart bajarilishi uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi $T\Delta S = \Delta E + p\Delta V$ dan ikkita hol kelib chiqadi. Birinchi

hol: temperatura nolga intilganda bir vaqtida ichki energiya va hajmning o'zgarishi nolga teng bo'lishi kerak. Bunda qattiq faza suyuq fazadan farq qilmay qoladi. Ikkinchchi hol: yuqoridagi shart bajarilish uchun $\Delta E = -p\Delta V$ bo'lishi kerak. Tajribalar ko'rsatadiki, gelyida ikkinchi hol amalga oshadi. Demak,

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{dp}{dT} = 0$$

bo'ladi. Haqiqatan ham, $T \rightarrow 0$ da termodinamikaning uchinchi qonuniga asosan, $\Delta S = S'' - S = 0$ bo'ladi va muvozanat egriligi (p, T) diagrammada temperatura o'qiga parallel yotadi.

Muvozanat egriliginig temperaturaga ana shunday bog'liqligi haqiqatan ham suyuq geliy-II uchun o'rini ekanligini tajribalar isbotladi. Suyuq geliy-II $T \rightarrow 0$ K da va $p > 30$ atm da barqaror faza bo'ladi. $p \sim 30$ atm dan yuqori bosimlarda barqaror faza qattiq geliy bo'ladi. Qattiq geliyning suyuq holatga va aksincha suyuq holatdan qattiq holatga o'tishida fazalar muvozanat egriligi absissa o'qiga parallel holda yotadi va $T \rightarrow 0$ K da uning burchak koeffitsiyenti $\frac{dp}{dT} \rightarrow 0$. Demak, $\Delta S \rightarrow 0$ va erish yashirin issiqligi ham $L \rightarrow 0$.

Muvozanat egriliginini oshkora ko'rinishda umumiyl holda topish mumkin emas. Agar tajribalardan faza o'tish yashirin issiqligi va molar hajm o'zgarishi temperatura va bosimga bog'liqligi ma'lum bo'lsa, u holda Klapeyron-Klauzius tenglamasini integrallash mumkin va natijada muvozanat egriliginining oshkora ko'rinishini va muvozanat egriligi formasini topish mumkin. Ammo bu kattaliklarning temperaturaga bog'liqligi murakkab, shuning uchun integral sonli hisoblanadi.

O'tish yashirin issikligi L ni topishni soddalashtirish mumkin, buning uchun muvozanatdagi fazalardan birortasi bug' bo'lishi kerak. Bu holda kondensatsiyalangan fazaning hajmi bug' hajmidan juda kichik bo'lganligi uchun $\Delta V = V'' - V' \approx V''$ deb yozish mumkin va Klapeyron-Klauzius tenglamasi

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{TV''}$$

ko'rinishni oladi. Agar muvozanatda bo'lgan bug' yetarli dara-

jada siyrak bo'lsa, uni ideal gaz deb qarash mumkin bo'ladi. U holda $V = \frac{NkT}{p}$ va

$$\frac{dp}{dT} = -\frac{Lp}{kNT^2} \text{ yoki } \frac{dp}{p} = -\frac{L}{kNT^2} dT. \quad (4.81)$$

Endi o'tish yashirin issiqligi L ning temperaturaga bog'lanishini topaylik. $L = \Delta ST$ dan

$$\frac{dL}{dT} = \Delta S + T \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial T} \right)_p + T \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial p} \right)_{\text{RT}} \frac{dp}{dT}.$$

(4.81)dagi ifodalarni hisobga olib,

$$\frac{dL}{dT} = \Delta C_p$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallash natijasida o'tish yashirin issiqligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$L = \int_0^T \Delta C_p dT + L_0. \quad (4.82)$$

Bu yerda $L_0 - T = 0$ K dagi yashirin issiqlik bo'lib, kondensatsiyalangan faza molekulalari orasidagi bog'lanishni uzib, o'zaro ta'sirda bo'limgan molekulalarga aylantirish uchun

bajarilgan ishni beradi. $\int_0^T \Delta C_p dT$ esa suyuq faza va bug'da issiqlik

harakat energiyalari farqini kompensatsiyalashda sistemaga berilgan energiya.

(4.82) ifodani (4.81) ifodaga qo'yib integrallash natijasida quyidagilarni olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dT} &= \frac{L_0}{kN} \frac{dT}{T^2} + \frac{dT}{kNT^2} \int_0^T \Delta C_p dT \text{ va} \\ p &= \exp \left[-\frac{L_0}{kNT} + \int_0^T \frac{dT}{kNT^2} \int_0^T \Delta C_p dT + i \right]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Bu yerda i o'zgarmas kattalik bo'lib, bug' elastiklik doimiysi deb yuritiladi. (4.83) ifoda temperatura pasayishi bilan muvozanatdagi to'yingan bug' bosimining keskin kamayishini ko'rsatadi. Bug'lanish holi uchun

$$p = \exp\left[-\frac{L_0}{kNT}\right] + i.$$

Chunki bu holda $L \sim L_0$ bo'ladi.

Agar kondensatsiyalangan faza kristall bo'lsa, i va $\Delta C_p = C''_p - C'_p$ kattaliklarni statistik metod yordamida hisoblash mumkin. Bu holda to'yingan bug' bosimi kichik bo'ladi va bug'ni ideal gaz deb hisoblab kimyoviy potensiallarni hisoblash mumkin. Natijada kimyoviy potensiallarning tenglik sharti $\mu'(p, T) = \mu''(p, T)$ dan yuqori va past temperaturalarda (p, T) diagrammada $p = p(T)$ muvozanat egriligining oshkora ko'rinishini olish mumkin.

4.11. Ikkinchi xil faza o'tishlar. Erenfest tenglamalari

Bir qator metallar va qotishmalar absolut nol temperatura yaqinida, ya'ni juda past temperaturalarda o'ta o'tkazuvchan holatga o'tadi va faza o'tishlarga duchor bo'ladi. Bu holatda moddaning muhim xususiyatlardan biri elektr tokiga qarshilikning to'la yo'qolishidir. Bu hodisa bиринчи мarta Komerling-Onnes (1911-y.) tajribalarida kuzatilgan. Bundan tashqari normal fazadan o'ta o'tkazuvchan fazaga o'tish yaqin-yaqinlargacha faqat absolut nol temperatura yaqinida kuzatilar edi. Hozirgi kunda juda ko'p materiallarda bunday faza o'tishlar suyuq azot va undan yuqori temperaturalarda kuzatilmogda.

Metallarning o'ta o'tkazuvchanlik va normal holatlari bir-biridan faqat o'ta o'tkazuvchanlik xossasi bilan emas, balki sof termodinamik kattaliklarning turli fazalarda o'zini tutishi bilan ham farq qiladi. Bu farq modda turli termodinamik fazalarda bo'lishidan dalolat beradi. Shunga o'xshash holat suyuq geliyda kuzatiladi – o'ta oquvchanlik hodisasi.

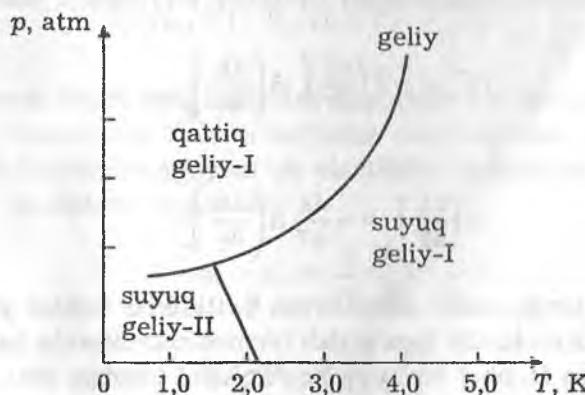
Metallning normal holatdan o'ta o'tkazuvchan holatga o'tishi uning magnit xususiyatlarining o'zgarishi bilan birga bo'ladi.

Bu o'zgarish shundan iboratki, massiv o'ta o'tkazgichning ichiga magnit maydon kirolmaydi, aniqrog'i magnit maydon faqat 10^{-5} sm qatlamda mavjud bo'ladi. Demak, o'ta o'tkazgich ichida magnit maydon induksiyasi nolga teng bo'ladi. Magnit induksiya vektorining normal tashkil etuvchisi uzluksiz va u nolga teng bo'lganligi uchun o'ta o'tkazgich ichida magnit induksiya vektori sirtga o'tkazilgan urinma bo'ylab yo'nalган bo'ladi. Bu Veys qonuni deb yuritiladi.

Oldingi mavzuda eslatdikki, agar bir fazadan ikkinchi fazaga o'tish nuqtasida Gibbs termodynamik potensialidan olingan birinchi tartibli hosila uzluksiz bo'lib, ikkinchi tartibli hosilasi uzilishga duchor bo'lsa, bunday faza o'tishlar ikkinchi xil faza o'tishlar deyiladi. Bu holda issiqlik sig'imi C_p issiqlikdan kengayish koeffitsiyenti α , termik siqiluvchanlik koeffitsiyenti β va boshqalar o'tish nuqtasida sakrab o'zgaradi. Agar ikkinchi tartibli hosilalar o'tishda cheksizlikka aylansa – kritik o'tishlar deyiladi. Bunda modda xususiyatining anomal tabiatini kritik hodisalar deb yuritiladi.

«Ikkinchi xil faza o'tishlar» tushunchasi (1933-y.) Erenfest tomonidan kiritilgan. Erenfest ikkinchi xil faza o'tishlarni suyuq He – I ni suyuq He – II ga (o'ta oquvchanlik holati) o'tishida kuzatadi.

Tajriba natijalari shuni ko'rsatadiki (4.4- rasm) qattiq geliy $T = 4,22$ K va normal atmosfera bosimida suyuq holatga o'tadi (geliy-II) va 0 yaqinida suyuq holatda qoladi. Suyuq geliy-I $T = 2,19$ K da suyuq geliy-II ga o'tadi, ya'ni geliy-II da ikkinchi



4.4- rasm. Past temperaturalarda geliy-I faza diagrammasi.

tur faza o'tish yuz beradi. Suyuq geliy-II $T \rightarrow 0$ K gacha suyuq holatda qoluvchi va kvant xossaga ega bo'lgan makroskopik sistemadir. Boshqa hamma sistemalar kvant effektlar namoyon bo'lgunga qadar temperaturalarda qattiq holatga o'tib bo'ladi. Suyuq geliy-II va geliy-I o'zining fizik xususiyatlari bilan bir-biridan farq qiladi. 4.4- rasmdan ko'rinish turibdiki, 30 atm dan katta bosimda, yuqori temperaturali modifikatsiyadagi suyuq geliy-I temperatura pasayishi bilan qattiq holatga o'tadi. Ammo 30 atm bosimdan kichik bosimda $T \rightarrow 0$ K temperaturada ham suyuqligicha qoladi. Lekin, $T = 2,19$ K temperaturada suyuq geliy-I boshqa modifikatsiya, suyuq geliy-II ga o'tadi. Bunda o'tish yashirin issiqligi nolga teng bo'ladi. Bunday faza o'tish ikkinchi xil faza o'tish deyiladi.

Shuning uchun ham ikkinchi xil faza o'tishlar Erenfest tenglamalari bilan ifodalanadi. Erenfest tenglamalari birinchi xil faza o'tishlarni ifodalovchi Klayperon-Klaузius tenglamasi (4.78)ni Lapital qoidasi bo'yicha o'zgartirish natijasida quyidagi ko'rinishda olinadi:

$$\Delta C_p = -T \left(\frac{dp}{dT} \right)^2 \Delta \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T, \quad (4.84)$$

$$\Delta \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = - \frac{dp}{dT} \Delta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p} \right)_T. \quad (4.85)$$

Agar sistemaga umumlashgan kuch f_i ta'sir etayotgan bo'lsa, u holda Erenfest tenglamalari umumiy ko'rinishni oladi:

$$\Delta C_{f_i} = -T \left(\frac{df_i}{dT} \right)^2 \Delta \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial f_i} \right)_T, \quad (4.86)$$

$$\Delta \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial T} \right)_{f_i} = - \frac{df_i}{dT} \Delta \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial f_i} \right)_T \quad (4.87)$$

(4.84)–(4.87) tenglamalar solishtirma kattaliklar uchun yozilgan.

O'ta o'tkazuvchanlik faza o'tish termodinamikasida hajmning o'zgarishini va H_c ning bosimga bog'liqligini hisobga olib, issiqlik hajmiy kengayishi va elastiklik modulining o'zgarishlarini topamiz. Bu masalani sodda yechish uchun o'ta o'tkazgich V hajmli

kvazicheksiz silindrden iborat bo'lsin. Silindr o'qiga parallel yo'nalgan magnit maydonga joylashtirilgan bo'lsin. Bu holda maydon mavjud bo'lgan va u yo'q bo'lgandagi Gibbs termodynamik potensialining farqi

$$\Phi_s(H, T) - \Phi_s(0, T) = \frac{V_s H^2}{8\pi} \quad (4.88)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu ifodadan o'zgarmas H va T da bosim bo'yicha hosila olib, hajmlar farqi uchun quyidagini qilamiz:

$$V_s(H, T) - V_s(0, T) = \frac{H^2}{8\pi} \left(\frac{\partial V_s}{\partial p} \right)_{H, T}. \quad (4.89)$$

O'ta o'tkazuvchanlik uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi

$$\Phi_n(H_c, T) - \Phi_s(0, T) = \frac{V_s H_c^2}{8\pi} \quad (4.90)$$

dan o'zgarmas T da bosim bo'yicha hosila olib, kritik maydonda hajmlar farqi quyidagiga tengligini topamiz:

$$V_n(H_c, T) - V_s(0, T) = \frac{H_c^2}{8\pi} \left(\frac{\partial V_s}{\partial p} \right)_T + \frac{V_s H_c}{4\pi} \left(\frac{\partial H_c}{\partial p} \right)_T. \quad (4.91)$$

(4.91) dan (4.89) ni ayirib, o'ta o'tkazuvchan va normal faza-larda hajmlar farqi

$$V_n(H_c, T) - V_s(H, T) = \frac{V_s H_c}{4\pi} \left(\frac{\partial H_c}{\partial p} \right)_T \quad (4.92)$$

tenglama bilan aniqlanishini topamiz. Bu tenglanamaning har ikkala tomonidan T va p bo'yicha hosilalar olib, mos ravishda, issiqlik hajmiy kengayish va elastiklik modulining o'zgarishlari uchun ifodalarni topamiz:

$$\alpha_n - \alpha_s = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial H_c}{\partial T} \frac{\partial H_c}{\partial p}, \quad (4.93)$$

$$K_n - K_s = \frac{K_c^2}{4\pi} \left(\frac{\partial H_c}{\partial p} \right)^2. \quad (4.94)$$

Bu ifodalarni olishda $H = H_c$ deb hisoblangan.

4.12. O'ta o'tkazuvchanlik holatda faza o'tish. Rutgers formulasi

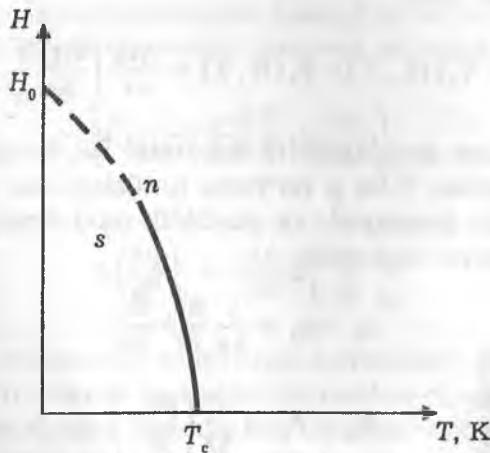
Erenfest tenglamalarini magnit maydon qatnashmaganda ($H = 0$), o'tkazgichning normal holatdan o'ta o'tkazuvchan holatga o'tishiga tattbiq qilaylik. Ana shunday o'tishlar ba'zi o'tkazgichlarda aniq T_c temperaturada amalga oshadi. Agar kuchli magnit maydon H_c qo'yilsa, u holda o'ta o'tkazuvchanlik holatini buzish mumkin. Kritik maydon kuchlanganligi H_c ning temperaturaga bog'liqligi parabola ko'rinishida bo'ladi (4.5- rasm):

$$H_c(T) = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right].$$

Agar o'tkazgich magnit maydonda bo'lsa ($H \neq 0$), u holda uning o'ta o'tkazuvchanlik holatiga o'tishida issiqlik ajralishi kuzatiladi. Demak, bu o'tish birinchi xil faza o'tish bo'ladi va Klayperon-Klauzius tenglamasi yordamida aniqlanadi. Magnit maydoni qatnashmaganda o'tish issiqligi nolga teng bo'ladi va normal (n) holatdan o'ta o'tkazgich (s) holatiga o'tishi ikkinchi xil faza o'tish bo'ladi.

Tashqi magnit maydonda o'ta o'tkazuvchan o'zini diamagnit kabi tutadi va Maycner hodisasiga asosan magnit induksiya vektori nolga teng bo'ladi:

$$B_s = H + 4\pi M_s = 0.$$



4.5- rasm. Magnit maydonda normal holatdan o'ta o'tkazuvchan holatga o'tishning temperaturaga bog'liqligi.

Bu ifodadan

$$M_s = -\frac{1}{4\pi} H$$

B_s – magnit induksiyasi, M_s – magnit momenti. Agar normal o'tkazgich uchun

$$M_n = \frac{\mu-1}{4\pi} H$$

ekanligini hisobga olsak, u vaqtida (4.87) tenglamadan ($f_i = H$ va $\lambda_i = M$, $\mu = 1 + 4p \approx 1$ – magnit qabul qiluvchanlik) magnit maydon qatnashmaganda holatdan holatga o'tishda issiqlik sig'imi o'zgarishini quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$\Delta C = C_s - C_n = \frac{T_c}{4\pi} \left(\frac{dH_c}{dT} \right)_{H_c=0}^2.$$

Bu ifoda Rutgers formulasi deyiladi. Bu formula yordamida olingan natijalar qalay, galliy, indiy ustida olib borilgan tajriba natijalari bilan juda katta aniqlikda mos keladi.

4.13. Faza o'tishlar Landau va Yang-Li nazariyaları

Biz yuqorida birinchi va ikkinchi faza o'tishlar mavjudligini termodinamika nuqtayi nazaridan ko'rib chiqdik. Faza o'tishlarning mavjud bo'lishi statistik fizika uchun kutilmagan hodisa bo'lган. Chunki, statistik yig'indi sistema holatini xarakterlovchi termodinamik kattaliklar: bosim, temperatura, hajm va boshqa parametrlarning uzluksiz funksiyasidir. Bu masalaning mohiyatini ochish va tahlil qilish uchun bir qator nazariyalar yaratilgan. Bularning hammasini bayon qilish murakkab vazifa. Chunki, ular nazariy fizikaning alohida bo'limlari bo'lib, maxsus matematik va fizik bilimlarni talab qiladi. Bu yerda faza o'tishlar hodisasining ba'zi sodda nazariyaları balan tanishib chiqamiz.

Erenfest tomonidan ikkinchi xil faza o'tishlar tushunchasi kiritilgandan so'ng uning termodinamik nazariyasi Landau tomonidan (1937-y.) berilgan. Bu nazariya jism simmetriyasining o'zgarishi bilan yoki atomlarning joylashishidagi tartib-

lanishga bog'liq bo'lgan faza o'tishlarga taaluqlidir. Ikkinchi xil faza o'tishlarda ma'lum bir temperaturada bir simmetriyaga bo'lgan fazadan boshqa simmetriyaga ega bo'lgan fazaga sakrab o'tiladi. Bu nuqtada birinchi xil faza o'tishlardan farqli ravishda turli fazalar muvozanatda bo'lmaydi, balki ular orasidagi farq yo'qoladi. Bu temperatura T_c bilan belgilanadi va kritik temperatura deyiladi. Bunday faza o'tishlar, asosan, kristallarda ro'y beradi. Xulosa qilib, shunday yozish mumkin: Agar faza o'tishi qandaydir temperaturada sodir bo'lsa, u holda:

1. $T > T_c$ dagi faza tartiblashmagan faza deyiladi.
2. $T < T_c$ dagi faza tartiblashgan faza deyiladi.
3. $T = T_c$ da ikkala faza orasidagi farq yo'qoladi.

Ikkinchi xil faza o'tishlar matematik nuqtayi nazardan termodinamik kattaliklar uchun maxsus nuqta hisoblanadi. Bu nuqta mavjudligini bosim, temperatura, hajm va shu kabi termodinamik kattaliklar yordamida tushuntirib bo'lmaydi. Shu sababli ikkinchi xil faza o'tishlarni tushiuntirish uchun yangi musbat ichki parametr «tartib» parametri η kiritiladi. Bu parametrning traditsion termodinamik kattaliklardan farqi shundaki, uni nazariyaga «qo'l» bilan kiritiladi va u turli fazalarda qanday qiymatlar qabul qilishi kerakligi oldindan beriladi. Ya'ni, tartiblashmagan fazada tartib parametri $\eta = 0$ deb olinadi. Termodinamik potensiallar, xususan, Gibbs energiyasi $\Phi(T, p, \eta)$ shu parametrga bog'liq deb olinadi. Kritik nuqtadan o'tishda $\Phi(T, p, \eta)$ ning uzlucksiz o'zgarishini ta'minlash uchun tartiblangan fazada kritik nuqta yaqinida η yetarlicha kichik qiymatlarni qabul qilishi kerak. Shuning uchun $\Phi(T, p, \eta)$ ni o'tish nuqtasi yaqinida, ya'ni tartiblashgan fazada η ning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$\Phi(T, p, \eta) = \Phi_0(T, p) + \alpha(T, p)\eta + \beta(T, p)\eta^2 + \dots \quad (4.95)$$

Muvozanat holatda Gibbs energiyasi η bo'yicha ekstremumga ega bo'lishidan (4.95) ga asosan

$$\eta = -\frac{\alpha(T, p)}{2\beta(T, p)} \quad (4.96)$$

kelib chiqadi. Bu holat barqaror bo'lishi uchun η ning bu qiymati $\Phi(T, p)$ minimum qiymat qabul qilishini, ya'ni $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} > 0$

ekanligini ta'minlab berishi kerak. Buning uchun $\beta(T, p) > 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Nazariya tajriba natijalari bilan mos kelishi uchun quyidagi postulatni qabul qilish kerak. Unga asosan, berilgan har bir bosimda shunday temperatura T_c mavjudki:

1. $T > T_c$ da $\alpha(T, p) \equiv 0$.
2. $T < T_c$ da $\alpha(T, p) \neq 0$.
3. $T = T_c$ da $\alpha(T, p) = 0$ shartlar o'rinni bo'ladi.

Boshqacha qilib aytganda $T < T_c$ da tartiblashgan faza mavjud va $T > T_c$ da tartiblashmagan faza mavjud bo'ladi deb qabul qilish kerak. Bu qoidani ushbu nazariya doirasida keltirib chiqarib bo'lmaydi, balki tajriba natijalari asosida shunday qoida nazariyaga kiritilgan. Shuning uchun $T \leq T_c$ da $\alpha(T, p)$ ni $T - T_c$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyish mumkin, ya'ni

$$\alpha(T, p) = \alpha(T_c, p) + (T - T_c) \left(\frac{\partial \alpha(T, p)}{\partial T} \right)_{T=T_c} + \dots$$

Yuqoridagi shartga ko'ra, $\alpha(T_c, p) = 0$ bo'lganligi uchun

$$\alpha(T, p) = (T - T_c) \left(\frac{\partial \alpha(T, p)}{\partial T} \right)_{T=T_c}. \quad (4.97)$$

Shunday qilib o'tish nuqtasi yaqinida (4.95)–(4.97) ifodalarga asosan tartiblashgan fazada Gibbs termodinamik potensialini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{\alpha^2}{2\beta} = \Phi_0 - \frac{(T-T_c)^2}{4\beta} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{T=T_c}^2. \quad (4.98)$$

Shunga o'xshash entropiya uchun ifodani topamiz:

$$S = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_p = S_0 + \frac{(T-T_c)}{2\beta} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{T=T_c}^2. \quad (4.99)$$

Bu yerda Φ_0 va S_0 mos ravishda Gibbs termodinamik potensiali va entropiyaning tartibga solinmagan fazadagi qiymatlari. (4.99) ga asosan ikkinchi xil faza o'tish nuqtasida issiqlik sig'i-mining o'zgarishini topamiz:

$$\Delta C_p = C_p - C_p^{(0)} = \frac{T_c}{2\beta} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{T=T_c}^2. \quad (4.100)$$

Bu yerda C_p tartibga solingan holatdagi issiqlik sig‘imi. (4.100) da $\beta > 0$ bo‘lganligi uchun $C_p > C_p^{(0)}$ kelib chiqadi. Demak, tartibga solingan fazadagi issiqlik sig‘imi, tartibga solinmagan fazadagiga qaraganda katta bo‘lar ekan. Bu hol tajriba natijalariga mos keladi. $\alpha(T, p)$ va $\beta(T, p)$ funksiyalar bir qiyamatli bo‘lganligi uchun η ham bir qiyamatli bo‘ladi. Bu metastabil holat bo‘lmasligiga olib keladi:

1. $T < T_c$ da faqat bitta tartibga solingan faza mavjud bo‘lib, tartibga solinmagan faza bo‘lmaydi (faza barqaror).

2. $T > T_c$ da esa aksincha, ya’ni tartibga solinmagan faza mavjud bo‘lib, tartibga solingan faza bo‘lmaydi.

Boshqacha qilib aytganda, ikkinchi xil faza o‘tishlarda o‘ta sovitish va o‘ta qizdirish mumkin bo‘lmaydi. Bu ushbu nazariyaning muhim xulosasi bo‘lib hisoblanadi.

Yuqorida keltirilgan nazariya fenomenologikdir, chunki nazariy kiritilgan $\alpha(T, p)$ va $\beta(T, p)$ larni aniqlay olmaydi. Ushbu nazariyada olingan (4.100) formulani Erenfest formulasi (4.86)

bilan solishtirish natijasida $\alpha = f_i$ va $\beta = -\Delta \left(\frac{\partial f_i}{\partial \lambda_i} \right)$ ekanligini

aniqlaymiz. Bu esa Erenfest formulasi muhim termodinamik formula ekanligini ko‘rsatadi. Chunki, o‘tkazgichni o‘ta o‘tkazgich fazaga o‘tish holi uchun bu formuladan Rutgers formulasi

$$\Delta C = C_s - C_n = \frac{T_c}{4\pi} \left(\frac{dH_c}{dT} \right)_{H_c=0}^2$$

kelib chiqadi. Bu yerdagi $\left(\frac{dH_c}{dT} \right)_{H_c=0}^2$ kattalikni tajribadan o‘lchab

issiqlik sig‘imining sakrash kattaligini aniqlash imkoniyatini beradi. Vaholanki Landau nazariyasi bunday natijani bera olmaydi. Chunki, (4.100) formuladan Rutgers formulasi olinadi. Rutgers formulasi noma'lum bo‘lgan $\alpha(T, p)$ va $\beta(T, p)$ kattaliklarni topish imkonini beradi. Bu formulalarni solishtirish $\alpha(T, p) = H$ va $\beta(T, p) = 4\pi$ ekanligini ko‘rsatadi. Ushbu nazariya bunday kamchiliklarga ega bo‘lishiga qaramasdan Erenfestning sof termodinamik nazariyasiga qaraganda ikkinchi xil faza o‘tishlarni tahlil qilishda qulaydir.

Shu vaqtgacha faza o'tishlar mavjudligini fenomenologik termodinamika nuqtayi nazaridan o'rgandik. Endi faza o'tishlarni statistik fizika metodlari yordamida ko'rib chiqamiz.

Biror V hajmdagi ideal gazni ko'ramiz, shu bilan birga molekulalar orasidagi o'zaro itarish kuchi yaqin masofalarda juda tez o'sadi deb hisoblaymiz. U holda berilgan hajmda molekulalar soni juda katta, lekin chekli bo'lган N dan oshmaydi, ya'ni biror ichki yoki tashqi sabablarga ko'ra zarralar soni cheksiz bo'la olmaydi. Bunday sistema uchun katta statistik yig'indi quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$\tilde{Z} = \sum_{n=1}^N z^n Z_n, \quad (4.101)$$

bu yerda z – aktivlik, Z_n – molekulalari soni n ta bo'lган sistemachaning statistik yig'indisi. Statistik yig'indi ma'lum bo'lsa, u orqali ixtiyoriy termodinamik parametrni topish mumkin. Masalan, bosim

$$p = \frac{kT}{V} \ln \tilde{Z}, \quad (4.102)$$

molekulalarning zichligi yoki solishtirma hajmi

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{v} = \frac{kT}{V} \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \mu} \quad (4.103)$$

ifodalar bilan aniqlanadi. Bu yerda μ – bo'yicha hosiladan aktivlik bo'yicha hosilaga o'tsak,

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{V} \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \ln z} = \frac{\partial p}{\partial \ln z} \quad (4.104)$$

hosil qilamiz. (4.102) va (4.104) tenglamalardan holat tenglamasi $f(p, N, v)$ ni aniqlash mumkin.

Katta statistik yig'indi (4.101) dan ko'rinish turibdiki, z ning N darajali polinomi ekan, ya'ni

$$\tilde{Z} = z Z_1 + z^2 Z_2 + z^3 Z_3 + \cdots z^N Z_N. \quad (4.105)$$

Ushbu polinomning koeffitsiyentlari musbat, shuning uchun statistik yig'indi $z > 0$ ning monoton o'suvchi funksiyasi bo'ladi.

Demak, (4.102) bilan aniqlanuvchi bosim ham monoton o'suvchi funksiya bo'ladi. Umuman (4.105) bilan aniqlanuvchi ixtiyoriy termodinamik kattalik $z > 0$ ning uzluksiz va monoton funksiysi bo'ladi. Faza o'tish nuqtalarida esa, birorta termodinamik kattalik yoki uning hosilalarining uzluksizligi buzilishi kerak, ya'ni uzilish, sakrab o'zgarish kabi maxsus nuqtaga ega bo'lishi kerak.

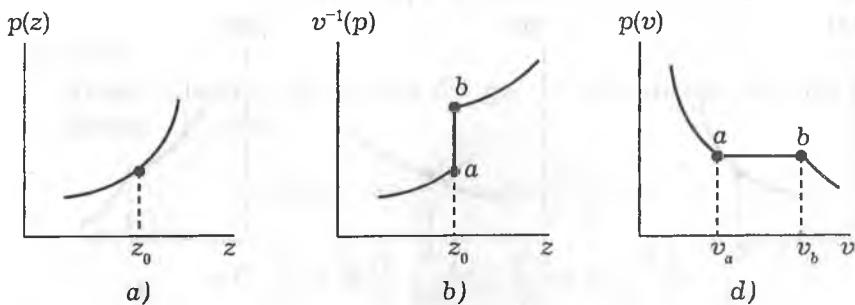
Katta statistik yig'indi uchun aniq ifoda birorta ham real sistemalar uchun topilmagan, ammo sodda modellar uchun bu masala hal qilingan.³ Shunga qaramasdan umumiy holda masalani o'rganish mumkin ekan. Haqiqatan ham, matematik izlanishlar shuni ko'rsatadiki, faza o'tishlar katta statistik yig'indining nollari bilan uzviy bog'liq ekan. Bunday tahlilni avval N va V chekli bo'lganda tekshirib chiqamiz. Termodinamik kattaliklar maxsus nuqtalarga ega bo'lishi uchun \bar{Z} :

1. Maxsus nuqtalarga ega bo'lishi kerak. Lekin Z_n va z musbat bo'lganligi uchun katta statistik yig'indi maxsus nuqtalarga ega bo'la olmaydi.

2. Nolga teng bo'lishi kerak. Bu holda termodinamik kattaliklar logorifmik maxsus nuqtaga ega bo'ladi. Katta statistik yig'indi N -darajali polinom bo'lganligi uchun $\bar{Z}(z) = 0$ tenglama N ta ildizga ega. Bu ildizlardan biri $z = 0$, qolganlari o'zaro qo'shma kompleks ildizlar bo'ladi. Lekin $z > 0$ sohada ildizlarga ega emas. Aktivlik nol yoki kompleks qiymatlarni qabul qila olmaydi. Shuning uchun katta statistik yig'indining bunday nollaridan paydo bo'ladigan maxsus nuqtalar fizik ma'noga ega emas.

Yang va Li tomonidan termodinamik chegaraviy holda, ya'ni solishtirma hajmni o'zgarmas ushlab turib, V va N cheksizga intilgan holda katta statistik yig'indi o'rganilgan. Statistik yig'indi z haqiqiy o'qda analitik funksiya bo'lganligi uchun uni \bar{z} kompleks tekislikka analitik davom ettiramiz va u yerda uning xossalariini va nollarini tahlil qilamiz. Molekulalar soni cheksizga intilganligi uchun polinomning darajasi ham cheksizga intiladi, demak, ildizlarning soni ham cheksizga intiladi. Ular \bar{z} tekislikni egallaydilar. Lekin, Yang va Li o'tkazgan tadqiqotlar shuni ko'rsatdiki, ildizlar \bar{z} tekislikni bir tekis qoplamas ekan, ya'ni $\frac{1}{V} \ln \bar{Z}(\bar{z})$ haqiqiy o'qni o'z ichiga olgan biror R

³ Ferromagnetikning Izing modeli aniq yechimga ega.



4.6- rasm. Birinchi xil faza o'tishining yuzaga kelishi.

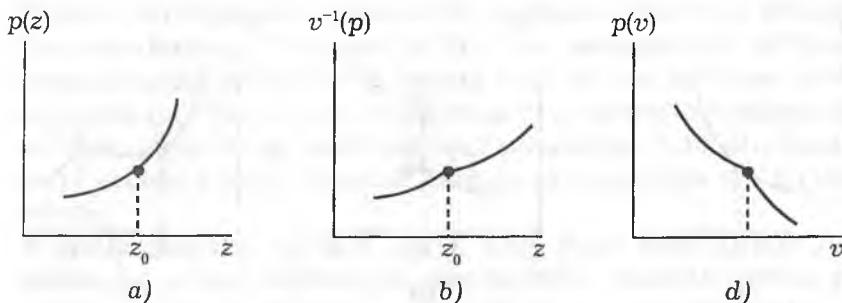
kompleks sohada analitiklik xossasini saqlab qolar ekan. Bunga asosan shu sohada bosim maxsus nuqtalarga ega bo'lmaydi, demak, faza o'tishlari yo'q.

Ammo N chekli bo'lgan sistemadan farqli ravishda $N \rightarrow \infty$ va $V \rightarrow \infty$ sistemada \bar{z}_i ildizlar soni cheksiz ko'p bo'ladi. Ular kompleks tekislikni to'ldirib, ba'zi nuqtalarda haqiqiy o'qqa istalgancha yaqinlashib kelishi mumkin. z_0 nuqta shundaylardan bo'lsin. $z = z_0$ ga juda yaqin nuqtalarda Z ning nollari yotadi. Bosim $p(v)$ analitik bo'lganligi uchun $z = z_0$ nuqta atrofida uzluksiz bo'ladi (4.6-a rasm). Lekin teskari solishtirma hajm (4.104) ga asosan bosim p dan $\ln z$ bo'yicha olingan hosilaga teng va u $z = z_0$ nuqtada uzilishga ega bo'lishi mumkin (4.6-b rasm). Uzilish kattaligi

$$\Delta \frac{1}{v} = \Delta \frac{\partial \ln \bar{Z}}{\partial \ln z}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Agar bunday uzilish o'rini bo'lsa, bosimning solishtirma hajmga bog'lanishida bosim o'zgarmas bo'ladigan soha paydo bo'ladi (4.6-d rasm). Bunday bog'lanish birinchi xil faza o'tishi mavjudligidan dalolat beradi. Bu sohada solishtirma hajm v_a dan v_b gacha o'zgarishida bosim o'zgarmay qoladi. Yuqorida ta'kidlaganimizdek, hosiladagi uzilish paydo bo'lishi mumkin, lekin shart emas.

Bosimdan olingan birinchi tartibli hosila uzilishga ega bo'lmasa, ikkinchi tartibli hosila uzilishga ega bo'lishi mumkin. Bunda v^{-1} ning z bog'lanish grafigida sinish paydo bo'ladi (4.7-b rasm). Mos ravishda, holat tenglamasida paydo bo'ladigan sinish ikkinsi tartib faza o'tishlari uchun xosdir.



4.6- rasm. Birinchi xil faza o'tishining yuzaga kelishi.

Yuqorida ko'rib chiqilgan nazariya faza o'tishlari mavjudligi ko'rsata oladi, lekin faza o'tishi aniq qaysi nuqtada bo'lishini va uning xilining xarakterini ko'rsata olmaydi.

4.14. IV bobga oid masala va savollar

1. Katta kanonik taqsimotning umumiy xossalardan foydalaniib $pV = kT \ln \tilde{Z}$ ekanligini isbotlang. Bu yerda \tilde{Z} katta statistik yig'indi.

2. O'zgarmas tashqi bosim ostida adiabatik holda izolatsiyalangan porshenli silindrda ideal gaz mavjud. To'g'ridan-to'g'ri entropiya variatsiyalari δS va $\delta^2 S$ ni hisoblab, muvozanat holatda entropiya maksimalligi ko'rsatilsin.

Yechish. Sistema muvozanatida $\Delta S < 0$ $\delta S = 0$ yoki $\delta^2 S < 0$ bo'lishi kerak. Termodinamikaning asosiy tenglamasiga ko'ra ideal gaz uchun

$$dS = \frac{C_v}{T} dT + \frac{R}{V} dV \quad \text{va} \quad \delta Q = C_v dT + p_0 dV.$$

Silindr adiabatik izolatsiyalanganligidan $C_v dT = -p_0 dV$. Shuning uchun entropiya differensiali

$$dS = \frac{1}{T} \left(\frac{RT}{V} - p_0 \right) dV = \frac{1}{T} (p - p_0) dV.$$

Bu yerda $p = \frac{RT}{V}$ – gaz bosimi, p_0 – tashqi bosim. Bundan shu ko'rindaniki, muvozanat holat ($dS = 0$) faqat $p = p_0$ da bo'lishi mumkin bo'ladi. Bu holda entropiya maksimal bo'lib

$$S = C_V \ln T + R \ln V + S_0$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik, gaz hajmi δV ga, temperaturasi esa δT ga o'zgarsin. U holda

$$\begin{aligned}\Delta S &= C_V \ln \frac{T+\delta T}{T} + R \ln \frac{V+\delta V}{V} = \\ &= C_V \frac{\delta T}{T} + R \frac{\delta V}{V} - \frac{1}{2} \left(C_V \frac{\delta^2 T}{T^2} + R \frac{\delta^2 V}{V^2} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{RT}{V} - p_0 \right) \delta V - \frac{1}{2} \left(C_V \frac{\delta^2 T}{T^2} + R \frac{\delta^2 V}{V^2} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (p - p_0) \delta V - \frac{1}{2} \left(C_V \frac{\delta^2 T}{T^2} + R \frac{\delta^2 V}{V^2} \right).\end{aligned}$$

Bundan entropiyaning birinchi va ikkinchi variatsiyalari uchun quyidagilarni olamiz:

$$\delta S = \frac{1}{T} (p - p_0) \delta V, \quad \delta^2 S = -\frac{1}{2} \left(C_V \frac{\delta^2 T}{T^2} + R \frac{\delta^2 V}{V^2} \right).$$

Shunday qilib, har qanday δT va δV da $\delta^2 S < 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, muvozanat vaqtida entropiya maksimal qiymat qabul qilar ekan.

3. Turli xil moddali ikkita fazaning muvozanat sharti, ya'ni har bir komponent bitta faza tarkibiga kiruvchi ikki fazali ikki komponentli sistemaning muvozanat sharti aniqlansin.

Yechish. Turli xil moddalardan tashkil topgan (masalan: suv va kerosin) ikki fazali sistema muvozanat holatda bo'lishi uchun $\Delta S < 0$, $\delta S = 0$ yoki $\delta^2 S < 0$ bo'lishi kerak. Ikki fazali ikki komponentli bunday sistema entropiyasi $S = N's' + N''s''$ bo'ladi. Ichki parametrлари N' , N'' , ν' , ν'' , E' va E'' quyidagi shartlarni qanoatlantiradi: $N' = \text{const}$, $N'' = \text{const}$, $E = E'N' + E''N'' = \text{const}$, $V = \nu'N' + \nu''N'' = \text{const}$. O'zaro bog'lanmagan parametrlar deb ν' , E' ni qabul qilamiz. Muvozanat sharti $\delta S = 0$ bo'lganligi uchun yozilgan ifodalarning birinchi variatsiyalari orqali termodynamika asosiy tenglamasining yozamiz. Hosil bo'lgan tenglamani

$$N' \frac{\delta E' + p' \delta \nu'}{T'} + N'' \frac{\delta E'' + p'' \delta \nu''}{T''} = 0$$

tenglama bilan birligida yechish natijasida

$$\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T''} \right) \delta E' + \left(\frac{p'}{T'} - \frac{p''}{T''} \right) \delta \nu' = 0 \quad \text{va} \quad T = T'', \quad p' = p''$$

natijani olamiz. Kimyoviy potensialga hech qanday shart qo'yilmaydi.

4. Tashqi maydondagi sistemaning muvozanat sharti aniq-lansin.

5. Muvozanatning barqarorlik sharti $\frac{\partial p}{\partial V} < 0$, $\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{T}{C_p} > 0$

bir jinsli sistemaning kichik qismi uchun chiqarilgan. Butun tizim uchun ular qaysi hollarda to'g'ri va qaysi hollarda noto'g'ri?

6. Agar bir jinsli sistema barqarorlik holatida $\frac{\partial p}{\partial V} = 0$ bo'lsa, bu holatda $\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = 0$ va $\frac{\partial^3 p}{\partial V^3} < 0$ ligi ko'rsatilsin.

7. Agar ba'zi barqaror holatlarda $\frac{\partial T}{\partial V} = 0$ bo'lsa, bunday holatlarda $\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = 0$, $\frac{\partial^3 T}{\partial V^3}$ esa musbat ham, manfiy ham bo'lishi ko'rsatilsin. Ko'rsatma: $\Delta T \Delta S - \Delta p \Delta V > 0$.

8. Bir jinsli sistemaning ba'zi holatlarida $\frac{\partial p}{\partial V} = 0$. Bu holatning barqarorlik sharti qanday bo'ladi?

9. Moddaning gaz va qattiq jism holatlarining muvozanat shartiga asoslanib, ideal gazning entropiya doimiyligini hisoblash uchun ifoda topilsin.

Yechish. Muvozanat shartiga asosan, agar qattiq jism gaz bilan muvozanatda bo'lsa, uning kimyoviy potensiallari teng bo'ladi:

$$\mu'(T, p) = \mu''(T, p),$$

$$\mu(T, p) = \frac{\Phi}{N} = \frac{E - TS + pV}{N} = E_0 - TS_0 + p\nu,$$

$\mu(T, p) = E_0 - T(C_p \ln T - R \ln p + S_0) + p\nu$ – ideal gaz uchun

$\mu(T, p) = E_0 - TS + p\nu$ – qattiq jism uchun.

Bu ifodalardan:

$$RT \ln p = [E_0 - E_0 + p(\nu - \nu)] + C_p T \ln T - T\Delta_0,$$

$$\Delta_0 = -\frac{Q}{T} - C_p \ln T + \Delta + R \ln p.$$

Bu yerda termodinamikaning uchinchi qonuniga ko'ra –

$$\Delta = \int \frac{C_p}{T} dT, \text{ quruq haydash issiqligi } Q = E_0 - E_0 + p(\nu - \nu),$$

Q, C_p, p va T larni tajribada aniqlab, gaz entropiya doimiysi Δ_0 ni aniqlash mumkin.

10. Sirt tarangligining temperaturaga bog'liqligini bilgan holda, pardanoring adiabatik kengayishida temperatura o'zgarishi va uning izotermik kengayishida yutilgan issiqlik miqdori topilsin.

11. Juda kichik zaryadlangan tomchi faqat o'ta to'yangan bug'da o'sib qolmasdan, balki to'yinishga yetmagan bug'da ham o'sib borishi ko'rsatilsin.

12. Faza o'tish issiqligining temperaturaga bog'liqligi $\frac{d\lambda}{dT}$ topilsin.

13. To'yangan bug' issiqlik sig'imi uchun ifoda olinsin. 100 °C da to'yangan suv bug'ini adiabatik siqganda nima uchun kondensatsiyalanmasligi tushuntirilsin.

14. Past temperaturada metallarning issiqlik sig'imi C_p temperaturaga proporsional. Agar metall o'ta o'tkazuvchan holatga o'tsa, uning issiqlik sig'imi C_s temperaturaning kubiga proporsional. Kritik temperaturada $C_s = 3C_p$ bo'lishi ko'rsatilsin.

15. Kritik maydon kuchlanganligi egriligini $H_c = H_0 \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right)$

parabola ko'rinishida aniq tasavvur qilish mumkin. Shu ifodadan foydalanib, solishtirma entropiya va solishtirma issiqlik sig'imi qiymatlari farqi n - va s - holatlarda topilsin.

16. Kritik nuqtada termodinamik sistema bosimidan hajm va temperatura bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaning holdan farqli ekanligi ko'rsatilsin.

17. Kritik nuqtada Joule-Tomson koeffitsiyenti aniqlansin.

18. Kritik nuqtadan tovush tezligi uchun ifoda topilsin.

19. Zarralar soni o'zgaruvchan bo'lgan sistemalarga misollar keltiring.
20. Kimyoviy potensial va uni aniqlash.
21. Katta kanonik taqsimot, uning fizik ma'nosi. \bar{n} ni hisoblash formulasi.
22. Zarralar soni o'zgaruvchan bo'lgan sistema entropiyasi.
23. Zarralar soni o'zgaruvchan sistemada kimyoviy potensial qiymati.
24. Muvozanatli nurlanish deb qanday nurlanishga aytildi.
25. Vinni siljish qonunining termodinamik isboti.
26. Bartolining fikran tajribasini tushuntiring.
27. Termodinamik sistemalarda muvozanatning umumiy sharti.
28. Geterogen sistemalarda muvozanat sharti.
29. Gibbsning fazalar qoidasi.
30. Sistemaning termodinamik erkinlik darajasining soni.
31. Laplas formulasi. Laplas bosimi.
32. Faza o'tishlar. Birinchi va ikkinchi xil faza o'tishlar.
33. Klapeyron–Klauzius tenglamasi qanday olinadi?
34. Erenfest tenglamasi va uning isboti.
35. Rutgers formulasi. Maysner hodisasi.
36. Landau nazariyasining mohiyati nimadan iborat?

V bob

IDEAL SISTEMALARING STATISTIK NAZARIYASI

5.1. Bir atomli kvant ideal gazlar

Biz ikkinchi bobda statistik fizika metodlari yordamida makroskopik sistemaning asosiy termodinamik kattaliklarini topishning asosiy prinsiplarini ko'rib chiqdik. U yerda misol tariqasida ideal gazlarda bir atomli holatlari uchun statistik

yig'indi yoki holat funksiyasi $z = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} V$ bo'lishligini ko'r-satdik. Gaz N ta atomdan tashkil topganligini hisobga oluvchi va uni bir butun sistema sifatida holatlarini aniqlovchi statistik yig'indini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$Z = \sum_{n=1}^N \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right) \Omega(\varepsilon_n). \quad (5.1)$$

Bu yerda ε_n – gazning n - kvant holat energiyasi, $\Omega(\varepsilon_n)$ – shu energiyaga ega bo'lgan holatlar (soni) vazni. Yig'indi barcha energetik holatlar bo'yicha olinadi. Holat funksiyasini topishda asosiy masala (5.1) dagi yig'indini hisoblashdir. N ta atomdan tashkil topgan ideal gaz uchun kvant mehanika masalasi yechimiga ega bo'lsa, yig'indini hisoblash muammo bo'lmaydi. Ammo, bu masalani yechish hattoki ideal gazlar uchun ham amalga oshirib bo'lmaydi. Shuning uchun holat funksiyasini hisoblashni turli sharoitlarda amalga oshiramiz. Birinchi navbatda nisbatan yuqori temperaturalarni ko'rish bilan cheklanamiz. Bu holda energetik sathlar orasidagi masofa issiqlik energiyasidan juda kichik bo'ladi ($\Delta\varepsilon_n \ll kT$), demak, (5.1) da yig'indini integral bilan almashtirish mumkin, ya'ni

$$Z = \int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) d\Omega(\varepsilon). \quad (5.2)$$

Bu yerda $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$, $d\Omega = \prod'_i d\Omega_i = \prod'_i dp_i dq_i / h^{3N}$. Shtrix belgisi ko‘paytmada faqat turli holatlar ishtirok etishini ko‘rsatadi. Endi holatlar soni $\Omega(\varepsilon)$ ni hisoblashni ko‘rib chiqamiz. Kvant nazariyasi nuqtayi nazaridan gazdagi barcha atomlar aynan bir xilligi holat sonini aniqlashda va integralni hisoblashda muhim rol o‘ynaydi. Ana shu kvant holatlar sonini topish kerak.

Bu masalani avval ikkita atomli holat misolida ko‘rib chiqamiz. Fazalar fazosida ikki atomli holatni aks ettiruvchi $(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$ va $(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)$ tasviriy nuqtalar bilan aniqlanadi. Shu ikki zarra $(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$ va $(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)$ holatda ham bo‘lishi mumkin. Bu ikki holat zarralar aynan bo‘lganligi uchun energetik ma’noda va, umuman, bir-biridan farq qilmaydi. Demak, impulslar bo‘yicha integral olganimizda bitta holatni ikki marta hisobga olmoqdamiz. Agar sistema uchta zarradan iborat bo‘lsa, (5.1)ni hisoblashda bitta holatni $3!$ marta hisobga olayotgan bo‘lib chiqmoqdamiz. Bunday hisoblarni davom ettirsak, sistemaning N ta zarrali holat funksiyasini hisoblashda har bir holat bir marta inobatga olinishini ta‘minlash uchun (5.2) ifodaning o‘ng tomonini tasviriy nuqtalarining fazalar fazosida o‘zaro o‘rin almashtirish soni $N!$ ga bo‘lish kerak va holatlar sonini aniqlovchi ko‘paytmada «shtrix» belgisini olib tashlash mumkin. Natijada

$$Z = \frac{1}{N!} \int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \prod_i \frac{dp_i dq_i}{h^{3N}}. \quad (5.3)$$

Bu yerda $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}$ – erkin zarra energiyasi. Zarralar aynan ekanligini inobatga olsak, (5.3) ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$Z = \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \prod_i \int \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) dp_i dq_i = \frac{z^N}{N!}, \quad (5.4)$$

bu yerda z – bitta molekula uchun holat integrali. Uni o‘rniga qo‘yish natijasida N ta zarradan tashkil topgan bir atomli kvant ideal gaz holat funksiyasini olamiz:

$$Z_{\text{id}} = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} V^N. \quad (5.5)$$

Bu yerda holat funksiyasini $N!$ ga bo'lish kvant statistik fizikasida zarralarning aynanligi prinsipi asosida bevosita kelib chiqadi.

5.2. Termodinamik kattaliklarni hisoblash

Atomlari asosiy holatda yotgan bir atomli kvant ideal gazlar termodinamik kattaliklarini hisoblashni ko'raylik.

Termodinamik kattaliklarni hisoblash III bob (3.39) da keltirilgan formulalar asosida amalga oshiramiz. Ideal gaz ichki energiyasi (5.5) ga asosan

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{3}{2} NkT, \quad (5.6)$$

issiqlik sig'imi

$$C_V = \frac{3}{2} Nk. \quad (5.7)$$

Gaz erkin energiyasini hisoblashda (5.5) ifoda va Stirling formulasi $N! = N^N (2\pi N)^{1/2} \cdot \exp(-N)$ ni hisobga olsak, u holda

$$F = -kT \ln Z = -NkT \ln \left[\frac{eV}{N} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \right] \quad (5.8)$$

bo'ladi. Ideal gaz bosimi esa

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \frac{NkT}{V}. \quad (5.9)$$

Ushbu tenglama bizga juda yaxshi tanish bo'lgan holat tenglumasidir. Bu tenglama ilgari tajriba natijalari asosida yozilgan edi. Bu yerda uni toza nazariy yo'l bilan hosil qildik. Ideal gaz entropiyasini (5.8) ga asosan

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = Nk \ln \frac{V}{N} + C_V \ln kT + \frac{5}{2} Nk + Nkj \quad (5.10)$$

Bu yerda $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$, $d\Omega = \prod_i' d\Omega_i = \prod_i' dp_i dq_i / h^{3N}$. Shtrix belgisi ko‘paytmada faqat turli holatlar ishtirok etishini ko‘rsatadi. Endi holatlar soni $\Omega(\varepsilon)$ ni hisoblashni ko‘rib chiqamiz. Kvant nazariyasi nuqtayi nazaridan gazdagi barcha atomlar aynan bir xilligi holat sonini aniqlashda va integralni hisoblashda muhim rol o‘ynaydi. Ana shu kvant holatlar sonini topish kerak.

Bu masalani avval ikkita atomli holat misolida ko‘rib chiqamiz. Fazalar fazosida ikki atomli holatni aks ettiruvchi $(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$ va $(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)$ tasviriy nuqtalar bilan aniqlanadi. Shu ikki zarra $(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$ va $(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1)$ holatda ham bo‘lishi mumkin. Bu ikki holat zarralar aynan bo‘lganligi uchun energetik ma’noda va, umuman, bir-biridan farq qilmaydi. Demak, impulslar bo‘yicha integral olganimizda bitta holatni ikki marta hisobga olmoqdamiz. Agar sistema uchta zarradan iborat bo‘lsa, (5.1)ni hisoblashda bitta holatni $3!$ marta hisobga olayotgan bo‘lib chiqmoqdamiz. Bunday hisoblarni davom ettirsak, sistemaning N ta zarrali holat funksiyasini hisoblashda har bir holat bir marta inobatga olinishini ta’minalash uchun (5.2) ifodaning o‘ng tomonini tasviriy nuqtalarning fazalar fazosida o‘zaro o‘rin almashtirish soni $N!$ ga bo‘lish kerak va holatlar sonini aniqlovchi ko‘paytmada «shtrix» belgisini olib tashlash mumkin. Natijada

$$Z = \frac{1}{N!} \int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \prod_i \frac{dp_i dq_i}{h^{3N}}. \quad (5.3)$$

Bu yerda $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}$ – erkin zarra energiyasi. Zarralar aynan ekanligini inobatga olsak, (5.3) ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$Z = \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \prod_i \int \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) dp_i dq_i = \frac{z^N}{N!}, \quad (5.4)$$

bu yerda z – bitta molekula uchun holat integrali. Uni o‘rniga qo‘yish natijasida N ta zarradan tashkil topgan bir atomli kvant ideal gaz holat funksiyasini olamiz:

$$Z_{\text{id}} = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} V^N. \quad (5.5)$$

Bu yerda holat funksiyasini $N!$ ga bo'lish kvant statistik fizikasida zarralarning aynanligi prinsipi asosida bevosita kelib chiqadi.

5.2. Termodinamik kattaliklarni hisoblash

Atomlari asosiy holatda yotgan bir atomli kvant ideal gazlar termodinamik kattaliklarini hisoblashni ko'raylik.

Termodinamik kattaliklarni hisoblash III bob (3.39) da keltirilgan formulalar asosida amalga oshiramiz. Ideal gaz ichki energiyasi (5.5) ga asosan

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{3}{2} NkT, \quad (5.6)$$

issiqlik sig'imi

$$C_V = \frac{3}{2} Nk. \quad (5.7)$$

Gaz erkin energiyasini hisoblashda (5.5) ifoda va Stirling formulasi $N! = N^N (2\pi N)^{1/2} \cdot \exp(-N)$ ni hisobga olsak, u holda

$$F = -kT \ln Z = -NkT \ln \left[\frac{eV}{N} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \right] \quad (5.8)$$

bo'ladi. Ideal gaz bosimi esa

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \frac{NkT}{V}. \quad (5.9)$$

Ushbu tenglama bizga juda yaxshi tanish bo'lgan holat tenglamasidir. Bu tenglama ilgari tajriba natijalari asosida yozilgan edi. Bu yerda uni toza nazariy yo'l bilan hosil qildik. Ideal gaz entropiyasini (5.8) ga asosan

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = Nk \ln \frac{V}{N} + C_V \ln kT + \frac{5}{2} Nk + Nkj \quad (5.10)$$

yoki $V = \frac{NkT}{p}$ bilan almashtirish natijasida

$$S = C_p \ln kT - Nk \ln p + \frac{5}{2} Nkj$$

ko'rinishda olamiz. Bu yerda $j = \ln \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2}$ – kimyoviy doimiy deb yuritiladi. Bu yerda (5.10) dan foydalanib, gazlar aralashmasi uchun entropiya o'zgarishini va Gibbs paradoksini ko'rsatish mumkin (Gibbs parodoksiga qarang). Gibbs termodinamik potensiali uchun $\Phi = F + PV = F + NkT$ ifodadan quyidagi tenglikni olamiz:

$$\Phi = -\frac{5}{2} NkT \ln kT + NkT \ln p - NkTj.$$

Gaz kimyoviy potensiali esa $\mu = \Phi/N$ dan quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\mu = kT \ln \left[\frac{N}{V} \left(\frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \right]. \quad (5.11)$$

Misol sifatida bir atomli ultrarelyativistik gaz uchun holat funksiyasini va termodinamik kattaliklarni hisoblashni ko'rib chiqamiz. Bu misolda holat funksiyasi uchun aniq ifodani topish mumkin. Relativistik zarraning energiyasi $\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ ifoda bilan aniqlanadi. Ultrarelyativistik holda $pc \gg mc^2$ bo'lganligi uchun $\varepsilon \approx pc$ bo'ladi. Ultrarelativistik atomlardan tashkil topgan gazning holat funksiyasi

$$Z = \frac{z^N}{N!} = \frac{1}{N!} \left[\int \exp \left(-\frac{pc}{kT} \right) \frac{dp}{h^3} \right]^N. \quad (5.12)$$

Ushbu ifodadagi integral oson hisoblanadi. Natijada

$$Z = \left[8\pi e \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \frac{V}{N} \right]^N. \quad (5.13)$$

Bu yerda $N!$ ni hisoblashda Stirling formulasidan foydalandik.

Endi holat funksiyasi (5.13) yordamida ultrarelativistik gaz uchun termodinamik kattaliklarni hisoblaymiz.

Gaz erkin energiyasi

$$F = -kT \ln Z = -kTN \ln \frac{AVT^3}{N}, \quad (5.14)$$

entropiyasi

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = kN \ln \frac{AVT^3}{N} + 3Nk, \quad (5.15)$$

ichki energiyasi

$$E = F + TS = 3NkT, \quad (5.16)$$

isodalar orqali aniqlanadi. F – doimiy kattalik. Ichki energiya (5.16)dan ultrarelativistik gaz issiqlik sig‘imini topamiz:

$$C_V^{ur} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = 3Nk = 2C_V^{mr}. \quad (5.17)$$

Demak, ultrarelativistik gaz issiqlik sig‘imi norelativistik gaz issiqlik sig‘imidan ikki marta katta ekan.

5.3. Maksvell va Maksvell–Bolsman taqsimotlarining Gibbs taqsimoti ko‘rinishida yozilishi

Biz bu va keyingi mavzuda kvant statistikasida statistik taqsimotlarni yana bir bor ko‘rib chiqamiz. Buning uchun kvant mexanikasining ikkita muhim tushunchasidan foydalanamiz.

Birinchi tushuncha: kvant fizika qonunlari bilan tavsiflanuvchi sistemalar klassik sistemalardan tubdan farq qiluvchi xususiyatga ega, ya’ni ularning holatlarini aniqlovchi kattaliklar diskret (uzlukli) qiymatlarni qabul qiladi. Qisqacha qilib gapiruvchi sistema diskret holatlarda bo‘ladi. Demak, termodinamik sistemani statistik fizika yordamida o‘rganar ekanmiz, holatlarining diskret ekanligini albatta inobatga olishimiz kerak. Sistemaning bunday xususiyatini statistik yig‘indini hisoblashda inobatga olish kerakligi to‘g‘risida fikr bildirdik. Ammo, yuqori temperaturalar sohasini ko‘rish bilan cheklanganligimiz sababli bu holatni muhim emas deb chetlab o’tdik, masalani izchillik bilan amalga oshirmadik.

Ikkinchи tushuncha: elementar zarralarning aynanlik prinsipi – ya'ni elementar zarralarni bir-biridan tamoman farq qilmaslik prinsipi. Bu prinsipni qat'iylik bilan hisobga olganimiz yo'q. Xolos zarralar o'rinalarini almashinishi tufayli farqlanuvchi holatlarni bitta fizikaviy holat deb qarab hisobga oldik va 5.1- bandda holat funksiyasini hisoblashda N ta zarradan tashkil topgan sistema uchun kvant holatlar sonini $N!$ ga bo'ldik. Bu kvant mexanikaga qadar ham shunday qilingan. Klassik statistik yig'indi yordamida termodinamik kattaliklar uchun to'g'ri ifoda olish uchun shu yo'l tutilgan edi. Ammo o'tkazilgan bu hisoblash izchillikka ega emasligi aniq. Shuning uchun boshdanoq zarralarni bir-biridan farq qilishdan voz kechamiz, chunki zarralarni aynan bir-biriga o'xshashligini qat'iylik bilan hisobga olish yangi statistik taqsimotlarga olib keladi.

Zarralarning aynanlik prinsipi asosida eng avvalo Maksvellning klassik taqsimoti qarab chiqaylik.

Faraz qilaylik, gaz molekulalari ilgarilanma harakat energiyasi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$ bo'lgan kvant holatlarda yotgan bo'lsin. Gazda zarralarning holatlar bo'yicha qandaydir taqsimoti mavjud bo'lsin, ya'ni ε_1 energiyaga ega bo'lgan zarralar soni n_1 , ε_2 energiyaga ega bo'lgan zarralar soni $n_2, \dots \varepsilon_k$ energiyaga ega bo'lgan zarralar soni $n_k \dots$. Shular ichidan ixtiyoriy tanlangan ε_k energiyali kvant holatlarda yotgan hamma zarralarni sistema sifatida tanlab olaylik. Boshqa energetik sathlarda yotgan zarralar esa termostatni tashkil qilsin. Sistemadagi zarralarning o'zaro va termostatdagi zarralar bilan ta'sirlashishi tufayli ular boshqa energetik holatlarga o'tib turadi. Shu vaqtning o'zida termostatdagi zarralar ε_k energetik holatga o'tishi mumkin. Shu sababli sistemadagi zarralar soni n_k o'zgarib turadi. Bu yerda shuni ta'kidlash lozimki, ε_k energiyali zarralar to'ma'noda fazoviy alohida joy egallamagan. Ular sistema va termostat bo'ylab tarqoq holda joylashgan. Sistema energiyasi $\varepsilon = \sum \varepsilon_k n_k$ ekanligini hisobga olsak, u holda zarralar sonining o'rtacha qiymati \bar{n}_k ni (4.17) ifodaga asosan quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k} \left(\exp \left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT} \right) \right)^{n_k} \Omega(n_k). \quad (5.18)$$

Bu ifoda yordamida Maksvell, Maksvell-Bolsman, Fermi-Dirak va Boze-Eynshteyn taqsimotlarini keltirib chiqarish mumkin. Bu taqsimotlarni olishda kvant holatlar soni $\Omega(n_k)$ ni hisoblashda yondashish turlicha bo'ladi. Bu ham bo'lsa zarralarning aynanligini hisobga olish bilan bog'langan.

Eng avval Maksvell taqsimotini olaylik. Bu holda n_k ta zarralarning fazoviy o'rnnini almashtirish natijasida hosil bo'ladigan sistema almashtirishgacha bo'lgan sistemadan farq qilmaydi. Shu sababli bunday sistemaning holatlari $n_k!$ karrali aynigan bo'ladi. Kvant holatlar soni

$$\Omega(n_k) = \frac{1}{n_k!} \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{1}{n_k!} \frac{h^3}{h^3} = \frac{1}{n_k!}$$

bo'ladi. Natijada

$$\begin{aligned} \bar{n}_k &= kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k=0}^N \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}\right)^{n_k} \frac{1}{n_k!} - \\ &- kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{x^{n_k}}{n_k!} - kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \exp(x). \end{aligned}$$

Demak,

$$\bar{n}_k = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}\right). \quad (5.19)$$

Agar sistemadagi zarralarning holati va energiyasi uzlucksiz holda o'zgarsa, u holda energiyali holat o'rniga energiyasi intervalda yotgan holat qaraladi:

$$dn = \bar{n} d\Omega \quad \text{yoki} \quad dn = \bar{n} \frac{d\gamma}{h^3} = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{kT}\right) \frac{d\gamma}{h^3}. \quad (5.20)$$

Bu yerda $d\gamma$ – energiya intervali ε , $\varepsilon + d\varepsilon$ ga mos keluvchi fazalar fazosining hajmi, $d\gamma/h^3$ shu energiyali holatlar soni va μ – parsial potensial bo'lib, (5.11) bilan ifodalananadi. (5.20) ifoda ilgari olingan Maksvell taqsimoti bilan mos tushadi.

Agar ko'rilib yotgan sistema tashqi maydon ta'siri ostida bo'lsa, u holda (5.20) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dn = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon - U}{kT}\right) \frac{d\gamma}{h^3}.$$

(5.21) ifoda Maksvell-Bolsman taqsimoti deyiladi.

5.4. Boze–Eynshteyn va Fermi–Dirak taqsimotlari

Gazning berilgan zichliklarida yetarlicha past temperaturlarda klassik taqsimot funksiyasidan foydalanib bo'lmaydi. Bu holda kvant holatlari orasidagi masofani issiqlik energiyasidan kichik deb bo'lmaydi va statistik taqsimotni qaytadan ko'rib chiqish kerak. Bu taqsimot N ta zarradan tashkil topgan sistema qanday toifadagi to'lqin funksiyasining aniqlanishiga bog'liq ekan. Kvant mexanikasidan ma'lumki, to'lqin funksiyasi ixtiyoriy ikkita zarraning o'rnnini almashtirishga nisbatan simmetrik yoki antisimmetrik bo'ladi. Simmetrik to'lqin funksiya bilan aniqlanuvchi sistema zarralarining spinlari butun, antisimmetrik to'lqin funksiya holida esa yarimga toq karrali bo'ladi. Ikkinchisi holdagi zarralar Pauli prinsipiiga bo'ysunadi, ya'ni bitta kvant holatda faqat bitti zarra yotishi mumkin. Kvant statistikasini alohida ideal gazlar misolida ko'rib chiqamiz.

Bir atomli kvant ideal gazlar uchun statistik taqsimotlarni chiqarishda, zarralarning aynanlik prinsipini izchillik bilan hisobga olaylik. Buning uchun turli xil energetik sathlarda yotgan zarralarni nomerlab, butun gaz holatini ko'rsatish o'rniiga shu holatlardagi zarralar sonini ko'rsatish zarur deb qaraymiz, ya'ni boshqacha qilib aytganda:

ε_1 energiyali holatda n_1 ta zarra;

ε_2 energiyali holatda n_2 ta zarra va h.k. zarra bo'lishligini ko'rsatish zarur deb hisoblaymiz. Bu holda har bir holat teng statistik vaznga ega bo'ladi, ya'ni $\Omega(n_k) = d\gamma/h^3 = h^3/h^3 = 1$ bo'ladi. Natijada (5.18) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k} \left[\exp \left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT} \right) \right]^{n_k}.$$

Kvant mexanikasidan bizga ma'lumki elementar zarralar, jumladan, atom yoki molekulalar spin momentiga qarab ikki xil toifaga bo'linadi. (5.22) ifodadagi yig'indini shu ikki xil toifadagi zarralar uchun turlicha hisoblanishi kerak: birinchisi, Paulining ta'qilash prinsipiiga bo'ysunmaydigan (spinlari butun) zarralar va ikkinchisi (spinlari $1/2$ toq karrali) unga bo'ysunuvchi zarralar.

Ta'qilash prinsipiiga bo'ysunmovchi zarralar uchun har bir holatdagi zarralar soniga hech qanday shart qo'yilmaydi. Shu sababli (5.22) ifodadagi yig'indida $n_k \neq 0$ dan N gacha bo'lgan qiymatlarni qabul qiladi, ya'ni

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k=0}^N \left[\exp \left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT} \right) \right]^{n_k} \simeq \\ \simeq kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n_k=0}^{\infty} \left[\exp \left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT} \right) \right]^{n_k},$$

bu yerda $N \gg 1$ bo'lganligi uchun yig'indining yuqori chegarasi ∞ bilan almashtirildi. Ixtiyoriy energetik holatda zarralarning o'rtacha soni chekli bo'lganligi uchun qator yaqinlashuvchi bo'lishi kerak, ya'ni

$$\mu < \varepsilon_k \quad (5.23)$$

shart o'rini bo'lishi kerak. Bu holda qator cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaga bo'lib oson hisoblanadi:

$$\bar{n}_k = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \frac{1}{1 - \exp \left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT} \right)} = \frac{1}{\exp \left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT} \right) - 1}.$$

Demak,

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\exp \left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT} \right) - 1}. \quad (5.24)$$

Ushbu ifoda zarralari Pauli ta'qilash prinsipiga bo'sunmaydigan ideal gazda ε_k energiyali zarralarning o'rta soni bo'lib, Boze-Eynshteyn taqsimoti deb yuritiladi. Bu taqsimot spinlari $s = 0, 1, 2, \dots$ bo'lgan zarralar uchun o'rinnidir. Odatda, spinlari nol va butun bo'lgan elementlar zarralarga «bozon»lar deb yuritiladi. Bunday elementlar zarralar kvant mexanikasida simmetrik to'lqin funksiyasi bilan ifodalanadi.

Agar $\varepsilon_k = 0$ energiya uchun ham (5.23) yoki $\exp \left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT} \right) < 1$

tengsizlik o'rini bo'lishini hisobga olsak, $\exp \left(\frac{\mu}{kT} \right) < 1$ bo'ladi.

Bu tengsizlikdan parsial (kimyoviy) potensial $\mu < 0$ ligi kelib chiqadi.

Endi ta'qilish qoidasiga bo'y sunuvchi elementar zarralar uchun statistik taqsimotni qarab chiqaylik. Bu hol uchun har

bir energetik sathlardagi zarralar soni $n_k > 1$ bo'lmasligi kerak, ya'ni $n_k \ll 1$ yoki «1» qiymatlarni qabul qilishi mumkin. U holda (5.22) ifodadan foydalanib, quyidagi ko'rinishdagi statistik taqsimotni olish mumkin:

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}\right) + 1}. \quad (5.25)$$

Bu Fermi-Dirak taqsimoti deyiladi va spinlari $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ yarim va yarim butun elementar zarralar uchun o'rini bo'ladi. Bunday zarralarni «fermion»lar deb yuritiladi va kvant mexanikada antisimmetrik to'lqin funksiya bilan ifodalanadi (elektronlar, pozitronlar, neytronlar, protonlar, μ - mezon va h.k.).

Amalda $\Delta\varepsilon \ll kT$ bo'lganligi sababli, energiyali sathdagi o'rtacha zarralar soni o'rniga $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ energiya intervalidagi o'rtacha zarralar soni $dn = \bar{n}d\Omega$ yoki

$$dn = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}\right) + 1} \cdot \frac{d\gamma}{h^3} \quad (5.26)$$

qidiriladi. Umuman

$$dn = gf(\varepsilon)d\Omega \quad (5.27)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda $g = 2s + 1$, s – zarra spini.

Agar $\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}\right) \gg 1$ shart bajarilsa, (5.26)dagi har ikkala taqsimot Maksvellning klassik taqsimoti (5.20)ga o'tadi. Shu sababli bu shartni klassik taqsimotning tatbiq qilish sharti sifatida qabul qilish mumkin. Shartda ikkita kattalik ε va μ ishtirok etmoqda. Berilgan gaz uchun energiya ixtiyoriy qiymatlarni qabul qilishi mumkin, lekin kimyoviy potensial aniq qiymat qabul qiladi. Shu sababli klassik taqsimotni o'rini bo'lish chegarasini kimyoviy potensialga nisbatan yozish to'g'ri bo'ladi. Buning uchun birinchi navbatda taqsimot funksiyasining normirovka shartidan μ ni aniqlaymiz. Maksvell taqsimotining fazalar fazosi bo'yicha integrali bir tomondan berilgan hajmdagi

zarralar soniga teng bo'ladi. Ikkinchchi tomondan integral ostidagi ε o'rniga erkin zarra energiyasi qo'yib integralni hisoblasak, quyidagi natijani olamiz:

$$N = V \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu}{kT} \right).$$

Bu natijaga asosan klassik taqsimotning tatbiq qilish chegarasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\exp \left(-\frac{\mu}{kT} \right) = \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \gg 1. \quad (5.28)$$

Ushbu ifodaga ko'ra klassik taqsimotning tatbiq qilish chegarasi bir vaqtning o'zida gaz zarralarining massasi, temperaturasi va zichligi bilan belgilanadi. (5.28) shart bajarilishi uchun zarra massasi katta, gaz temperaturasi yuqori va zichligi kichik bo'lishi kerak.

Agar (5.28) shartning teskarisi bajarilsa, u holda gaz aynigan holatda bo'ladi. Aynish chegarasi

$$\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi mkT_0}{h^2} \right)^{3/2} = 1$$

dan boshlanadi. Bu ifoda aynish temperaturasini aniqlab beradi:

$$T_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{mk} n^{2/3}.$$

Shunday qilib zarralarning aynanligini izchillik bilan inobatga olish, asosida Gibbs taqsimoti yotgan, bir-biridan sifat jihatdan tubdan farq qiladigan taqsimotlarga olib keldi. Bu taqsimotlar yordamida bir qator muhim masalalarni hal qilish mumkin.

5.5. Absolut nol temperaturalarda Fermi-gaz

Past temperaturalarda V hajmdagi erkin fermionlardan tashkil topgan gaz – Fermi-gaz tabiatini o'rganish muhim ahamiyatga egadir. Bu modelni metallardagi elektron gazga tatbiq qilish bir necha taxminga asoslangan.

Birinchidan, metalldagi barcha atomlar bir karra ionlash deb qaralsa, berilgan hajmda elektronlar soni atomlar soni

N ga teng bo‘ladi. Pauli prinsipiiga asosan bitta energetik holatda ikkita elektron bo‘lishi mumkinligini hisobga olsak, ular eng quyi $N/2$ ta holatni egallagan bo‘ladi. Yuqori holatlar quyi holatlardan issiqlik energiyasi kT bilan ajralib turadi.

Ikkinchidan, metalldagi elektron gaz xossalarini izotrop model doirasida o‘rganamiz, ya’ni ularni erkin deb qabul qilamiz. U holda elektronlar energiyasi kvaziuzluksiz spektrni tashkil qiladi. U holda dispersiya qonuni $\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ bilan aniqlanadi. Bu yerda m_0 – elektronning effektiv massasi bo‘lib, metallar uchun erkin elektronning massasiga yaqin qiymatlarni qabul qiladi.¹

Uchinchidan, metalldagi elektronlarning zichligi juda katta ($10^{22}-10^{23} \text{ sm}^{-3}$) bo‘lishiga qaramasdan elektronlarning o‘zaro va ionlar bilan ta’sirlashishini hisobga olmaymiz. Bunday taxmin ikki toifadagi ta’sir bamisolai o‘zaro bir-biri kompensatsiyalaydi degan fikrga asoslangan bo‘lib, past temperaturalarda nazariy va eksperimental tasdig‘ini topgan.

Shunday qilib, past temperaturalarda metalldagi elektron gazni – siyrak ideal Fermi gaz deb hisoblab, uning xossalarini o‘rganamiz.

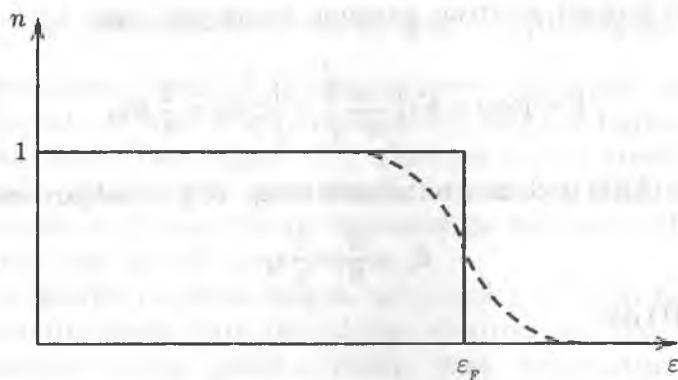
Faraz qilaylik, V hajmda N ta elektron bo‘lsin. Elektronlar soni Fermi-Dirak taqsimoti bilan quyidagicha bog‘langan:

$$N = \int dn = \int g f(\varepsilon) d\Omega = \int \frac{g}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)+1} \cdot \frac{d\gamma}{h^3}.$$

Bu yerda $g = 2S + 1$, elektronlar uchun $g = 2$, $d\gamma = dpdr$. Natijada metall hajmidagi to‘la elektronlar soni quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$N = 4\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V \int \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)+1}. \quad (5.29)$$

¹ Kristallarda, xususan, metallarda, dispersiya qonuni kristall panjaraning simmetriyasiga bog‘liq bo‘lib, murakkab ko‘rinishga ega bo‘ladi. Hattoki, kub simmetriyasiga ega bo‘lgan kristallarda ham murakkab bo‘ladi, chunki elektron davriy maydonda harakat qiladi. Parabolik dispersiya qonuni faqat izoenergetik sirtlarning ekstremal nuqtalari yaqinida o‘rinli bo‘ladi.



5.1- rasm. Fermi-Dirak taqsimoti: absolut nolda – uzlusiz chiziq,
absolut nol yaqinida – punktir chiziq.

Hisoblashlarni davom ettirishdan avval past temperaturalar sohasida elektronlarning taqsimotini ko'rib chiqamiz. Birinchi navbatda $T \rightarrow 0$ da Fermi-Dirak taqsimotini o'rganamiz:

$$f(\varepsilon, T=0) = \theta(\mu_0 - \varepsilon) - \theta(-\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon < \mu_0, \\ 0, & \varepsilon > \mu_0. \end{cases} \quad (5.30)$$

Bu yerda

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Xevisayd funksiyasi, $\mu_0 = \mu(T=0) = \varepsilon_F$ – Fermi energiyasi. (5.30) ifoda bilan aniqlanuvchi taqsimot 5.1- rasmida tasvirlangan (uzlusiz chiziq). Bu taqsimotning fizik ma'nosi aniq. Har bir energetik sathda ikkitadan ortiq elektron bo'lmasligini hisobga olsak va metalldagи elektronlar soni N ga teng bo'lsa, u holda birinchi $N/2$ ta energetik sath egallangan bo'ladi, ya'ni $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F$ intervaldagи sathlar elektronlar bilan band bo'ladi. Boshqa $\varepsilon > \varepsilon_F$ energetik sathlar esa elektronlardan holi bo'ladi. Shuning uchun (5.29) dagi integral chegarasi $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F$ tengsizlik bilan belgilanadi. Natijada V hajmdagi elektronlar soni uchun quyidagi ifodani topamiz:

$$N = \frac{8\pi}{3} V \left(\frac{2m\varepsilon_F}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\pi V}{3h^3} p_{\max}^2. \quad (5.31)$$

Metallardagi elektron gazining energiyasi esa

$$E = \int \varepsilon d n = 4\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} V \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{\frac{3}{2}} d\varepsilon = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \quad (5.32)$$

bo'ladi. (5.32) ifodadan bitta elektronga to'g'ri kelgan energiya

$$E_0 = \frac{E}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F$$

va (5.31) dan

$$\mu_0 = \varepsilon_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{N}{V} \cdot \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}}$$

tengliklar bilan aniqlanishini topamiz. Agar elektron gazning zichligi ma'lum bo'lsa, u holda E_F ning qiymati aniq bo'ladi. Yuqoridaqgi ifodalardan foydalanib, elektronlarni o'rtacha kvadratik tezligini, elektron gaz bosimini hisoblash mumkin, ya'ni

$$p_0 = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{5}{3}}.$$

Bu yerda p_0 – absolut nol temperaturada elektron gazning bosimi. Shunday qilib hatto absolut nolda ham metalldagi elektronlarning bosimi noldan farqli ekan. Bundan tashqari u ideal gaz bosimiga nisbatan juda katta qiymatlarni qabul qiladi. Agar

$$\frac{N}{V} \sim (10^{22} \div 10^{23} \text{ sm}^{-3}) \text{ tartibida bo'lsa, } p_0 \sim (10^4 \div 10^5) \text{ atm.}$$

Haqiqatan ham, bu ideal gaz bosimidan juda kichikdir. Buning asosiy sababi absolut nolda ham elektronlar tinch holatda bo'lmaydi. O'rtacha kvadratik tezlik

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{p_{\max}}{m} = \sqrt{\frac{3}{5}} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{1/3} \frac{h}{m}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bunga son qiymatlarni qo'yib tezlik son qiymatining tartibi $\sqrt{\bar{v}^2} \sim (10^7 \div 10^8) \text{ sm/s}$ ekanligini topamiz.

Absolut nolda elektron gazining issiqlik sig'imi $C_V^{\text{el}} = 0$ bo'ladi.

5.6. Metallarda elektron gaz. Issiqlik sig‘imi

Metallarning issiqlik sig‘imini Maksvell–Bolsman taqsimotidan foydalanib hisoblangandagi nazariy natijalar tajriba natijalaridan jiddiy farq qilgan. Bu masalaga to‘g‘ri javob issiqlik sig‘imini hisoblashda metalldagi kuchsiz bog‘langan valent elektronlarni Fermi–Dirak taqsimotiga bo‘ysunuvchi erkin elektron deb qarash yetarli ekan.

Shu sababli yuqorida olingen natijalarni $T = 0$ dan farqli past temperaturalarda ham metalldagi elektron gazning tabiatini o‘rganishga tatbiq qilish mumkin. Past temperatura sharti: $kT/\mu \ll 1$ yoki $kT/\varepsilon_F \ll 1$. Bu shart issiqlik ta’sirida E_F Fermi sathidan pastdagи elektronlar chegaradan yuqoridagi qo‘sni energetik sathlarga o’tishi mumkinligini ko’rsatadi. Bu holda fermi taqsimoti 5.1- rasmdagi punktir chiziqqa o’tadi. Taqsimotdagi yoyilishning yarim kengligi (5.25) dan $\Delta\varepsilon \sim kT$ ekanligini aniqlash mumkin. Bu energetik intervalda elektronlarning soni juda kichik bo‘ladi, ya’ni elektron gazini siyrak Fermi gaz deb qarash mumkin.

Bu hol uchun termodinamik kattaliklarni topishda quyidagi ko‘rinishdagi

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^n d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1} = \int_0^{\infty} f(\varepsilon) \varepsilon^n d\varepsilon \quad (5.33)$$

integralni hisoblashni ko‘raylik. Ushbu integral aniq olinmaydi. Shuning uchun (5.33) da $(\varepsilon - \mu)/kT = x$ deb belgilab, bir marta bo‘laklab integrallaymiz. Natijada quyidagi ifoda hosil bo‘ladi:

$$I_n = -\frac{\mu^{n+1}}{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{kT}{\mu} x\right)^{n+1} \frac{\partial f}{\partial x} dx.$$

Bu yerda $\frac{\partial f}{\partial x}$ funksiya $\Delta x \sim \frac{kT}{\mu}$ oraliqda noldan farqli bo‘lganligi uchun integralning quyi chegarasi $-\frac{\mu}{kT}$ ni $-\infty$ bilan almashtirdik. Shu sababli integral ostidagi $\left(1 + \frac{kT}{\mu} x\right)^{n+1}$ funk-

siyani qatorga yoyib, birinchi ikkita had bilan chegaralanamiz. U yerdagи integrallarni hisoblab, nihoyat quyidagi ifodani olamiz:

$$I_n \simeq \frac{\mu^{(n+1)}}{n+1} \left[1 + \frac{n(n+1)\pi^2}{6} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]. \quad (5.34)$$

Metallardagi elektronlar sonini va elektron gaz energiyasini hisoblashda (5.34) ifodadan foydalanamiz. (5.39) ifodadan elektronlar sonini hisoblashda, biz qaraydigan hol uchun (5.34) da $n = 1/2$. Natijada elektronlar soni:

$$N = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} V \cdot \mu^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]. \quad (5.35)$$

$T = 0$ da (5.35) ifoda (5.31) ifodaga o'tadi. $T \neq 0$ oxirgi ifodani kimyoviy potensialga nisbatan echish uchun ketma-ket yaqinlashish metodidan foydalanamiz, natijada potensialning temperaturaga bog'lanishi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\mu = \mu_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 \right]. \quad (5.36)$$

Bu yerda yana $(kT/\mu_0)^2$ tartibidagi hadlar bilan chegaralandik. Elektron gaz energiyasini hisoblashda (5.35) va (5.36)dan foydalanib, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} E &= \int \varepsilon dN = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}} d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)+1} = \\ &= \frac{3}{5} N \mu_0 \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

(5.37) dan $T \neq 0$ temperaturada, ya'ni past temperaturada elektron gazning issiqlik sig'iimi

$$C_v^{el} = \frac{Nk\pi^2}{2} \cdot \frac{kT}{\mu_0} = \frac{Nk\pi^2}{2T_0} \cdot T = \alpha T. \quad (5.38)$$

Bu yerda $T_0 = \mu/k$ – elektron gazning aynish temperaturasi. (5.38) formula yordamida hisoblangan issiqlik sig‘imi tajriba natijalari bilan mos kelib, juda kichik qiymat qabul qiladi. Elektronlarning issiqlik sig‘imiga qo’shgan hissasi kichik ekanligini tushuntirish mumkin. Past temperaturalarda, ya’ni $kT \ll \varepsilon_F$ bo’lganda Fermi–Dirak taqsimotidagi «zina» yoyilgan bo’ladi (5.1- rasmdagi punktir chiziq). Issiqlik harakatida Fermi sirtiga yaqin sohadagi elektronlar ishtirok etadi va metallning xossalarni aniqlashda asosiy rol o’ynaydi. Ularning soni yoyilgan soha kengligi ($2kT$) ning Fermi energiyasiga nisbati tartibida bo’ladi. Issiqlik sig‘imi additiv kattalik – ichki energiyadan temperatura bo'yicha olingan hosila bilan aniqlanganligi uchun yuqoridagi fikrni matematik ifodaga aylantirsak,

$C_v^{\text{el}} \sim N \frac{2kT}{\varepsilon_F}$ hosil bo’ladi. Bu ifoda temperaturaga chiziqli

bog’lanadi va tartib jihatidan (5.38) bilan mos keladi. Issiqlik sig‘imi uchun (5.38) ifodani $kT \ll E_F$ o’rinli bo’lgan hol uchun Fermi–Dirak taqsimotidagi yoyilish sohasiga to’g’ri keluchi elektronlarning effektiv soni orqali ham yozish mumkin (15- masala).

Metallardagi elektron gazning holatini aniqlash uchun termodinamik kattaliklarni hisoblash kerak. Buning uchun eng qulay katta termodinamik potensialni bilish kerak. Chunki katta termodinamik potensialning o’zgarishi

$$dB = -SdT - PdV - Nd\mu \quad (5.39)$$

yordamida bir qator termodinamik kattaliklarni hisoblash mumkin. Katta termodinamik potensial quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$B = F - \Phi = -PV = -\frac{2}{3}E$$

yoki

$$B = \pm gkT \int \ln \left[1 \mp \exp \left(\frac{\mu - \varepsilon}{kT} \right) \right] d\Omega.$$

Katta termodinamik potensial orqali quyidagi termodinamik kattaliklar uchun ifodalarni keltiramiz:

entropiya

$$S = - \left(\frac{\partial B}{\partial T} \right)_{V,\mu} = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V,\mu},$$

bosim

$$p = - \frac{B}{V} = \frac{2}{3} \frac{E}{V},$$

zarralar soni

$$N = - \left(\frac{\partial B}{\partial \mu} \right)_{T,V} = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial E}{\partial \mu} \right)_{T,V},$$

erkin energiya

$$F = E - TS = E - \frac{2}{3} T \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V,\mu}.$$

Bu ifodalarda ichki energiya (5.37) ifoda bilan almashtirilsa, yuqoridagi termodinamik kattaliklar uchun aniq ifodalarni hosil qilish mumkin.

5.7. Fermi–Dirak taqsimoti tatbig‘i

Fermi–Dirak taqsimotini tatbiq qilish sohasi juda keng. Kvant mexanika qonuniyatiga bo‘ysunuvchi va spinlari yarim va butun yarim bo‘lgan sistemalar (metallardagi elektron gazi, yarimo‘tkazgichlardagi elektron va teshik gazlari, ultrarelativistik elektron gazi va h.k.) holatini va unda o‘tayotgan jarayonlarni aniqlashda Fermi–Dirak taqsimoti tatbiq qilinadi. Bu yerda eng oddiy hol, metalldan chiqish ishi ma’lum bo‘lgan elektronlarning termoelektron emissiya tokini aniqlashni ko‘raylik.

Faraz qilaylik, elektronning chiqish ishi $A = e\varphi$ bilan aniq-lansin va $A - \mu \gg kT$ bo‘lsin. Elektronlarning harakat yo‘nalishi « x » o‘qi bilan mos tushsa, emissiya toki

$$J_x = en \overline{v_x} \quad (5.40)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bu yerda e – elektron zaryadi, n – elektronlarning zichligi. O‘rtacha tezlik esa quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$\begin{aligned} \overline{v_x} &= g \frac{m^3}{h^3} \int dv_y dv_z \int \frac{v_x dv_x}{\exp \left[\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - 2\mu}{2kT} \right] + 1} = \\ &= 4g \frac{kT}{m} \frac{m^3}{h^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\mu - e\varphi}{kT} \right) \exp \left(-\frac{m(v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right) \right] dv_y dv_z. \quad (5.41) \end{aligned}$$

Integralni hisoblash natijasini (5.40)ga qo'yib, tok zichligi uchun Richardson kvant formulasini olamiz:

$$j_x = \frac{4\pi enm}{h^3} (kT)^2 \exp \left(-\frac{w}{kT} \right), \quad (5.42)$$

bu yerda $w = e\varphi - \mu$ – effektiv chiqish ishi.

5.8. Past temperaturalarda Boze-gaz. Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi

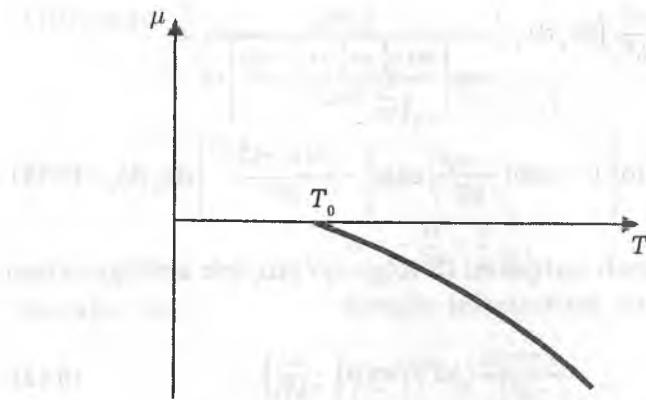
Past temperaturalarda Boze-gaz xususiyatidan Fermi-gaz xususiyati tubdan farq qiladi. Bozonlardan tashkil topgan Boze-gaz tabiatini o'rganish uchun zarralar sonini va energiyasini hisoblash formulalarini yozaylik:

$$\frac{N}{V} = A \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp \left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT} \right) - 1}, \quad (5.43)$$

$$E = AV \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon^3} d\varepsilon}{\exp \left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT} \right) - 1}. \quad (5.44)$$

Bu yerda $A = 2\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$, $g = 1$, V – Boze-gaz egallagan hajm.

(5.43) ifoda oshkormas ko'rinishda kimyoviy potensial μ ning temperatura va zarralar zichligi N/V ga bog'lanishini aniqlaydi (5.2- rasm). Bu ifoda barcha temperaturalarda o'rinali bo'lishi uchun $\mu \leq 0$ bo'lishi kerak. Agar gaz zichligini o'zgarmas saqlab, uning temperaturasini pasaytirsak, (5.43) asosan μ manfiy bo'lgan holda absolut qiymati kamaya boradi va ma'lum $T = T_0$ temperaturada u nolga teng bo'ladi.



5.2- rasm. Boze-gazda kimyoviy potensialning temperaturaga bog'lanishi.

Bu temperaturani aniqlash uchun (5.43) da $\mu = 0$ deb olib, integralni hisoblaymiz:

$$\frac{N}{V} = A(kT_0)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp(\varepsilon/kT)-1} = AV(kT_0)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \quad (5.45)$$

Bu yerda $\zeta(x)$ – zeta, $\Gamma(x)$ – gamma funksiyalar. (5.45) dagi maxsus funksiyalarning son qiymatlarini qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$T_0 = 0,084 \frac{h^2}{km} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Odatda, T_0 temperaturani kondensatsiya temperaturasi deb yuritiladi.

Gazning temperaturasini T_0 dan ham pasaytirish natijasida (5.43) ga ko'ra $\mu > 0$ bo'lib qoladi, lekin Boze statistikasida $\mu \leq 0$ bo'lishi kerak. Birinchi qarashdagi bunday qarama-qarshilik N va E ni hisoblashda yig'indidan integralga o'tishdan kelib chiqadi. Haqiqatan ham, bunday o'tishda yig'indidagi birinchi ($\varepsilon_k = 0$) had $\sqrt{\varepsilon}$ ga ko'paytiriladi, ya'ni yig'indidagi tushib qoladi. Shu vaqtida temperaturani pasaytirish natijasida zarralar eng kichik energiyali holatga $T_0 = 0$ da ularning hammasi tushguncha yig'ila boradi. $\mu \rightarrow 0$ yig'indidagi barcha hadlar chekli qiymat qabul qiladi, lekin birinchi had ($\varepsilon = 0$) cheksizga

intiladi. Cheksizdan qutilish uchun μ ni nolga emas, balki qandaydir chekli juda kichik qiymatga intiltirish kerak. Bu esa mumkin emas.

Bu holatni quyidagicha tahlil qilish kerak. Energiyasi $\varepsilon > 0$ zarralar $\mu = 0$ da quyidagicha taqsimlangan bo'ladi:

$$dN_\varepsilon = AV \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp(\varepsilon/kT) - 1}. \quad (5.46)$$

Demak, energiyasi noldan katta bo'lgan zarralarning to'liq soni

$$N_{\varepsilon>0} = \int dN_\varepsilon = N \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2}. \quad (5.47)$$

Qolgan qismi ($\varepsilon = 0$) quyidagiga teng bo'ladi:

$$N_{\varepsilon=0} = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right],$$

N – bozonlar soni doimiy kattalik.

Boze-gaz ichki energiyasi faqat $\varepsilon > 0$ energetik sathlardagi zarralar bilan aniqlanadi. Demak, T_0 shunday chegaraviy kichik temperatura ekanki, $T < T_0$ temperaturadan boshlab zarralar $\varepsilon > 0$ holatlardan $\varepsilon = 0$ holatga o'ta boshlaydi. Ya'ni, shu narsa ko'rindaniki $T = 0$ da hamma bozonlar $\varepsilon = 0$ energetik sathda to'planar ekan. Bu hodisa gaz-suyuqlik kondensatsiyasi kabi Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi deb yuritiladi. Real fazoda yuz beruvchi oddiy kondensatsiyadan farqli ravishda bunday kondensatsiya fazalar fazosida yuz beradi. Eng quyi holatdagisi ($\varepsilon = 0$) zarralar «kondensat», qo'zg'algan holatdagilari ($\varepsilon > 0$) esa «kondensat ustsi» deb yuritiladi. (5.44) dan Boze-Eynshteyn gazining energiyasi

$$E^{\text{boze}} = 1,78AV(kT)^{5/2} = 31,6 \frac{m^{3/2} (kT)^{5/2} V}{h^3},$$

issiqlik sig'imi

$$C_V^{\text{boze}} = \frac{5}{2} \frac{E}{T} = 4,45AV(kT)^{3/2} = 79 \frac{m^{3/2} (kT)^{3/2} V}{h^3},$$

katta termodinamik potesial

$$B^{\text{boze}} = -\frac{2}{3}E = -1,15AV(kT)^{5/2} = -21 \frac{m^{3/2}(kT)^{5/2}V}{h^3},$$

entropiya

$$S^{\text{boze}} = \frac{5}{2} \frac{B}{T} = 2,86AV(kT)^{3/2} = 52,5 \frac{m^{3/2}(kT)^{3/2}V}{h^3},$$

bosim

$$p^{\text{boze}} = -\frac{B}{V} = 1,15A(kT)^{5/2} = 21 \frac{m^{3/2}(kT)^{5/2}}{h^3}$$

tengliklar bilan aniqlanishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, Boze-Eynshteyn gazi entropiyasi va issiqlik sig'imi, Nernst teoremasiga mos holda, temperatura absolut nolga intilganda nolga intilar ekan va bosim hajmga bog'liq bo'lmaydi. Bu tomondan Boze-Eynshteyn gazi to'yingan bug' bilan o'xhashdir. Bu o'xhashlik shu bilan tushuntiriladi, $\varepsilon = 0$ bo'lgan holatda kondensat zarralari impulsiga ega bo'l maydi va bosimga hissa qo'sha olmaydi.

Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi zarralar soni o'zgarmas bo'lgan sistemalardagina yuz beradi. Foton gazida kondensatsiya tushunchasi umuman yo'q, chunki bu sistemada muvozanat holatda ham zarralar – fotonlar soni o'zgarib turadi. Foton gaz masalasini keyingi mavzularda muhokama qilamiz.

5.9. Boze-gaz va Fermi-gaz holat tenglamalari

Boze- va Fermi-gazlarining termodinamik xarakteristikalaridan eng ko'rgazmalisi – holat tenglamasıdır. Bizga ma'lumki katta termodinamik potensial holat funksiyasi bilan quyidagi ko'rinishda bog'langan:

$$B = -kT \ln \tilde{Z}$$

yoki holat tenglamasi

$$pV = kT \ln \tilde{Z} \quad (5.48)$$

ko'rinishda yoziladi. Demak holat tenglamasini yozish uchun birinchini navbatda holat funksiyasini topish kerak. Bu kattalik Gibss mikrokanonik taqsimoti yordamida topiladi, ya'ni

$$\tilde{Z} = \sum_{n_0} \sum_{n_1} \cdots \exp \left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k - \varepsilon_k) n_k}{kT} \right) = \prod_{k=0}^{\infty} \sum_n \exp \left(\frac{(\mu_k - \varepsilon_k) n}{kT} \right). \quad (5.49)$$

Bu yerda n_k - « k »- holatda bo'lishi mumkin bo'lgan zarralar soni.

Fermi-gaz uchun $n_k = 0, 1$ qiymatlarni qabul qilishini hisobga olsak,

$$\tilde{Z} = \prod_{k=0}^{\infty} \left\{ 1 + \exp \left(\frac{\mu_k - \varepsilon_k}{kT} \right) \right\}. \quad (5.50)$$

Boze gaz uchun $n_k = 0, 1, 2, \dots$ qiymatlarni qabul qilishini inobatga olib, quyidagini olamiz:

$$\tilde{Z} = \prod_{k=0}^{\infty} \left\{ 1 - \exp \left(\frac{\mu_k - \varepsilon_k}{kT} \right) \right\}^{-1}. \quad (5.51)$$

Fermi va Boze-gazlar uchun olingan holat funksiyasining logarifmini simmetrik ko'rinishda yozib (5.48)ga qo'yamiz:

$$pV = \pm kT \sum_{k=0}^{\infty} \ln \left\{ 1 \pm \exp \left(\frac{\mu_k - \varepsilon_k}{kT} \right) \right\}. \quad (5.52)$$

Bu yerda «+» ishora Fermi-gazga, «-» ishora Boze gazga tegishli. Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, agar gaz turli navli molekulalardan tashkil topgan bo'lsa, holat funksiyasi har bir navli molekulalardan tashkil topgan sistema holat funksiyalarining yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$\tilde{Z} = \sum \tilde{Z}_i, \quad (5.53)$$

bu yerda \tilde{Z}_i (5.49) ifoda bilan aniqlanadi.

Zarralar soni juda katta bo'lganda uzlukli holatlar orasidagi masofa juda kichik bo'ladi va uni uzlusiz deb, yig'indini integral bilan almashtirish mumkin, ya'ni

$$pV = \pm kTg \int \ln \left\{ 1 \pm \exp \left(\frac{\mu_k - \varepsilon_k}{kT} \right) \right\} d\Omega. \quad (5.54)$$

Bu yerda $g = 2s + 1$, s – zarracha spini, $d\Omega = \frac{dpdV}{h^3}$ – fazaviy hajm elementi. Integral ostidagi ifoda fazoviy koordinatalarga bog'liq bo'lmasligi uchun integralning bu qismi V ga teng bo'ladi. Energiya impulsiga kvadratik bog'liq bo'lmasligi uchun impulslar fazosida sferik koordinatalarga o'tamiz. Natijada

$$\begin{aligned} pV &= \pm kTg \frac{4\pi V}{h^3} \int \ln \left\{ 1 \pm \exp \left(\frac{\mu_k - \varepsilon_k}{kT} \right) \right\} p^2 dp = \\ &= \pm 2\pi V kTg \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \ln \left\{ 1 \pm \exp \left(\frac{\mu - \varepsilon}{kT} \right) \right\} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Bu yerdagi integralni bir marta bo'laklab integrallasak, ko'rilayotgan gazning holat tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$pV = \frac{2}{3} E. \quad (5.56)$$

Bu yerda

$$E = \pm kTgV \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left(\frac{\mu - \varepsilon}{kT} \right) \pm 1 \right\}^{-1} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon. \quad (5.57)$$

(5.57) ifodaga Fermi- va Boze-gaz holat tenglamasi deyiladi. Bu tenglamaga asosan shu narsa ko'rinish turibdiki, Fermi- va Boze-gaz bosimlari va energiyalari orasidagi bog'lanish xuddi klassik ideal gazdagagi kabi ko'rinishda bo'lar ekan.

Juda yuqori temperaturalarda, qaysiki

$$e^{-\mu/kT} = \frac{gV}{N} \left(\frac{\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \ll 1$$

shart bajarilganda integral ostidagi ifodani qatorga yoyamiz va integralni hisoblash natijasida holat tenglama quyidagi ko'rinishga o'tadi:

$$pV = gV \left(\frac{\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{\mu/kT} \left(1 \pm \frac{1}{4\sqrt{2}} e^{\mu/kT} \right). \quad (5.58)$$

Agar bu ifodaga kimyoviy potensial $\mu = kT \ln \left[\frac{N}{gV} \left(\frac{\hbar^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \right]$ ni

qo'ysak, quyidagi holat tenglamani olamiz:

$$pV = NkT \left[1 \pm \frac{N}{16gV} \left(\frac{\hbar^2}{\pi mkT} \right)^{3/2} \right]. \quad (5.59)$$

Bu yerdagi ikkinchi had kvant statistikani klassik ideal gaz holat tenglamasiga qo'shgan birinchi tuzatmasidir. Ammo bu tuzatma atomlar orasidagi o'zaro ta'sir bilan bog'langan tuzatmaga nisbatan juda kichik.

5.10. Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi

Boze-Eynshteyn kondensatsiyasini ishqor metall atomlarining siyrak gazida birinchi marta kuzatganligi va bu sohada birinchi fundamental tatqiqotlar olib brganliklari uchun 2001 yil Nobel mukofoti E.A. Kornell (AQSh), V. Ketterle (AQSh) va K.E. Viman (AQSH, Germaniya)larga topshirildi. Past temperaturalar o'tgan asr fiziklarining doimo diqqat-e'tiborida bo'lib kelgan va absolut nolga har bir yaqinlashish fizikada katta yangi kashfiyotlarning ochilishiga sababchi bo'lган. Bir tasavvur qilib ko'raylik, agar biz yerda emas quyosh sirtida yashagan bo'lsak nima bo'lar edi. Sovitgichsiz suyuq va kristallar to'g'risida hech narsa bilmas edik.

Temperatura bo'yicha 1 K ga erishish o'tao'tkazuvchanlik (1911) va geliy-4 ning o'taoquvchanlikning (1938) kashf qilinishiga olib keldi. Millikelvinlargacha sovitish geliy-3 o'tao'tkazuvchanlikni (1972) kuzatishga imkon berdi. Lazer yordamida sovitish yangi o'tapast temperaturalar sohasini ochib berdi. Siyrak gazlarda Boze-Eynshteyn kondensatsiyasini kuzatish uchun nanokelvinlar diapazoniga tushishni (1995) talab qildi. Bu sovitishlarning har qaysisi Nobel mukofoti bilan taqdirlangan. Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi uzoq tarixga ega bo'lib XX asrning 20- yillaridan boshlangan.

Boze-statistika tushunchasi Shatendranataning Boze absolut qora jismning nurlanish spektrini o'rganish uchun statiskani tatbiq qilgan ilmiy ishida (1924) tug'ilgan. Shatendranataning

bu maqolani o'zi e'lon qilishga imkonni bo'limganligi uchun Eynshteynga yuborgan. U o'z navbatida maqolani e'lon qilishni tashkil qilgan.

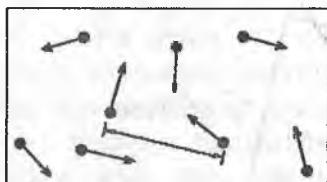
Eynshteyn bu g'oyani o'zaro ta'sirlashmaydigan atomlarga tatbiq qilgan. Natijada Boze-Eynshteyn statistikasi paydo bo'ldi. Eynshteyn bu statistikaga ko'ra kvant holatlardagi atomlarning ko'p qismi chekli, lekin juda past temperaturalarda eng pastki energetik holatlarga o'tishiga e'tibor bergan. Bu hodisa bug'-suv kondensatsiyasiga o'xshatib, hozir Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi sifatida ma'lum. Juda ko'p moddalar uchun aynish temperaturasi shunday pastki, ular kondensatsiyalanishga ulgurmasdan suyuq yoki qattiq holatga o'tib ketadi.

Yaqin-yaqinlargacha Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi faqat gelyi izotoplaridagi o'taoquvchanlik, o'tao'tkazuvchanlik (kuper juftlarining kondensatsiyasi) va yarimo'tkazgichlardagi eksiton (elektron va teshikning bog'langan holati) tomchilari bilan bog'langan edi. Bu misollarning hammasida bozonlar bir-birlari bilan ta'sirlashadilar. O'zaro ta'sirlashmaydigan zarralarning kondensatsiyasi – «haqiqiy» Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi nazariy mavjud bo'lib, tajribalarda erishib bo'lmaydigan hodisa bo'lib ko'rinar edi.

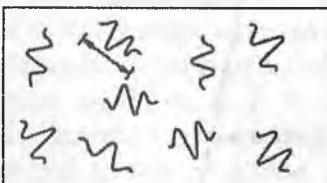
Boze-atomlarni ma'lum T_c temperaturadan pastgacha sovit-sak, atomlarning ko'p qismi eng kichik energiyali kvant mexanik holatga o'tadi. m massali atomlarni T_c temperaturadagi o'lchami de Broyl to'lqini tartibidagi issiqlik harakati bilan bog'liq bo'lgan kvant mexanik to'lqin paketi deb qarash mumkin:

$$\lambda_B = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{2mkT}} \sim \begin{cases} 10^{-12} \text{ sm}, & T = 300 \text{ K}, \\ 10^{-8} \text{ sm}, & T = 10^{-6} \text{ K}. \end{cases}$$

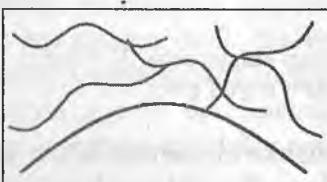
Agar $\lambda_B \ll a$ bo'lsa gaz Bolsman statistikasiga bo'ysunadi, agar $\lambda_B \sim a$ bo'lsa, gaz kvant xossaga ega bo'lib, Boze-Eynshteyn statistikasiga bo'sunadi (a – atomlar orasidagi masofa). Kattalik λ_B issiqlik natijasida ipuls qiymatlarining tarqoqligi sababli paydo bo'ladigan koordinataning noaniqligini ko'rsatadi. Bu noaniqlik temperatura pasayishi bilan kattalashadi va atomlar orasidagi masofa tartibida bo'lganda atomlarining to'lqin paketlari bir biriga kirishib ketadi. Natijada gaz atomlari bir biridan farq qilib bo'lmaydigan bir butun sistemaga aylanadi (5.3- rasm). Bu holda gazda kvant mexanik faza o'tishi sodir bo'ladi, ya'ni



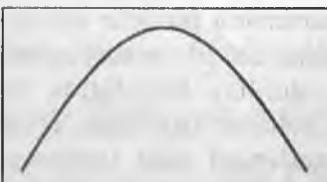
Yuqori temperaturalar:
«Bilyard sharlari;
 v – issiqlik tezligi,
 d^3 – zichlik



Past temperaturalar:
«To'lqin paketlari
de Broyl to'lqin uzunligi
 $\lambda_B = h/mv \sim T^{-1/2}$



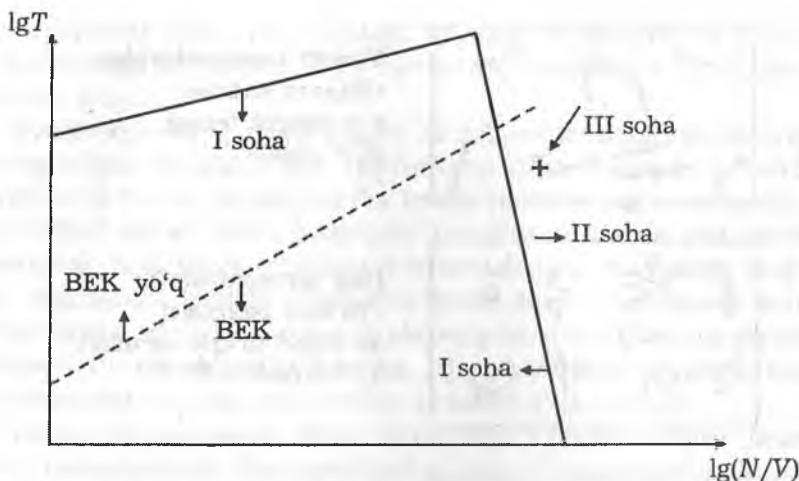
$T = T_c$; BEK
 $\lambda_B \sim d$
«Materiya to'lqinlarining
kirishishi»



$T = 0$
Toza BEK
«Materianing gigant
to'lqini»

5.3- rasm.

hamma atomlar bir holatda bo'lgan atomlar buluti – Boze-Eynshteyn kondensati paydo bo'ladi. Bu jarayon T_c temperaturalidan boshlab sodir bo'la boshlaydi. Boze-Eynshteyn kondensatida T da impulsi nolga teng bo'lgan (sistema bir butun holda tinch turgan bo'lsa) usosiy holatda atomlarning $N_e/N = 1 = (T/T_c)^{1/3}$ qilmi to'planadi. Yuqoridagi fikrlarga asosan Boze-Eynshteyn kondensatini olish juda oson bo'lib, gazni T dan past temperaturalargacha sovitish yetarli ekan. Ammo juda ko'p hollarda Boze-Eynshteyn kondensati paydo bo'lginga qadar sistemada odatdag'i, ya'ni gaz-suyuqlik yoki gaz-kristall faza o'tishlari sodir bo'ladi va Boze-Eynshteyn kondensatiga erishib bo'lmaydi. Demak, Boze-Eynshteyn konden-



5.4- rasm. Faza diagrammasi: I – man etilgan soha; II – oddiy kondensatsiya sohasi, III – suyuq geliy.

satini olish uchun odatdagи faza o'tishlarni chetlab o'tish kerak. Bu asosiy muammo hisoblanadi. Boze-Eynshteyn kondensatini olish uchun temperatura va zichlik 5.4- rasmda ko'rsatilgan sohaga to'g'ri kelishi kerak. Diagrammada punktir chiziq bilan Boze-Eynshteyn kondensati mavjud bo'lish sohasi ajratilgan. Uzluksiz chiziqlar «temperatura-zichlik» tekisligida termodynamik mumkin va man qilingan sohalar ajratilgan. Diagramma asosan Boze-Eynshteyn kondensat past temperaturalarda va oraliq zichliklarda man etilgan sohada hosil qilish mumkinligini ko'rsatadi. Bu sohadan chiqish uchun o'ta past temperaturalar va zichliklar sohasiga o'tish kerak. Bunday holat metastabil bo'ladi va sistema uzoq yashamaydi. Sistemanı bunday holatda ushlab turish uchun magnit tutqichlardan foydalaniladi. Boze-Eynshteyn kondensatini amalda olishda o'ta past temperaturalar «lazer sovitgichlari»dan foydalanilgan.

5.11. Muvozanatlari nurlanish. Plank formulasi

Muvozanatlari nurlanishni termodinamik nuqtayi nazardan 4.4- bandda batafsil ko'rib chiqgan edik. Reley-Jins va Vin nazariyalari absolut qora jismning nurlanishini hamma chastotalar oraliq'ida tushuntirib bera olmaydi. Endi ushbu masalani kvant statiskasi yordamida ko'rib chiqamiz.

Absolut qora jism nurlanishining Plank nazariyasida (1900) birinchi marta kvant to'g'risida tasavvur paydo bo'lgan, ya'ni atomlar nurlanishda energiyani ma'lum miqdorda chiqaradi va shunday miqdordagi nurlanish energiyasini yutadi deb faraz qilingan. Energiya tushunchasidagi bunday faraz fizikada klas-sikadan tubdan farq qiladigan yangi g'oya bo'lib, avvaliga kvaziklassik, keyinchalik rivojlanib, mikrojarayonlar nazariyasi kvant nazariyasiga aylangan.

Muvozanatli nurlanish, ya'ni absolut qora jism nurlanishining energiya zichligini ν , $\nu + d\nu$ chastota intervalida $p(\nu, T)d\nu$ bo'lsin. Klassik fizika nuqtayi nazaridan muvozanatli nurlanish chastotasi 0 dan ∞ gacha bo'lgan va o'zaro perpendikular turg'un to'lqinlar sistemasi, ya'ni elektromagnit maydonni garmonik ossillatorlar maydoni bilan almashtirib, energiya zichligini hisoblagan edik. Bu elektromagnit maydon energiyasi – garmonik ossillatorlar energiyalarining yig'indisiga to'g'ri keladi. U vaqtida ν , $\nu + d\nu$ chastota intervalida birlik hajmga to'g'ri kelgan turg'un to'lqinlar energiyasi

$$\rho(\nu, T)d\nu = \bar{\epsilon}(\nu, T)g(\nu)d\nu,$$

bu yerda $g(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2d\nu$ ifoda $(\nu, \nu + d\nu)$ chastota intervalidagi turg'un to'lqinlar yoki ossillatorlar soni ekanligini hisobga olsak,

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi\bar{\epsilon}}{c^3}\nu^2d\nu. \quad (5.60)$$

Plank nazariyasi bo'yicha, $\bar{\epsilon}(\nu, T)$ ni hisoblashda energetik holat energiyalarini garmonik ossillator energiyasi emas, balki kvant ossillator energiyusini deb qarashni taklif qildi. Bu energiyani hisoblaylik:

$$\bar{\epsilon} = \sum_{\varepsilon} W(\varepsilon) = \frac{\sum_{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\Omega(\varepsilon)}{\sum_{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\Omega(\varepsilon)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left[h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] \exp\left(-\frac{h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right)}{kT}\right)\Omega(\varepsilon)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right)}{kT}\right)\Omega(\varepsilon)}.$$

Kvant ossillator energiyasi $\varepsilon = h\nu(n + 1/2)$ ni hisoblashni $\frac{h\nu}{2}$ dan va kvant holatlar soni $\Omega(\varepsilon) = 1$ ekanligini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (5.61)$$

Natijada $\nu, \nu + d\nu$ chastota intervalida absolut qora jism nurlanish energiya zichligi, ya'ni muvozanatli nurlanish energiyasining zichligi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3 d\nu}{c^3 \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2}$$

yoki

$$\rho(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)}. \quad (5.62)$$

(5.62) ifoda Plank formulasi deyiladi.

Plank formulasini ikki chegaraviy holda ko'rib chiqamiz.

a) $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$. Bu holda Plank formulasidagi eksponentani $\frac{h\nu}{kT}$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyib nurlanish energiyasining spektral taqsimoti uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 d\nu. \quad (5.63)$$

Bu formula 4.4- bandda olingan Reley-Jins formulasi bilan mos keladi.

b) $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$. Bu holda Plank formulasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu. \quad (5.64)$$

Ushbu taqsimotning maksimumi $\frac{\partial \rho(\nu, T)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\nu_{\max}} = 0$ shartga asosan

nurlanish energiyasi maksimumi $\nu_{\max} \sim T$ chastotaga to'g'ri kelishini topamiz. Bundan ko'rinish turibdiki, temperatura oshishi bilan maksimum katta chastotalar tomoniga siljiydi. Ushbu natija bizga klassikadan ma'lum bo'lgan Vin siljish qonunini beradi.

5.12. Foton gazi statistikasi

Fotonlardan tashkil topgan gaz, ya'ni muvozanatli nurlanish Boze-gazga misol bo'la oladi. Shuning uchun foton gazining holatini Boze-Eynshteyn taqsimoti yordamida aniqlashni ko'ramiz. Izolatsiyalangan berk bo'shlqdagi muvozanatli nurlanishni foton gazi deb qabul qilsa bo'ladi. Chunki muvozanatli nurlanish fotonlardan tashkil topgandir. Hamma fotonlar bir xil «c» tezlik bilan harakat qiladi. Ammo turli xil fotonlar har xil energiya va impulsiga ega bo'ladi va ular $\varepsilon = pc$ ko'rinishda bog'langan. Foton energiyasi $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$, impulsi esa

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

Nurlanishda sistema mehanik momenti butun \hbar ga karrali kattalikka kamayadi. Chunki bu moment sistema dan uchib chiquvchi fotonlar tomonidan olib ketiladi. Fotonlar orasida o'zaro ta'sir bo'lmasligi uchun foton gazini ideal gaz deb qarash mumkin. Foton momenti butun bo'lganligi uchun foton gazi Boze-Eynshteyn statistikasiga bo'ysunadi.

Termodinamik muvozanat yuzaga kelishida gaz molekula larining o'zaro ta'siri asosiy rol o'ynaydi. Fotonlar orasida o'zaro ta'sir yo'q bo'lshiga qaramasdan muvozanat holat mavjud bo'lib, ular impuls va energiya bo'yicha qandaydir taqsimotga bo'ysunadi. Foton gazida muvozanat yuzaga kelishi uchun zarralar ta'siriga ekvivalent bo'lgan – bir chastotadagi (energiyal) foton boshqa chastotadagi fotonga aylanib turishi kerak. Boshqa tomonidan sistema bir butun holda berk bo'lganligi uchun ichki energiyasi o'zgarmas bo'lshi kerak. Demak, energiya balansini saqlash uchun foton gazida zarralar soni berilgan deb bo'lmas ekan. Mana shu xususiyati bilan foton gazi molekular gazdan farq qiladi.

Faraz qilaylik, ν , $\nu + d\nu$ chastota intervalida yoki bunga to'g'ri kelgan ε , $\varepsilon + d\varepsilon$ fotonlar energiyasi intervalidagi birlik hajmidagi fotonlarning kvant holatlar soni $d\Omega$ bo'lsin. Agar har bir kvant holatdagi o'rtacha fotonlar soni $\bar{n}(\varepsilon)$ bo'lsa, u holda ε , $\varepsilon + d\varepsilon$ energiya intervalidagi fotonlarning soni

$$dn(\varepsilon) = \bar{n}(\varepsilon)d\Omega$$

va o'rtacha energiyasi esa $\varepsilon\bar{n}(\varepsilon)d\Omega$. Bu energiya ν , $\nu + d\nu$ chastota intervalidagi nurlanish energiyasi zichligiga teng:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \varepsilon\bar{n}(\varepsilon)d\Omega. \quad (5.65)$$

(5.65) ifodada $\varepsilon = h\nu$ ekanligini va Boze-Eynshteyn taqsimotiga asosan

$$dn(\varepsilon) = \bar{n}(\varepsilon)d\Omega = \frac{2}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)-1} \cdot \frac{4\pi\rho^2 d\rho}{h^3}$$

tenglikni hisobga olsak, u vaqtida ν , $\nu + d\nu$ chastota intervalida foton gazi energiya zichligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\rho(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}. \quad (5.57)$$

(5.66) ifoda muvozanat nurlanish uchun Plank formulasining o'zidir. Bu ifoda kichik chastotalarda esa Vinni siljish qonuniga o'tadi.

Birlik hajmdagi foton gaz energiyasi:

$$u = \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu = \alpha T^4,$$

V hajmdagi ichki energiyasi esa,

$$E = uV$$

bo'ladi. Bu yerda $\alpha = \pi^3 k^4 / 15(\hbar c)^3$.

Foton gazining erkin energiyasi

$$F = -T \int_0^T \frac{E dT}{T^2} = -\frac{\alpha V}{3} T^4,$$

entropiyasi esa

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_v = \frac{4\alpha V}{3} T^3,$$

katta termodinamik potensiali

$$B = -PV = -\frac{2}{3} E = -\frac{2\alpha V}{3} T^4,$$

kimyoviy potensiali

$$\mu = \frac{\Phi}{N} = \frac{F+pV}{N} = \frac{0}{N} = 0$$

ifodalar bilan aniqlanadi.

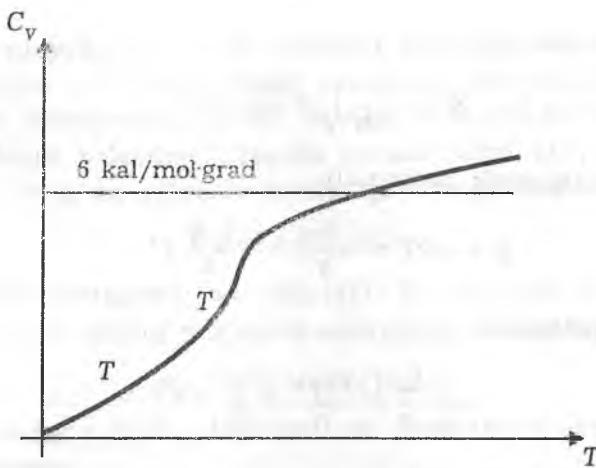
5.13. Qattiq jismlar issiqlik sig'imi. Eynshteyn nazariyasi

Qattiq jismlarda atomlar kristall panjaralari tugunlarida joylashgan bo'ladi va o'zlarining muvozanat holati atrofida tebranma harakatda bo'ladilar. Past temperaturalarda tebranish uncha katta bo'lmaydi va potensial energiya atomlarning muvozanat holatlariga nisbatan siljishining kvadratiga proporsional bo'ladi. Bu holda panjara tugunlaridagi har bir atomning tebranma harakatini garmonik ossillyator deb qarash mumkin. Bu esa qattiq jism energiyasining garmonik ossillatorlar energiyasiga teng deyish imkonini beradi. Agar kristalladagi atomlar soni N ta bo'lsa, u holda sistema $(3N - 6) \approx 3N$ erkinlik darajasiga ega bo'ladi. Garmonik ossillatorning bitta erkinlik darajasiga to'g'ri kelgan o'rtacha energiya $\bar{\varepsilon} = kT$ bo'ladi.

Shunday qilib, klassik nazariya bo'yicha qattiq jism energiyasi $E = 3NkT$ va issiqlik sig'imi esa $C_V = 3Nk = 6 \text{ kal/mol} \cdot \text{grad}$ bo'ladi. Bu Dyulong-Pti qonuni deb yuritiladi. Bu qonun ko'pchilik qattiq jismlar uchun uy temperatura sohasida o'rinali bo'ladi. Ammo past temperaturalarda bu qonun umuman yaroqsiz bo'lib qoladi.

Past temperaturalarda barcha kristallarning issiqlik sig'imi temperatura pasayishi bilan kamayadi.

Bundan tashqari olmos kristallining issiqlik sig'imi yuqori temperaturalarda ham Dyulong-Pti qonuniga bo'ysunmaydi.



5.5- rasm. Qattiq jismarda issiqlik sig‘imining temperatura bo‘yicha o‘zgarishi.

Demak, kristall misolidada biz yana klassik statistikadagi tekis taqsimlanish qonunining o‘rinsiz bo‘lishiga duch keldik.

1906- yilda Eynshteyn qattiq jismalar issiqlik sig‘imini past temperaturalarda Dyulong-Pti qonunidan chetga chiqishini ko‘rsatadi va uni quyidagicha tushuntiradi. Kristall panjara tugunlaridagi tebranuvchi har bir atomni uchta erkinlik darajasiga ega bo‘lgan kvant ossillator deb qarash kerak. Bir xil tanlangan atomlardan tashkil topgan kristall panjaralaridagi hamma atomlar teng xuquqli bo‘ladi va bir xil « ν » chastota bilan muvozanat holat atrofida tebranadi. Agar qattiq jism N ta atomdan tashkil topgan bo‘lsa, u holda o‘rtacha energiya

$$E = 3N \frac{h\nu}{2} + \frac{3Nh\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

bo‘ladi. Bu yerda $3Nh\nu/2 = E_0$ ifoda $T = 0$ dagi energiya bo‘lib, nolinchi energiya deyiladi. Bu ifoda kichik chastota sohasida klassik formula, ya’ni Dyuling-Pti qonuniga o’tadi. Katta chastota va past temperaturalar sohasida

$$E = E_0 + 3Nh\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

ko‘rinishni oladi. Bu ifodadan qattiq jism issiqlik sig‘imi

$$C_v^k = 3Nk \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

ko'rinishni oladi. Bu bir qarashda tajriba natijasi bilan mos tushganday, lekin bunday emas ekan (5.5- rasm), chunki past temperaturalar sohasida $C_v \sim T^3$ bo'lishi kerak.

5.14. Debay nazariyasi

Qattiq jismlarning issiqlik sig'imi nazariyasi 1912- yilda Debay tomonidan hal qilingan deb hisoblanadi. Debay nazariyasiga yaqinroq nazariya Born va Karman tomonidan ham berilgan. Debay nazariyasiga ko'ra, qattiq jismda ikkita ko'ndalang va bitta bo'ylama to'lqin tarqaladi. Qattiq jismlarda bu to'lqinlarning tarqalishi kristall panjara diskretligiga ko'ra chastota bo'yicha chegaralangan bo'ladi. To'lqin uzunligi kristall panjara doimiysidan kichik bo'lgan to'lqinlar qattiq jism bo'ylab tarqala olmaydi. Shunga ko'ra qattiq jismda chastotalari $\nu = 0$ va $\nu = \nu_{\max}$ intervalda bo'lgan to'lqinlarga tarqala oladi.

Agar V hajmdagi qattiq jism N ta atomdan tashkil topgan bo'lsa, u holda qattiq jism $3N$ ta garmonik kvant ossillatorlar to'plamidan iborat deb qaraladi. Bu ossillatorlar xususiy ν_k chastota bilan tebranadi.

Har bir kvant ossillatorning o'rtacha energiyasi

$$E_k = \frac{h\nu_k}{2} + \frac{h\nu_k}{\exp\left(\frac{h\nu_k}{kT}\right) - 1}$$

va V hajmdagi qattiq jismning o'rtacha energiyasi

$$E = E_0 + \sum_{k=1}^{3N} \frac{h\nu_k k}{\exp\left(\frac{h\nu_k}{kT}\right) - 1} \quad (5.67)$$

bo'ldi. Bu yerda

$$E_0 = \sum_{k=1}^{3N} \frac{h\nu_k}{2}$$

nolinchı energiya. N juda katta son ekanligini hisobga olsak, ν , kT deb chastota intervalidagi kvant ossillatorlar uchun (5.67) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$E = E_0 + \int_0^{\nu_{\max}} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} g(\nu) d\nu. \quad (5.59)$$

Bu yerda $g(\nu)d\nu$ – chastota intervali $\nu, \nu + d\nu$ dagi kvant ossillatorlar soni yoki ko'ndalang va bo'ylanma tebranishlar soni.

Kvant ossillatorlar soni $3N = \sum_k g(\nu_k)$. Bu yerda summa

mumkin bo'lgan hamma chastotalar bo'yicha olingan. Agar $g(\nu)$ ma'lum bo'lsa, u holda bu tenglikdan ν_{\max} chastotani hisoblash mumkin. Vazifa $g(\nu_k)$ ni hisoblashdan iborat. $g(\nu_k)$ k -mod-daga tegishli ko'ndalang va bo'ylanma tebranishlar soni. Faraz qilaylik, $\nu_t, \nu_t + d\nu_t$ chastota intervalidagi ko'ndalang to'lqinlar soni

$$g(\nu_t)d\nu_t = 2 \cdot \frac{4\pi V}{c_t^3} \nu_t^2 d\nu_t,$$

$\nu_e, \nu_e + d\nu_e$ chiastota intervalidagi bo'ylama tebranishlar soni

$$g(\nu_l)d\nu_l = \frac{4\pi V}{c_l^3} \nu_l^2 d\nu_l$$

bo'lsa, u holda $\nu_t = \nu_l$ bo'lgan hol uchun $\nu, \nu + d\nu$ chastota intervalidagi turg'un va bo'ylanma tebranishlar soni, ya'ni kvant ossillatorlar soni

$$g(\nu)d\nu = \begin{cases} 4\pi V \left(\frac{2}{c_t^3} + \frac{1}{c_l^3} \right) \nu^2 d\nu, & \nu \leq \nu_{\max} \\ 0, & \nu \geq \nu_{\max} \end{cases}$$

bo'ladi. Bu yerda c_t va c_l – turg'un va bo'ylanma tebranishlarning tarqalish tezligi, ν_t va ν_l lar esa tebranish chastotalari. Natijada

$$3N = \int_0^{\nu_{\max}} 4\pi V \left(\frac{2}{c_t^3} + \frac{1}{c_l^3} \right) \nu^2 d\nu$$

ifodadan $\nu, \nu + d\nu$ chastota intervalidagi kvant holatlari soni

$$g(\nu) d\nu = 4\pi V \frac{c_t^3 + c_l^3}{c_t^3 \cdot c_l^3} \nu^2 d\nu$$

ni (5.68) ifodaga qo'yib, turg'un va bo'ylanma tebranishlarni tarqalish tezliklari teng bo'lgan holi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$E = E_0 + \frac{12\pi V}{c^3} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu.$$

$h\nu/kT = x$ yangi o'zgaruvchi kiritish natijasida:

$$E = E_0 + \frac{12\pi k^4 V}{c^3 h^3} T^4 \int_0^{h\nu_{\max}/kT} \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} \quad (5.69)$$

ifodani olamiz. Bu qattiq jism energiyasini ifodalaydi. Past temperaturalar sohasida, ya'ni $T \ll h\nu_{\max}/k$ da integralning yuqori chegarasini cheksiz bilan almashtirish mumkin. Natijada qattiq jismlarning energiyasi

$$E = E_0 + \alpha T^4 \quad (5.70)$$

ko'rinishini oladi. Bu yerda $\alpha = 4\pi^5 k^4 V / 5c^3 h^3$. Past temperaturalarda qattiq jism issiqlik sig'imi $C_V = \beta T^3$ ko'rinishni oladi. Agar $h\nu_{\max}/k = T_D$ — Debay temperaturasini kiritsak va yuqoridagi ifodalardan $c^3 = \frac{4\pi V}{3N} \nu_{\max}^3$ ekanligini hisobga olsak, u holda past temperaturalar sohasida qattiq jismlarning issiqlik sig'imi (goloid tuzlar yoki okislar uchun) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$C_V = \frac{12\pi^4 N k T^3}{5 T_D^3}. \quad (5.62)$$

(5.71) formula tajriba natijasi bilan miqdoriy tomonidan mos tushadi.

Qattiq jismlarning holatini aniqlash uchun katta termodinamik potensial $B = -2E/3$ dan foydalanib aniqlash mumkin. Chunki katta termodinamik potensialning o'zgarishidan foydalanib, termodinamik kattaliklarni hisoblash mumkin bo'ladi.

5.15. Kristall panjara holat funksiyasi

Qattiq jismning holatini aniqlovchi termdinamik kattaliklarni hisoblashni katta termodinamik potensialdan foydalanib aniqlash mumkinligini yuqorida eslatdik. Ammo termodinamik kattaliklarni kristall holat funksiyasini bilgan holda hisoblashni ko'raylik va kristall holat tenglamasini yozaylik. N ta atomdan tashkil topgan kristalda issiqlik harakat chastotasi 0 dan ν_{\max} oraliqda yotgan $3N$ bog'lanmagan kvant ossillatorlari to'plami bilan xarakterlanadi. Butun kristallning holat tenglamasini topish uchun $3N$ ta bog'lanmagan ossillatordan tashkil topgan sistema holat funksiyasini topish kerak. Ossillatorlar bog'lanmagan bo'l-gani uchun, bu holat funksiya hamma ossillatorlar holat funksiyalari ko'paytmasi ko'rinishida yoziladi:

$$Z = \prod_{n=1}^{3N} z_n. \quad (5.72)$$

Atomlar kvant ossillatorlari bilan almashtirilgani uchun n – atomning holat funksiyasi

$$z_n = \frac{\exp\left(-\frac{h\nu_k}{2kT}\right)}{1-\exp\left(-\frac{h\nu_k}{kT}\right)} \quad (5.73)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Termodinamik kattaliklarni hisoblash uchun, odatda, holat funksiyasi emas, balki uning logarifmi kerak bo'ladi. Shuning uchun (5.72) ifodani logarifmlaymiz va (5.73) ning o'rniga qo'yamiz:

$$\ln Z = \sum_{n=1}^{3N} \ln \frac{\exp\left(-\frac{h\nu_k}{2kT}\right)}{1-\exp\left(-\frac{h\nu_k}{kT}\right)}. \quad (5.74)$$

Bu yig'indini hisoblash uchun kristall panjaraning hamma mumkin bo'lgan tebranish chastotalarini bilish zarur. Bu yerda Debay yaqinlashishi bilan chegaralanamiz va yig'indini integral bilan almashtiramiz:

$$\ln Z = \int_0^{\nu_{\max}} \ln \frac{\exp\left(-\frac{h\nu}{2kT}\right)}{1 - \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} g(\nu) d\nu =$$

$$= \frac{9N}{\nu_{\max}^3} \int_0^{\nu_{\max}} \left\{ -\frac{h\nu}{2kT} - \ln \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \right\} \nu^2 d\nu. \quad (5.75)$$

Bu integralni hisoblash uchun $x = \frac{h\nu}{2kT}$ yangi o'zgaruvchi kiritamiz. Natijada $\ln Z$ uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\ln Z = -\frac{9NT_D}{8T} - 9N \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{T_D/T} \ln [1 - e^{-x}] x^2 dx. \quad (5.76)$$

Bu yerda T_D bizga ma'lum bo'lgan Debay temperaturasi yoki kristallning xarakteristik temperaturasidir. (5.76) ifodani umumiyl holda integrallab bo'lmaydi. Shuning uchun fizika nuqtayi nuzaridan muhim bo'lgan yuqori va past temperaturalarda tahlil qilamiz. Boshqa tomondan bu temperaturalarda (5.76) dagi integralni analitik ko'rinishgacha keltirish mumkin.

a) Yuqori temperaturalar sohasi $T \gg T_D$ da integral $x \ll 1$ sohani o'z ichiga oladi. Bu holda (5.76) ning o'rniga quyidagini olamiz:

$$\ln Z = -\frac{9NT_D}{8T} - 9N \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{T_D/T} x^2 \ln x dx.$$

Bu yerdagl integralni hisoblab, $\ln Z$ uchun quyidagi ifodani holdi qilamiz:

$$\ln Z = -\frac{9NT_D}{8T} + N - 3N \ln \frac{T_D}{T}. \quad (5.77)$$

b) Past temperaturalar sohasi $T \ll T_D$ da (5.76) dagi integralning yuqori chegarsini cheksiz bilan almashtirish mumkin. Integralni hisoblab, quyidagi natijani olamiz:

$$\ln Z = -\frac{9NT_D}{8T} + \frac{\pi^4 N}{5} \left(\frac{T_D}{T} \right)^3. \quad (5.78)$$

(5.77) va (5.78) ifodalar yordamida yuqori va past temperaturalarda kristall termodinamik potensiallarini topish va holat tenglamasini yozish mumkin.

Yuqori temperaturalarda (5.77) ifodaga asosan kristall panjara energiyasi

$$E = 3NkT + \frac{9}{8}NkT_D, \quad (5.79)$$

issiqlik sig'imi

$$C_V = 3Nk, \quad (5.80)$$

entropiyasi

$$S = 4Nk + 3Nk \ln \frac{T}{T_D}, \quad (5.81)$$

erkin energiyasi

$$F = \frac{9}{8}NkT_D + 3NkT \ln \frac{T}{T_D} - NkT \quad (5.82)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Past temperaturalarda kristall panjara energiyasi

$$E = \frac{9}{8}NkT_D + \frac{3\pi^4}{5} \frac{NkT^4}{T_D^3}, \quad (5.83)$$

entropiyasi

$$S = \frac{4\pi^4}{5} Nk \left(\frac{T}{T_D} \right)^3, \quad (5.84)$$

erkin energiyasi

$$F = -\frac{\pi^4 k T}{5} Nk \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 + \frac{9NkT_D}{8} \quad (5.85)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu holda issiqlik sig'imi uchun (5.71) ko'rinishdagi ifoda hosil bo'ladi. Oraliq temperatura sohasida energiya va issiqlik sig'imi murakkab formula bilan ifodalananadi va (5.76) formulani sonli integrallash natijasida olinadi.

Kristall entropiyasi $T \rightarrow 0$ K da temperaturaning uchinchi darajasiga proporsional holda nolga intiladi. Bu esa termodinamika uchinchi qonuni (Nernst teoremasi) talabiga mos keladi. Kristall issiqlik sig'imi ham $T \rightarrow 0$ K da kamayib boradi.

Yuqori temperaturada kristall holat tenglamasi:

$$p = -\frac{3NkT}{T_D} \frac{\partial T_D}{\partial V} \quad (5.86)$$

bo'ladi. Kristall holat tenglamasi (5.86) amaliy nuqtayi nazardan katta qiziqishga ega emas, chunki Debay temperaturasini hujmg'a bog'lanishini nazariy va sodda tajribalardan aniqlab bo'lmaydi.

Past temperaturalarda qattiq jismda birlik energiyaga to'g'ri kelgan kvant energetik holatlar soni $\Omega(\varepsilon)$ topamiz. Holatlar soni entropiya orqali quyidagicha yoziladi:

$$\Omega(\varepsilon) = \exp\left(\frac{S(\varepsilon)}{k}\right).$$

Bunga (5.84)dan entropiya uchun ifodani qo'ysak, birlik energiyaga to'g'ri kelgan holatlar soni quyidagiga teng bo'ladi:

$$\Omega(\varepsilon) = \exp\left[\frac{4\pi^4 Nk}{5} \left(\frac{T}{T_D}\right)^3\right]$$

Ifodaga teng bo'ladi.

5.16. Ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan ideal gazlar issiqlik sig'imining klassik nazariyasi

Ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan gazni ko'ramiz. Bunda molekulalar ilgarilamma harakatdan tashqari aylanma va tebranma harakatda bo'ladi. Molekula energiyasi shuning uchun uch qanday iborat bo'ladi:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{lig}} + \varepsilon_{\text{ayl}} + \varepsilon_{\text{tab}}. \quad (5.87)$$

Bu yerda elektron va yadro holatlariiga to'g'ri kelgan ichki energiyani (5.87) da hisobga olmadik. Bunday gaz holatini o'rnatishda quyidagi ikkita farazni qabul qilamiz:

1. Molekular sistemalarga umumiy statistik qonunlarni tatbiq qilish mumkin.

2. Ayrim olingen molekulalarning harakatini xarakterlashda klassik mexanika qonunlari o'rini.

Gaz issiqlik sig'imi energiya kabi uch qismdan iborat bo'ladi, ya'ni

$$C_V = C_{\text{ilg}} + C_{\text{ayl}} + C_{\text{teb}}.$$

Issiqlik sig'imi hisoblash uchun gaz ichki energiyasini hisoblash kerak. Biz eng avvalo ikki atomli molekulalardan tashkil topgan gazni olib qaraylik. Ikki atomli molekulani va massali cheksiz kichik sharlardan iborat bo'lgan miniatyur gantel ko'rinishda tasavvur etamiz. Bunda uchta erkinlik darajasiga ega bo'lgan ilgarilanma harakat: gantel o'qiga perpendikular o'qlar atrofida ikkita aylanma harakat va atomlarni bog'lovchi o'q bo'yicha tebranma harakat mavjud bo'ladi. Bunday ikki atomli molekula holati 12 o'lchovli fazalar fazosida aniqlanadi, ya'ni oltita koordinata va oltita impuls yordamida aniqlanadi. Bu koordinatalar va impulslar – molekulalarning ilgarilanma, aylanma va tebranma harakatlarini xarakterlovchi koordinata va impulslardir.

Molekulani kvaziberk sistema deb qarab, unga Gibbsning kichik kanonik taqsimotini qo'llaylik. U holda

$$dW = dW(\varepsilon_{\text{ilg}}) dW(\varepsilon_{\text{ayl}}) dW(\varepsilon_{\text{teb}}). \quad (5.88)$$

Bu yerda:

$$dW(\varepsilon_{\text{ilg}}) = \frac{1}{h^3 z_{\text{ilg}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\text{ilg}}}{kT}\right) d\Gamma(\varepsilon_{\text{ilg}}), \quad (5.89)$$

$$dW(\varepsilon_{\text{ayl}}) = \frac{1}{h^2 z_{\text{ayl}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\text{ayl}}}{kT}\right) d\Gamma(\varepsilon_{\text{ayl}}), \quad (5.90)$$

$$dW(\varepsilon_{\text{teb}}) = \frac{1}{h z_{\text{teb}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\text{teb}}}{kT}\right) d\Gamma(\varepsilon_{\text{teb}}). \quad (5.91)$$

(5.88) ifoda shuni anglatadiki, molekulaning ilgarilanma, aylanma va tebranma harakatlari o'zaro bog'lanmagan harakatlar ekan. (5.89)–(5.91) ehtimoliklarni hisoblashni qaraylik. Bularni

hisoblash uchun ilgarilanma, aylanma va tebranma harakat energiyalarini yozaylik:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{ilg}} &= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2\mu}, \\ \varepsilon_{\text{ayl}} &= \frac{I\omega_1^2}{2} + \frac{I\omega_2^2}{2}, \\ \varepsilon_{\text{teb}} &= \frac{p_q^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega_q^2}{2}.\end{aligned}\quad (5.92))$$

Bu yerda $I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2$ – molekulaning inersiya momenti; a – atomlar orasidagi masofa; ω_1 va ω_2 – molekulaning aylanma harakat burchak tezliklari; $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – keltirilgan massa; p_q – tebranma harakat impulsi. z_{ilg} , z_{ayl} , z_{teb} – ilgarilanma, aylanma va tebranma harakatlarning holat integrallari.

Ilgarilanma, aylanma va tebranma harakatni xarakterlovchi ehtimolliklardagi doimiylar normirovka shartidan topiladi. Nati-jada quyidagi ifodalarni olamiz:

$$dW(\varepsilon_{\text{ilg}}) = \left(\frac{1}{2\pi\mu kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2\mu kT} \right) dp_x dp_y dp_z, \quad (5.93)$$

$$dW(\varepsilon_{\text{ayl}}) = \frac{I}{2\pi kT} \exp\left(-\frac{I(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2kT} \right) d\omega_1 d\omega_2, \quad (5.94)$$

$$dW(\varepsilon_{\text{teb}}) = \frac{\omega}{2\pi kT} \exp\left(-\frac{p_q^2 + \mu^2 \omega^2 q^2}{2\mu} \right) dp_q dq. \quad (5.95)$$

Ikkil' atomli molekulaning o'rtacha energiyasi

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{\text{ilg}} + \bar{\varepsilon}_{\text{ayl}} + \bar{\varepsilon}_{\text{teb}}. \quad (5.96)$$

Bu yerda

$$\bar{\varepsilon}_{\text{ilg}} = \int \varepsilon_{\text{ilg}} dW(\varepsilon_{\text{ilg}}) = 3 \cdot \frac{1}{2} kT,$$

$$\bar{\varepsilon}_{ayl} = \int \varepsilon_{ayl} dW(\varepsilon_{ayl}) = 2 \cdot \frac{1}{2} kT,$$

$$\bar{\varepsilon}_{teb} = \int \varepsilon_{teb} dW(\varepsilon_{teb}) = 2 \cdot \frac{1}{2} kT.$$

Demak, (5.96) ifodani quyidagicha yozish mumkin bo'ladi:

$$\bar{\varepsilon} = 3 \cdot \frac{1}{2} kT + 2 \cdot \frac{1}{2} kT + 2 \cdot \frac{1}{2} kT = 7 \cdot \frac{1}{2} kT.$$

Bu shuni anglatadiki, agar ilgarilanma, aylanma va tebranma harakatdagi molekula energiyasi ifodasidagi kvadratik hadlar sonini «erkinlik darajasi» deb hisoblasak, u vaqtida har bir kvadratik hadga $kT/2$ energiya to'g'ri kelar ekan. Bu energiyaning erkinlik darajalari bo'yicha teng taqsimot qonuni deb yuritiladi. Bu qonun har qanday sondagi atomlardan tashkil topgan molekulalar uchun ham o'rinni bo'ladi. Gaz uch atomli molekulalardan tashkil topgan bo'lsin. Bu holda atomlarning fazoviy joylashishiga qarab molekula chiziqli yoki nochiziqli bog'langan bo'ladi. Birinchi holda molekula atomlari bir to'g'ri chiziqda joylashgan bo'lib, ilgarilanma harakat erkinlik darajasi 3 ta, molekula o'qiga perpendukular bo'lgan o'q atrofida aylanma harakat uchun 2 ta va tebranma harakat uchun 4 ta erkinlik darajasiga ega bo'ladi Ikkinchi holda molekula atomlari bir to'g'ri chiziqda yotmaydi. Nochiziqli bog'lanish uchun erkinlik darajasi teng va 3 tadan bo'ladi.

Agar n ta atomli molekuladan tashkil topgan gaz bo'lsa, u holda chiziqli bog'langan molekulaning o'rtacha energiyasi

$$\bar{\varepsilon}_r = 3 \cdot \frac{kT}{2} + 2 \cdot \frac{kT}{2} + (3n - 5)kT$$

va nochiziqli bog'langan molekula o'rtacha energiyasi

$$\bar{\varepsilon}_{n.r} = 3 \cdot \frac{kT}{2} + 3 \cdot \frac{kT}{2} + (3n - 6)kT$$

bo'ladi.

Agar gaz molekulasi energiyasidagi kvadratik hadlar sonini r bilan belgilasak, u holda molekula o'rtacha energiyasi $\bar{\varepsilon} = r \frac{kT}{2}$ ga teng bo'ladi. Agar gaz N ta ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan bo'lsa, u holda energiya $E = r \frac{kT}{2} N$ bo'ladi. Issiqlik

sig'imi esa $C_v = r \frac{Nk}{2} - r \frac{R}{2}$ bo'ladi. Bu esa ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan gazlar issiqlik sig'imi o'zgarmas bo'lishini ko'rsatadi. Tajriba natijalari esa issiqlik sig'imi faqat yuqori temperaturalarda o'zgarmas bo'lib, past teperaturalarda temperaturaga bog'liq ekanligini ko'rsatadi. Temperatura pasayishi bilan issiqlik sig'imi kamayib boradi, avvalo tebranma harakatga va keyin aylanma harakatga to'g'ri keluvchi issiqlik sig'imi nolga intilib borar ekan. Bu esa erkinlik darajasi bo'yicha energiyani teng taqsimot qonuni past temperaturalarda o'rinsiz ekanligini ko'rsatadi. Boshqacha qilib aytganda, ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan gazlar uchun issiqlik sig'imi klassik nazariya tajriba dalillariga javob bera olmasligini, ya'ni tushuntira olmasligini ko'rsatadi.

5.17. Erkinlik darajalari bo'yicha kinetik energyaning teng taqsimot teoremasi. Virial teorema

Muvozanat holat klassik statistik nazariyasidagi bir qator masalalar Gibbs statistikasining umumiy masalalari – kinetik energiyani erkinlik darajalari bo'yicha teng taqsimot va virial teorema yordamida juda sodda yechiladi. Energiyani erkinlik darajalari bo'yicha teng taqsimot qonunini oldingi mavzuda labotladik, har bir erkinlik darajasiga $kT/2$ energiya to'g'ri kelgihini ko'rdik.

Bu qonuniyat klassik statistik mexanikaning umumiy teoremasidan xususiy hol sifatida kelib chiqishini ko'rsatamiz.

Kanonik anumabl (o'zaro bog'lanmagan sistemachalar) bo'yicha

$\Gamma_k \frac{\partial H}{\partial \Gamma_k}$ hattalilning fazoviy o'rtachasini ko'rib chiqamiz, ya'ni

$$\begin{aligned} \Gamma_k \frac{\partial H}{\partial \Gamma_k} &= \int \Gamma_i \frac{\partial H}{\partial \Gamma_k} dW = \int \Gamma_i \frac{\partial H}{\partial \Gamma_k} \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) d\Gamma = \\ &= -\theta \int \Gamma_i \frac{\partial}{\partial \Gamma_k} \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Du yorda $\Gamma = \{q_i, p_i\}$, ($i = 1, 3N$). Eng avval bitta Γ_k bo'yicha integralni ko'raysilish:

$$\int \Gamma_i \frac{\partial H}{\partial \Gamma_k} \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) d\Gamma_k = \\ = \Gamma_i \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \frac{\partial \Gamma_k}{\partial \Gamma_i} \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) d\Gamma_k. \quad (5.98)$$

Bu ifodadagi birinchi had nolga teng, chunki $H(\Gamma_k \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \infty$.

Bundan tashqari $\frac{\partial \Gamma_k}{\partial \Gamma_i} = \delta_{ik}$ (δ_{ik} – Kroneker belgisi) ekanligini hisobga olsak, (5.98) quyidagicha yoziladi:

$$\int \Gamma_i \frac{\partial H}{\partial \Gamma_k} \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) d\Gamma_k = \int \exp\left(\frac{F-H}{\theta}\right) \delta_{ik} d\Gamma_k. \quad (5.99)$$

Bu ifodani (5.97) ga qo'yish natijasida quyidagini olamiz:

$$\overline{\Gamma_i \frac{\partial H}{\partial \Gamma_k}} = \theta \delta_{ik}. \quad (5.100)$$

Bu umumiyl ifodadan impuls va koordinata uchun ikkita xususiy natija olinadi. Birinchisi

$$\overline{p_k \frac{\partial H}{\partial p_k}} = \theta \quad (5.101)$$

teng taqsimot haqidagi teorema deyiladi. Ikkinchisi esa

$$\overline{q_k \frac{\partial H}{\partial q_k}} = \theta \quad (5.102)$$

virial haqidagi teorema deyiladi. (5.101) tenglamaning chap tomoni haqiqatan ham k -nomerli bitta erkinlik darajasiga to'g'ri kelgan energiya. Mexanikadan ma'lumki, agar kinetik energiya impulsning kvadratik funksiyasi bo'lsa,

$$2K = \sum p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (5.103)$$

tenglik o'rinali bo'ladi. Bu ifodaga mos holda

$$\overline{K_k} = \frac{1}{2} \overline{p_k \frac{\partial H}{\partial p_k}} = \frac{\theta}{2} = \frac{kT}{2}. \quad (5.104)$$

Demak, har bir erkinlik darajasining o'rtacha kinetik energiyasi $kT/2$ ga teng bo'ladi. (5.102) munosabatdan

$$\sum q_k \frac{\partial H}{\partial q_k} = - \sum q_k f_k, \quad (5.105)$$

bu yerda f_k – kuch. (5.104) Klauzius tomonidan virial deb atalgan. Demak, (5.102) ga ko'ra bitta erkinlik darajasining o'rtacha viriali

$$-\frac{1}{2} \overline{q_k f_k} = \frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum q_k f_k = \frac{\theta}{2} = \frac{kT}{2}. \quad (5.106)$$

Bu teoremlarni sodda sistemalarga tatbig'ini ko'rib chiqamiz.

1. *Garmonik ossillator.* Garmonik ossillatorning Gamilton funksiyasi quyidagicha:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa q^2}{2}.$$

Demak, uning viriali quyidagiga teng:

$$\frac{q}{2} \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\kappa q^2}{2} = U.$$

Shunday qilib (5.101) va (5.102) ga asosan

$$\bar{K} = \frac{\theta}{2}, \quad \bar{U} = \frac{\theta}{2}, \quad \bar{H} = \bar{E} = \bar{K} + \bar{U} = \theta = kT,$$

ya'ni garmonik ossillatorning o'rtacha energiyasi teng ekan.

2. *Angarmonik ossillator.* Gamilton funksiyasi quyidagi ko'riňshorda bo'lgan angarmonik ossillatorni qaraylik:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa q^2}{2} - \beta q^4.$$

Bu aktemde uchun virial quyidagiqa teng bo'ladi:

$$\frac{q}{2} \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\kappa q^2}{2} - 2\beta q^4 = \frac{\theta}{2}.$$

Bundan

$$\bar{U} = \frac{\theta}{2} + 2\beta \overline{q^4}, \quad \bar{E} = \theta + 2\beta \overline{q^4}.$$

Demak, berilgan hol uchun virial haqida teorema angarmonik ossillatorning o'rtacha energiyasini hisoblashga imkon bermaydi. Ammo angarmoniklik koeffitsiyenti $\beta > 0$ bo'lganda o'rtacha energiyaning ortishini ko'rish mumkin. Angarmonik qo'shim-chalarning virialini hisoblash mumkin emasligining asosiy sababi virial haqidagi teorema faqat chiziqli sistemalar uchun, ya'ni sistemaning Gamilton funksiyasi koordinata va impulsning kvadratik funksiyasi bo'lishi kerak.

3. *Siyrak gazlarning issiqlik sig'imi.* Bir atom siyrak gaz atomlar orasidagi o'zaro ta'sir potensial energiyasi juda kichik bo'lganligi uchun uning energiyasi alohida olingan atomlarning kinetik energiyalarining yig'indisidan tashkil topgan bo'ladi, ya'ni (5.101) ga asosan

$$\bar{E} = 3N \frac{\theta}{2} = \frac{3}{2} RT,$$

bundan

$$C_v = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{3}{2} R.$$

Bu ifodalarda bir atomli gaz molekulalari uchta erkinlik darajasiga ega ekanligi namoyon bo'ldi.

Agar gaz ikki atomli molekulalardan tashkil topgan bo'lsa, erkinlik darajasi beshta bo'ladi. U holda

$$\bar{E} = \frac{5}{2} RT,$$

bundan

$$C_v = \frac{5}{2} R.$$

Bir atomli gazlar uchun olingan ifodalar tajriba natijalari bilan juda yaxshi mos tushadi. Ammo ikki atomli molekulalalar uchun olingan ifodalar tajriba natijalari bilan temperaturaning cheklangan sohasida mos tushadi. Gazni tashkil qilgan molekulalalar qancha murakkab bo'lsa, farq shunchalik sezilarli bo'ladi. Tajriba bilan mos keladigan ifodalar faqat kvant statistik fizika yordamida olinadi.

5.18. Ikki kvant holatli sistema issiqlik sig‘imi

Oldingi mavzuda eslatilgan tajriba natijalarini tushuntirish uchun ikkita kvant holatli sistema hususiyatini qarab chiqaylik. Amalda ikki kvant holatli sistemalar bo‘lmaydi, lekin shunday sistemalar mavjudki, ularda kvant holatlardan ikkitasi qolganlaridan ajralib turadi. Masalan bunday holatli sistemalardan lazer nurlarini generatsiya qiluvchi ishchi muhit sifatida foydalaniladi. Demak, quyida olinadigan natijalarni shunday sistemalarga tatbiq qilish mumkin. Bundan tashqari, bunday sistemalarni o‘rganish metodik jihatdan ham muhim. Ma’lumki, sistemaning bitta atomi uchun holat funksiyasi

$$z = \sum_{i=1,2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) g(\varepsilon_i) \quad (5.107)$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu yerda $g(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$ energiyali sathning statistik vazni. Bu holda (5.107) dagi yig‘indini ochib yozamiz:

$$z = g_1 \exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{kT}\right) \left[1 + \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right) \right].$$

N ta o‘zaro bog‘lanmagan bir xil zarralardan tashkil topgan sistema holat funksiyasi (5.4) va (5.107) ga asosan

$$Z = \frac{1}{N!} \left[g_1 \exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{kT}\right) \right]^N \left[1 + \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right) \right]^N \quad (5.108)$$

ko‘rinishini oladi. Bu yerda $g_1 = g(\varepsilon_1)$, $g_2 = g(\varepsilon_2)$ va $\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = kT$ deb qabul qilingan. T_c – xarakteristik temperatura deb yuritiladi.

Holat funksiyasining oshikora ko‘rinishidan foydalanib, sistema ichki energiyasini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\langle E \rangle = N\varepsilon_1 + Nk \left(\frac{g_2}{g_1} \right) T_c \frac{\exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)}{1 + \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)}. \quad (5.109)$$

Bu ifodani past temperatura ($T \ll T_c$) va yuqori temperatura ($T \gg T_c$)orda tahlil qillamiz:

1) $T \ll T_c$ da

$$E \approx N\varepsilon_1, \quad (5.110)$$

energiya temperaturaga bog'liq emas, demak, issiqlik sig'imi $C_v = 0$. Bunday natija termodinamikaning uchinchi qonuniga mos keladi.

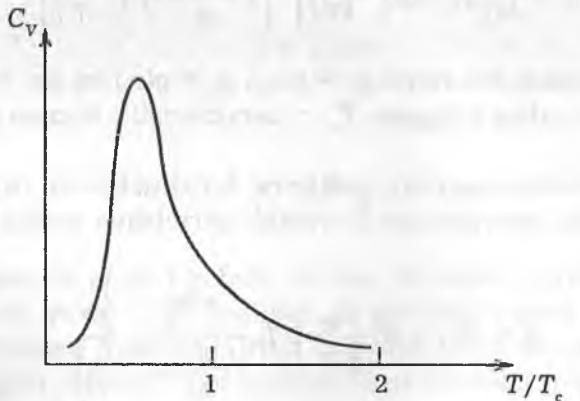
2) $T \gg T_c$ da esa

$$E \approx N\varepsilon_1 + \frac{NkT_c}{\left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right)^2} \left(\frac{g_2}{g_1} \right) \left(1 + \frac{g_2}{g_1} - \frac{g_2}{g_1} \frac{T_c}{T} \right) \quad (5.111)$$

va issiqlik sig'imi

$$C_v = Nk \left(\frac{g_2}{g_1} \right) \left(\frac{T_c}{T} \right)^2. \quad (5.112)$$

Oxirgi ifoda chekli energetik sathli sistemada $T \rightarrow \infty$ da issiqlik sig'imi nolga intilishini ko'rsatadi. Chunki ikki energetik holat energiyalarining farqi sistemaning issiqlik energiyasidan juda kichik bo'lganda sistema deyarli klassik bo'lib qoladi va zarraning ichki energiyasi sistemaning to'liq ichki energiyasiga deyarli hissa qo'shmaydi. Demak, yuqori temperaturalarda



5.6- rasm. Ikki kvant holatlari sistema issiqlik sig'imingin temperaturaga bog'lanishi.

energiya o'zgarmas ekan. Shuning uchun $C_v = 0$ bo'ladi. Bu hol energetik sathlari chekli sohada joylashgan sistemalar uchun o'rini. 5.6- rasmida shunday sistemalarning issiqlik sig'imining temperaturaga tipik bog'lanishi keltirilgan. Agar energetik sathlar tarqoq joylashgan bo'lsa, biz ko'rgan model to'g'ri natija bermaydi. Chunki, yuqori temperaturalarda biz ko'rayotgan ikki holat issiqlik sig'imiga hissa qo'shmasada, ulardan uzoqda joylashgan boshqa energetik holat rol o'ynay boshlaydi.

5.19. Ikkita atomli kvant ideal gaz

Oldingi mavzuda issiqlik sig'imining temperaturaga bog'lanishini oddiy hol uchun nazariy tomonidan ko'rsatdik. Ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan kvant ideal gaz issiqlik sig'imini uniqlashda avval ikkita atomli kvant ideal gaz issiqlik sig'imini hisoblashni ko'raylik. Buning uchun gaz ichki energiyasini hisoblaylik. Gaz ichki energiyasini hisoblash uchun holat funksiyasi

$$z = \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) g(\varepsilon_i) \quad (5.113)$$

ni hisoblash kerak. Bu yerda ε_i alohida olingen molekulaning energiyasi bo'lib, uch qismdan: bir butun holdagi ilgarilanma, oylanma va molekulani tashkil qilgan atomlarning nisbiy teb-rumma harakat energiyalaridan tashkil topgandir:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{\text{ilg}} + \varepsilon_{\text{ayl}} + \varepsilon_{\text{teb}}.$$

Energiyaning uch qismdan iborat ekanligini hisobga olsak, (5.113) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$z = z_{\text{ilg}} \cdot z_{\text{ayl}} \cdot z_{\text{teb}}. \quad (5.114)$$

Agar gaz N ta ikki atomli molekulalardan tashkil topgan bo'lma, u holda gaz holat funksiyasi

$$Z = \frac{1}{N!} (z_{\text{ilg}})^N (z_{\text{ayl}})^N (z_{\text{teb}})^N. \quad (5.115)$$

Gaz molekulalarining harakat turlariga mos ravishda uning ichki energiyasi va issiqlik sig'imi ham uch qismdan iborat bo'ladi, ya'ni

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = E_{\text{ilg}} + E_{\text{ayl}} + E_{\text{teb}}, \quad (5.116)$$

$$C_V = C_V^{\text{ilg}} + C_V^{\text{ayl}} + C_V^{\text{teb}}. \quad (5.117)$$

Bu ifodalarni yozishda elektron va yadro harakatlari energiyasi va u bilan bog'liq bo'lgan issiqlik sig'imi hisobga olinmadi. Asosiy masala (5.115) ifodaga kirgan holat funksiyalarini hisoblashdan iborat. Molekulaning ilgarilanma harakat holat funksiyasi hisoblangan. Shunga ko'ra E_{teb} ham ma'lum.

Tebranma harakat holat funksiyasi z_{teb} ni hisoblash uchun ikki atomli molekulani massasi keltirilgan massaga teng bo'lgan chiziqli kvant ossillyator deb qarash mumkin. Garmonik ossillator energiyasi

$$\varepsilon_n = h\nu(n + 1/2) \quad (5.118)$$

diskret qiymatlar qabul qiladi. Garmonik kvant ossillator energiya sathlari aynimagan bo'ladi va tebranma harakatdagi qo'shni energiya sathlari orasidagi farq har doim $\Delta\varepsilon_{\text{teb}} = \varepsilon_n^{\text{teb}} - \varepsilon_{n-1}^{\text{teb}} = h\nu$ bo'ladi va kvant soni n ga bog'liq bo'lmaydi.

Aylanma harakatdagi molekula holat funksiyasi z_{ayl} ni hisoblash uchun, ikki atomli molekulani $I = \mu a^2$ inersiya momentli og'irlik markazi atrofida aylanuvchi rotator deb qarash mumkin. Bunday rotator energiyasi

$$\varepsilon_{\text{ayl}} = Bh(j + 1) \quad (5.119)$$

bo'ladi. Bu yerda $B = h/8\pi^2 I$. $j = 0, 1, 2, \dots$ orbital kvant son, μ – keltirilgan massa, a – atomlar orasidagi masofa. Rotator energiya sathlari $(2j + 1)$ karrali aynigan holatda bo'ladi va qo'shni energiya sathlari orasidagi farq

$$\Delta\varepsilon_{\text{ayl}} = Bh(j + 1)$$

bo'ladi. Bu yerda shu narsani hisobga olish kerakki, tebranma harakatdagi qo'shni energiya sathlari orasidagi farq har doim aylanma harakatdagi qo'shni energiya sathlari orasidagi farq dan juda katta bo'ladi, ya'ni $\Delta\varepsilon_{\text{teb}} \gg \Delta\varepsilon_{\text{ayl}}$ bo'ladi.

Shunday qilib, (5.117) va (5.119) ifodalar yordamida

$$z_{\text{teb}} = \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\text{teb}}}{kT}\right) g(\varepsilon_{\text{teb}}) \quad \text{va} \quad z_{\text{ayl}} = \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\text{ayl}}}{kT}\right) g(\varepsilon_{\text{ayl}})$$

holat funksiyalarini va natijada ikki atomli N ta molekuladan tashkil topgan gaz ichki energiyasini, issiqlik sig‘imini va termodinamik kattaliklarni hisoblash mumkin bo‘ladi. Har bir turdag'i harakat bilan bog‘liq bo‘lgan masalani alohida ko‘rib chiqamiz.

5.20. Tebranma harakatning issiqlik sig‘imiga qo‘shgan hissasi

Ikki atomli molekulani $E_n = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right)$ energiyali garmonik levant ossillator deb qaradik. Shu sababli energiya sathlari aynimagan bo‘ladi, demak, statistik vazn yoki kvant holatlar nomi $g(\varepsilon_{\text{teb}}) = 1$ bo‘ladi. U holda holat funksiyasiga kiruvchi yig‘indi kamayuvchi geometrik progressiya bo‘ldi:

$$\begin{aligned} Z_{\text{teb}} &= \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\text{teb}}}{kT}\right) g(\varepsilon_{\text{teb}}) = \exp\left(-\frac{h\nu}{2kT}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{h\nu n}{kT}\right) = \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{h\nu}{2kT}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)}, \end{aligned}$$

Agar $\frac{h\nu}{k} = T_e$ – xarakteristik temperaturu ekanligini hisobga olib, tebranmachi molekula holat funksiyasi

$$z_{\text{teb}} = \frac{\exp\left(-\frac{T_e}{2T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{T_e}{T}\right)} \quad (5.120)$$

ya o‘rtacha energiyasi

$$\bar{\varepsilon}_{\text{teb}} = kT^2 \frac{\partial \ln z_{\text{teb}}}{\partial T} = \frac{kT_e}{2} \frac{T_e}{2T} = \frac{h\nu}{2} \frac{h\nu}{2T} \quad (5.121)$$

bo'ladi. Agar gaz N ta ikki atomli molekulalardan tashkil topgan bo'lsa, u holda gaz ichki energiyasi

$$E_{\text{teb}} = N\bar{\varepsilon}_{\text{teb}} = \frac{NkT_c}{2} \frac{T_c}{2T} = \frac{Nh\nu}{2} \frac{h\nu}{2T}. \quad (5.122)$$

Tebranma harakatning gaz issiqlik sig'imiga qo'shgan hissasi esa quyidagi ifoda bilan ifodalanadi:

$$C_V^{\text{teb}} = \frac{Nk}{4} \left(\frac{T_c}{T} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{T_c}{2T}} = \frac{Nk}{4} \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{h\nu}{2kT}}. \quad (5.123)$$

(5.122) va (5.123) ifodalardan shu narsa ko'rindiki, tebranma harakatga to'g'ri kelgan energiya va issiqlik sig'imi temperatura va xarakteristik temperatura T_c ning murrakab funksiyasi ekan. Ikkita chegaraviy hol uchun qaraylik:

1. Yuqori temperatura yoki kichik chastotalarda $E_{\text{teb}} \simeq NkT$ va $C_V^{\text{teb}} \simeq Nk$ bo'ladi. Bu klassik qonun asosida olingan natija bilan mos tushadi.

2. Past temperatura yoki katta chastotalarda:

$$E_{\text{teb}} \simeq \frac{NkT_c}{2} + NkT_c \cdot \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right), \quad (5.124)$$

$$C_V^{\text{teb}} \simeq Nk \left(\frac{T_c}{T} \right)^2 \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right) \quad (5.125)$$

ifodalarni olamiz. Bu ifodalardan shu narsa ko'rindiki, past temperaturalarda energiya va issiqlik sig'imi uchun olingan (5.124) va (5.125) ifodalar klassik qonun asosida olingan ifodalardan tamoman farq qiladi. Temperatura $T \rightarrow 0$ K intilishi bilan tebranish energiyasi o'zgarmas kattalik $E_0 = NkT_c/2 = Nh\nu/2$ ga intiladi. Bu energiya nolinchi energiya deb yuritildi. Nolinchi energiyaning mavjudligi kvant harakat xarakterli xususiyatga ega ekanligini ko'rsatadi. Tebranma harakat issiqlik sig'imi esa

$T \rightarrow 0$ K da $\left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \exp(-T_c/T)$ ga proporsional holda nolga intiladi. Bu esa tajriba natijasiga mos tushadi, ya'ni temperatura pasayishi bilan tebranma harakatga to'g'ri keluvchi issiqlik sig'imi kamayib boradi va $T \rightarrow 0$ K da gaz issiqlik sig'imi qo'shgan hissasi yo'qoladi.

Tebranma harakatga to'g'ri kelgan boshqa termodinamik kattaliklar (holat funksiya (5.120) ni bilgan holda) berilgan ma'lum formulalar yordamida hisoblaniladi.

5.21. Aylanma harakatning gaz issiqlik sig'imiga qo'shgan hissasi

Ikkita erkinlik darajasiga ega bo'lgan ikki atomli molekula aylanma harakat energiyasi (5.119) bilan ifodalanadi. Agar aylanma harakat xarakteristik temperaturasi $T_c = \frac{h^2}{8\pi^2 I k}$ ni kiritsak, u holda aylanma harakatning holat funksiyasi

$$z_{ayl} = \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_{ayl}}{kT}\right) g(\varepsilon_{ayl})$$

quyidagi ko'rinishni oladi:

$$z_{ayl} = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \exp\left(-\frac{T_c j(j+1)}{T}\right). \quad (5.126)$$

(5.117) qatorni ikkita chegaraviy hol uchun qarab chiqaylik:

1. Yuqori temperaturada ($T \gg T_c$) aylanma harakatdagi energiya sathlari orasidagi masofa o'rtacha energiyaga nisbatan kichik bo'ladi, ya'ni

$$\frac{\Delta\varepsilon_{ayl}}{kT} \sim \frac{T_c}{T} \ll 1.$$

Bu holda aylanma harakatdagi energiyani uzlusiz o'zgaruvchi kattalik deb hisoblab, uning kvantlanishini hisobga olmasak ham bo'ladi. (5.126) ifodani hisoblash uchun Eylarning yig'indi formulasidan foydalanamiz:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \int_0^{\infty} f(j) dj + \frac{1}{2}[f(0) + f(\infty)] + \frac{1}{12}[f'(\infty) - f'(0)] + \dots \quad (5.127)$$

Miz quraydigan hol uchun

$$f(j) = (2j+1) \exp\left(-\frac{T_c j(j+1)}{T}\right).$$

Agar biz birinchi uchta had bilan chegaralansak, hisoblashlar aylanma harakatlar funksiyasi quyidagi ko'rinishda ekanligini ko'rsatadi:

$$z_{ayl} \simeq \frac{T}{T_c} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{T_c}{T} + \frac{1}{15} \left(\frac{T_c}{T} \right)^2 \right]. \quad (5.128)$$

Juda katta temperaturada

$$z_{ayl} \simeq \frac{T}{T_c} = \frac{8\pi^2 k T}{h^2},$$

bu esa klassik ifoda bilan mos tushadi. N ta ikki atomli molekuladan tashkil topgan gaz aylanma harakat ichki energiyasi:

$$E_{ayl} = N\bar{\varepsilon}_{ayl} = NkT^2 \frac{\partial \ln z_{ayl}}{\partial T} \simeq NkT \left[1 - \frac{1}{3} \frac{T_c}{T} - \frac{2}{15} \left(\frac{T_c}{T} \right)^2 \right]$$

Issiqlik sig'imi esa $C_V^{ayl} \simeq Nk$ bo'ladi.

2. Past temperaturada ($T \ll T_c$) holat funksiyasi (5.126) yig'indi ostidagi ifoda oshishi bilan tez kamayib boradi. Shuning uchun birinchi ikki had bilan chegaralanish kifoya:

$$z_{ayl} \simeq 1 + 3 \exp \left(-\frac{2T_c}{T} \right).$$

Gaz ichki energiyasi:

$$E_{ayl} = NkT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \left[(1 + 3 \exp \left(-\frac{2T_c}{T} \right)) \right] \simeq 6NkT_c \exp \left(-\frac{2T_c}{T} \right)$$

Issiqlik sig'imi:

$$C_V^{ayl} \simeq 12Nk \left(\frac{T_c}{T} \right)^2 \exp \left(-\frac{2T_c}{T} \right).$$

Nernst teoremasi bilan mos holda $T \rightarrow 0$ da C_V^{ayl} va E_{ayl} nolga intilar ekan.

Aylanma harakat holatini aniqlovchi termodinamik kattaliklar olingan formulalar asosida yuqori va past temperaturalarda hisoblanadi.

Yuqori va past temperatura tushunchasi tebranma va aylanma harakatlar uchun turlichadir. Masalan uy temperaturasi aylanma harakat uchun yuqori temperatura bo'lsa, tebranma harakat uchun past temperaturadir. Bu narsani quyidagi jadvaldan ko'rish mumkin:

Molekula	Tebranma harakat uchun xarakteristik temperatura, K da	Aylanma harakat uchun xarakteristik temperatura, K da
H ₂	6000	85,4
N ₂	3340	2,85
O ₂	2230	2,07
HCl	4140	15,1
HJ	3200	9,0

Yuqorida olingan ifodalardan shu narsani ko'rish mumkinki, ^{ayl} va demak, boshqa termodinamik kattaliklarni hisoblash uchun molekulaning inersiya momentini topish kifoya ekan. Bu esa aksariyat molekulalar uchun spektroskopik yo'l bilan aniqlangan.

Vodorod va deytiriy atomlari holi uchun aylanma harakatga yadro spinini ta'sirini hisobga olish kerak. Chunki yadro spini bir xil atomlardan tashkil topgan molekulaning aylanma harakat holat xarakteriga katta ta'sir o'tkazar ekan. Xususan, yadro spini qiymatiga qarab molekulasi ikkita tipdagi aylanma holatlarda bo'lishi mumkin.

Ikkala yadro spinlarining yig'indisi nolga teng bo'lgan holga javob beruvchi birinchi tip holatlarda aylanma kvant soni juft qiymatlar ($j = 0, 2, 4, 6, \dots$) qabul qiladi. Ikkala yadro spinlari qiymatlari yig'indisi noldan farqli bo'lgan holga javob beruvchi ikkinchi tip holatlarda aylanma kvant soni toq qiymatlar ($j = 1, 3, 5, 7, \dots$) qabul qiladi. Birinchi tip molekulalar paravodorod va ikkinchi tip molekulalar ortovodorod deb yuritiladi. Oddiy sharoitlarda ular orasida o'tish mavjud bo'lmaydi.

Uch va undan ko'p zarralardan tashkil topgan sistema masalasi hatto klassik fizikada ham aniq yechimga ega emas. Bunday masala faqat xususiy hollardagina yechimga ega. Shu sababli ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan gaz uchun holat funksiyasini va termodinamik kattaliklarni topish murakkab masala hisoblanadi. Aniq berilgan molekuladan tashkil topgan gaz uchun masalani turli chegaraviy hollarda o'rganish yoki kompyuterda modellashtirish mumkin.

5.22. Ideal sistemalarning magnit va elektr xususiyatlari

O'zgarmas magnit momenti M_0 bo'lgan N ta zarralardan tashkil topgan gazning xossalari ko'rib chiqamiz. Gaz molekulalarining magnit momentlari tashqi magnit maydon yo'q bo'linda tartib orientatsiyalangan bo'ladi. Shunday gazni kuchlanganligi H bo'lgan bir jinsli magnit maydonga joylashtiramiz.

Magnit maydoni ta'sir etmasdan avval, gaz zarralari bir xil o'rtacha issiqlik harakat energiyasiga ega bo'ladi. Tashqi maydon ta'siridan so'ng turli xil magnit orientatsiyaga ega bo'lgan zarralar har xil energiyaga ega bo'ladi. Bu holda energiya taqsimoti o'zgaradi, ya'ni notekis bo'lib qoladi. Zarralar magnit maydonidagi potensial energiyasi

$$U(\theta) = (M_0, H) = M_0 H \cos \theta$$

tenglik bilan aniqlanadi, bu yerda θ – magnit momenti va magnit maydon yo'nalishlari orasidagi burchak.

Potensial energiya faqat M_0 ning yo'nalishiga bog'liq bo'lganligi uchun, fazoda zarralar taqsimoti bir jinsliliği o'zgarmaydi.

Paramagnetizm va dielektriklarning qutblanishi klassik nazarasi fransuz olimi Lanjeven tomonidan berilgan.

Faraz qilaylik, magnit momenti yo'nalishi fazoda uzluksiz o'zgarsin. Bu holda magnit momenti M_0 ning istalgan orientatsiyasi mavjud bo'ladi va uning taqsimot funksiyasi Bolsman taqsimoti bo'yicha beriladi:

$$\frac{dN(\theta)}{N} = \frac{\exp\left(-\frac{U(\theta)}{kT}\right) d\Omega_0}{\int \exp\left(-\frac{U(\theta)}{kT}\right) d\Omega_0} = \frac{\exp[\beta M_0 H \cos \theta] \sin \theta d\theta d\varphi}{\int \exp[\beta M_0 H \cos \theta] \sin \theta d\theta d\varphi}.$$

Bu yerda $d\Omega_0 = \sin\theta d\theta d\varphi$; $\beta = 1/kT$; $\theta = 0$ dan π gacha o'zgaradi.

Maydon yo'naliishi bo'yicha magnit momenti proeksiyasining o'rtacha qiymati

$$\overline{M_z} = \overline{M_0 \cos \theta} = \int M_0 \cos \theta \frac{dN(\theta)}{N} = M_0 \frac{\int_0^\pi \exp[\beta M_0 H \cos \theta] \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \exp[\beta M_0 H \cos \theta] \sin \theta d\theta},$$

$$\overline{M_0 \cos \theta} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \frac{(\beta M_0 H)}{\beta} = M_0 \left[(\beta M_0 H) - \frac{1}{\beta M_0 H} \right].$$

N ta zarralardan tashkil topgan ideal gaz magnit momenti:

$$\mathcal{M} = \overline{M_0 \cos \theta} \cdot N = ML \left(\frac{M_0 H}{kT} \right). \quad (5.123)$$

Bu yerda $M = M_0 N$ magnitlanishning maksimal qiymati bo'lib, $|\mathbf{H}| \rightarrow \infty$ da yoki $T \rightarrow 0$ K da erishadi.

$$L \left(\frac{M_0 H}{kT} \right) = (\beta M_0 H) - \frac{1}{\beta M_0 H} \quad - \text{ Lanjeven funksiyasi.}$$

Shunday qilib, (5.129) ifodadan shu narsa ko'rindik:

1) kuchli maydon va past temperaturada Lanjeven funksiyasi birga intiladi va to'yinish yuzaga keladi. Natijada magnitlanish maksimal qiymatga ega bo'ladi;

2) kuchsiz maydon va yuqori temperaturada magnitlanish

$$\mathcal{M} = M L \left(\frac{M_0 H}{kT} \right) = MH \cdot \frac{1}{3} \frac{M_0 H}{kT} = \frac{1}{3} \frac{M_0^2 H N}{kT} < M_0 N$$

bo'ladi.

Ammo statistik nazariya atom va molekulalarni magnit momentiga ega bo'lish farazini isbotlay olmaydi. Bu masala faqat kvant mexanikada hal qilindi. Shuning uchun paramagnetizm nazariyasi kvant nazariyasi bo'lishi kerak. Chunki magnit momentining maydon yo'naliishi bo'yicha proeksiyasini hisoblashda uning kvantlanishi hisobga olinishi kerak. Kvant mexanikasida shu narsa isbotlanadiki, magnit maydon yo'naliishiда elektron magnit momentining proeksiyasini faqat diskret qiymatlar qabul qilishi mumkin. Masalan, j -spinli erkin zarra uchun magnit momenti quyidagi teng bo'ladi:

$$-M_0, -M_0 \frac{j-1}{j}, \dots, M_0 \frac{j-1}{j}, M_0.$$

Bu yerda M_0 – magnit momenti proeksiyasining maksimal qiymati bo‘lib,

$$M_0 = \frac{e\hbar}{2\pi mc} j = 2\mu_B j$$

bo‘ladi, $\mu_B = \frac{e\hbar}{4\pi mc}$ – Bor magniton, j – spin kvant soni bo‘lib,

butun va yarim butun bo‘lishi mumkin. Endi $\overline{M}_z = \overline{M_0 \cos \theta}$ ni hisoblaylik:

$$\begin{aligned} \overline{M}_z &= \overline{M_0 \cos \theta} = \sum_{s=-j}^j M_0 \cos \theta W_B = \frac{M_0 \sum_{s=-j}^j \frac{s}{j} \exp\left(\beta M_0 H \frac{s}{j}\right)}{\sum_{s=-j}^j \exp\left(\beta \mu_B H \frac{s}{j}\right)} = \\ &= \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\ln \sum_{s=-j}^j \exp\left(\beta M_0 H \frac{s}{j}\right) \right]. \end{aligned}$$

Bu ifodadagi geometrik progressiya yig‘indisi

$$\sum_{s=-j}^j \exp\left(\beta M_0 H \frac{s}{j}\right) = \frac{\operatorname{sh}\left[\beta M_0 H \left(1 + \frac{1}{2j}\right)\right]}{\operatorname{sh}\left(\beta M_0 H \frac{1}{2j}\right)}$$

bo‘ladi. U holda N ta zarradan tashkil topgan gaz magnit momenti uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\mathcal{M} = M L_j (\beta M_0 H) N = M_0 L_j \left(\frac{M_0 H}{kT} \right). \quad (5.130)$$

Bu yerda $L_j \left(\frac{M_0 H}{kT} \right)$ – Lanjevenning kvant funksiyasi (yoki Brilluen funksiyasi ham deb yuritiladi) quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$L_j(x) = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \operatorname{cth} \left[\left(1 + \frac{1}{2j}\right)x \right] - \frac{1}{2j} \operatorname{cth} \left(\frac{x}{2j} \right). \quad (5.131)$$

Bu yerda $x = \frac{M_0 H}{kT}$. (5.131) dan shu narsa ko'rindiki, katta maydon va past temperaturalarda Lanjeven kvant funksiyasi birga intiladi va to'inish hodisasiga olib keladi. Bu holda magnitlanish maksimal qiymatiga erishadi. Kichik magnit maydon va katta temperaturalarda Lanjeven kvant funksiyasi birdan juda kichik qiymat qabul qiladi, ya'ni

$$L_j(x) = \frac{j+1}{3j} x \ll 1$$

bo'ladi va natijada magnitlanish kuchsiz bo'ladi.

Ideal sistemalar xususiyatlarining statistik nazariyasi yuqorida bayon qilingan metod asosida ishlab chiqiladi va bayon qilinadi.

5.23. Absolut manfiy temperatura

Energetik spektri yuqoridan chegaralangan sistemalar manfiy absolut temperaturaga ega bo'lishi mumkin. Manfiy absolut temperaturani mavjudligining termodinamika, statistik fizika va kvant mexanika nuqtayi nazaridan ko'rsatish mumkin.

1. Termodinamikaning asosiy tenglamasi (3.87) dan, ya'ni

$$TdS = dE + \sum_i f_i d\lambda_i$$

dan

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{\lambda_i} < 0$$

bo'lganda $T < 0$ bo'lishi mumkin. Manfiy absolut temperaturali sistema mavjudligini 1951-yilda E. Parsell va R. Paund tononidan toza LiF kristalida yadro spinlar sistemasini xususiyatlarini o'rganish borasida o'tkazilgan tajribada ko'rsatildi. Bu tajriba LiF kristalida yadro magnit rezonansini kuzatish borasida o'tkazilgan. Tajriba natijasi shuni ko'rsatdiki, agar kristall kuchli magnit maydonga joylashtirilsa, $T > 0$ past tempe-

raturada yadro spinlari qisman maydon bo'yicha orientatsiya-lanadi, ammo temperatura oshishi bilan bu orientatsiyalanish kuchsizlana boradi va yetarli darajada yuqori temperaturada ($T \rightarrow \infty$ da) kuchli magnit maydon bo'lsada, orientatsiyalanish yo'qoladi. Bu hollarda sistema chegaralangan juda katta energiya zaxirasiga ega bo'ladi. Chegaralangan energiya qiymatidan kattaroq energiyani sistemaga kiritishni davom ettirsak, hamma yadro spinlar yo'nalishi maydon yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lgan holat yuzaga keladi. Sistemaning bu holati manfiy absolut temperaturali holat deyiladi. Bunday real manfiy absolut temperaturali sistema sun'iy yo'l bilan olinadi. Manfiy absolut temperaturalar musbat absolut temperaturalardan yuqori bo'ladi. Absolut nol temperaturaga etishish mumkin emaslik prinsipiga asoslanib, temperatura shkalasini quyidagi sxema bo'yicha ifodalash mukmin:

$$+0 \text{ K}, +1, +2, \dots, +\infty, -\infty, \dots, -2, -1, -0 \text{ K}.$$

(Bu ko'rinishdagi temperaturada shkalasini grafik holda (3.86)ga asoslanib, ko'rsatish mukmin.)

Jism $T = +0 \text{ K}$ da o'ta sovuq, $T = -0 \text{ K}$ da o'ta issiq bo'ladi. Agar < 0 va $>$ temperaturali ikkita sistemani kontaktga keltirsak, issiqlik har doim $T < 0$ sistemadan $T > 0$ sistemaga o'tadi. Agar ikkala jism ham turli xil manfiy temperaturali bo'lsa, $|T_1| < |T_2|$ ga o'tadi.

Manfiy absolut temperaturali sistemalar uchun ham termodynamikaning qonunlari o'rinali bo'ladi. Ammo bunday sistemalarga δQ issiqlik berilganda entropiyasi kamayadi, chunki sistema eng tartiblangan holatga o'tadi. Agar Carnot sikli bajarilayotgan bo'lsa, u holda foydali ish koeffitsiyenti $\eta < 0$ bo'ladi. Chunki bu holda Carnot mashinasi ishslashda ish sarf qilishga to'g'ri keladi. Solishtirma issiqlik sig'imi $T = +0 \text{ K}$ da nolga teng bo'lgani kabi, $T = -0 \text{ K}$ da ham nolga teng bo'ladi. $T < 0$ da sistema adiabatik holda magnitsizlantirilsa, u holda sistema sovishi o'rniga qizishiga olib keladi. $T < 0$ da sistema termodynamik barqaror holatda bo'ladi.

2. Statistik fizika nuqtayi nazaridan Gibbs taqsimotiga asosan, temperatura sistemani ε_i energiyali holatda topish ehtimolligini beradi:

$$W(\varepsilon_i) = A \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) \tilde{\Omega}(\varepsilon_i)$$

Ko'pchilik fizik normal sistemalar ikkita quyidagi xususiyatga ega bo'ladi:

1) ular yuqoridan chegaralanmagan energiya spektriga ega bo'ladi;

2) sistemada berilgan energiyali holatlar soni zichligi $\Omega(\varepsilon)$ energiya oshishi bilan darajali qonun bo'yicha oshib boradi:

$$\Omega(\varepsilon_i) \sim \frac{d\Gamma}{d\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{3N}{2}-1}.$$

Ana shunday sistemalar uchun temperatura musbat bo'ladi va $0 \leq T \leq \infty$ intervalda istalgan qiymatni qabul qilishi mumkin. Bunday sistemalarda holat funksiyasi

$$Z = \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) \Omega(\varepsilon_i)$$

dagi qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun: 1) $T \geq 0$ tengsizlik bajarilishi talab qilinadi; 2) $T \geq 0$ shartni bajarilishi absolut temperaturaning har qanday qiymat qabul qilishini ko'rsatadi.

Chunki $\Omega(\varepsilon_i)$ ni o'sishi $\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right)$ ko'paytmaning kamayishi bilan kompensatsiyalanadi. Ammo yuqorida eslatilgan 1) va 2) shartlar bajarila olmaydigan maxsus fizikaviy sistemalar bo'lishi mumkin. Tajribalar va nazariy tahlillar shuni ko'rsatadiki, «anamal» sistemalar manfiy absolut temperaturali holatda bo'la olar ekan. Bo'lishi mumkin bo'lgan «anamal» sistemalarni qarab chiqaylik.

A. Faraz qilaylik, $\Omega(\varepsilon_i)$ katta energiyalarda darajali qonun emas, balki ko'rsatkichli qonun bo'yicha o'zgarsin: $\Omega(\varepsilon_i) \sim \exp(a\varepsilon_i)$ ($a \neq 0$). Bu holda holat funksiyasi Z uchun ifodadagi umumiy bud katta ε_i larda o'zini $\exp\left(a - \frac{1}{kT}\right)$ kabi tutadi. Bu qator yuqinlashuvchi bo'lishi uchun $0 \leq T < \frac{1}{ak}$ shart bajarilishi zarur.

Bunday qilib, temperatura musbat bo'lib, ammo chegaraviy temperatura $T_{\text{cheg}} = \frac{1}{ak}$ mavjudligi bu temperaturadan katta qizylmashlarda sistemaning qizishi mumkin emasligini ko'rsatadi.

B. Holatlar zichligi $\Omega(\varepsilon_i)$ energiya oshganda o'smasdan , balki kamayuvchi bo'lgan sistemani olib qaraylik. Agar $\Omega(\varepsilon_i)$ darajali qonun bo'yicha kamaysa, u holda bunday sistema xususiyati normal sistema xususiyati bilan mos tushadi va $0 \leq T < \infty$ bo'ladi. Agar $\Omega(\varepsilon_i)$ ε_i ning katta qiymatlarida ko'rsatgichli qonun

$$\Omega(\varepsilon_i) \sim \exp(-a\varepsilon_i)$$

($a > 0$) bo'yicha kamaysa, u holda qatorning umumiy hadi katta ε_i larda o'zini $\exp\left[-\left(a + \frac{1}{kT}\right)\varepsilon_i\right]$ ko'rinishda tutadi. Bu holda qatorni yaqinlashish sharti quyidagi tengsizlikning bajarilishini talab etadi:

$$a + \frac{1}{kT} = \frac{akT+1}{kT} \geq 0.$$

Bu tengsizlikdan yoki $T \geq 0$, yoki $T < -\frac{1}{ak}$ bo'lishi kerakligini ko'ramiz, ya'ni bunday sistemalar uchun temperatura musbat ($0 \leq T < \infty$) ham, manfiy ham bo'lishi mumkin ekan, keyingi holda manfiy chegaraviy temperatura $T_{\text{cheg}} = -\frac{1}{ak}$ ning mavjudligini ko'rsatadi. Bu temperaturadan yuqori temperatura $-\infty < T < T_{\text{cheg}}$ da sistema qizishi mumkin emas.

D. Energiya spektri yuqoridan chegaralangan va ε_{\max} maksimal energiya mavjud bo'lgan sistemani olaylik. Bunday sitemani «B» sistemaning chegaraviy ($a \rightarrow \infty$ va $\Omega(\varepsilon_i)$ ε_{\max} dan boshlab nolga intilgandagi) holi deb qarash mumkin. Bu hol amaliy nuqtayi nazardan ancha qiziqarlidir. Bu holda z uchun qator aniq summaga aylanadi va z har qanday T da ham musbat, ham manfiy qiymatga ega bo'ladi va temperaturani o'zgarish sohasida $-\infty < T < +\infty$ shartga ega bo'lamiz.

Chegaraviy va manfiy temperaturaning fizik ma'nosini aniqlash uchun temperaturaning o'zgarishiga qarab, statistik yig'indi z ni, ε_i energiyali holat ehtimol qiymati $W(\varepsilon_i)$ va o'rtacha energiya $\bar{\varepsilon}$ ni ham normal sistema va hamda A, B, D hollardagi sistemalar uchun kuzatish kerak.

$$z = \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) \Omega(\varepsilon_i),$$

$$W(\varepsilon_i) = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) \Omega(\varepsilon_i)}{Z},$$

$$\bar{\varepsilon} = \sum_i \varepsilon_i W(\varepsilon_i)$$

Ifodalarni normal sistemalar va A, B, D sistemalar uchun $T \geq 0$ K va $T < -0$ K intervalida va $T_{\text{cheg}} = -1/ak$ da tahlil qilish natijasi shu narsaga olib keladiki, manfiy temperatura musbat temperaturaga nisbatan «yuqori» temperatura bo'lar ekan, sistemaning o'rtacha energiyasi $T < 0$ K da $T > 0$ K dagi o'rtacha energiyadan katta bo'ladi.

3. Manfiy absolut temperaturali holatning mavjudligi 1915-yilda Eynshteyn tomonidan kvant mexanikasi metodi usosida ko'rsatilgan (IX bobga qarang).

5.24. V bobga oid masala va savollar

1. N ta molekuladan tashkil topgan bir atomli kvant ideal gaz erkin energiyasi, bosimi, entropiyasi va Gibbs termodinamik potensiali topilsin.

2. Energiyasi impulsi bilan $\varepsilon = cp^4$ munosabat orqali bog'lanган zarralardan tashkil topgan bir atomli ideal gazning holat tenglamasi keltirib chiqarilsin.

Yechish. Bitta zarraning holat funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned} z &= \int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) p^2 dp = \\ &= \sqrt[3]{c^4} \frac{\pi V}{h^3} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \varepsilon^{-1/4} d\varepsilon = \sqrt[4]{c^3} \frac{\pi V}{h^3} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) (kT)^{3/4}; \end{aligned}$$

$$Z = \frac{z^N}{N!} = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3} \right)^N (kT)^{3N/4} \left[\sqrt[4]{c^3} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \right]^N.$$

Ushbu holat funksiyasidan foydalanib holat tenglamasini yozamiz:

$$p = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{NkT}{V}.$$

Bu natija Mendeleyev–Klapeyron tenglamasi bilan mos keladi.

3. Energiyasi impulsi bilan $\varepsilon = cp$ munosabat orqali bog‘langan zarralardan tashkil topgan bir atomli ideal ultrarelativistik gazning erkin energiyasi va holat tenglamasi keltirib chiqarilsin.

4. N ta zarradan tashkil topgan bir atomli ideal gaz entropiyasi ichki energiyasi va hajmga qanday bog‘langanligi topilsin.

5. Bir atomli ultrarelativistik bir mol kvant gazning issiqlik sig‘imi C_v topilsin.

6. Gibbsning katta kanonik taqsimotidan foydalanib Fermi–Dirak va Boze–Eynshteyn taqsimot funksiyalari olinsin.

7. Fermi–Dirak va Boze–Eynshteyn statistikasiga bo‘ysu-

nuvchi $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ energiyали erkin zarralar uchun $B = -\frac{2}{3}E$ o‘rinli

ekanligi isbotlansin. Bu yerda B – katta termodinamik potensial.

Yechish.

$$B = -kT \ln Z, \quad Z = \sum_{i,n} \exp\left(\frac{\mu n - \varepsilon}{kT}\right),$$

$$B_{iB} = -kT \ln \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT} n_i\right) = kT \ln \left[1 - \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}\right) \right],$$

$$B_{iF} = -kT \ln \sum_{n_i=0}^1 \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT} n_i\right) = -kT \ln \left[1 + \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}\right) \right].$$

i -holatdagi zarralar uchun bu ikkala ifodani birlashtirib yozamiz:

$$B_{iB,F} = \pm kT \ln \left[1 - \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}\right) \right].$$

Barcha holatlar bo‘yicha yig‘indini integral bilan almashtiramiz va natijada

$$B_{B,F} = \pm kT \sum \ln \left[1 - \exp \left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT} \right) \right] = \pm kT \int \ln \left[1 - \exp \left(\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT} \right) \right] d\Omega.$$

Bu yerda $d\Omega = g_s \frac{d\gamma}{h^3} = g_s \frac{4\pi^2 dp}{h^3} V$, $p = \sqrt{2mE}$ ekanligini hisobga olib, integrallash natijasida $B_{B,F} = -\frac{2}{3} E$ ni olamiz.

8. Energiya bo'yicha taqsimot funksiyasiga asoslanib yarim spinli fermionlar uchun tezliklar bo'yicha taqsimot olinsin. $T = 0$ K da bu funksiya grafigi chizilsin.

9. 8-masala natijasidan foydalanib, $T = 0$ K da elektron gaz uchun $\bar{v}, \bar{v^2}$ va $\left(\frac{1}{v}\right)$ kattaliklar aniqlansin.

10. Absolut nol temperaturada elektron gazning zarralar soni, bosimi va ichki energiyasi topilsin.

11. Absolut nol temperaturadan farqli temperaturada morelativistik aynigan elektron gazning energiyasi, Fermi sathi va issiqlik sig'imi aniqlansin.

12. $T = 0$ K da metalldagi o'tkazuvchi elektronlarning qanday qismi $0,5E_F$ dan katta kinetik energiyaga ega bo'lishi aniqlansin.

13. $T = 0$ K temperaturada aynigan Fermi-gaz termodinamik potensiali Φ , erkin energiyasi F va entalpiyasi χ aniqlansin.

14. $g(\varepsilon)$ bir zarrali holat zichligi bo'lsin deb faraz qilamiz. Fermi-Dirak statistikasiga bo'ysunuvchi gazning issiqlik sig'imi

$kT \ll E_F$ da $C_V = \frac{\pi^2}{3} k^2 T g(E_F)$ formula bilan berilishi ko'rsatilsin.

15. Metallardagi aynigan elektron gazining issiqlik sig'imi $k/T \ll E_F$ shart o'rini bo'lganda hisoblansin.

16. Boze gazining kondensatsiya temperaturasi T_0 aniqlansin.

17. $T < T_0$ da musbat energiyali $\varepsilon > 0$ holatlardagi bozonlar sonini aniqlovchi taqsimot funksiyasi

$$dN(\varepsilon) = 2\pi V (2s+1) \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) - 1}$$

Junligini hisobga olgan holda, energiya nolga teng bo'lgan holatlardagi zarralar soni topilsin. Hamma zarralar soni N .

18. $T < T_0$ temperaturada Boze gazining entropiyasi S , bosimi p , erkin energiyasi F va Gibbs termodynamik potensiali Φ ning temperaturaga bog'liqligi aniqlansin.

19. $T < T_0$ temperaturada Boze-Eynshteyn gazi uchun qaytuvchi adiabatik jarayon tenglamasi olinsin.

20. Boze-Eynshteyn statistikasiga bo'y sunuvchi ideal gazning bosimi, hajmi va to'liq energiyasi orasidagi bog'lanish topilsin.

21. Ideal gaz holat tenglamasida kvant statistika bilan bog'-langan birinchi tuzatma hisoblansin.

22. Ikkita kvant holatda yotgan N ta zarradan tashkil topgan bir atomli kvant ideal gaz ichki energiyasi va issiqlik sig'imi hisoblansin.

23. Har biri $n + 1$ karrali aynigan $\varepsilon_n = (n + 1)h\nu$ energetik sathlarga ega bo'lgan N ta o'zaro bog'lanmagan garmonik ossilatorlardan tashkil topgan sistemaning issiqlik sig'imi aniqlansin ($n = 0, 1, 2, \dots$).

24. N ta ikki atomli molekulalardan tashkil topgan kvant ideal gazning tebranma harakatiga to'g'ri kelgan issiqlik sig'imi aniqlansin.

Yechish.

$$C_v^{\text{tebr}} = \left(\frac{\partial E_{\text{tebr}}}{\partial T} \right)_V ; \quad E_{\text{tebr}} = kT^2 \frac{\partial \ln Z_{\text{tebr}}}{\partial T} ;$$

$$Z_{\text{tebr}} = (z_{\text{tebr}})^N ; \quad z_{\text{tebr}} = \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\text{tebr}}}{kT}\right) g(\varepsilon_{\text{tebr}}) ; \quad \varepsilon_{\text{tebr}} = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right) ;$$

$$z_{\text{tebr}} = \exp\left(-\frac{h\nu}{2kT}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{-h\nu n}{kT}\right) = \frac{\exp\left(-\frac{T_c}{2T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right)} .$$

Bu yerda $T_c = \frac{h\nu}{k}$ – xarakteristik temperatura deyiladi.

$$E_{\text{tebr}} = \frac{NkT_c}{2} \frac{T_c}{2T} ; \quad C_v^{\text{tebr}} = \frac{Nk}{4} \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \coth\left(\frac{T_c}{2T}\right) .$$

25. N ta ikki atomli molekulalardan tashkil topgan kvant ideal gazning tebranma harakatiga to'g'ri kelgan erkin energiya va entropiya aniqlansin.

26. Past temperaturada ($T \ll T_c$) N ta ikki atomli zarralardan tashkil topgan kvant ideal gazining aylanma harakatiga to'g'ri keluvchi ichki energiya va issiqlik sig'imi aniqlansin.

27. $T \ll T_c = \frac{h^2}{8\pi^2 k I}$ temperaturada orto- va paravodorodning muvozanat konsentratsiyalari nisbati qanday bo'ladi? I – vodorod molekulasingin inersiya momenti.

28. Muvozanatli nurlanishning spektral energiya zichligining maksimumiga mos keluvchi to'lqin uzunligi λ_m va ν_m biri-biriga mos kelmasligi, ya'ni $\lambda_m \nu_m \neq c$ ekanligi ko'rsatilsin.

29. λ , $\lambda + d\lambda$ yoki ν , $\nu + d\nu$ spektral oraliqda eng katta nisbiy nurlanish energiya zichligi to'g'ri keluvchi temperatura T_m aniqlansin.

30. Plank formulasidan foydalanib, V hajmdagi muvozanatli nurlanishning Gibbs termodinamik potensiali aniqlansin.

31. Qattiq jismning elastik tebranishlarini Debay modelidagi Boze statistikasiga bo'y sunuvchi fononlar gazi deb, energiyasi va issiqlik sig'imi toping. Jism hajmi V , bo'ylama va ko'ndlang to'lqinlarning tarqalish tezliklari mos holda c_i va c_r . Kichik temperaturalar holi qarab chiqilsin.

32. Elektron gazining issiqlik sig'imi litiy kristall panjarasining issiqlik sig'imiga teng bo'lgandagi temperatura aniqlansin. Litiy uchun Debay temperaturasi $T_D = 404$ K, undagi erkin elektronlar konsentratsiyasi $n = 4,66 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

33. Atomlar tebranishini angarmonik deb hisoblab, qattiq jismning molar issiqlik sig'imi hisoblansin. Chiziqli angarmonik ossillatorning Gamilton funksiyasi quyidagi ko'rinishda olinsin:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \alpha q^2 - \beta q^4, \quad \beta \ll \frac{\alpha^2}{kT}.$$

Yechish. $C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V, \quad E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$. Qattiq jismni o'zaro bog'lanmagan $3N$ chiziqli angarmonik ossillatorlar to'plami deb qarash mumkin. Bu holda sistemaning holat integrali:

$$Z = \frac{z^N}{N!}, \quad z = \int \exp \left(-\frac{H(q, p)}{kT} \right) \frac{dq dp}{h^3} = \frac{1}{h^3} I_1 I_2.$$

Bu yerda

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) dp = \sqrt{2\pi mkT},$$
$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha q^2 + \beta q^4}{kT}\right) dq = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha q^2}{kT}\right) \left(1 + \frac{\beta q^4}{kT} + \dots\right) dq =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi kT}{\alpha}} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\beta kT}{\alpha^2} + \dots\right),$$

chunki $\frac{q^2 \alpha}{kT} \leq 1$, ammo shu sohada $\frac{\beta q^4}{kT} \ll \frac{\alpha^2 q^4}{(kT)^2} \leq 1$. Shuning

uchun integral ostidagi ikkinchi eksponentani qatorga yoyildi. Demak, berilgan qattiq jismning holat integrali quyidagi ko'rnishda yoziladi:

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \left(\frac{2m}{\alpha}\right)^{3N/2} \left[\pi kT \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\beta}{\alpha^2} kT + \dots\right) \right].$$

Bir mol qattiq jism energiyasi

$$E = 3RT \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\beta}{\alpha^2} kT + \dots\right),$$

molar issiqlik sig'imi:

$$C_V = 3R \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\beta}{\alpha^2} kT + \dots\right)$$

34. Kuchlanganligi E bo'lgan tashqi o'zgarmas bir jinsli elektr maydonda yotgan \mathbf{p}_0 dipol momentli N ta molekuladan tashkil topgan ideal gazning qutblanishi \mathbf{P} hisoblansin.

35. 34- masala shartidagi sistemaning dielektrik singdiruvchanligi aniqlansin.

36. Molekulalarning qutiblanish koefitsiyenti tashqi maydon kattaligiga bog'lanmagan deb, 35- masaladagi sistemaning dielektrik singdiruvchanlikligi aniqlansin.

37. Bir atomli ideal gaz ichki energiyasi. Holat funksiyasi.

38. Bir atomli ideal gaz erkin energiyasi.

39. Bir atomli ultrarelativistik gaz issiqliq sig'imi.
40. Maksvell taqsimotining Gibbs taqsimoti ko'rinishda yozilishi.
41. Boze-Eynshteyn va Fermi-Dirak taqsimotlari.
42. Aynish temperaturasi.
43. $T = 0$ K da metallarda Fermi energiyasi. Elektron gaz ichki energiyasi.
44. $T \neq 0$ temperaturada elektron-gaz issiqliq sig'imi.
45. Past temperaturada yoyilish zonasida effektiv elektron.
46. Past temperaturalarda metallardagi elektron gaz kimyoviy potensialining temperaturaga bog'liqligi.
47. Boze-gaz. Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi.
48. Reley-Jins qonuni.
49. Plank formulasi. Reley-Jins va Vin qonunlari bilan taqqoslang.
50. Stepan-Bolsman qonuni.
51. Foton gazi. Katta termodinamik potensial.
52. Nima uchun foton gazida kimyoviy potensial nolga teng bo'ladi?
53. Debay nazariyasi. Past temperaturali qattiq jismarda issiqliq sig'imi.
54. Klassik ko'p atomli ideal gaz issiqlik sig'imi.
55. Nima uchun ikkita kvant holatlari sistema issiqliq sig'imi past va yuqori temperaturalarda nolga teng bo'ladi.
56. Ko'p atomli tebranma va aylanma harakat holat tenglamalari.
57. Ideal magnetiklar uchun Lanjiven funksiyasi, grafigi.
58. Manfiy absolut temperatura va uni olish.

VI bob

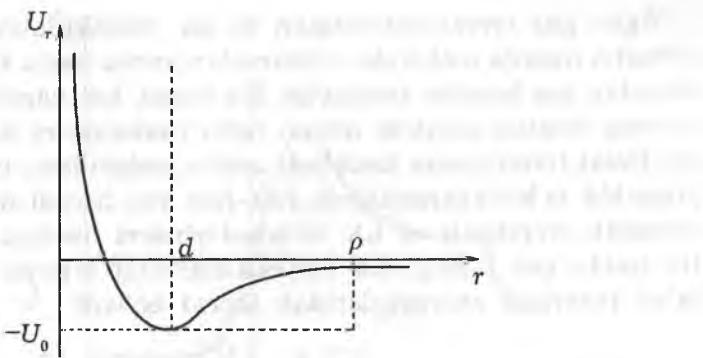
NOIDEAL SISTEMALAR STATISTIK NAZARIYASI

6.1. Noideal klassik bir atomli gaz. Holat funksiyasi

O'tgan boblarda ideal sistemalarning, xususan, ideal gazlar-ning tabiatini qarab chiqdik. Endi biz o'zaro ta'sirlashuvchi zarralar sistemasi, ya'ni real gazlar statistik nazariyasini qarashga o'taylik. Ideal gaz holat tenglamasini ko'p hollarda katta aniqlik bilan real gazlarga ham tatbiq qilish mumkin. Bu yaqinlashish yetarli bo'limganda molekulalar orasidagi o'zaro ta'sirlashish hisobiga real gazning ideallikdan chetlashishini hisobga olishga to'g'ri keladi.

Molekulalar orasidagi o'zaro ta'sirning xarakteri to'g'risida ideal gazlar mavzusida batafsil gapirgan edik. Agar molekulalar orasidagi masofa katta bo'lsa, o'zaro ta'sir kuchsiz bo'ladi va masofa ortishi bilan molekulalar orasidagi tortishish juda tez kamayib boradi. Agar molekulalar bir-biriga juda yaqin kelsa, ya'ni juda kichik masofalarda ularning elektron qobiqlari bir-biriga kirishishadi va natijada kuchli itarishish yuzaga keladi. Ana shunday ta'sirlashish tufayli molekulalarning bir-biriga kirishishida va to'qnashishlarida ularning deformatsiyalanishi sezilarli bo'lmaydi. Bundan tashqari gaz molekulari orasidagi uchtalab, to'rttalab o'zaro ta'sirlarni hisobga olmaslik uchun uni hali ham etarlicha siyrak deb olamiz, ya'ni faqat juft-just ta'sirlarni hisobga olamiz.

Gaz molekulasi ko'p atomli bo'lsa, o'zaro ta'sir ular orasidagi masofadan tashqari ularning orientatsiyasiga ham bog'liq bo'ladi. Soddalik uchun, eng avval bir atomli noideal gazlarni qarab chiqamiz va ular orasidagi o'zaro ta'sir faqat atomlar orasidagi masofaga bog'liq deb qaraymiz. Olingan natijani ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan gazlarga tatbiq qilish mumkin bo'ladi.



6.1- rasm. Molekulalar orasidagi o'zaro ta'sir energiyasining masofaga bog'lanishi.

Molekulalar orasidagi o'zaro ta'sir potensial energiyasi 6.1- rasmda keltirilgan. Gazlarda molekulalar orasidagi tortishish kuchi, odatda, juda kichik bo'ladi va molekulalar bir-biriga minimal masofa d gacha yaqinlashgan maksimumga erishadi. Lekin bu holatdagi potensial energiya $U(d)$ hali ham molekulalarning issiqlik energiyasi kT dan ancha kichikdir. Potensial energiya molekulalar orasidagi masofa ortishi bilan juda tez nolga intilib, bir necha diametrga teng masofalarda deyarli nolga teng deyish mumkin. Shuning uchun keyinroq bajariladigan hisoblarni soddalashtirish maqsadida rasmda keltirilgan o'zaro ta'sir potensial energiyasini chuqurligi $U_0 = U(d)$ bo'lgan o'ra bilan almashtiramiz. O'raning bir tomoni, ya'ni kichik masofalar tomoni cheksiz devordan iborat bo'lsin. Soddalashtirilgan potensial energiyani quyidagi ko'rinishda yozamiz (6.1- rasmida shtrix chiziq):

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r \geq \rho \\ -U_0, & d < r < \rho, \\ \infty, & r \leq d, \end{cases} \quad (6.1)$$

bu yerda ρ o'zaro ta'sir doirasining radiusi bo'lib, odatda molekula diametridan 3-4 marta katta bo'ladi.¹

¹ Ba'zi kitoblarda potensial energiyaning masofaga bog'lanishida (6.1) dagi U_0 tez nolga intiluvchi $u(r)$ funksiya bilan yoki potensial bir butun holda Lenard-Jones potensiali bilan almashtiriladi. Qo'yilgan masala uchun o'zaro ta'sir potensial energiyasining oshkora ko'rinishining ahamiyati yo'q.

Agar gaz siyraklashtirilgan bo'lsa, molekulalar orasidagi o'rtacha masofa molekula o'lchamidan ancha katta bo'ladi. Ana shunday gaz holatini aniqlaylik. Ma'lumki, har qanday statistik sistema holatini aniqlash uchun holat funksiyasini bilish zarurdir. Holat funksiyasini hisoblash uchun molekulalar to'qnashishi yuqorida ta'kidlaganimizdek, juft-juft yuz beradi deb, boshqa uchtalab, to'rttalab va h.k. to'qnashishlarni hisobga olmaymiz. Bu holda gaz energiyasi molekulalarning kinetik va o'zaro ta'sir potensial energiyalaridan iborat bo'ladi:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{kin}} + U.$$

Natijada N ta molekuladan tashkil topgan siyrak gaz holat funksiyasi

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}} \left[\int \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) d^3 p \right]^N \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) dV_1 dV_2 \dots dV_N$$

yoki

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} I. \quad (6.2)$$

Bu yerda

$$I = \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) dV_1 dV_2 \dots dV_N \quad (6.3)$$

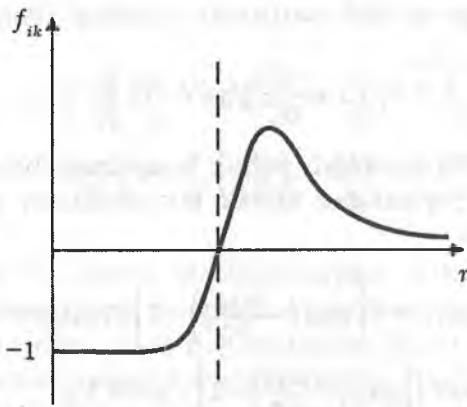
konfiguratsiya integrali deb yuritiladi.

Gazda juft-juft to'qnashishlar hisobga olinishi tufayli, o'zaro ta'sir energiyasi juft-juft to'qnashishlar energiyalarining yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$U = \sum u(r_{ik}), \quad (6.4)$$

bu yerda $u(r_{ik})$ – i - va k - zarralarning o'zaro ta'sir energiyasi. Juft-juft to'qnashishlar soni N ta molekulaning ikkitadan tuzilgan kombinatsiyalari soniga teng bo'ladi, ya'ni $N(N-1)/2! \simeq N^2/2$. Bu yerda $N \gg 1$ ekani hisobga olindi. Demak, (6.4) $N^2/2$ ta hadlar yig'indisidan iborat bo'ladi. U holda

$$\exp\left(-\frac{U}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\sum u(r_{ik})}{kT}\right) = \prod \exp\left(-\frac{u(r_{ik})}{kT}\right) = \prod (1 + f_{ik}), \quad (6.5)$$



6.2- rasm. Juft korrelyatsion funksiyaning molekulalar orasidagi masofaga bog'lanishi.

bu yerda $f_{ik} = \left[\exp\left(-\frac{u(r_{ik})}{kT}\right) - 1 \right]$ juft korrelatsion funksiya deb yuritiladi.

6.1- rasmda keltirilgan potensial energiya asosida chizilgan f_k ning masofa r ga bog'lanishi 6.2- rasmda keltirilgan. Demak, $r_{ik} > \rho$ da $f_{ik} \rightarrow 0$, $r_{ik} < \rho$ bo'lganda $f_{ik} \neq 0$ bo'ladi.

Umuman olganda, (6.5) da ko'paytmaning hisobiga juft-juft ta'sirga mos keluvchi (f_{ik}) hadlardan tashqari uchtab ($f_{12}f_{23}, \dots$), to'rttalab ($f_{12}f_{34}, f_{12}f_{23}f_{34}, \dots$) va h.k. ta'sirlarni hisobga oluvchi hadlar bor. Bunday hadlarni u_{ik} da juda kichik deb hisobga olmagan edik. Shu sababli, bu yerda ham bunday hadlarni hisobga olmaymiz. Gaz siyrak bo'lganligi uchun uchta va undan ortiq zarralarning bir vaqtning o'zida o'zaro ta'sir doirasida bo'lish ehtimolligi juda kichik bo'ladi. Shunday qilib (6.5) da faqat juft-juft ta'sirga mos keluvchi (f_{ik}) hadlarni saqlab qolamiz, ya'ni

$$\exp\left(-\frac{U}{kT}\right) = 1 + \sum f_{ik}. \quad (6.6)$$

Yig'indidagi qo'shiluvchilar soni juftlar soni $\frac{N^2}{2}$ ga teng bo'ladi. Gazdagagi molekulalar bir-biridan farqlanmaganligi uchun f_{ik} lar ixtiyoriy juft uchun bir xil deb qarash mumkin, u holda, (6.6) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \leq 1 + \frac{N^2}{2} f_{ik}. \quad (6.7)$$

(6.7) ni (6.3) ga qo'yish natijasida quyidagi ifodani olamiz:

$$I = V^N \left(1 + \frac{N^2}{2V^2} \int f_{ik} dV_i dV_k \right). \quad (6.8)$$

(6.8) dagi integralni hisoblash uchun koordinata boshi molekulalarning birida joylashgan sferik koordinatalar sistemasini kiritamiz, u holda

$$\begin{aligned} \int f_{ik} dV_i dV_k &= \int \left[\exp \left(-\frac{u(r_{ik})}{kT} \right) - 1 \right] dV_i dV_k = \\ 4\pi \int dV \int &\left[\exp \left(-\frac{u(r)}{kT} \right) - 1 \right] r^2 dr = V\beta, \end{aligned} \quad (6.9)$$

bu yerda

$$\beta = 4\pi \int \left[\exp \left(-\frac{u(r)}{kT} \right) - 1 \right] r^2 dr. \quad (6.10)$$

Natijada (6.8) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$I = V^N \left(1 + \frac{N^2}{2V} \beta \right). \quad (6.11)$$

(6.11) ni (6.2) ga qo'yish natijasida bir atomli real gaz holat funksiyasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$Z = Z_{id} \left(1 + \frac{N^2}{2V} \beta \right), \quad (6.12)$$

bu yerda $Z_{id} = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} V^N$

bir atomli kvant ideal gaz holat funksiyasi. (6.12) dagi ikkinchi had gazning ideallikdan chetlashishini aniqlaydi. Gaz siyrak bo'lganligi uchun qo'shimcha had $N^2 \beta / 2V \ll 1$ shartni qanoatlantiradi.

6.2. Noideal gaz holat tenglamasi

Yuqoridagi mavzuda noideal gazlarning ideal gazlardan chetlashish darajasini aniqladik. Bu chetlashish (6.12) ifodadagi ikkinchi had bilan bog'langan. Noideal gazlarning holat tenglamasini yozish uchun gaz bosimini topaylik:

$$p = kT \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T - kT \frac{\partial \ln Z_{id}}{\partial V} + kT \frac{\partial \ln \left(1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right)}{\partial V} - \\ = p_{id} + kT \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{N^2 \beta}{2V} \right) - \frac{NkT}{V} - \frac{N^2 kT \beta}{2V^2}. \quad (6.13)$$

(6.13) ifoda bir atomli molekulalardan tashkil topgan siyrak noideal gazning holat tenglamasi hisoblanadi. Bu yerda asosiy masala parametr β ni hisoblashdan iborat. Buning uchun N ta bir atomli molekulalardan tashkil topgan noideal gaz – Van-der-Vaals gazini ko'rib chiqamiz. Van-der-Vaals gazining holat tenglamasi

$$\left(p + \frac{aN^2}{V^2} \right) (V - Nb) = NkT$$

yoki

$$p = \frac{NkT}{V} + \frac{N^2 kT b}{V^2} - \frac{aN^2}{V^2}. \quad (6.14)$$

(6.13) va (6.14) ifodalarni taqqoslab, β va a , b lar orasidagi bog'lanishni yozamiz:

$$\frac{\beta}{2} = \frac{a}{kT} - b, \quad (6.15)$$

bu yerda « a » va « b » molekulalarning o'zaro ta'sirini va xususiy hajmini hisobga oluvchi parametrlardir. Parametr β ning ushbu kattaliklar bilan bog'lanishini (6.10) asosida aniqlaymiz:

$$\beta = 4\pi \int_0^d \left[\exp\left(-\frac{u(r)}{kT}\right) - 1 \right] r^2 dr + 4\pi \int_d^\infty \left[\exp\left(-\frac{u(r)}{kT}\right) - 1 \right] r^2 dr. \quad (6.16)$$

Bu ifodaga molekulalarning o'zaro ta'sir qonunini ko'rsatuvchi (6.1) ni qo'llash natijasida quyidagi ifodani olamiz:

$$\beta = -\frac{4\pi d^3}{3} + \frac{4\pi}{kT} \int_d^\infty |u(r)| r^2 dr. \quad (6.17)$$

(6.17) va (6.15) ifodalardan parametrlar a va b larni topamiz:

$$b = \frac{2\pi d^3}{3} = 4v_0,$$

bu yerda $v_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3$ bitta molekulaning egallagan xususiy hajmi.

$$a = 2\pi \int_d^\infty |u(r)| r^2 dr$$

ikkita zarraning o'zaro ta'sir potensial energiyasini hisobga oluvchi parametr. Natijada

$$\beta = \frac{2a}{kT} - 8v_0. \quad (6.18)$$

(6.18) dan ko'rindiki, temperaturaga qarab, β musbat va manfiy bo'lishi mumkin ekan. Past temperaturalarda ($kT < a/4v_0$) $\beta > 0$ yuqori temperaturalarda ($kT < a/4v_0$), $\beta < 0$ bo'ladi.

Agar a va b uchun olingan qiymatlarni Van-der-Vaals tenglamasi (6.14) ga qo'ysak, Van-der-Vaals gaz holat tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$p = \frac{NkT}{V} \left(1 + \frac{4v_0 N}{V} - \frac{2\pi N}{V k T} \int_d^\infty |u(r)| r^2 dr \right). \quad (6.19)$$

(6.19) ko'rinishdagi bosimga topilgan birinchi (musbat) va ikkinchi (manfiy) tuzatmalar aniq fizik ma'noga ega. Bu ikki tuzatma noideal gazlarni ideal gazlardan chetlashish darajasini ko'rsatadi. Birinchi tuzatma real gaz molekulalarining xususiy hajmini hisobga oladi. Ikkinci tuzatma esa birlik hajmda mavjud bo'lgan hamma juft molekulalar o'zaro ta'sir energiyasining o'rtacha qiymatini hisobga oladi. Demak, ikkinchi tuzatma real gaz molekulalarining o'zaro bir-biriga tortishi tufayli, gaz molekulalarining idish devoriga bergen bosimining kamayishi ko'rsatadi. Shuning uchun ham real gazlarning bosimi har doim ideal gazlar bosimidan kichik bo'ladi.

Van-der-Vaals tenglamasi nafaqat siyraklashtirilgan real gazlarning tabiatini emas, balki zichligi katta bo'lgan gazlarning va suyuqliklarning ham tabiatini xarakterlaydi. Ammo Van-der-Vaals tenglamasining (6.14) ko'rinishi katta zichlikdagi real gaz

holatini aniqlay olmaydi. Shuning uchun Van-der-Vaals tenglamasini quyidagi ko'inishda yozamiz:

$$p = \frac{NkT}{V \left(1 - \frac{Nb}{V} \right)} - \frac{aN^2}{V^2}. \quad (6.20)$$

(6.20) quyidagi talablarga javob beradi:

- 1) $V \rightarrow Nb$ da p chegaralanmagan holda ortadi;
- 2) $V \gg Nb$ da (6.20) nazariy formula (6.14) ga o'tadi.

Tenglama (6.20) zichlikning keng intervalida gazlar holatini ifodalovchi Van-der-Vaals to'la tenglamasi bo'lib hisoblanadi. Katta zichlikdagi gazlarda a va b kattaliklar aniq emas, ular faqat gaz hajmi va o'zaro ta'sirni xarakterlovchi kattaliklar bo'lib qolaveradi, ammo endi ular o'zgarmas bo'lmasdan temperaturaning funksiyasi bo'ladi. Bu noqulaylikdan qutulish uchun holatning boshqa emperik tenglamalari taklif qilingan. Shunga qaramasdan Van-der-Vaals tenglamasining ustunligi shundaki, u gazlar tabiatini sifat jihatdan juda to'g'ri bera oladi va gazlarning suyuqlik holatiga o'tishini va kritik hodisani to'g'ri aks ettiradi.

Agarda siyrak real gazlarda uchtalab, to'rttalab va h.k. to'q-nashishlar hisobga olinsa, u holda holat tenglamasi

$$p = \frac{NkT}{V} \left(1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} + \dots \right) \quad (6.21)$$

ko'inishni oladi.

Agar bir atomli molekulalardan tashkil topgan siyrak real gaz holatini aniqlash kerak bo'lsa, u holda (6.12) ga asoslanib, termodinamik kattaliklar hisoblanadi. Bunday gazning ichki energiyasi

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{3}{2} NkT - \frac{aN^2}{V} = E_{\text{id}} + E_{\text{int}}.$$

Bu yerda $E_{\text{int}} = -aN^2/V$ molekulalarning o'zaro ta'sir energiyasi. Demak, $E < E_{\text{id}}$ bo'lar ekan.

6.3. Bir atomli noideal gaz termodinamik kattaliklarini hisoblash

Oldingi mavzuda olingan natijalarni Van-der-Vaals tenglamasiga bo'ysunuvchi bir atomli siyrak gaz holatini aniqlovchi termodinamik kattaliklarni hisoblashga tatbiq qilamiz.

Gazda zarralarning juft-juft to'qnashishi o'zaro ta'sir potensial energiyasi (6.1) ko'rinishga ega bo'lsin. Bu yerda hisoblash ishlari sodda va aniq bo'lishi uchun $u(r) = U_0$ deb olamiz. U vaqtida gaz holatini xarakterlovchi statistik integral, ya'ni holat funksiyasi Z va parametr β , mos ravishda, (6.12) va (6.16) ifodalar bilan aniqlanadi. (6.16) dagi integrallarni hisoblab, (6.18) ga kiruvchi kattaliklar bitta zarra uchun $b = 4v_0$, $a = 4U_0v_0$ ga teng ekanligini topamiz. Bularni hisobga olsak, β quydagiga teng bo'ladi:

$$\beta = \frac{8U_0v}{kT} - 8v_0. \quad (6.22)$$

Ushbu ifodani (6.12) ga qo'ysak holat funksiya

$$Z = Z_{id} \left[1 + 4v_0nN \left(\frac{U_0}{kT} - 1 \right) \right] \quad (6.23)$$

ko'rinishni oladi. Bunday real gaz ichki energiyasi:

$$E = E_{id} - \frac{nbU}{1+nb\left(\frac{U}{kT}-1\right)}. \quad (6.24)$$

Bu yerda $n = N/V$ – gaz zichligi, $U = U_0N$, U_0 – bitta zarra uchun o'rtacha ta'sir energiyasi, $b = 4v_0N$ ifoda N ta zarraning xususiy hajmi. (6.24) ifodadan shu narsa ko'rindanadi, real gaz ichki energiyasi, molekulalar orasidagi tortishish kuchini ustunligi tufayli, ideal gaz ichki energiyasidan kichik bo'ladi. Chunki tortishish kuchining ustunligi tufayli (6.24) ifodadagi ikkinchi had xar doim manfiylicha qoladi.

Van-der-Vaals gaziga bo'ysunuvchi real gaz erkin energiyasi (6.23) ni hisobga olib, quyidagicha yozamiz:

$$\begin{aligned} F &= -kT \ln Z_{id} - kT \ln \left[1 + 4v_0nN \left(\frac{U}{kT} - 1 \right) \right] = \\ &= F_{id} - kT \ln \left[1 + nb \left(\frac{U}{kT} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Agar

$$nb \left(\frac{U}{kT} - 1 \right) \ll 1 \quad (6.26)$$

shart bajarilsa,

$$F = F_{\text{id}} + nb(kT - U). \quad (6.27)$$

(6.25) ifodaga ko'ra, agar $kT > U$ bo'lsa, $F > F_{\text{id}}$ va agar $kT < U$ bo'lsa, $F < F_{\text{id}}$ bo'ladi. Ushbu natija molekulalar orasidagi o'zaro tortishish kuchi bilan bog'langan. Agar $U = kT$ bo'lsa, bunday real gaz erkin energiyasi ideal gaz energiyasiga teng bo'lib qoladi. Quyida bir qator termodinamik kattaliklar uchun ifodalarni keltiramiz:

Gibbs termodinamik potensiali

$$\Phi = F + pV = F_{\text{id}} + nb(kT - U) + pV. \quad (6.28)$$

Gaz bosimi

$$p = \frac{NkT}{V} \left[1 + \frac{b}{V} \left(1 - \frac{U}{kT} \right) \right] \simeq p_{\text{id}} + \frac{nb}{V} (kT - U). \quad (6.29)$$

(6.29) ga asosan (6.28) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\Phi = \Phi_{\text{id}} + 2nb(kT - U). \quad (6.30)$$

Bu ifodaga ko'ra U issiqlik energiyasi kT dan katta bo'lsa, real gaz Gibbs potensiali ideal gaz Gibbs potensialidan kichik bo'ladi va aksincha. Agar $U = kT$ bo'lsa, ular teng bo'lib qoladi.

Real gaz entropiyasi uchun ifodani yozamiz:

$$S = S_{\text{id}} + k \ln \left[1 + nb \left(\frac{U}{kT} - 1 \right) \right] - \frac{1}{T} \frac{nbU}{1 + nb \left(\frac{U}{kT} - 1 \right)}. \quad (6.31)$$

Agar (6.26) o'rini bo'lsa, entropiya uchun ifoda sodda ko'rinishga o'tadi:

$$S = S_{\text{id}} - \frac{nbU}{T}. \quad (6.32)$$

Bu ifodalardan shunday xulosaga kelamizki, real gaz entropiyasi ideal gaz entropiyasidan kichik bo'lar ekan. Juda yuqori temperaturalarda real gaz entropiyasi ideal gaz entropiyasiga yaqinlashar ekan.

Real gaz issiqlik sig'imi:

$$C_v = C_v^{\text{id}} - k \left(\frac{nbU}{kT} \right)^2 \left[\frac{1}{1+nb\left(\frac{U}{kT}-1\right)} \right], \quad (6.33)$$

yoki (6.26) o'rini bo'lsa, issiqlik sig'imi quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$C_v = C_v^{\text{id}} - k \left(\frac{nbU}{kT} \right)^2. \quad (6.34)$$

Ushbu ifodalardan shu ko'rindaniki, real gaz issiqlik sig'imi temperaturaga bog'liq bo'ladi va $C_v < C_v^{\text{id}}$ bo'ladi. C_p esa temperatura va gaz hajmining funksiyasi bo'ladi.

6.4. Juft korrelyatsion funksiyalar metodi. Bogolyubovning zanjir tenglamasi

Klassik statistik fizikaning asosiy masalasi o'zaro ta'sirlashuvchi ta zarradan (molekula, atom va boshqalar) tashkil topgan sistemaning statistik yig'indisini topishdir. Yuqorida bu masalani o'ta siyrak gazlar uchun hal qilishga harakat qildik, ya'ni konfiguratsiya integrali (6.3) ni o'ta siyraklashtirilgan gazlar uchun hisoblashni ko'rdik. Bu masala siyrak gazlar uchun ancha murakkab masala ekanligi ravshan bo'ldi. Bu holda ham masalani echish uchun bir qator soddalashtirishlarni amalga oshirdik. Ammo katta zichlikdagi gazlar va suyuqliklar uchun konfiguratsiya integralini hisoblash masalasi etarli darajada murakkabdir. Bunday sistemalarning statistik xususiyatlarini o'rganishda turli xil metodlar taklif qilingan. Masalan statistik yig'indini virial qatorga yoyish. Bu formal qator bo'lib, uning yordamida o'z vaqtida uchlamchi nuqta va kritik hodisalarini o'rganish mumkin hisoblangan edi. Bunday umidlar amalga oshmadi, chunki virial qatorning bir necha hadi orqali termo-dinamik kattaliklarning o'tish nuqtasida uzlusizligini buzilishini aniqlab bo'lmaydi. Qo'yilgan masalani echish uchun Mayer guruuhlar bo'yicha qatorga yoyish metodi mavjud, lekin bu metod ham katta zichliklarda kutilgan natijani bermaydi.

Bu metodlardan eng qulayi va samaralisi N.N.Bogolyubov tomonidan berilgan korrelyatsion funksiyalar metodi bo'lib hisoblanadi. Korrelyativ funksiyalar metodida konfiguratsiya

integralini hisoblash masalasini zarralarning fazoviy joylashishlarida ularning o'zaro korrelyatsiyasini xarakterlovchi funksiyalar sistemasini o'zaro bog'lovchi integro-differensial tenglamalar zanjirini olish bilan almashtiriladi.

Korrelyativ funksiyalar metodi to'g'ridan-to'g'ri Gibbs statistikasining natijasi bo'lib hisoblanadi. Korrelyativ funksiyalar metodini qarashda o'zaro ta'sirdagi zarralarni fazoviy taqsimoti asosiy rol o'ynaydi.

Gibbs taqsimotini hamma impulslar bo'yicha integralash natijasida zarralar sistemasining berilgan konfiguratsiya ehtimolligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$dW_r = \frac{1}{I} \exp\left(-\frac{U(r_1, r_2, \dots, r_N)}{kT}\right) dr_1 dr_2 \dots dr_N, \quad (6.35)$$

bu yerda konfiguratsiya integrali

$$I = \int \exp\left(-\frac{U(r_1, r_2, \dots, r_N)}{kT}\right) dr_1 dr_2 \dots dr_N \quad (6.36)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Agarda dW_r ni bitta zarradan boshqa qolgan hamma zarralar koordinatalari bo'yicha integrallasak, u holda (6.35) quyidagicha yoziladi:

$$dW_r^{(1)} = \frac{1}{I} dr_1 \int \exp\left(-\frac{U(r_1, r_2, \dots, r_N)}{kT}\right) dr_2 dr_3 \dots dr_N. \quad (6.37)$$

Bu yerda $dW_r^{(1)}$ – sistemadagi $N - 1$ ta zarralarning fazoda joylashishi qanday bo'lishidan qat'iy nazar «1» zarrani dr_1 hajm elementida bo'lish ehtimolligini beradi. Bu ehtimollikni quyidagicha yozish mumkin:

$$dW_r^{(1)} = \frac{\rho_1(r_1) dr_1}{V}. \quad (6.38)$$

$\rho_1(r_1)$ – sistema hajmiga normalashtirilgan kattalik bo'lib, dr_1 hajm elementida bitta zarrani topish ehtimolligi zichligini beradi va «ordinar» funksiya deb ataladi:

$$\frac{\rho_1(r_1)}{V} = \frac{1}{I} \int \exp\left(-\frac{U(r_1, r_2, \dots, r_N)}{kT}\right) dr_2 dr_3 \dots dr_N. \quad (6.39)$$

Yuqoridagi fikrni ikkita zarra uchun tatbiq qilamiz. (6.35) ifodani «1» va «2» zarralardan boshqa qolgan zarralar koordinatalari bo'yicha integrallash natijasida, «1» zarrani $d\mathbf{r}_1$ va «2» zarrani $d\mathbf{r}_2$ hajm elementida topish ehtimolligini olamiz:

$$dW_{\gamma}^{(1,2)} = \frac{\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{V^2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2.$$

Bu yerda

$$\frac{\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{V^2} = \frac{1}{I} \int \exp\left(-\frac{U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)}{kT}\right) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \dots d\mathbf{r}_N, \quad (6.40)$$

$\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ binar yoki juft korrelatsion funksiya deb ataladi. Xuddi shunga o'xshash istalgan tartibdag'i taqsimot funksiyalarni topish mumkin. Masalan, m -tartibdag'i taqsimot funksiya «1» zarrani $d\mathbf{r}_1$ hajm elementida, «2» zarrani $d\mathbf{r}_2$ hajm elementida va h.k. zarrani $d\mathbf{r}_m$ hajm elementida bo'lish ehtimoligini beradi:

$$\frac{\rho_m(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m)}{V^m} = \frac{1}{I} \int \exp\left(-\frac{U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)}{kT}\right) d\mathbf{r}_{m+1} \dots d\mathbf{r}_N. \quad (6.41)$$

Agar bizni sistemaga kirgan hamma zarralarning tutgan o'rniga emas, balki ba'zi bir zarralar tutgan o'rni bilan bog'liq bo'lган sistema holati qiziqtirsa, u holda taqsimot funksiyasi (6.41) Gibbs taqsimoti rolini o'ynaydi. Chunki (6.41) yordamida bizni qiziqtirgan sistema holatini xarakterlovchi kattaliklarning o'rtacha qiymatini hisoblash mumkin:

$$\bar{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m) = \int \frac{\rho_m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m)}{V^m} L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_m.$$

Bu yerdagi qiyinchilik shundaki, taqsimot funksiyalari $\rho_1(\mathbf{r}_1)$, $\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, ..., $\rho_m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m)$ konfiguratsiya integrali I ni hisoblash bilan bog'langan. Shuning uchun, taqsimot funksiyasini konfiguratsiya integraliga bog'liq bo'lмаган usul bo'yicha hisoblash qo'llaniladi. ρ_m taqsimot funksiyasini qanoatlantiruvchi differentsial tenglamani tuzish mumkin ekan.

Birlamchi yoki ordinar funksiya qanoatlantiruvchi differentsial tenglamani topish uchun (6.39) ifodani \mathbf{r}_1 koordinata bo'yicha differentsiallaymiz:

$$\frac{\partial \rho_1(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{V}{IkT} \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1} d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N. \quad (6.42)$$

Bu yerda

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} u(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \sum_{j=2}^N u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|), \quad (6.43)$$

chunki i bo'yicha olingan yig'indidagi «1» zarraga bog'liq bo'l-magan hamma hadlar \mathbf{r}_1 ga bog'liq bo'lmaydi va differensial-lashda nolga aylanadi. (6.43) ni (6.42) ga qo'yish natijasida:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{r}_1} &= -\frac{V}{IkT} \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \left(\sum_{j=2}^N u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|) \right) d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N = \\ &= -\frac{V}{kT} \sum_{j=2}^N \int \frac{\partial u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_1} d\mathbf{r}_j \frac{1}{I} \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_{j-1} d\mathbf{r}_{j+1} \dots d\mathbf{r}_N = \\ &= -\frac{V}{kT} \sum_{j=2}^N \int \frac{\partial u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_1} d\mathbf{r}_j \frac{\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_j)}{V^2} = -\frac{N-1}{V k T} \int \frac{\partial u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_1} \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_j. \end{aligned}$$

Agar $N \gg 1$ ekanligini hisobga olsak, u holda

$$\frac{\partial \rho_1(\mathbf{r}_1)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{N}{V k T} \int \frac{\partial u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_1} \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_j \quad (6.44)$$

(6.44) ifoda ordinar funksiya ρ_1 ni binar funksiya ρ_2 bilan bog'-laydi. ρ_1 ni hisoblash uchun ρ_2 ni topish kerak. Buning uchun binar funksiya ρ_2 ni qanoatlantiruvchi differensial tenglamani tuzish kerak. Bu tenglamani olish uchun (6.40) ifodani \mathbf{r}_1 bo'yicha differensiallaysymiz:

$$\frac{\partial \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{V^2}{IkT} \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \left(\sum_{j=2}^N u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|) \right) d\mathbf{r}_3 \dots d\mathbf{r}_N.$$

Natijada binar funksiya $\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ uchun quyidagi integro-differensial tenglamani olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} &= \frac{\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{kT} \frac{\partial u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{\partial \mathbf{r}_1} \\ &- \frac{N}{V k T} \int \frac{\partial u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_1} \rho_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_j. \end{aligned} \quad (6.45)$$

(6.45) ifoda binar taqsimot funksiyasi ρ_2 ni uchlamli taqsimot funksiyasi ρ_3 bilan bog'laydi. Xuddi shu usul asosida davom ettirish tufayli uchlamli taqsimot funksiyani to'rtlamchi taqsimot funksiya bilan va h.k. m -taqsimot funksiyasini $m+1$ -taqsimot funksiyasi bilan va h.k. $N-1$ -taqsimot funksiyani N -taqsimot funksiyasi, ya'ni Gibbs taqsimot funksiyasi bilan bog'lanishini beruvchi integro-differensial tenglamalar sistemasini olish mumkin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m)}{\partial \mathbf{r}_1} &= \frac{\rho_m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m)}{kT} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \left[\sum u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_m|) \right] \\ &- \frac{N}{V k T} \int \sum_{j=m+1}^N \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}_1} \rho_{m+1}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{m+1}) d\mathbf{r}_{m+1}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Olingan tenglamalar sistemasi (6.44)–(6.46) ga Bogolyubovning korrelatsion funksiyalar zanjir tenglamasi deb yuritiladi. Bu tenglamalar sistemasi asosan, past tartibli taqsimot funksiyani topish masalasi butun sistemani, ya'ni N ta zarradan tashkil topgan sistemani xarakterlovchi Gibbs taqsimot funksiyasi bilan bog'langan ekan. Ammo olingan integro-differensial tenglamalar sistemasining muhim tomoni shundaki, integral ostidagi

yuqori tartibli taqsimot funksiyasi har doim $\sim \frac{N}{V k T} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}_1}$ ga proporsional koeffitsiyent bilan kiradi. Bu holda qaysiki ikkita zarra orasidagi o'zaro ta'sir potensial energiyasi $u(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|)$ masofaga qarab tezlik bilan kamaysa va molekula o'lchamlaridan katta masofalarda nisbatan kichik bo'lib qolsa, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}_1}$ kattalik

$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j| \gg d$ da juda kichik bo'ladi (d – molekula diametri) bu esa integro-differensial tenglamalardagi integral ostidagi ifodalarini baholash mumkinligini ko'rsatadi. Masalan, (6.45) ifodadagi integralni quyidagicha baholash mumkin:

$$\frac{N}{V} \int \frac{\partial u}{\partial r_1} \rho_3 dr_j \cong d^3 \frac{N}{V} \left(\frac{\partial u}{\partial r_1} \rho_3 \right)_d = \frac{d^3}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial r_1} \rho_3 \right)_d.$$

Agar bitta zarraga to'g'ri kelgan hajm v , zarra hajmi d^3 ga nisbatan katta bo'lsa, u holda d^3/v koeffitsiyent kichik bo'ladi. Shunga ko'ra, integral ostidagi ifoda uchun taqribiy ifodadan foydalansa bo'ladi. Natijada N ta zarradan tashkil topgan sistema holatini xarakterlovchi taqsimot funksiyasi $\rho_1(\mathbf{r}_1)$ ning oshkora ko'rinishini olish mumkin bo'ladi.

Zanjir tenglamasini uzish masalasi hozirga qadar to'liq yechilmagan. Bunga asosiy sabab zanjirni n - tenglamada uzish uchun $(n + 1)$ - taqsimot funksiyasini bilish kerak, bu mumkin emas. Masalani yechish uchun zanjir tenglamani biror bo'g'inda uzish kerak, ya'ni $(n + 1)$ - taqsimot funksiyani undan past tartibdagi taqsimot funksiyalari orqali taqriban yozish kerak. Bunday usulalar ko'plab taklif qilingan.

Zanjirni uzishning chiroyli metodini Kirkvud taklif qilgan. Masalan, \mathbf{r}_3 nuqta \mathbf{r}_1 va \mathbf{r}_2 nuqtalardan yetarlicha uzoqda bo'lsa, birinchi va ikkinchi zarralar uchinchi zarra bilan deyarli ta'sirlashmaydi, ya'ni

$$\rho_3 \rightarrow \rho_2 \rho_1.$$

Bunday fikrga tayanib, uchlamchi taqsimot funksiyasini quydagicha yozishni taklif qiladi:

$$\rho_3(r_1, r_2, r_3) = \frac{\rho_2(r_1, r_2) \rho_2(r_1, r_3) \rho_2(r_2, r_3)}{\rho_1^3}. \quad (6.47)$$

Taqsimot funksiyasini bunday yozish Kirkvud yoki superpozitsiya yaqinlashishi deb ataladi. (6.47) ni (6.45) ga qo'yib binar taqsimot funksiyasini topish mumkin.

Eng muhim shundaki, turli yaqinlashishlar beradigan natija qanchalik haqiqatga yaqinligini baholab bo'lmaydi. Shunga qaramasdan zanjir tenglamalar sistemasi ko'p hollarda yaxshi natjalarga olib keladi. Zanjir tenglamasi kvantlangan maydonlar nazariyasida ham o'z aksini topgan.

6.5. Katta zichlikdagi sistema holat tenglamasi va energiyasi

Katta zichlikdagi gazlarning xossalari o'rganishda korrelatsion funksiyalar metodidan foydalanamiz. Ayniqsa bunday sistemalarning holat tenglamasini olishda ikkinchi tartibli binar taqsimot funksiyasi $\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ muhim ahamiyatga ega. Binar funksiya sistema bosimi

$$p = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = kT \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial V} = kT \frac{1}{Z_{id} I} \frac{\partial (Z_{id} I)}{\partial V} = \frac{kT}{I} \frac{\partial I}{\partial V} \quad (6.48)$$

va boshqa kattaliklar bilan bog'langanligini ko'rsatamiz. Konfiguratsiya integrali I (6.36) ifoda bilan aniqlanib, hajmga oshkormas holda bog'langan, shuning uchun undan hajm bo'yicha hosila olishda sistema chiziqli o'lchamlarini λ marta o'zgartiramiz, ya'ni $\mathbf{r} \rightarrow \lambda \mathbf{r}$ va $V^* \rightarrow \lambda^3 V$. Oxirgi natijalarda $\lambda \rightarrow 1$ intiltiramiz. Bu holda konfiguratsiya integrali

$$I = \lambda^{3N} \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N, \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial I}{\partial V^*} = \frac{\partial I}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial V^*} = \frac{\partial I}{\partial \lambda} \frac{1}{3\lambda^3 V},$$

demak,

$$\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_{\lambda=1} = \frac{1}{3V} \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1}.$$

(6.49) ifodadan λ bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{3NI}{\lambda} - \frac{\lambda^{3N}}{kT} \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \frac{\partial U}{\partial \lambda} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N. \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum \sum u(\lambda |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \sum \sum |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| u'$$

ekanligini hisobga olsak, u holda $\lambda = 1$ da (6.50):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1} &= 3NI - \frac{1}{kT} \sum \int |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| u' \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \cong \\ &\cong 3NI - \frac{N^2}{2kT} \int |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| u' d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \int \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) d\mathbf{r}_3 \dots d\mathbf{r}_N \end{aligned}$$

yoki

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1} \equiv 3NI - \frac{N^2}{2kTV^2} \int |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| u' \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

bo'ladi. Natijada sistema holat tenglamasi (6.48) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$p = \frac{NkT}{V} - \frac{N^2}{6V^3} \int |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| u' \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (6.51)$$

(6.51) formula sistema holat funksiyasini binar taqsimot funksiya bilan bog'laydi. Binar taqsimot funksiyasi $\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ sistemada ajratib olingan ixtiyoriy ikkita zarraning o'zaro joylashish ehti-molligini xarakterlaydi. Izotrop fazalarda (gazlar va suyuqliklar) (6.51) tenglama yanada soddalashadi. Chunki izotrop fazalarda binar funksiya yo'nalishga bog'liq bo'lmasdan, faqat zarralar orasidagi masofaga bog'liq bo'ladi, ya'ni

$$\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \rho(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

Shuning uchun

$$p = \frac{NkT}{V} - \frac{N^2}{6V^3} \int \rho(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) u'(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2.$$

Yangi o'zgaruvchi kiritamiz: $\mathbf{r} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ va $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, u holda

$$\int \rho(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) u'(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = 4\pi V \int_0^\infty \rho(r) u'(r) r^3 dr.$$

Natijada izotrop sistema holat tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$p = \frac{NkT}{V} - \frac{2\pi N^2}{3V^2} \int_0^\infty \rho(r) u'(r) r^3 dr. \quad (6.52)$$

Shunga o'xshash katta zichlikdagi sistema energiyasi uchun ifodani topish mumkin:

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = kT^2 \frac{1}{Z_{id}} \frac{\partial Z_{id}}{\partial T} + \frac{kT^2}{I} \frac{\partial I}{\partial T} = \frac{3}{2} NkT + \frac{kT^2}{I} \frac{\partial I}{\partial T},$$

$$\frac{\partial I}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\int \exp \left(-\frac{U}{kT} \right) dr_1 \dots dr_N \right) = \frac{N^2 I}{2V^2 kT^2} \int u(|r_1 - r_2|) \rho_2(r_1, r_2) dr_1 dr_2.$$

O'rniga qo'yish natijasida sistema energiyasi

$$E = \frac{3}{2} NkT + \frac{2\pi N^2}{V} \int_0^\infty \rho(r) u(r) r^2 dr. \quad (6.53)$$

Shunday qilib, sistema energiyasi xuddi bosimi kabi binar taqsimot funksiyasi $\rho(r)$ yordamida ifodalanadi. Binar taqsimot funksiyasi zichligini uncha katta bo'limgan gazlar holi uchun (6.45) tenglama asosida ketma-ket yaqinlashish usuli asosida hisoblash mumkin.

6.6. Plazma. Plazma holat tenglamasi

Plazma – moddalarning to'rtinchi agregat holi bo'lib, unda gaz atomlarining asosiy qismi yuqori darajada ionlashgan bo'ladi. Modda plazma holatda yulduzlarda, yer ionasferasida, gazli razryyadda, katta temperaturagacha qizdirilgan gazlarda, portlashdagi yong'inda, elektritolitda va h.k. uchraydi.

Plazma oddiy gazlardan tamoman farq qiladi. Ba'zi hodisalarda o'z xususiyati bilan elektrolit va qattiq o'tkazgichlarga (metallar, yarimo'tkazgichlar) o'xshab ketadi.

Plazma to'g'risidagi asosiy bilim gazdagi razryadlarni tekshirish natijasida olingen. Hozirgi vaqtida plazmaning xususiyatlarini o'rganishga qiziqish kattadir. Chunki plazma – yengil yadrolarni sintez qilish natijasida olinadigan termoyadro reaksiyasiidan energetik maqsadlarda foydalanish masalasi bilan bog'langandir. Plazma molekular ion va elektronlardan (yoki teshik va elektronlardan) tashkil topgan bo'lib, neytral holatda bo'ladi. Termodynamik muvozanat holatidagi plazma amaliy holda to'la ionizatsiyalangan bo'lib, yuqori temperaturalarda kuzatiladi. Biz ana shu termodinamik muvozanat holatidagi plazmani qarab chiqaylik.

Plazma o'zaro ta'sir potensiali Kulon qonuniga bo'ysunadi: $U_m \sim 1/r$, Van-der-Vaals gazi uchun esa o'zaro ta'sir potensiali $\sim 1/r^6$, o'zaro ta'sir kuchi esa $\sim 1/r^7$ bo'ladi. Plazmada har bir

zarra bir vaqtning o'zida qo'shni zarralar kollektivi bilan o'zaro ta'sirlashadi. Shuning uchun ham plazma asosan gaz emas, balki uzoqdan ta'sir etuvchi kuchlar bilan bog'langan sistema bo'lib hisoblanadi. Uzoqdan ta'sir etuvchi Kulon kuchlari va plazmadagi yengil elektronlarning katta harakatchanligi tufayli, plazmada kollektiv jarayonlar katta rol o'ynaydi, ya'ni tebranish va turli xil tipdagi to'lqinlar katta rol o'ynaydi.

To'la ionlashgan plazmani olish uchun gazni shunday temperaturagacha qizdirish kerakki, atomlar harakatining o'rtacha energiyasi k uning to'la ionizatsiya potensialidan katta yokiunga teng bo'lsin:

$$kT \geq I.$$

Vodorod yoki deytiriyl holi uchun $I = 13,595$ eV, shuning uchun to'la ionlashgan vodorod plazma $T \simeq 16 \cdot 10^4$ K temperaturalarda olinadi. Ana shunday temperaturada plazmani faqat zaryadlangan zarralardan tashkil topgan sistema deb qarab bo'lmaydi. Bu holda undagi nurlanishni ham hisobga olish kerak.

Muvozanat nurlanish energiyasining zarralar harakatining issiqlik energiyasiga teng bo'lgandagi temperaturani topaylik, ya'ni

$$\sigma T^4 = \frac{3}{2} kTn$$

Isodadan temperaturani aniqlaymiz:

$$T = \left(\frac{3kn}{2\sigma} \right)^{1/3}.$$

O'ta siyraklashtirilgan plazma ($n = 10^{15}$ sm⁻³, $\rho = 0,01$ mmn) uchun bu temperatura $T \simeq 3 \cdot 10^4$ K bo'ladi. Shu temperaturalardan boshlab nurlanish energiyasini hisobga olishga to'g'ri keladi. Shunga ko'ra, kichik zichlikdagi va past temperaturali termodynamik muvozanatdagi plazma holatini qarash kerak bo'ladi.

Siyraklashtirilgan kichik zichlikdagi bunday plazma $\frac{e^2}{\langle r \rangle} < kT$ shart bilan aniqlanadi. Bu yerda $\frac{e^2}{\langle r \rangle}$ – Kulon o'zaro ta'sir o'rtacha energiyasi, $\langle r \rangle$ – zarralar orasidagi o'rtacha masofa. $\frac{e^2}{\langle r \rangle} \sim e^2 n^{1/3}$ ekanligini hisobga olsak, u holda $n < (kT/e^2)^3$ bo'ladi. Bu issiq siyraklashtirilgan plazma deb yuritiladi.

Qarama-qarshi zaryadlangan ikki navdagi $+eZ_i$ va $-eZ_i$ zaryadlardan tashkil topgan termodynamik muvozanatdagi siyraklashtirilgan plazmani qarab chiqaylik. Plazma ichki energiyasi

$$E = E_{\text{id}} + E_e, \quad (6.54)$$

bu yerda

$$E_{\text{id}} = C_V T + E_0$$

ideal gaz ichki energiyasi,

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} N_i eZ_i \varphi_i$$

zarralarning Kulon o'zaro ta'sir energiyasi, $N_i = n_i^0 V$, n_i^0 – birlik hajmdagi i - navdagi ionlar konsentratsiyasi, φ_i – boshqa zarralar tomonidan i - ion turgan nuqtada hosil qilingan o'rtacha potensial, Z_i – butun musbat son.

Termodynamik muvozanat vaqtida har bir ion atrofi qarama-qarshi ishorali zarralar buluti bilan o'ralgan bo'ladi. Bunday ekranlovchi ion hosil qilgan maydon potensiali $\varphi(r) \sim 1/r$ ga nisbatan tezroq kamayadi. U holda

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_i = \left(\varphi(r) - \frac{eZ_i}{r} \right),$$

bu yerda $\frac{eZ_i}{r}$ – i - ion hosil qilgan potensial. $\varphi(r)$ potensialni topish uchun o'zaro moslashgan maydon usulini qo'llaymiz, bu holda masala elekrostatik masala holiga keladi. Ion bulutidagi i - nav zarralar zichligi Bolsman taqsimotiga bo'yusunsin:

$$n_i = n_i^0 \exp \left(-\frac{eZ_i \varphi}{kT} \right).$$

Ion bulutlar potensiali $\varphi(r)$ undagi zaryadlar zichligi $\sum n_i^0 eZ_i$ bilan Puasson tenglamasi orqali bog'langan:

$$\Delta \varphi(r) = -4\pi e \sum_i n_i^0 Z_i.$$

Bu tenglamaning yechimi

$$\varphi(r) = \frac{eZ_i}{r} e^{-\kappa r}$$

bo'ladi. Natijada i - ion turgan nuqtada barcha qolgan ionlar hosil qilgan maydon potensiali

$$\varphi_i = eZ_i \kappa = 2e^2 Z_i \sqrt{\frac{\pi}{V k T} \sum_i N_i Z_i^2}$$

va zaryadlangan zarralarning o'zaro ta'sir energiyasi

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_i N_i e Z_i \varphi = -e^3 \sqrt{\frac{\pi}{V k T}} \left(\sum_{i=1}^{2N} N_i Z_i^2 \right)^{3/2} \quad 6.55)$$

bo'ladi. Bu yerda

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{kT} \sum_i n_i^0 Z_i^2}$$

bo'lib, $d = 1/\kappa$ – Debay–Xyukellning ekranlovchi radiusi deb yuritiladi. Bu tashqi elektr maydonning plazmaga kirish chuqurligini beradi. N_i – i - navdag'i ionlarning to'la soni. (6.55) ni (6.54) ga qo'yish natijasida plazma energiyasi

$$E = E_{id} - e^3 \sqrt{\frac{\pi}{V k T}} \left(\sum_{i=1}^{2N} N_i Z_i^2 \right)^{3/2} \quad 6.56)$$

ko'rinishni oladi. (6.56) ko'rinishda plazma ichki energiyasi termodinamik potensial bo'la olmaydi. Plazma holatini aniqlashda termodinamik kattaliklarni hisoblash uchun plazma erkin energiyasini hisoblash kerak. Siyraklashgan plazma erkin energiyasi

$$F_{pl} = -T \int_0^T \frac{E_{pl}}{T^2} dE_{pl} = F_{id} - \frac{2}{3} e^3 \sqrt{\frac{\pi}{V k T}} \left(\sum_{i=1}^{2N} N_i Z_i^2 \right)^{3/2}. \quad 6.57)$$

Plazma holatini xarakterlovchi termodinamik kattaliklar (6.57) yordamida hisoblanadi. Entropiyasi $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$, bosimi

$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$, Gibbs termodinamik potensiali $\Phi = F + pV$, katta

termodinamik potensiali $B = -\frac{2}{3}E$, issiqlik sig'imi $C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$.

Yuqorida yozilgan ifodalar asosida hisoblashlar shuni ko'r-satadiki, plazma holatini xarakterlovchi kattaliklar ideal gaz holatini xarakterlovchi kattaliklardan kichik bo'ladi: $E_{pl} < E_{id}$, $F_{pl} < F_{id}$, $\Phi_{pl} < \Phi_{id}$, $S_{pl} < S_{id}$ va h.k. Sababi plazmada asosan tortishish kuchining ustunligidadir. Ammo plazma issiqlik sig'imi har doim ideal gaz issiqligidan katta bo'ladi, chunki plazma temperaturasini oshirishda faqat plazma zaryadlangan zarralarning xaotik harakati kinetik energiyasini oshirishda energiya sarf qilinib qolmasdan, balki ion bulutini hosil qilgan zarralar orasidagi o'zaro ta'sir o'rtacha potensial energiyasini oshirishda ham sarf qilinadi.

Plazma holat tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$pV = RT \left(1 + \frac{A}{\sqrt{V}}\right),$$

bu yerda

$$A = -\frac{e^3}{3RT} \sqrt{\frac{\pi}{kT}} \left(\sum_{i=1}^{2N} N_i Z_i^2 \right)^{3/2}.$$

Plazmada tebranish mavjudligi 1906-yilda Reley va 1929-yilda Lengmyur va Tonks tomonidan ko'rsatildi. Plazmadagi tebranishlar L.D. Landau tomonidan ishlab chiqilgan.

6.7. VI bobga oid masala va savollar

1. N ta molekuladan tashkil topgan siyraklashtirilgan gaz zarralari quyidagi qonun bo'yicha ta'sirlashadi:

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq d, \\ -U_0, & \rho > r > d, \\ 0, & r > \rho. \end{cases}$$

Ushbu gazning issiqlik sig'imi aniqlansin. ρ – o'zaro ta'sir doira radiusi.

Yechish.

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V ; \quad E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} .$$

Berilgan hol uchun real gazning holat funksiyasi

$$Z = Z_{id} \left(1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right);$$

$$\beta = 4\pi \int_0^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{U(r)}{kT} \right) - 1 \right] r^2 dr = -8v_0 + \frac{8U_0 v_0}{kT};$$

$v_0 = 4\pi r_0^3 / 3$; $r_0 = d/2$ – molekula radiusi. Agar $n = N/V$ – zichlik va $b = 4v_0 N$ – xususiy hajm ekanligini hisobga olsak, bu holda:

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = E_{id} - \frac{nbU_0}{1+nb\left(\frac{U_0}{kT}-1\right)},$$

$$C_V = C_{Vid} - k \left(\frac{nbU_0}{kT} \right)^2 \frac{1}{\left[1+nb\left(\frac{U_0}{kT}-1\right) \right]^2}.$$

Demak, siyraklashtirilgan real gazlarda temperatura ortishi bilan issiqlik sig'imi kamayar ekan.

2. O'zaro ta'sir potensial energiyasi $U(r) = \frac{\alpha}{r^n}$ ($\alpha > 0$, $n > 3$) bo'lgan gazlar uchun ikkinchi virial koeffitsiyent hisoblansin.

Yechish. O'zaro ta'sir potensial energiyasi $u(r) = \frac{\alpha}{r^n}$ bo'lgan gazlar uchun ikkinchi virial koeffitsiyentni hisoblaymiz. Ikkinci virial koeffitsiyent deb,

$$B(T) = -\frac{1}{2} \beta = 2\pi \int_0^{\infty} \left(1 - \exp \left(-\frac{u(r)}{kT} \right) \right) r^2 dr$$

ifodaga aytildi. Integral ostidagi ifodani bo'laklab integrallaymiz. Natijada quyidagi ifodani olamiz:

$$B(T) = \frac{2\pi}{3} \frac{\alpha n}{kT} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{kTr^n}\right) \frac{dr}{r^{n-2}}.$$

Bu integralni endi osongina hisoblash mumkin. Natijada ikkinchi virial koeffitsiyent

$$B(T) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\alpha}{kT}\right)^{3/n} \Gamma\left(\frac{n-3}{n}\right)$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda $\Gamma(x)$ – gamma fuksiya.

3. Gibbs termodinamik potensiali Van-der-Vaals gazi uchun topilsin.

4. Van-der-Vaals gazi uchun entropiya ifodasi olinsin.

5. Zarralar orasidagi o'zaro ta'sir potensial energiyasi

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq r \leq 2r_0, \\ -U_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^n, & 2r_0 < r < \infty \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lgan hol uchun Van-der-Vaals tenglamasidagi o'zgarmas parametr a hisoblansin. Bu yerda r_0 – zarra radiusi.

6. Zarralari

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq r \leq d, \\ -\frac{\alpha}{r^n}, & r > d \end{cases}$$

qonun bo'yicha o'zaro ta'sirlashuvchi siyrak gaz uchun holat tenglamasiga tuzatma hisoblansin. Bu yerda d – zarra diametri, $\alpha > 0$, $n > 3$.

7. Van-der-Vaals gaz holatining kalorik tenglamasi olinsin va erkin energiyasi hisoblansin.

8. Har qaysisi N tadan bo'lgan $-e$ va $+e$ zaryadlardan tashkil topgan va V hajmni egallagan siyrak plazma energiyasi hisoblansin.

9. Siyraklashtirilgan plazmaning erkin energiyasi, entropiyasi, bosimi va issiqlik sig'imi aniqlansin.

10. φ_0 potensialgacha zaryadlangan qandaydir jism elektronlardan (zaryadi $-e$) va ionlardan (zaryadli $+e$) tashkil topgan plazmaga joylashtirilgan. Elektronlar temperaturasi T_e va ionlar temperaturasi T_i har xil deb hisoblab, Debay ekranlash radiusi aniqlansin. Plazma kvazineytral deb hisoblansin, ionlar konentratsiyasi n_0 .

11. Real gaz holat funksiyasi.
12. Konfiguratsiya integrali.
13. Van-der-Vaals gazi uchun « a » va « b » faktorlar.
14. « a » va « b » lar hisobga olinganda Van-der-Vaals gaz tenglamasi qanday yoziladi? yozilishi.
15. Bogolyubov zanjir tenglamasi. Fizik ma'nosi.
16. Plazma. Plazma holatni qanday yuzaga keltirish mumkin.
17. Plazma holat tenglamasi.
18. Nima uchun plazma issiqliq sig'imi ideal gaz issiqliq sig'i-midan katta bo'ladi.

VII bob

FLUKTUATSIYA NAZARIYASI

7.1. Fluktuatsiyaning termodinamik nazariyasi

Oldingi boblarda makroskopik sistemani ifodalovchi fizik kattaliklar juda katta aniqlik bilan o'rtacha qiymatlariga teng ekanligini ko'p marta ta'kidlab keldik. Bu holatga fizik kattaliklar o'rtacha qiymatlari atrofida fluktuatsiyaga duchor bo'ladi. Bu chetlashishlar qanchalik kichik bo'lmasin, ular mavjud. Demak, ularning taqsimot funksiyasini topish kerak. Statistik fizika qonunlaridan fluktuatsiya mavjudligi kelib chiqadi. Fluktuatsiyaga duchor bo'lgan makroskopik sistema o'z holicha eng katta ehtimollik holatdan eng kam ehtimollik holatga o'tadi. Fluktuatsiya tufayli muvozanat holatdagi makroskopik sistemani xarakterlovchi kattaliklarning o'rtacha qiymatlaridan tasodifiy chetlanishi yuzaga keladi. Ana shu hodisaga fluktuatsiya hodisasi deb yuritiladi.¹

Berk sistemalarda fluktuatsiyaning ehtimolligini Bolsman formulasi yordamida topish mumkin. Bu masalaga termodinamika ikkinchi qonuning statistik talqinini muhokama qilganimizda duch kelgan edik. Termodinamikaning ikkinchi qonuni hamma masalani hal qiladi degan fikr uzul-kesil o'rashib qolgan davrda fluktuatsiyaning mavjudligi nazariy bashorat qilin-gan edi. Fizikadagi energetik matabining vakillari moddiy atom va molekulalar borligini umuman rad etishgan. Klassik mexanika va statistika qonunlarining birgalikda ko'rishda ichki qarama-qarshilik mavjud bo'lishi (katta sondagi zarralardan

¹Fizik kattaliklarning muvozanat holatdagi qiymatidan chetlashishi nisbatan katta bo'lganda, nochiziqli dispersiya, so'nish, nochiziqli effektlar kabilar vaqt o'tishi bilan to'planib borish xossasiga ega, ya'ni sistemani yetarlicha uzoq vaqt davomida kuzatish natijasida ular sistema xossalariiga ta'sir ko'rsata boshlaydi. Bunday fluktuatsiyalarni fizikaning maxsus sohalari o'rganadi. Biz esa, shunday fizik kattaliklarning fluktuatsiyalarini o'rganamizki, sistemaning o'zi ularni o'rta-chalaydi. Boshqacha qilib gapirsak, makroskopika nuqtayi nazaridan bunday kattaliklarning faqat o'rtacha qiymatlari ma'noga egadir. Statistik fizika shunday kattaliklarni bilan ish ko'radi.

tashkil topgan sistemada alohida olingen zarralar harakat qonunlarini o'rganib bo'lmashlik) statistik fizikaga ko'pchilikning ishonchszilik bilan qarashga olib kelgan. Lekin, bir qator fluktuatsiya jarayonlarining kashf qilinishi va ularni nazariyasining yaratilishi molekular nazariya mustahkam o'rashishiga olib kelgan. Fluktuatsiya bir qator fizik hodisalarni – Broun harakatini, yorug'likning sochilishini, osmonning havo rangda bo'lishini va h.k. tushuntirishga yordam berdi.

Fluktuatsiya hodisasi amalda ikki holda kuzatilishi mumkin:

- 1) sistema o'lchami yetarli darajada kichik bo'lganda. Bu holda fluktuatsiya tez-tez sodir bo'ladi va nisbatan katta bo'ladi.
- 2) o'lchami uncha katta bo'lmagan sistemalarda. Bu holda kichik fluktuatsiyalar mavjud bo'ladi.

Fluktuatsiya qonunlarini o'rganishda bir qator yangi tushunchalar bilan ishslashga to'g'ri keladi. Agarda sistema holatini xarakterlovchi termodinamik kattalikni L va uning o'rtacha qiymatini \bar{L} bilan belgilasak, u holda fluktuatsiyani hisoblashda quyidagi ifodalar ishlatalidi:

$$\Delta L = (L - \bar{L}) - o'rtacha qiymatdan chetlanish;$$

$$\overline{\Delta L} = \overline{(L - \bar{L})} = \bar{L} - \bar{L} = 0 - chetlanishning o'rtacha qiymati;$$

$$(\Delta L)^2 = (L - \bar{L})^2 - o'rtachadan kvadratik chetlanish;$$

$$\overline{(\Delta L)^2} = \overline{(L - \bar{L})^2} = \bar{L}^2 - \bar{L}^2 - kvadratik o'rtacha chetlanish;$$

$$\delta_L = \sqrt{\overline{(\Delta L)^2}} / \bar{L} - nisbiy chetlanish (fluktuatsiya).$$

Biz eng avvalo ixtiyoriy makroskopik sistemada sodir bo'layotgan kichik fluktuatsiyalarning umumiyligi nazariyasini qarab chiqaylik. Entropiyasi S_0 bo'lgan muvozanat holatdagi makroskopik berk sistemani olib qaraylik. Faraz qilaylik, sistema holati o'zgarib, entropiyasi S ga teng bo'lgan nomuvozanat holatga o'tsin. Sistema holatining o'zgarishini qandaydir ichki parametr ξ xarakterlaydi. ξ ning qiymati sistemaning hamma holatiga bog'liq bo'ladi (ichki parametr ξ uchun zarralar soni, zichligi, energiyasini va h.k. larni qabul qilish mumkin). Sistema entropiyasi S ham parametr ξ ga bog'liq bo'ladi.

Biz o'rganayotgan yopiq sistemaning ξ , $\xi + d\xi$ intervalidagi holatga tushish ehtimolligi Bolsman formulasiga asosan

$$dW = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{\Delta S}{k}\right) d\xi. \quad (7.1)$$

Bu yerda const normirovka shartidan topiladi; $\Delta S = S(\xi) - S(\xi_0) < 0$ bo'ladi.

Ko'pincha tajribada fluktuatsiya hodisasi berk sistemada emas, balki berk sistemaning bir bo'lagini tashkil qilgan kvazi-berk sistema (sistemacha)da qaraladi. Bunday kvaziberk sistema uchun o'zgarmas temperaturali va o'zgarmas bosimli termostatga tushurilgan sistemachani olib qarash mumkin (sistemacha ham katta sondagi zarralardan tashkil topgani uchun uni sistema deb tushiniladi). Sistema holatini qandaydir tashqi parametr bilan xarakterlanadi.

Fluktuatsiya tufayli berk sistemaning (termostat+sistema) entropiyasi ΔS ga o'zgaradi. Bu holda sistema ustida $\Delta A(\lambda) = T\Delta S$ tashqi kuch tomonidan ish bajariladi. Fluktuatsiya vaqtida sistema termostat bilan muvozanat holatda yotmaydi. Muvozanat holatdan nomuvozanat holatga o'tganda λ ning qiymati ham o'zgaradi, natijada sistemani xarakterlovchi termodinamik kataliklar ham o'zgaradi.

Sistemaning λ , $\lambda + d\lambda$ holatga tashqi manba ishi $\Delta A(\lambda)$ ta'sirida o'tish ehtimolligi

$$dW = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{\Delta S}{k}\right) d\lambda. \quad (7.2)$$

Bu yerda $\Delta S = \Delta S_0 + \Delta S_c$. Makroskopik parametrlar sekin o'zgaradi deb, sistema entropiyasining o'zgarishi ΔS_c ni topish uchun muvozanat holat tenglamasidan foydalansak bo'ladi. U holda

$$\Delta S_c = \frac{\Delta E_c + p_0 \Delta V_c - \Delta A}{T_0}. \quad (7.3)$$

Bu yerda T_0 va p_0 – termostatning muvozanat holatidagi temperatura va bosim, $p_0 \Delta V_0$ – sistema ustida termostat bajargan ish. ΔA sistema ustida tashqi kuchlarning bajargan ishi ekanligini yana bir marta ta'kidlab o'tamiz. Termostat entropiyasining o'zgarishi uchun odatdagidek

$$\Delta S_0 = \frac{\Delta E_0 + p_0 \Delta V_0}{T_0} \quad (7.4)$$

ifodani yozamiz. Termostat va sistema birgalikda berk sistemani tashkil qilganligi uchun to'liq ichki energiya va hajm

fluktuatsiyalari nolga teng bo'ladi, ya'ni $\Delta V_0 + \Delta V_c = 0$ va $\Delta E_0 + \Delta E_c = 0$. Bularni hisobga olib termostat + sistema entropiyasining o'zgarishi uchun

$$\Delta S = \Delta S_0 + \Delta S_c = -\frac{\Delta A(\lambda)}{T_0} \quad (7.5)$$

ifodani hosil qilamiz. U holda (7.2) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dW = C \exp\left(-\frac{\Delta A(\lambda)}{kT_0}\right) d\lambda. \quad (7.6)$$

Demak, sistemada o'tayotgan kichik fluktuatsiyalarning ehtimollik darajasi sistema ustida bajariladigan tashqi ish bo'lib hisoblanar ekan. Bu ish faqat fluktuatsiyaning miqdoriy xarakteristikasi bo'lib hisoblanadi.

(7.6) ga (7.5) ni keltirib qo'yib, kattaliklardagi indekslarni tushirib qoldirsak, (7.6) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dW = C \exp\left\{\frac{T\Delta S - \Delta E - p\Delta V}{kT}\right\} d\lambda. \quad (7.7)$$

Bu yerda ΔS , ΔE va ΔV – sistemaga taaluqli entropiya, ichki energiya va hajm fluktuatsiyasi, T va p esa berk (termostat+ sistemacha) sistemaga taaluqli bo'lib, muvozanat holatdagi qiymatlari tushuniladi.

Ayrim termodinamik kattaliklarning fluktuatsiyasi bir-biriga bog'liq bo'ladi. Termodinamikaning birinchi qonuniga asosan, (7.7) ning eksponentasidagi ifodalarning birinchi tartiblisi o'zaro qisqaradi. Masalan, ichki energiya fluktuatsiyasini ko'rib chiqamiz. Ichki energiya fluktuatsiyasini ΔS va ΔV fluktuatsiyalarning funksiyasi deb qarab, uni shu kattaliklarning darajasi bo'yicha qatorga yoyish natijasida quyidagi ifodani olamiz:

$$\begin{aligned} \Delta E - T\Delta S + p\Delta V &= \Delta E_0 + \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V \Delta S + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\right)_V \Delta S^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V}\right) \Delta S \Delta V + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\right)_S \Delta V^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V}\right) \Delta V \Delta S - T\Delta S + p\Delta V. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Termodinamikaning asosiy tenglamarasiga asosan

$$\Delta E = T\Delta S - p\Delta V; \quad \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V = T; \quad \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = -p, \quad (7.9)$$

natijada

$$\begin{aligned} \Delta E - T\Delta S + p\Delta V &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 E}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + 2 \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V} \Delta S \Delta V + \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} (\Delta V)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\Delta S \Delta \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V + \Delta V \Delta \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S \right] = \frac{1}{2} (\Delta S \Delta T - \Delta p \Delta V) \end{aligned} \quad (7.10)$$

bo'jadi va (7.7) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dW = C \exp \left\{ \frac{\Delta p \Delta V - \Delta S \Delta T}{2kT} \right\} d\lambda, \quad (7.11)$$

bu yerda $d\lambda = dp dV dS dT$. (7.11) ifoda sistemada hajm, harorat, entropiya va bosim fluktuatsiyalarining ehtimolligini beradi.

7.2. Bir jinsli sistemalarda termodinamik kattaliklar fluktuatsiyasi

Oldingi mavzuda fluktuatsiyaning miqdoriy o'lchovi ish ekanligini ko'rib chiqdik. Bajarilgan ish sistemani boshlang'ich muvozanat holatdan oxirgi fluktuatsiya holatiga o'tkazadi. Fluktuatsiyalar kichik bo'lganligi sababli bunday o'tishni qaytuvchi deb qarash mumkin. Bu holda termostatning bir bo'lagi bo'lgan sistema ustida bajarilgan ishning umumiy ko'rinishini, odatdagidek, quyidagicha yozish mumkin:

$$\Delta A = \Delta E - T_0 \Delta S + p_0 \Delta V. \quad (7.12)$$

Bu yerda ΔE , ΔS va ΔV – muvozanat holatdan fluktuatsiya holatiga o'tishda sistemaning energiyasi, entropiyasi va hajmining o'zgarishlaridir. O'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilar sifatida qaysi kattaliklarni olishga bog'liq holda bajarilgan ishning aniq ko'rinishini olish mumkin. (7.11) natijadan foydalanib, turli termodinamik kattaliklarning fluktuatsiyasini topamiz.

I. O'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchanlar sifatida V va T ni olaylik:

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \Delta V = \frac{C_V}{T} \Delta T + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V, \quad (7.13)$$

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \Delta V. \quad (7.14)$$

Bu ifodalarni (7.11) ga qo'yish natijasida

$$dW = C \exp \left\{ - \frac{C_V}{2kT^2} (\Delta T)^2 + \frac{1}{2kT} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T (\Delta V)^2 \right\} d\lambda. \quad (7.15)$$

Bu ifoda faqat ΔT va ΔV ga bog'liq bo'lgan ikkita ko'paytuvchiga ajraladi. Demak, temperatura va hajm fluktuatsiyasi statistik holda bog'lanmagan. Shuning uchun $\overline{\Delta T \Delta V} = 0$. (7.15) ifoda bir vaqtida hajm va temperaturaning fluktuatsiyaga duchor bo'lish ehtimolligini beradi. Bu ifoda $V = \text{const}$ bo'lganda, sistema temperaturasining fluktuatsiyaga duchor bo'lish va uning temperaturasi T , $T + dT$ temperatura intervalida bo'lish ehtimolligini beradi:

$$dW_T = C_1 \exp \left\{ - \frac{C_V}{2kT^2} (\Delta T)^2 \right\} dT. \quad (7.16)$$

Shuningdek, temperatura o'zgarmas bo'lganda sistema hajmini fluktuatsiyaga duchor bo'lishi va uning hajmini V , $V + dV$ hajm intervalida bo'lish ehtimolligini beradi:

$$dW_V = C_2 \exp \left\{ - \frac{(\Delta V)^2}{2kT} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right] \right\} dV. \quad (7.17)$$

Bu yerda C_1 va C_2 doimiylar normirovka shartlari

$$\int dW_T = 1 \quad \text{va} \quad \int dW_V = 1 \quad (7.18)$$

dan topiladi. O'zgarmaslarni hisoblab, o'rinalariga qo'yish natijasida quyidagi ifodalarni olamiz:

$$dW_T = \sqrt{\frac{C_V}{2\pi kT^2}} \exp \left\{ - \frac{C_V (\Delta T)^2}{2kT} \right\} dT, \quad (7.19)$$

$$dW_v = \sqrt{\frac{1}{2\pi kT} \left| \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right|} \exp \left\{ - \frac{(\Delta V)^2}{2kT} \left| \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right| \right\} dV. \quad (7.20)$$

(7.19) va (7.20) ifodalar yordamida temperatura va hajmning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyalari uchun quyidagi ifodalarni olamiz:

$$\overline{(\Delta T)^2} = \frac{kT^2}{C_v}, \quad (7.21)$$

$$\overline{(\Delta V)^2} = - \frac{kT}{\left| \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right|}. \quad (7.22)$$

Bu ifodalardan, xususan, (7.16) dan $C_v > 0$ va $\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T < 0$ ekanliklari kelib chiqadi. Bu tengsizliklar bir jinsli termodinamik sistemalar barqarorligining yetarli shartini beradi.

(7.20) va (7.22) formulalar $\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = 0$ bo'lgan hol uchun o'z kuchini yo'qotadi. Buning sababi ichki energiyani fluktuatsiyalarning funksiyasi deb qatorga yoyganimizda ΔS va ΔV bo'yicha kvadratik hadlarni saqlab qolgan edik. Agar $\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = 0$ bo'lsa, qatorda $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_T \neq 0$ bo'lishi kerak. Bu hol esa bir-biriga ziddir.

Demak, birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar bir vaqtida nolga teng bo'lishi kerak. Bu shart kritik nuqta holatini aniqlaydi. Kritik nuqtada fluktuatsiyalar haqiqatan ham juda katta bo'ladi. Masalan, suyuqliklarning qaynash kritik nuqtasida yorug'-likning kuchli sochilishi yuzaga keladi va suyuqlik tiniqligini yo'qotadi. Bu kritik opolessensiya deb yuritiladi.

II. O'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilar sifatida p va S ni olaylik. U holda

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \Delta p + \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_p \Delta S, \quad (7.23)$$

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_p \Delta S + \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \Delta p = \frac{T}{C_p} \Delta S + \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \Delta p. \quad (7.24)$$

Bu ifodalarni (7.12) ga qo'yish natijasida

$$dW = C \exp \left\{ \frac{1}{2kT} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S (\Delta p)^2 - \frac{1}{2kC_p} (\Delta S)^2 \right\} d\lambda. \quad (7.25)$$

Bu esa bir vaqtida bosim fluktuatsiya ehtimolligini p , $p + dp$ intervalda, entropiya fluktuatsiya ehtimolligini S , $S + dS$ intervalda topish ehtimolligini beradi. (7.25) dan:

$$dW_p = C_3 \exp \left\{ -\frac{1}{2kT} \left| \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \right| (\Delta p)^2 \right\} dp, \quad (7.26)$$

$$dW_S = C_4 \exp \left\{ -\frac{1}{2kC_p} (\Delta S)^2 \right\} dS \quad (7.27)$$

va $\overline{\Delta S \Delta p} = 0$ ifodalarni olamiz. C_3 va C_4 doimiylar normirovka shartlaridan topiladi:

$$C_3 = \sqrt{\frac{1}{2\pi kT} \left| \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \right|}, \quad C_4 = \sqrt{\frac{1}{2\pi kC_p}}.$$

C_3 va C_4 doimiyliklarni (7.26) va (7.27) ifodalarga qo'yish natijasida bosim va entropiyaning fluktuatsiyaga duchor bo'lish ehtimolliklarini olamiz:

$$dW_p = \sqrt{\frac{1}{2\pi kT} \left| \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \right|} \exp \left\{ -\frac{\Delta p^2}{2kT} \left| \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \right| \right\} dp, \quad (7.28)$$

$$dW_S = \sqrt{\frac{1}{2\pi kC_p}} \exp \left\{ -\frac{\Delta S^2}{2kC_p} \right\} dS. \quad (7.29)$$

Bu ifodalardan entropiya va bosimning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyalari uchun ifodalarni olamiz:

$$\overline{(\Delta S)^2} = kC_p, \quad \overline{(\Delta p)^2} = -kT \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S. \quad (7.30)$$

III. Berilgan hajmdagi zarralar soni fluktuatsiyasini topaylik. Bitta zarraga to'g'ri kelgan hajm V/N ning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi ($N = \text{const}$):

$$\overline{\left(\Delta \frac{V}{N}\right)^2} = \frac{1}{N^2} \overline{(\Delta V)^2} = \frac{1}{N^2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right].$$

Endi $V = \text{const}$ deb shu hajmdagi zarralar soni fluktuatsiyasini qarab chiqaylik:

$$\overline{\left(\Delta \frac{V}{N}\right)^2} = V^2 \overline{\left(\Delta \frac{1}{N}\right)^2} = \frac{V^2}{N^4} \overline{(\Delta N)^2},$$

$$\overline{(\Delta N)^2} = \frac{N^4}{V^2} \overline{\left(\Delta \frac{V}{N}\right)^2} = \frac{N^2 k T}{V^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right]}. \quad (7.31)$$

Ideal gaz holi uchun zarralar sonining kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi $(\Delta N)^2 = N$ bo'ladi. Bu esa ideal gazda zarra fluktuatsiyasining temperaturaga bog'liq emasligi, ideal gaz zarralarining bir-biriga bog'lanmaganlidigadir. Ideal gazda temperatura oshishi faqat kvadratik o'rtacha tezlikning oshishiga olib keladi.

IV. Zichlikning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi:

$$\overline{(\Delta \rho)^2} = \overline{\left(\Delta \frac{m}{V}\right)^2} = \frac{m^2}{V^2} \overline{(\Delta V)^2} = \rho^2 \frac{k T}{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right]} = \rho^2 \frac{k T}{V} \gamma_T, \quad (7.32)$$

zichlikning nisbiy fluktuatsiyasi:

$$\overline{\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^2} = \frac{k T}{V} \gamma_T. \quad (7.33)$$

Bu yerda $\gamma_T = V \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ – izotermik siqiluvchanlik.

V. Endi Gibbs kanonik taqsimoti o'rinli bo'lgan termostatda yotgan sistemada energiya fluktuatsiyasini ko'raylik. Energiyaning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi:

$$\overline{(\Delta E)^2} = \overline{E^2} - \overline{(E)}^2, \quad (7.34)$$

bu yerda

$$\bar{E} = \frac{1}{Z} \sum E_i \exp\left(-\frac{E_i}{\theta}\right) \Omega(E_i) = \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial \left(-\frac{1}{\theta}\right)} \right)_V = \frac{\theta^2}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)_V,$$

$$\bar{E}^2 = \frac{1}{Z} \sum E_i^2 \exp\left(-\frac{E_i}{\theta}\right) \Omega(E_i) = \frac{2\theta^3}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)_V + \frac{\theta^4}{Z} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right)_V.$$

Bu ifodalarni (7.36) ga qo'yish natijasida quyidagi ifodani olamiz:

$$\overline{(\Delta E)^2} = \theta^2 \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \theta} \right)_V = kT^2 C_V. \quad (7.35)$$

Energiyaning nisbiy fluktuatsiyasi

$$\delta_E = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta E)^2}}}{\bar{E}} = \frac{\sqrt{C_V k T^2}}{\bar{E}}. \quad (7.36)$$

Bu ifoda ham klassik, ham kvant sistema uchun o'rinli bo'ladi.

Xususan, klassik bir atomli gaz uchun $\bar{E} = \frac{3}{2} NkT$ va $C_V = \frac{3}{2} Nk$.

Natijada

$$\delta_E = \sqrt{\frac{2}{3N}} \simeq \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (7.37)$$

Past temperaturalarda Debay yaqinlashuvida qattiq jismlar uchun quyidagilarni yozish mumkin:

$$\bar{E} = \frac{3\pi^4 N k T^4}{5\theta^3}, \quad (7.38)$$

$$C_V = \frac{12\pi^4 N k T^3}{5\theta_c^3}, \quad (7.39)$$

$$\delta_E = \left(\frac{20}{3N\pi^4} \right)^{1/2} \left(\frac{\theta_c}{T} \right)^{3/2}. \quad (7.40)$$

Juda past temperaturalarda energiyaning nisbiy fluktuatsiyasi qattiq jismlarda ancha katta bo'lishi mumkin.

VI. Termostat ichiga tushirilgan va zarralar soni o'zgaruv-chan bo'lgan sistemada zarralar soni fluktuatsiyasini qarab chiqaylik. Bu esa Gibbsning katta kanonik taqsimotidan foydalanib hisoblaniladi. (4.11) formulaga asosan

$$\bar{N} = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{i \in N} \sum \exp \left(\frac{\mu N - \varepsilon_i}{kT} \right) \Omega(\varepsilon_i, N) = \frac{kT}{Z} \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \mu} \right)_{T, V}, \quad (7.41)$$

$$\overline{N^2} = \sum_{i \in N} \sum N^2 \exp \left(\frac{\mu N - \varepsilon_i}{kT} \right) \Omega(\varepsilon_i, N) = \frac{(kT)^2}{Z} \left(\frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial \mu^2} \right)_{T, V}, \quad (7.42)$$

bu yerda

$$\bar{Z} = \sum_{i \in N} \sum \exp \left(\frac{\mu N - \varepsilon_i}{kT} \right) \Omega(\varepsilon_i, N).$$

Natijada zarralar soni kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi uchun quyidagi ko'rinishdagi ifodani olamiz:

$$(\overline{\Delta N})^2 = \overline{N^2} - (\bar{N})^2 = kT \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu} \right)_{T, V}. \quad (7.43)$$

Bu ifoda ham klassik, ham kvant sistemalar uchun o'rinali bo'ladi. Masalan, bir atomli gaz uchun

$$\bar{N} = \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} V \exp \left(\frac{\mu}{kT} \right) \quad (7.44)$$

bo'ladi. (7.43) dan foydalanib, ideal gaz uchun $(\overline{\Delta N})^2 = \overline{N}$, ekanligini topamiz. Nisbiy fluktuatsiya esa

$$\delta_N = \frac{\sqrt{(\overline{\Delta N})^2}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (7.45)$$

ifodaga teng bo'ladi.

7.3. Bajarilgan ish fluktuatsiyasi

Termodinamik sistemalarda fluktuatsiyani o'rganganimizda (7.6) ifodaga asosan shu xulosaga kelindiki, sistemada o'tayotgan kichik fluktuatsiyalarning ehtimol darajasi sistema ustida

bajariladigan tashqi ish bo'lib hisoblanar ekan. (7.6) dagi $\Delta A(\lambda)$ qandaydir maydon bajargan ish bo'lib, fluktuatsiyani yuzaga kelish sababchisidir. Shu bilan birga bajarilgan ish ham fluktuatsiyaga duchor bo'ladi. Bajarilgan ishning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasini topishni ko'rib chiqamiz.

Bajarilgan ish fluktuatsiyasini S va p o'zgaruvchanlarda hisoblaylik. Sistema holatini xarakterlovchi termodinamik potensial – entalpiya entropiya va bosimning funksiyasidir – $\chi(S, p)$. Fluktuatsiya nazariyasiga asosan, sistemaning muvozanat holatida termodinamik potensial $\chi_{\min}(S, p)$ minimal qiyomat qabul qiladi. Demak, shu potensialning fluktuatsiyasi bajarilgan ish fluktuatsiyasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\Delta A(S, p) = \Delta \chi(S, p). \quad (7.46)$$

Ushbu ifodadan foydalanib, bajarilgan ishning kvadratik o'rtachasini hisoblash mumkin:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta A^2} - \overline{\Delta \chi^2} &= \overline{\left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial S} \right)_p \Delta S + \left(\frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_S \Delta p \right]^2} - \\ &= \left(\frac{\partial \chi}{\partial S} \right)_p^2 \overline{\Delta S^2} + 2 \left(\frac{\partial \chi}{\partial S} \right)_p \left(\frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_S \overline{\Delta S \Delta p} + \left(\frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_S^2 \overline{\Delta p^2}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Bu ifodadan $\overline{\Delta S \Delta p} = 0$, chunki S va p o'zaro bog'lanmagan o'zgaruvchilardir. Ikkinchidan, entalpiyaning o'zgarishi $\Delta \chi = T \Delta S - V \Delta p$. Bu yerda $T = \left(\frac{\partial \chi}{\partial S} \right)_p$ va $V = \left(\frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_S$ larni (7.47) ga quyish natijasida

$$\overline{\Delta A^2} = T^2 \overline{\Delta S^2} + V^2 \overline{\Delta p^2} \quad (7.48)$$

Modani olamiz. Entropiya va bosim fluktuatsiyalarining kvadratik o'rtachalari uchun 7- masala natijalari $\overline{\Delta S^2} = k C_p$, $\overline{\Delta p^2} = -kT \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S$ dan foydalanib, bajarilgan ish fluktuatsiyasining kvadratik o'rtachasini

$$\overline{\Delta A^2} = kT^2 C_p + kTV^2 \left| \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S \right| \quad (7.49)$$

ifoda bilan aniqlanishini topamiz.

7.4. Fluktuatsiyaning statistik nazariyasi

Ideal gazlarning kichik hajmida zarralar sonining katta fluktuatsiyasini qarab chiqaylik. 7.2- bandda ideal gazlarning berilgan hajmida zarralar sonining kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi $\overline{\Delta N^2} = \overline{N}$ ga teng bo'lishini ko'rsatdik. Bu kattalik uchun mos kelgan fluktuatsiyaning Gauss ehtimollik taqsimotini quyidagicha yozish mumkin:

$$\rho_N dN = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{N}}} \exp \left\{ -\frac{(N-\overline{N})^2}{2\overline{N}} \right\} dN. \quad (7.50)$$

Ammo bu formula faqat kichik fluktuatsiyalar uchun o'rini bo'lib, zarralar sonining o'rtachadan chetlashishi ($N - \overline{N}$) zarralar soniga nisbatan kichik bo'lishi kerak. Agar ajratib olingan gazda hajm V yetarli darajada kichik bo'lsa, u vaqtida undagi zarralar soni unchalik katta bo'lmaydi. Bu holda $N - \overline{N} \simeq \overline{N}$ o'rini bo'ladigan katta fluktuatsiyalarni qarashga to'g'ri keladi. Bu hol faqat Bolsman gazlari uchun o'rini bo'lib, Fermi-gaz va Boze-gazlar uchun o'rinsiz bo'ladi. Chunki Fermi-gaz va Boze-gazlarda ana shunday katta fluktuatsiyalar ehtimoli xalos kvant fluktuatsiyalar etarli darajada katta bo'lgan, juda kichik hajmda o'rini bo'ladi. Qo'yilgan masalani oddiygina yechish uchun quyidagicha faraz qilaylik. V_0 va N_0 – gazning to'la hajmi va undagi zarralar soni bo'lsin, V esa V_0 ga nisbatan juda kichik bo'lgan gaz bo'lagining hajmi bo'lsin. Gazni birjinsligi

tufayli $\frac{V}{V_0}$ berilgan zarraning V hajmda bo'lish ehtimolini beradi,

$\left(\frac{V}{V_0} \right)^N$ esa aniq N ta zarraning shu kichik hajmda bo'lish ehtimolini

dir. Xuddi shunga o'xshash berilgan zarraning V hajmda bo'l-

maslik ehtimoli $\frac{V_0 - V}{V_0}$, $(N_0 - N)$ aniq zarralarning shu kichik

hajmda bo'lmashlik ehtimoli $\left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right)^N$ bo'ladi. Natijada V hajmda qandaydir N ta zarraning bo'lish ehtimoli $\rho_N N_0$ zarradan N tasini tanlashda mumkin bo'lgan usullar soniga tenng bo'ladi:

$$\rho_N = \frac{N_0!}{N!(N_0 - N)!} \left(\frac{V}{V_0}\right)^N \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0 - N}. \quad (7.51)$$

Bizni qiziqtiruvchi hol ($V \ll V_0$) hamda N son o'zining o'r-tacha qiymati \bar{N} dan juda katta farq qilsada, gazdag'i to'la zarralar soni N_0 ga nisbatan kichik deb faraz qilinadi, u holda $N_0! \approx (N_0 - N)! N_0^N$ ekanligini hisobga olsak, (7.51) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho_N = \frac{1}{N!} \left(\frac{N_0 V}{V_0}\right)^N \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0}, \quad (7.52)$$

bu yerda darajadagi N ni hisobga olmadik. Ammo $\frac{N_0 V}{V_0}$ ifoda V hajmdagi zarralar sonining o'r-tacha qiymati \bar{N} ni beradi, u holda (7.52)

$$\rho_N = \frac{\bar{N}^N}{N!} \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0}, \quad (7.53)$$

ko'rinishni oladi. Sistemadagi zarralar soni juda katta ekanligini hisobga olib N_0 ni cheksizga intiltirsak

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0} = e^{-\bar{N}}.$$

Bu holda ρ_N quyidagi ko'rinishni qabul qiladi:

$$\rho_N = \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}}. \quad (7.54)$$

Bu Puasson formulasi deyiladi. Bu formulaz normalashtirish sharti

$$\sum_{N=0}^{\infty} \rho_N = 1$$

ni qanoatlantiradi.

Puasson formulasini to'g'ridan-to'g'ri Gibbsning katta kanotik taqsimotidan keltirib chiqarish mumkin. Gibbsning katta taqsimotiga ko'ra, gazning N ta zarralarining har xil kvant holatlar bo'yicha taqsimot funksiyasi

$$\exp \left\{ \frac{B + \mu N - \sum \varepsilon_k}{kT} \right\}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $B = -kT \ln \bar{Z}$ – katta termodinamik potensial, $\sum \varepsilon_k$ – ayrim zarralar energiyalarining yig'indisi. Qidirilayotgan ehtimollikni olish uchun yig'indi berilgan V hajmdagi hamma zarralar holatlari bo'yicha olinadi. Yig'indida faqat turli holatlarni hisobga olish uchun $N!$ ga bo'lamiz. Natijada

$$\begin{aligned} \rho_N &= \frac{e^{B/kT}}{N!} \left[\sum_k \exp \left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT} \right) \right]^N = \\ &= \frac{e^{B/kT}}{N!} \left(\sum_k n_k \right)^N = \frac{e^{B/kT}}{N!} \bar{N}^N. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Bu yerda $B = -pV = -kT\bar{N}$, natijada Puasson formulasini hosil qilamiz. Puasson formulasidan foydalanib, yuqorida olingan zarralar soni kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasini hisoblash mumkin:

$$\begin{aligned} \overline{N^2} &= \sum_{N=0}^{\infty} N^2 \rho_N = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{Ne^{-\bar{N}} \bar{N}^N}{(N-1)!} = \\ &= e^{-\bar{N}} \sum_{N=2}^{\infty} \frac{\bar{N}^N}{(N-2)!} + e^{-\bar{N}} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\bar{N}^N}{(N-1)!} = \bar{N}^2 + \bar{N}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Bundan $\overline{\Delta N^2} = \overline{N^2} - \bar{N}^2 = \bar{N}$.

7.5. Zichlik fluktuatsiyasining korrelatsiyasi

Bir jinsli izotrop muhitlarda fazoning har bir nuqtasi teng huquqli bo'lganligi uchun alohida olingan zarra fazoda teng ehtimollik bilan ixtiyoriy nuqtada bo'lishi mumkin. Muhit zarralari o'rtasida o'zaro ta'sir mavjudligini hisobga olsak bu

holat buziladi. Buni ikki zarra misolida ko'ramiz. Ikki zarradan birining fazodagi holati aniq bo'lsin. Zarralar orasidagi ta'sir, mavjud bo'lganligi uchun ikkinchi zarraning fazoning turli nuqtalarida bo'lish ehtimolligi teng bo'lmaydi, ya'ni ikkinchi zarraning fazodagi holati birinchi zarraning fazodagi o'rniga bog'liq bo'ladi. Bu holat fazoviy korrelatsiya deyiladi. Fazoviy korrelatsiyani bir atomli sistemalarni ko'rishdan boshlaymiz. Bu holda har bir zarraning holati uchta koordinata yordamida to'la holda aniqlanadi.

Zarralar sonining zichligi $n(\mathbf{r})$ fluktuatsiyalanuvchi bo'lsin. Berilgan vaqt momentida dV hajm elementida yotgan zarralar sonini $n(r)dV$ bilan belgilaylik. Hajm elementi dV ni cheksiz kichikligi tufayli unda bittadan ortiq bo'lмаган zarra yotadi. Unda bir vaqtning o'zida ikkita zarrani topish ehtimoli juda kichik bo'ladi. Shuning uchun zarralarning o'rtacha soni $\overline{n(r)dV}$ fazoning \mathbf{r} nuqtasida dV hajm elementida zarraning bo'lish ehtimolini beradi. Fazoning ikkita nuqtasida zarralar holati orasidagi bog'lanishni ifodalash uchun zichlik fluktuatsiyasining fazoviy korrelatsiya funksiyasini quyidagicha kiritamiz:

$$\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = \overline{n_1 n_2} - \bar{n}^2. \quad (7.57)$$

Bu yerda \bar{n} , \bar{n}_1 , \bar{n}_2 bir jinsli muhitning hamma nuqtalaridagi zichlikning o'rtacha qiymati, n_1 , n_2 – zarralar soni zichligining fazoning ikkita turli xil \mathbf{r}_1 va \mathbf{r}_2 nuqtalaridagi qiymati, $\Delta n_1 = n_1 - \bar{n}_1$, $\Delta n_2 = n_2 - \bar{n}_2$ esa fluktuatsiyasi. Bu kattalik korrelatsiya darajasini o'taydi. Bir jinsli izotrop muhitda korrelatsion funksiya fazodagi ikki nuqta orasidagi masofa $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ ning absolut kattaligiga bog'liq bo'lib, fazoviy orientatsiyasiga bog'liq emas. Ikki zarra orasidagi masofa cheksizlikga intilganda birinchi va ikkinchi nuqtalarda fluktuatsiya statistik bog'lanmagan bo'lib qoladi va korrelatsiya nolga intiladi.

Zarralar sonining o'rtachasi $\bar{n} dV$ bir vaqtning o'zida zarraning dV hajm elementida bo'lish ehtimo'fini ham beradi. $\bar{n} w_{12} dV_2$ esa birinchi zarraning dV_1 hajm elementida bo'lishi sharti bilan, ikkinchi zarraning dV_2 hajm elementida bo'lish ehtimolini beradi. Bu yerda $r \rightarrow \infty$ da $w_{12} \rightarrow 1$. Bu fikrlarga uhosan

$$\langle n_1 dV_1 n_2 dV_2 \rangle = \bar{n} dV_1 \bar{n} w_{12} dV_2 \quad (7.58)$$

tenglikni olamiz. Bu ifodadan $\langle n_1 n_2 \rangle = w_{12} \bar{n}^2$ kelib chiqadi. Bu tenglik $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ da o'rinli bo'lib, $\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1$ da limitga o'tish mumkin emas, chunki 1 va 2 nuqtalar mos tushsa, dV_1 hajm elementida bo'lgan zarra bir vaqtning o'zida dV_2 hajm elementida ham bo'ladi. Bu esa dV hajm elementida degan fikrga to'g'ri kelmaydi. Bu holatni hisobga oluvchi munosabat quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\langle n_1 n_2 \rangle = w_{12} \bar{n}^2 + \bar{n} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (7.58)$$

Bu yerda $\delta(x)$ – delta funksiya. Haqiqatan ham, qandaydir kichik ΔV hajm ajratamiz va (7.58) ning har ikki tomonini $dV_1 dV_2$ ga ko'paytirib, shu hajm bo'yicha integrallaymiz. O'ng tomondagi birinchi had bilan bog'liq bo'lgan integral ΔV bo'yicha ikkinchi tartibli kichik miqdorni beradi. Ikkinchi had bilan bog'liq bo'lgan integral esa, birinchi tartibli kichik miqdor $\bar{n} \Delta V$ ga teng bo'ladi. Bu esa kichik kattalik bo'lib, kichik hajm ΔV da faqat 0 yoki 1 ta zarra bo'lishini ko'rsatadi.

Shuning uchun, (7.58) da δ -funksiya ishtirok etgan hadni ajratib olish kerak, ya'ni

$$\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = \bar{n} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \bar{n} \nu(r), \quad (7.59)$$

bu yerda

$$\nu(r) = \bar{n}[w_{12}(r) - 1]. \quad (7.60)$$

Biz $\nu(r)$ kattalikni $\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle$ kabi korrelatsion funksiya deb ataymiz. Zarralar orasidagi masofa cheksizlikka intilganda korrelatsiya yo'qoladi, ya'ni $\nu(\infty)$.

Endi (7.59) tenglikni $dV_1 dV_2$ bo'yicha qandaydir aniq hajm V bo'yicha integrallaymiz. Shu V hajmda to'liq zarralar soni N ni kiritamiz ($\bar{n} V = \bar{N}$), natijada quyidagi ifodani olamiz:

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = \bar{N} + \bar{n} \int \nu(r) dV_1 dV_2$$

yoki $dV_1 dV_2$ bo'yicha integrallashdan bitta zarra koordinatasi bo'yicha va nisbiy koordinata \mathbf{r} bo'yicha integrallashga o'tsak,

$$\int \nu(r) dV = \frac{\langle (\Delta N)^2 \rangle}{N} - 1 \quad (7.61)$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib, korrelyatsion funksiyadan qandaydir hajm bo'yicha olingan integral, shu hajmdagi to'la zarralar sonining kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi orqali ifodalanar ekan. Agar

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = - \frac{kTN^2}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{kTN^2}{V^2 \left| \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right|} \quad (7.62)$$

tenglikni hisobga olsak, (7.62) integral termodinamik kattaliklar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\int \nu(r) dV = - \frac{kTN}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T - 1 = \frac{kTN}{V^2 \left| \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right|} - 1. \quad (7.63)$$

Odatdagi klassik ideal gaz uchun $\int \nu(r) dV = 0$ bo'ladi. Bu shuni anglatadiki, ideal gaz zarralari bir-birlari bilan o'zaro ta'sirda bo'limganliklari tufayli, turli xil zarralarning tutgan holatlari o'rtasida hech qanday korrelatsiya ham bo'lmaydi.

Aksinchalik, suyuqlikda (kritik nuqtadan uzoqda) (7.63) ifodadagi birinchi had, suyuqlikning kichik sigiluvchanligiga asosan birdan kichik bo'ladi va natijada $\int \nu(r) dV$ minus birga yaqin bo'ladi. Suyuqlikni zinch joylashtirilgan qattiq sharlar deb qarasak, suyuqlik zarralari orasidagi o'zaro ta'sir doirasi molekulalar o'lcham « a » ga yaqin bo'ladi. Bunday modelda korrelatsiya funksiya $\nu(r)$ masofa ortishi bilan eksponentsiyal $e^{-r/a}$ qonun bo'yicha kamayadi.

7.6. Foton gazida fluktuatsiya

Foton gazida energiya fluktuatsiyasini qarab chiqaylik. 1912-yilda A. Eynshteyn muvozanatli nurlanishda (absolut qora jismning nurlanishi) energiya fluktuatsiyasini hisoblash natijasida muhim fikrga keldi, ya'ni nurlanishning ikki tabiat-

liligi – korpuskular va to'lqin xususiyati namoyon bo'lishini aniqladi. Haqiqatan ham, ν , $\nu + \Delta\nu$ chastota intervalida nurlanish spektrining o'rtacha energiyasi

$$\bar{E}_\nu = \frac{8\pi h\nu^3 V \Delta\nu}{c^3 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}$$

dan foydalanim, energiyaning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasini (7.35) ga ko'ra hisoblash natijasida quyidagini olamiz:

$$\overline{(\Delta E_\nu)^2} = \frac{8\pi V h \nu^3 \Delta\nu}{c^3} \frac{h\nu \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]^2}. \quad (7.64)$$

Bu ifodani ikkiga ajratib yozamiz:

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta E_\nu)^2} &= \frac{8\pi V h^2 \nu^4 \Delta\nu}{c^3 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]} + \frac{8\pi V h^2 \nu^4 \Delta\nu}{c^3 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]^2} = \\ &= h\nu \bar{E}_\nu + \frac{c^3}{V 8\pi \nu^2 \Delta\nu} (\bar{E}_\nu)^2. \end{aligned} \quad (7.65)$$

(7.65) ifodaning birinchi hadi muvozanatlari nurlanishning kvant korpuskular tabiatini, ikkinchi hadi esa muvozanatlari nurlanishning klassik to'lqin tabiatini beradi.

Haqiqatan ham, agar V hajmda N ta foton bo'lsa, u holda uning energiyasi $E_\nu = h\nu N$ bo'ladi. Energiyaning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi $\overline{(\Delta E_\nu)^2} = \overline{(h\nu \Delta N)^2} = (h\nu)^2 \overline{(\Delta N)^2} = (h\nu)^2 \bar{N} = h\nu \bar{E}_\nu$, bo'ladi. Bu hol katta chastotalar intervaliga to'g'ri keladi ($h\nu \gg kT$).

Klassik nurlanish maydoni uchun Reley–Jins qonuniga ko'ra ν , $\nu + \Delta\nu$ chastota intervalidagi o'rtacha energiya

$$\bar{E}_\nu = \frac{8\pi k T \nu^2 \Delta\nu V}{c^3}.$$

Kvadratik o'rtacha energiya esa

$$\overline{(\Delta E_\nu)^2} = kT^2 \left(\frac{\partial \bar{E}_\nu}{\partial T} \right)_V = kT^2 \frac{8\pi k \nu^2 \Delta\nu V}{c^3} = \frac{c^3 (\bar{E}_\nu)^2}{8\pi \nu^2 \Delta\nu V}. \quad (7.66)$$

Bu esa kichik chastotalar intervaliga to'g'ri keladi ($h\nu \ll kT$).

7.7. Kvant gazlarda fluktuatsiya

Kuchli aynigan fermi-gaz va boze-gazlarda energiyaning fluktuatsiyasi va nisbiy fluktuatsiyasini qarab chiqaylik. Past temperaturalarda Fermi-gaz va Boze-gazlar aynigan holatda bo'ladi.

1. Past temperaturalarda metallardagi elektron gazining o'rtacha energiyasi (5.37) va issiqlik sig'imi (5.38) formulalar yordamida aniqlanadi. Energiya fluktuatsiyasi $\overline{(\Delta E)^2} = kT^2 C$ ga teng bo'ladi. Nisbiy fluktuatsiyasi esa ($T = 0$ dagi energiyasi hisobga olinmagan hol uchun) quyidagicha bo'ladi:

$$\delta_E = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{N}} \left(\frac{\mu_0}{kT} \right)^{1/2}.$$

Bu ifodadan ko'rindan, temperaturaning pasayishi bilan metallardagi elektron gaz energiyasining nisbiy fluktuatsiyasi ortib boradi. Past temperaturalarda Boze-gaz o'rtacha energiyasi $\overline{E} = 1,78AV(kT)^{5/2}$, issiqlik sig'imi esa $C_V = \frac{5}{2} \cdot 1,78AVk(kT)^{3/2}$ bo'ladi. Energiya fluktuatsiyasi $\overline{(\Delta E)^2} = kT^2 C_V$ bo'ladi. Boze-gaz energiyasining nisbiy fluktuatsiyasi esa

$$\delta_E = \sqrt{\frac{0,702}{\pi V}} \left(\frac{h^2}{2mkT} \right)^{3/4}$$

bo'ladi.

2. Kvant ideal gazlarda zarralar soni fluktuatsiyasi va nisbiy fluktuatsiyasini qarab chiqaylik. Faraz qilaylik, k kvant holatdagi zarralar soni bo'lsin. Zarralar sonining o'rtacha kvadratik fluktuatsiyasi

$$\overline{(\Delta n_k)^2} = kT \frac{\partial \bar{n}_k}{\partial \mu}$$

formula yordamida hisoblanadi. Bu yerda \bar{n}_k muvozanatda ε_k energiyali holatdagi zarralarning o'rtacha soni.

a) Fermi-gaz uchun

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\exp(\varepsilon_k - \mu)/kT + 1}.$$

Fermi-gaz zarralar sonining o'rtacha kvadratik fluktuatsiyasi

$$\overline{(\Delta n_k)^2} = \bar{n}_k(1 - \bar{n}_k), \quad (7.67)$$

nisbiy fluktuatsiyasi esa $\delta_{n_k} = \sqrt{\frac{1}{\bar{n}_k} - 1}$ bo'ladi.

b) Boze-gaz uchun

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\exp(\varepsilon_k - \mu)/kT - 1}.$$

Boze-gaz zarralar sonining o'rtacha kvadratik fluktuatsiyasi

$$\overline{(\Delta n_k)^2} = \bar{n}_k(1 + \bar{n}_k), \quad (7.68)$$

nisbiy fluktuatsiyasi esa $\delta_{n_k} = \sqrt{1 + \frac{1}{\bar{n}_k}}$ bo'ladi.

d) Maksvell-Bolsman gazi uchun

$$\bar{n}_k = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon_k}{kT}\right).$$

Bunday klassik gaz uchun zarralar sonining kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi

$$\overline{(\Delta n_k)^2} = \bar{n}_k, \quad (7.69)$$

nisbiy fluktuatsiyasi $\delta_{n_k} = \sqrt{1/\bar{n}_k}$ bo'ladi. $\bar{n}_k \ll 1$ hol uchun (7.67) va (7.68) ifodalar (7.69) ifodaga o'tadi.

7.8. Turli xil o'lchov asboblarining sezgirligi

Har qanday fizik yoki mexanik kattaliklar fluktuatsiya tufayli o'zining o'rtacha qiymati atrofida uzlusiz ravishda o'zgaradi va natijada turli xil o'lchov asboblarining sezgirlik chegarasini aniqlaydi. Haqiqatan ham, agar fizik kattalikning qiymati asbobdagi fluktuatsiyadan kichik bo'lsa, u holda fizik kattalikni bir marta o'lhash bilan aniqlash mumkin emas. Bir nechta misollarni qarab chiqaylik.

1. Temperaturani o'lhashda gaz termometridan foydaliladi. Shuning uchun gaz termometrining sezgirligi gaz hajmi

fluktuatsiyasi orqali aniqlanadi. Termometrdagi gaz Klapeyron–Mendeleyev tenglamasini qanoatlantiradi. U holda gaz hajmini ΔV ga o'zgarishi temperaturaning quyidagicha o'zgarishiga olib keladi:

$$\Delta T = \frac{p}{kN} \Delta V, \quad (7.70)$$

bu yerda $\Delta T = T - \bar{T}$, $\Delta V = V - \bar{V}$. (7.22) ga asosan ideal gaz uchun $\overline{\Delta V^2} = \frac{V^2}{N}$, natijada temperaturaning o'zgarishi

$$\Delta T = \frac{p}{kN} \sqrt{\frac{V^2}{N}} = \frac{T}{\sqrt{N}}. \quad (7.71)$$

Agar gazda $N \sim 10^{20}$ ta zarra borligini hisobga olsak, u holda hajm fluktuatsiyasi tufayli gaz termometri yordamida temperaturani o'lchashdagi xatolik

$$\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-10},$$

ya'ni juda kichik bo'ladi.

2. Ko'pincha fizik kattaliklarni o'lchash uchun asbob strelkasining chetlanishi yoki kvars ipining burilishidan foydalaniladi. Bu holda ip yoki strelka fluktuatsiyasi (issiqlikdan harakat) asbob sezgirligini chegaralaydi. Strelkali asbob issiqlik harakat o'rtacha energiyasi $kT/2$ ga teng bo'lgan bitta aylanma erkinlik darajasiga ega deb hisoblab, strelkaning tasodifan chetlanish kattaligini baholash mumkin. Ip yoki strelka muvozanat holat atrofida kichik tebranishni bajaradi. Tebranishing o'rtacha kanetik energiyasi uning o'rtacha potensial energiyasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\bar{E}_{\text{pot}} = \frac{\kappa \overline{\varphi^2}}{2} = \frac{kT}{2}, \quad (7.72)$$

bu yerda $\overline{\varphi^2}$ – muvozanat holatdan chetlanish burchagini kvadratik o'rtachasi va κ – elastiklik koefitsiyenti. Bu ifodadan

$$\overline{\varphi^2} = \frac{kT}{\kappa}. \quad (7.73)$$

Demak, asbob qanchalik sezgir bo'lsa (asbob sezchirligi elastiklik κ ga teskari proporsionaldir), uning ko'rsatuvlarida fluktuatsiya shunchalik katta bo'ladi. Agar asbob strelkasining massasi katta bo'lsa, fluktuatsiya amaliy jihatdan uning ko'rsatuvlariga ta'sir ko'rsatmaydi, ammo u vaqtida asbob sezgirligi juda past bo'ladi. Shunday qilib, o'lchash aniqligi fluktuatsiya bilan chegaralanar ekan. Bu holning muhimligi shundaki, kvarsning burchak chetlanish kvadratik o'rtachasi orqali tajribada Bolsman doimiysini aniqlash mumkin.

3. Elektrik zanjirlarda ham zaryadlar taqsimoti fluktuatsiyasi bilan bog'langan issiqlik toki yuzaga keladi. Ammo zaryadlar zichligining har qanday o'zgarishi elektr maydoni ta'sirida o'tkazgich ichiga to'lqin ko'rinishida uzatiladi. Bu holda o'tkazgichda turg'un to'lqinlarni yuzaga keltiruvchi fluktuatsiyalar eng barqaror bo'ladi. Qutblanishni hisobga olgan holda l uzunlikdagi o'tkazgichda ν , $\nu + d\nu$ chastota intervalidagi turg'un elektromagnit to'lqinlar soni

$$dn(\nu) = 2 \frac{2ld\nu}{c} \quad (7.74)$$

bo'ladi. Har bir turg'un to'lqinga, garmonik ossillator energiyasiga mos keluvchi, kT energiya to'g'ri keladi deb hisoblaymiz. U holda l uzinlikdagi zanjirda ν , $\nu + d\nu$ chastota intervalidagi turg'un to'lqinlar energiyasi

$$dE(\nu) = \frac{4lkT d\nu}{c} \quad (7.75)$$

bo'ladi. Birlik uzunlikdagi zanjirda ν , $\nu + d\nu$ chastota intervalidagi ana shunday fluktuatsiyalangan turg'un to'lqinlar quvvati

$$dW(\nu) = dE(\nu) \cdot \frac{c}{l} = 4kT d\nu \quad (7.76)$$

bo'ladi. Chunki fluktuatsiya toki, zaryadlarning issiqlik harakati natijasida, o'tkazgich ichida paydo bo'ladi, u vaqtida ularning hamma energiyasi qaytadan qarshilikda issiqlikkka aylanadi. Birlik uzunlikdagi R qarshilikli o'tkazgichda quvvatning yo'qolishi Joul-Lens qonuniga asosan

$$\frac{dW(\nu)}{d\nu} = \frac{\overline{E^2}(\nu)}{R} \quad (7.77)$$

bo'ladi. Bu yerda $\overline{\mathcal{E}^2} - \nu$ chastotali to'lqin uchun elektr yurituvchi kuch fluktuatsiyasi ning kvadratik o'rtachasi. Bunda bitta qarshilikda fluktuatsiya toklari ko'rinishda ajralib chiqqan quvvatning boshqa qarshiliklar tomonidan yutilishi kelib chiqadi. Issiqlik muvozanat holatda o'tkazgichning bir xil qarshilikli qismlarida yutilgan quvvat o'tkazgichlarning tabiatiga bog'lanmagan holda teng bo'lishi shart, aks holda, bitta qarshilik boshqalari hisobida qizigan bo'lar edi. Bu esa termodinamikaning ikkinchi qonuniga ziddir. (7.76) va (7.77) ifodalarga asosan elektr yurituvchi kuch fluktuatsiyasi uchun Naykvist formulasini quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$\overline{\mathcal{E}^2}(\nu) = 4kT(\nu). \quad (7.78)$$

Bu formula shuni ko'rsatadiki, elektr yurituvchi kuch fluktuatsiyasining kvadratik o'rtachasi o'tkazgich temperaturasiga va qarshiligiga proporsional ekan. Bu esa tajribada juda yaxshi o'z isbotini topdi.

Naykvist formulasining fizik ma'nosi shundan iboratki, issiqlik fluktuatsiyasi garmonik tebranishlarning hamma mumkin bo'lgan chastotalarining xaotik aralashmalaridan iborat ekan.

Shu bilan birga, (7.75) formulani olishda klassik sistema uchun har bir tebranish energiyasi kT ga teng deb qabul qildik, ya'ni klassik garmonik ossillyatorning o'rtacha energiyaga teng dedik. Shuning uchun kvant sistemalarda fluktuatsiyani qarashda (7.75) formuladagi kT ni kvant ossillatorning o'rtacha energiyasi bilan almash tirish kerak:

$$E(\nu, T) = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (7.79)$$

Natijada, umumlashgan Naykvist formulasini olamiz. Fluktuatsiya toklari hamda «kasr effekt» fluktuatsiyasi bilan bog'langan katoddan uchib chiquvchi elektronlar soni zamonaviy elektron asboblarning sezgirligini chegaralaydi.

7.9. Osmo nning havo ranglilik nazariyasi

Yorug'lik nurining parallel dastasi atmosferadan o'tayotganda sochilishini ko'rib chiqamiz. Atmosfera zichligi hamma nuqtada bir xil deb faraz qilsak, uning sindirish ko'rsatkichi

ham hamma nuqtada bir xil bo'ladi va natijada yorug'likning sochilishi yuz bermaydi. Bu holda Yer sirtidan qopqora osmonni va ko'zni qamashtiradigan yorug' quyoshni ko'ramiz. Amalda esa biz osmonni zangori rangda ko'ramiz. Osmonning zangori bo'lib ko'rinishiga sabab, atmosfera zichligi fluktuatsiyasi tufayli yorug'likning havoda molekular sochilishidir.

Yorug'likning sochilishida chastotaning o'zgarishiga qarab ikki xil sochilish bir-biridan farqlanadi. Birinchisi fluktuatsiyaga bog'lanmagan bo'lib kombinatsion sochilish deyiladi. Bu holda sochilish spektrida asosiy chiziqga nisbatan siljigan chiziqlar paydo bo'ladi. Bunday siljish molekulalar ichki holatining o'zgarishidan dalolat beradi. Ikkinchisi fluktuatsiyalar bilan bog'langan bo'lib, muvozanatlari yoki Reley sochilishi deyiladi. Bunda sistemadagi kichik fluktuatsiyalar ahamiyatga ega bo'lib, ularning o'chamlari yorug'lik to'lqin uzunligi tartibida bo'ladi. Muvozanatlari sochilish fluktuatsiyalarda bo'lganligi uchun molekulalarning ichki holati o'zgarmaydi. Shu sababli bunday sochilishda yorug'likning to'lqin uzunligi deyarli o'zgarmaydi. Muvozanatlari nurlanish nazariyasini Eynshteyn bergen.

Molekulalar issiqlik harakati statistik xarakterda bo'lgani tufayli, atmosferada zichlik fluktuatsiyalari paydo bo'ladi va ayrim kichik hajmlarda molekularlaning zichlanishi va siyraklanishi yuz beradi. Zichlikning $\Delta\rho$ fluktuatsiyasi muhit dielektrik singdiruvchanligining $\Delta\epsilon$ fluktuatsiyasiga yoki sindirish ko'sratkichining Δn fluktuatsiyasiga ($\epsilon = n^2$) sabab bo'ladi va yorug'-lik nurlarining sochilishi yuzaga kelishiga sababchi bo'ladi. Sochilgan nuring spekral tarkibi sochuvchi muhit – atmosferaning rangini aniqlaydi.

Osmonning zangoriligini xarakterlovchi miqdoriy ifodani topish uchun dielektrik singdiruvchanlik fluktuatsiyasini zichlik fluktuatsiyasi orqali yozamiz:

$$\Delta\epsilon = \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \Delta\rho. \quad (7.80)$$

Dielektrik singdiruvchanlik fluktuatsiyasini yorug'likning sochilishiga ta'sirini aniqlash uchun qutblanish vektori va elektr maydon kuchlanganligi orasidagi bog'lanishdan foydalanamiz:

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}, \quad (7.81)$$

bu yerda \mathbf{E} – elektr maydon kuchlanganligi, \mathbf{P} – qutblanish vektori. Tushayotgan yorug'likning elektr va magnit maydon kuchlanganliklari fluktuatsiyalarinmaydi va fazoning har bir nuqtasida garmonik qonun bo'yicha o'zgaradi, ya'ni $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ deb olamiz. Demak, dielektrik singdiruvchanlik fluktuatsiyasi faqat qutblanish vektorining fluktuatsiyasi bilan bog'langan bo'ladi. U holda (7.81) ifodaga ko'ra qutublanish vektorining o'zgarishi quyidagiga teng bo'ladi:

$$\Delta \mathbf{P} = \frac{\Delta \epsilon}{4\pi} \mathbf{E}_0 \cos \omega t = \Delta \mathbf{P}_0 \cos \omega t. \quad (7.82)$$

Bu yerda $\Delta \mathbf{P}_0 = \frac{\mathbf{E}_0}{4\pi} \Delta \epsilon$. Qutblanishning o'zgarishi o'z navbatida muhitda o'zgaruvchi dipol momentini hosil qiladi. Elektrodinamika kursidan ma'lumki, qutblanishi o'zgaruvchi bo'lgan sohani ikkilamchi elektromagnit (sochilgan) to'lqinlar tarqatuvchi dipol deb qarash mumkin. Dipolning tebranish chastotasi elektromagnit to'lqinining chastotasi bilan mos keladi. Dielektrik esa, shunday dipollarning to'plamidan iborat bo'ladi. Ularning soni va kattaligi zichlik fluktuatsiyasiga bog'liq bo'ladi. Bu dipollarda atmosferadan o'tayotgan yorug'likning bir qismi sochiladi. Shunday qilib, atmosferada yorug'likning sochilish masalasini elektrodinamika kursidan yaxshi tanish bo'lgan dipol nurlanish masalasiga olib keldik.

Yuqoridagi fikrlar asosida bir qator elektrodinamik hisoblarni amalga oshirib, sochilish energiyasi oqimining zichligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$S = \frac{S_0}{(4\pi)^2} \frac{v^2}{r^2} \frac{\omega^4}{c^4} (\Delta \epsilon)^2 \sin^2 \theta, \quad (7.83)$$

bu yerda v – fluktuatsiyaga duchor bo'lgan hajm, θ – dipol momenti va sochilish yo'nalishi orasidagi burchak,

$$S_0 = \frac{c}{4\pi} E^2$$

tushayotgan yorug'lik oqimining zichligi.

Agarda yorug'likning v hajmdan emas, butun V hajmdan sochilishini hisobga olsak, u holda (7.83) ni v elementar hajmlar soni V/v ga ko'paytirish natijasida V hajmdan sochilgan to'lqin intensivligini olamiz:

$$S = \frac{S_0}{(4\pi)^2} \frac{Vv}{r^2} \frac{\omega^4}{c^4} (\Delta\epsilon)^2 \sin^2\theta. \quad (7.84)$$

Bu formuladan yorug'likning ko'rinish spektrida binafsha va ko'k nurlarning kuchli sochilishligi kelib chiqadi. Bu esa atmosferaning xarakterli bo'lishiga olib keladi. Aksincha, sochilmashdan kelgan quyosh nurlari qizil va sariq spektrga boy bo'ladi (Quyoshning chiqishi va botishida). Bu esa quyoshning rangdorligini tushuntiradi.

Dielektrik singdiruvchanlik o'zgarishining kvadratik o'rta-chasini zichlik o'zgarishining kvadratik o'rtachasi orqali ifodaymiz:

$$\overline{(\Delta\epsilon)^2} = \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right)^2 \overline{(\Delta\rho)^2} = \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right)^2 \frac{\rho^2}{v^2} kT \left| \left(\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)_{T,N} \right| = \left(\rho \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right)^2 \frac{kT}{v} \gamma_T.$$

Bundan tashqari $\epsilon = 1 + 4\pi\alpha\rho$ bog'lanishdan

$$\rho \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} = \epsilon - 1 = n^2 - 1 = (n+1)(n-1) \simeq 2(n-1)$$

ekanligini hisobga olsak, u holda (7.84) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{S}{S_0} = \frac{4\pi^2(n-1)^2 kTV \gamma_T \sin^2\theta}{r^2 \lambda^4}.$$

Bu yerda $\lambda = 2\pi c/\omega$ – sochilgan (tushayotgan) yorug'likning to'lqin uzunligi, n – muhitning sindirish ko'rsatkichi, $\gamma_T = \frac{1}{K_T}$ – izotermik siqiluvchanlik. (7.85) Reley formulasi deb yuritiladi. Bu formula yorug'likning zichlik fluktuatsiyalarida sochilishida kuzatiladigan asosiy bog'lanish ($S \sim \lambda^{-4}$) ni tushuntiradi. Bu formuladan shu narsa kelib chiqadiki, muhitning kritik sohasida $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \sim 0$ bo'ladi va zichlik eng katta fluktuatsiyaga duchor bo'ladi, shuning uchun yorug'likning eng katta sochilishi yuz beradi. Odatda, bu hodisa kritik opalessensiya deb yuritiladi. Kritik opalessensiyada yorug'lik muhit orqali juda yomon o'tadi va tomoman to'la holda hamma tomonga sochiladi.

7.10. VII bobga oid masala va savollar

1. Bir jinsli termodinamik sistemada hajmning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi aniqlansin.
2. Termostat ichida joylashtirilgan sistemada temperatura-ning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi aniqlansin.
3. O'zaro bog'lanmagan T va V o'zgaruvchilarda energiya-ning kvadratik o'rtacha fluktuatsiyasi topilsin.

Yechish.

$$\Delta E = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T \Delta V,$$

$$\overline{(\Delta E)^2} = C_V^2 \overline{(\Delta T)^2} + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T \right]^2 \overline{(\Delta V)^2} + 2C_V \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T \overline{\Delta T \Delta V};$$

$$\overline{\Delta T \Delta V} = 0; \quad \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p$$

va oldingi masalalar natijasidan foydalanib, quyidagi ifodani olamiz:

$$\overline{(\Delta E)^2} = C_V k T^2 + \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \right]^2 k T \left| \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \right|.$$

4. O'zaro bog'lanmagan T va V o'zgaruvchilarda $\overline{\Delta T \Delta p}$ topilsin.

5. T va V o'zgaruvchilarda $\overline{\Delta V \Delta p}$, $\overline{\Delta S \Delta T}$ va $\overline{\Delta S \Delta V}$ topilsin.

6. O'zaro bog'lanmagan p va S o'zgaruvchilarda $(\Delta A)^2$ topilsin.

7. $\overline{(\Delta S)^2} = k C_p$, $\overline{\Delta S \Delta p} = 0$ va $\overline{(\Delta p)^2} = -k T \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S$ ekanligi ko'r-satilsin.

8. Gibbs taqsimoti o'rini bo'lgan termostatda yotgan sistema uchun energiya fluktuatsiyasi topilsin.

9. Past temperaturalarda metallardagi elektron gazi energiyasining nisbiy fluktuatsiyasi topilsin.

10. Past temperaturalarda qattiq jism energiyasining nisbiy fluktuatsiyasi topilsin.

- 11.** Ikki sathli sistemada energiya fluktuatsiyasi hisoblansin.
12. Gibbsning katta kanonik taqsimotidan foydalanib,

$$\overline{(\Delta N)^2} = kT \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu} \right)_{T,V}$$

tenglik isbotlansin.

- 13.** a) Bolsman; b) Fermi-Dirak; d) Boze-Eynshteyn taqsimotlari o'rinali bo'lgan ideal gazlardagi zarralar soni uchun nisbiy

fluktuatsiya topilsin. $\delta_N = \frac{\sqrt{(\Delta N)^2}}{N}$.

- 14.** Fluktuatsiya hodisasi. Formulasi.

- 15.** Termodinamik sistemalarda termodinamik kattaliklar fluktuatsiyasi: 1) hajm fluktuatsiya; 2) temperatura fluktuatsiya; 3) zarralar soni fluktuatsiyasi; 4) entropiya fluktuatsiyasi; 5) bosim fluktuatsiyasi, ichki energiya fluktuatsiyasi h.k.

- 16.** Fluktuatsiyani yuzaga keltiruvchi maydon bajargan ishining fluktuatsiyasi.

- 17.** Foton gazida fluktuatsiya hodisasining yuzaga kelishi. Foton gazining ikki tabiatliligi.

- 18.** Reley formulasi va fizik ma'nosi.

- 19.** Puasson formulasi va tatbig'i.

VIII bob

NOMUVOZANAT JARAYONLAR TERMODINAMIKASI

Nomuvozanatdagi sistemalar termodinamikasi nazariy fizikaning nisbatan yosh va intensiv taraqqiy etayotgan bo'limi hisoblanadi. Nomuvozanatlari jarayonlar temodinamikasi avvaliga kuchsiz nomuvozanat (muvozanatdan kichik chetlashgan) holatlar termodinamikasini o'rganishga klassik termodinamika natijalarini umumlashtirilgan ko'rinishda tatbiq qilishdan boshlangan. Keyinchalik kuchli nomuvozanat sistemalarda jarayonlar nazariyasini yaratishda foydalilanigan. Klassik termodinamika nostatistik jarayonlarni tahlil qilishda sistema holatini xarakterlovchi kattaliklarni bog'lovchi tengsizliklar yordamida u yoki bu jarayonlarning yo'nalishini ko'rsatadi, ammo miqdoriy xulosalar olishga imkon bermaydi.) Qaytmas jarayonlarning to'liq va chuqur nazariyasi statistik fizikaning kinetika bo'limida beriladi.

(Nomuvozanat jarayonlarga klassik termodinamika natijalarini umumlashtirish eng avval lokal muvozanat tasavvuriga asoslanadi.

Muvozanatdagi sistema holat parametrlari har doim butun sistemaga taalluqli bo'lsa, qaytmas jarayonlar o'tayotgan sistemada esa termodinamik parametrlar faqat sistemaning ayrim bo'laklariga taalluqli bo'ladi deb qaraladi. Har qanday makroskopik jismni kichik makroskopik bo'laklarga bo'lish mumkin. Bu kichik makroskopik bo'laklar ham juda katta sondagi zarralardan tashkil topgan bo'ladi. Bunday bo'laklar o'zining tarkibi, fizik xossalari va boshqa ba'zi xususiyatlari bilan uni o'rab turgan sistemadan farqlanadi. Ya'ni kvazi berk yoki kvazi yakkalangan sistema deb ko'rish mumkin.

Butun termodinamik sistema muvozanat holatga kelgunga qadar muvozanat eng avvalo jismning ana shu kichik qismlarida tiklanadi. Bunday muvozanat lokal muvozanat deyiladi. Lokal muvozanatdagi qismlarga aniq temperatura, bosim, kimyoviy potensial va boshqa termodinamik kattaliklar to'g'ri keladi. Odatda, bu parametrlar lokal parametrlar deb yuritiladi.

Bunday muvozanat holatni xarakterlovchi termodinamik kataliklar fazoviy koordinatalar va vaqtning funksiyasi bo'ladi. Lokal muvozanatga kelish vaqtি bo'lak o'lchamiga bog'liq bo'ladi.

Nomuvozanat termodinamikada, asosan, ochiq sistemada o'tishi mumkin bo'lgan jarayonlar to'la-to'kis o'rganiladi. Ochiq sistemada muhit bilan modda, issiqlik, ish va h.k. almashinishlar yuz berib turadi. Hamma real makroskopik sistemalar qandaydir darajada ochiq sistema bo'ladi.

Ochiq sistemalarda tashqi muhit bilan almashinish oqim shaklida amalgalashiriladi (modda oqimi, energiya oqimi, entropiya oqimi va h.k.). Shuning uchun oqim tushunchasi qaytmas jarayonlar termodinamikasida muhim tushuncha bo'lib hisoblanadi.

Bir jinsli bo'limgan sistemada sodir bo'ladigan o'zgarishlar ikki sababdan paydo bo'ladi. Birinchisi, sistemani tashkil qilgan ayrim bo'laklar va zarralarning o'zaro ta'siri tufayli bo'lsa, ikkinchisi, tashqi maydon ta'sirida yuz beradi. Har ikkila xil jarayon o'zining tabiatiga ko'ra, bir-biridan tubdan farqlanadi. Sistema entropiyasining «paydo» bo'lishiga zarralarning o'zaro ta'siri tufayli holatning o'zgarishi sabab bo'ladi.¹ Xususan, gazlardagi qaytmaslikning sababi undagi zarralarning to'qnashuvidir. Erkin oqimlar o'rtacha maydon tufayli bo'ladigan effektlar entropiyasining paydo bo'lishiga sabab bo'lmaydi. Shunday qilib, qaytmaslik yuzaga kelishi uchun o'zaro ta'sirning bo'lishi shart.

Juda ko'p tipdagi qaytmas jarayonlar mavjud bo'lsada, ularni shartli ravishda ikki guruhga ajratish mumkin:

1. Turli fazalarning aralashishi bilan bog'liq bo'lgan qaytmas jarayonlar.

2. Dissipativ tipdagi qaytmas jarayonlar.

Birinchi tipdagi qaytmas jarayonga plazmaning qaytmas holati misol bo'la oladi. Plazmada yetarlicha uzoq vaqt zaryadlarning kollektivi (to'plami) lokal tebranib tura olishi mumkin. Bu tebranishlar, hatto to'qnashishlar sodir bo'lmasa ham so'nishi mumkin. (Bu Landau so'nishi deb ham yuritiladi.) Bunday tebranishlarning sodir bo'lishi boshlang'ich holatga bog'liqdır.

¹ Entropiya termodinamik sistemaning xossasini ifodalovchi ichki parametr bo'lib hisoblanadi. Shu sababli entropianing «o'zgarishi» degan so'zning o'rniiga «paydo» bo'ladi degan atamani ishlatalish no'rindir. Entropianing o'sish qonuniga asosan, u hech qachon kamaymaydi, shu sababli nomuvozanatlari termodinamikada entropianing «paydo» bo'lishi degan atama o'rashib qolgan.

Ikkinci misol. Boshlang'ich vaqtida devorlari ideal qaytargich bo'lgan quticha ichida bir-biri bilan o'zaro ta'sirda bo'lmanan zarralar dastasi bo'lsin. Qandaydir vaqt o'tgandan keyin zarralar bir jinsli holatga o'tadi. Jarayonning davom etishini ko'r-satadigan bu vaqt, sistema (dastalar)ning boshlang'ich holati «tayyorlanish»ga bevosita bog'liqdir. Bu ikkala misoldagi jarayonlarda, sistemaning ichki xususiyatlariga bog'liq bo'lgan, boshlang'ich shartga bog'liq bo'lmanan xarakterli vaqt mavjud emas.

Ikkinci tipdag'i qaytmas jarayonlarga misol sifatida diffuziya jarayonini ko'rib chiqish mumkin. Bu jarayonda nihoyatda betaritib va juda ko'p o'zaro ta'sir tufayli boshlang'ich holat esdan chiqariladi. Bundan ko'rinish turibdiki, diffuziya jarayoni fazaviy aralashmali jarayonlardan tubdan farq qiladi. Bundagi jarayon, bir tomondan o'zaro ta'sir dinamikasiga, ikkinchi tomondan, sistemaning umumiy makroskopik xossasi: zichlik, temperatura, bosim va shu kabilarga bog'liqdir. Dissipativ tipdag'i jarayonga ma'lum mashtabli vaqt tegishli. Bu vaqt sistemaning boshlang'ich holatiga bog'liq bo'lmaydi. Umuman, dissipativ jarayonlar sistemaning muhim xususiyatini aks ettiradi.

Sistemaning makroskopik miqyosdagi evolutsiyasini xarakterlaydigan kattalik – nomuvozanatli termodinamikaning asoslaridan birini tashkil etgan entropiyadir. Nomuvozanatli termodinamika usulining markaziy qismi – termodinamikaning ikkinchi qonunidir. Bu qonun qaytmas jarayonlar bilan bevosita bog'liq. Bu qonunga ko'ra, sistemaning holat funksiyasi – entropiyaning mavjudligidir. Yakkalangan sistemada qaytmas jarayonlar borganda uning entropiyasi ortadi. Sistema muvozanat holatiga kelgandagina entropiyaning ortishi to'xtaydi va u maksimum qiymatga erishadi. Nomuvozanatli termodinamikaning usosiy vazifasi shu qaytmas jarayon entropiyasi (entropiya paydo bo'lish tezligi) bilan nomuvozanatli holatdagi qaytmas jarayonlar parametrlari orasidagi bog'lanishni aniqlashdan iborat.

8.1. Nomuvozanat jarayonlar termodinamikasining asosiy tenglamalari

Ma'lumki, termodinamik muvozanatdagi sistemalarda temperatura va kimyoviy potensial butun sistema bo'ylab o'zgarmas bo'ladi:

$$\text{grad}T = 0, \quad \text{grad}\mu = 0.$$

Agar bu shartlar bajarilmasa, ya'ni $\text{grad}T \neq 0$, $\text{grad}\mu \neq 0$, bo'lsa, u holda sistemada massa, energiya, elektr zaryadi va h.k. oqimlarni paydo qiluvchi qaytmas jarayonlar yuzaga keladi.

Faraz qilaylik, termodinamik parametrlar – massa, energiya, entropiya va shu kabilar zichligining lokal qiymatlari mavjud bo'lsin, ya'ni cheksiz kichik hajmda bu parametrlar ma'noga ega bo'lsin va bular uchun ma'lum termodinamik munosabatlar o'rinni bo'lsin.

Sistemaning lokal muvozanatdagi bo'lagining holati Gibbs tenglamasi yordamida aniqlanadi:

$$Tds = dE_0 + p dv - \sum \mu_i dc_i. \quad (8.1)$$

Bu yerda μ_i – i -komponentning kimyoviy potensiali, $c_i = M_i/M$ – «solishtirma» massa, $v = V/M$ – «solishtirma» hajm, $s = S/M$ – «solishtirma» entropiya, $E_0 = E/M$ – «solishtirma» energiya. Hamma kattaliklar lokal kattaliklar bo'lib hisoblanadi.

Qaytmas jarayonlar uchun adiabatik sistemalarning birlik hajmida entropiyaning paydo bo'lish tezligi:

$$\sigma = \frac{d(\rho s)}{dt} = \sum_i \frac{\partial(\rho s)}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt}, \quad (8.2)$$

bu yerda ρs – birlik hajmga to'g'ri kelgan entropiya, $a_i(\mathbf{r}, t)$ – termodinamik parametrlar, $\partial(\rho s)/\partial a_i = X_i$ termodinamik kuch, $da_i/dt = I_i$ termodinamik oqim deb yuritiladi. Termodinamik oqim termodinamik parametrlar $a_i(\mathbf{r}, t)$ ning o'zgarish tezligini aniqlaydi. Entropiyaning yuzaga kelish tezligini ifodalovchi (8.2) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\sigma = \sum_i I_i X_i. \quad (8.3)$$

Sistema entropiyasi ayrim bo'laklar entropiyalari yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$S = \int \rho s dV.$$

8.2. Balans tenglamasi va saqlanish qonunlari

Balans tenglamasi va turli xil kattaliklarning saqlanish qonunlarini topaylik. Har qanday ekstensiv kattalik $B(x, y, z, t)$ balans tenglamasiga bo'ysunadi:²

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{I}_B + \sigma_B, \quad (8.4)$$

bu yerda $\mathbf{I}_B = B$ kattalikning oqim zichligi, $B = \rho b$ (ρ – zichlik, b – birlik massaga to'g'ri kelgan qiymati), σ_B – shu kattalikning hajm va vaqtga nisbatan uning manbalari hisobiga o'zgarishi yoki B kattalik o'zgarishini yuzaga kelish tezligi. Agar (8.4) da $\sigma_B = 0$ bo'lsa, u uzluksizlik tenglamasiga o'tadi va B ning saqlanish qonunini ifodalaydi:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{I}_B = 0.$$

Massanining saqlanish qonuni quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (8.5)$$

bu yerda \mathbf{v} – t vaqt momentida x, y, z nuqtadagi massa tezligi. Vaqt bo'yicha to'la hosilani kirlitsak,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad}).$$

Bu holda massanining saqlanish qonuni

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \rho \mathbf{v}.$$

Entropiyaning balans tenglamasi

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{I}_{s,n} + \sigma, \quad (8.6)$$

bu yerda $\mathbf{I}_{s,n} = \mathbf{I}_s + s\mathbf{v}$ – entropiyaning to'la oqimi. (8.6) tenglamani termodinamikaning asosiy tenglamasidan keltirib chiqarish mumkin:

² Elektrodinamika kursidan bunday tenglama o'quvchilarga ma'lum bo'lib, elektromagnit maydon energiyasining saqlanish qonunini yoki balans tenglamasini ifodalagan edi.

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{dE_0}{dt} + P \frac{dv}{dt} - \sum_i \mu_i \frac{dc_i}{dt}.$$

Agar (8.5) formulani hisobga olsak

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{I}_s + \sigma, \quad \mathbf{I}_s = \mathbf{I}_{s,n} - s \rho \mathbf{v},$$

bu yerda $s\rho\mathbf{v}$ – entropiya konvektiv oqimi.

Misol sifatida temperatura gradienti mavjud bo'lgan bir jinsli qattiq jismarda entropiyaning balans tenglamasi va entropiyaning hosil bo'lish tezligi σ ni aniqlaylik. Faraz qilamiz, E_0 – solishtirma ichki energiya bo'lsin. Issiqlikdan kengayish tufayli yuzaga kelgan o'zgarishlarni hisobga olmaymiz:

$$T ds = dE_0.$$

Energiyaning saqlanish qonuni

$$\frac{d}{dt} \int \left(\rho E + \rho \frac{v^2}{2} \right) dV = -\oint j_E ds, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho E + \rho \frac{v^2}{2} \right) = -\operatorname{div} j_E$$

ga ko'ra

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} I_E,$$

bu yerda \mathbf{I}_E – issiqlik oqimining zichligi.

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} \quad \text{va} \quad \rho \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{I}_E,$$

$$T \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial E_0}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{I}_E. \quad (8.7)$$

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{I}}{T} = \frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{I} + \left(\mathbf{I}, \operatorname{grad} \frac{1}{T} \right) = \frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{I} - \frac{1}{T^2} (\mathbf{I}, \operatorname{grad} T)$$

dan foydalanish natijasida (8.7) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = -\operatorname{div} I_s + \sigma. \quad (8.8)$$

Entropiyaning balans tenglamasi. Bu yerda $\mathbf{I}_s = \frac{\mathbf{I}_E}{T}$ – entropiya oqimning zichligi.

$$\sigma = (I, -\frac{1}{T^2} \text{grad}T) = \sum_{i=1}^3 I_i X_i \quad (8.9)$$

$$X_i = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial X_i}$$

oqimga mos kelgan termodinamik kuch.

$$\sigma = \left(I, -\frac{1}{T^2} \text{grad}T \right) = \left(-\alpha \text{grad}T, -\frac{1}{T^2} \text{grad}T \right) = \frac{\alpha}{T^2} (\text{grad}T)^2.$$

Bundan $\alpha > 0$ ligi kelib chiqadi, chunki $\sigma \geq 0$ bo'lishi talab qilinadi (α – issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti).

Yuqorida qaralgan masalaga o'xshash, Gibbs tenglamasi yordamida lokal muvozanat holatda bo'lgan turli xil nomuvozanat sistemalar uchun entorpiya balans tenglamalarini olish mumkin.

8.3. Chiziqli qaytmas jarayonlar

Sistemaning muvozanat holatidan kichik chetlanishlarida u yoki bu qaytmas jarayonlarda «sabab» va «natija» orasida chiziqli bog'lanishlar yuzaga keladi. Boshqacha qilib aytganda, nomuvozanat termodinamikada oqim («natija») berilgan maydon xususiyatini xarakterlovchi gradient («sabab») tufayli yuzaga keladi. Masalan, issiqlik oqimi temperatura gradienti tufayli yuzaga keladi (Fure qonuni):

$$I = -\alpha \text{grad}T,$$

bu yerda α – issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti. Aralashma komponenti oqimining konsentratsiya gradientiga proporsionallik to'g'risidagi diffuziya qonuni (Fik qonuni):

$$I = -D \text{grad}C,$$

$D > 0$ bo'lib, diffuziya koeffitsiyenti deyiladi. Elektr zaryadlar oqimining maydon potensiali gradientiga proporsionalligi to'g'-risida qonun (Om qonuni):

$$I = -\sigma \text{grad}\varphi,$$

$\sigma > 0$ bo'lib, elektr o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti deyiladi va h.k. Boshqa bir qator qaytmas jarayonlarni xarakterlovchi qonuniylatlarni ko'rsatish mumkin.

Ba'zi hollarda «sabab» va «natija» o'rinalarini almashtirish mumkin. Masalan, adiabatik yopiq sistemalarda qaytmas jarayon o'tayotgan bo'lsa, u holda sistema entropiyasi o'sadi. Qaytmas jarayonlar va entropiya o'sishi o'zaro bog'langan hodisalar bo'l-gani uchun, bu yerda sistema entropiyasining o'sishi («sabab») tufayli qaytmas jarayon o'tadi.

Agarda bir vaqtning o'zida bir nechta qaytmas jarayonlar birga o'tsa, u holda yangi hodisa yuzaga keladi. Masalan, issiqlik o'tkazuvchanlik va elektr o'tkazuvchanlik jarayonlarini qo'shilishidan termoelektrik hodisa yuzaga keladi:

$$I = \alpha \text{grad}T - \sigma \text{grad}\varphi$$

diffuziya va issiqlik o'tkazuvchanlik jarayonlarining qo'shilishidan termodiffuziya hodisasi yuzaga keladi:

$$\mathbf{I} = D \text{grad}c - \alpha \text{grad}T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{k}$$

Chiziqli nomuvozanat jarayonlar termodinamik nazariyasini boshlanishi L. Onzager (1931- yil) ishlari bilan bog'langan. Onzager o'z ishlarida chiziqli nomuvozanat jarayonlar fenomenologik termodinamikasini ta'riflaydi va kinetik koeffitsiyentlar orasidagi munosabatni oladi.

Muvozanat holatda termodinamik kuchlar X_i , oqimlar I_i va entropiyani yuzaga kelish tezligi σ nolga teng bo'ladi. Shuning uchun muvozanat holatdan kichik chetlanishlarda oqimlar va kuchlar orasida chiziqli bog'lanish mavjud bo'ladi (chiziqli qonuniyat):

$$I_i = \sum_{k=i}^n L_{ik} X_k. \quad (8.10)$$

Bu chiziqli qonuniyatda L_{ik} koeffitsiyentlar fenomenologik kinetik koeffitsiyentlar deb yuritiladi. Diagonal koeffitsiyentlar L_{ii} «to'g'ri», nodiagonal koeffitsiyentlar «ayqash» yoki «qo'shma» hodisalarning uzluksiz bog'lanishini aniqlaydi. Kinetik koeffitsiyentlar L_{ii} Furye qonunida $L_{ii} = L = \alpha$, Fik qonunida $L_{ii} = L = D$, Om qonunida $L_{ii} = L = \sigma$ va $\mathbf{h} \cdot \mathbf{k}$ ga teng bo'ladi. Kinetik koeffitsiyentlar termodiffuziya hodisasida esa $L_{11} = D$ va $L_{12} = \alpha$ ga teng bo'ladi, chunki termodiffuziya hodisasida oqim

$$I_1 = L_{11} \text{gradc} - L_{12} \text{grad}T$$

ko'inishda bo'ladi.

Chiziqli qonun (8.10) da katta sondagi fenomenologik parametrlar L_{ii} ga kiradi. Ammo, vaqt va fazoviy simmetriya hisobga olinsa, bu kinetik koeffitsiyentlarning o'zaro bog'lanma-ganlarining sonini kamaytirish mumkin bo'ladi.

1931-yilda Onzager shu narsani ko'rsatdiki, oqim I_i va kuch X_i larni mos ravishda tanlashda kinetik koeffitsiyentlar matritsasi simmetrik bo'ladi:

$$L_{ik} = L_{ki}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (8.11)$$

Bu hol Onzagerning o'zarolik munosabati deb yuritiladi. Onzagerning o'zarolik munosabati turli xil jarayonlarning o'zaro ta'siri qandaydir simmetriyaga ega bo'lishini bildiradi (masalan, temperatura gradienti konsentratsiya gradientini yuzaga keltiradi va h.k.).

Ma'lumki, bir vaqtning o'zida magnit induksiya yo'nalishini o'zgartirish shartidagina vaqt ishorasi (vaqt inversiyasi) o'zgar-ganda magnit maydonda zaryadning harakat tenglamasi o'zgarmaydi. Shunga asosan, magnit maydondagi sistema uchun L_{ik} va L_{ki} kattaliklar uchun (8.11) tenglik o'rinni bo'lishidan maydon induksiya yo'nalishini teskari yo'nalishda olish kerak:

$$L_{ik}(\mathbf{B}) = L_{ki}(-\mathbf{B}). \quad (8.12)$$

Qaytmas jarayonlar termodinamikasining chiziqli qonunlari-ga asoslanib, to'g'ridan-to'g'ri kinetik koeffitsiyentlarning qator xususiyatlarini aniqlash mumkin bo'ladi. Haqiqatan ham, shunday jarayonlar uchun umumiy formula (8.9) ga ko'ra entropiyani hosil qilish, termodinamik kuchlar bo'yicha kvadratik (chiziqli fizik qonuniyatlar uchun umumiy qoida) ko'rinish qabul qiladi:

$$\sigma = \sum_{i,k} L_{ik} X_i X_k. \quad (8.13)$$

$\sigma > 0$ bo'lishi uchun kinetik koeffitsiyentlarga ham qandaydir chegaralangan ($L_{ik} > 0$) bo'lishi kerakligi sharti qo'yiladi.

8.4. Qaytmas jarayonlar termodinamikasining variatsion prinsiplari

Qaytmas jarayonlar termodynamikasining asosiy qonunlari va tenglamalari klassik termodinamika va ma'lum chiziqli jarayonlar qonuniyatlarini umumlashtirish natijasida tiklangan. Ana shunday induktiv metoddan tashqari qaytmas jarayonlar termodinamikasining asosiy tenglamalarini umumiyl prinsiplardan deduktiv metod bo'yicha olish yo'llari ham mavjud. 1931-yilda birinchi bo'lib Onzager shuni ko'rsatdiki, chiziqli jarayonlar uchun uning o'zarolik munosabati qandaydir variatsion prinsipga ekvivalent ekan. Onzager shu prinsipni «energiyaning eng kichik (minimal) sochilish prinsipi» deb atadi. Bu nom shu bilan bog'langanki, statsionar holda bu prinsip Onzager tomonidan kritilgan dissipativ funksiyalarining (sochilish funksiyalari) minimumi bilan ifodalanadi. Qaytmas jarayonlarni tahlil qilish natijasida Onzager tomonidan ikkita dissipativ funksiya kiritiladi:

$$\varphi(X, X) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n L_{ik} X_i X_k \geq 0, \quad (8.14)$$

$$\Phi(I, I) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n L_{ik}^{-1} X_i X_k \geq 0. \quad (8.15)$$

Bu funksiyalar

$$\sigma(I, X) = \sum_{i=1}^n I_i X_i \quad (8.16)$$

kabi qaytmas jarayonlarning lokal o'lchovini beradi va bu funksiyalar bir-biridan faqat nomuvazananat holatni tavsvivlash usuli bilan farq qiladi. Chiziqli qonunlar holida σ Onzager dissipativ funksiyalarining ikkilanganligiga teng bo'ladi. Onzager o'zarolik munosabati (8.11) dan foydalanib, bu funksiyalarining potensial xarakterda ekanligini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham (8.14) ifodadan:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_j} = \sum_{k=1}^n L_{jk} X_k, \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_j X_l} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_l X_j} \quad (8.18)$$

o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Shunga o'xshash qolgan ikkita funksiya uchun (8.18) ko'rinishdagi ifodalarni olamiz. Bundan shu narsa kelib chiqadiki, $\varphi(X, X)$, $\Phi(I, I)$ va $\sigma(I, X)$ funksiyalar nomuvozatli potensial funksiyalar bo'lib hisoblanadi. Bu funksiyalardan olingan birinchi tartibli hosila (8.17) chiziqli qonunni ifodalaydi, ikkinchi tartibli hosilasi esa Onzagernerig o'zarolik munosabatiga ekvivalentdir. 1947-yilda Prigojin shu narsani aniqladi – statsionar jarayonlar entropiyaning yuzaga kelish munimumini xarakterlaydi. Uzoq vaqt Prigojin prinsipi qaytmas jarayonlar termodinamikasining yangi bog'lanmagan prinsipi deb hisoblab kelindi. 1965-yilda D'yarmati energiyani eng kam sochilish variatsion prinsipining umumiy ta'rifini beradi. U shuni ko'rsatdiki, Onzager prinsipidan farqli holda Prigojin prinsipi, faqat statsionar jarayonlar uchungina o'rinli bo'ladi va bu holda energiyaning eng kam sochilish prinsipiga ekvivalentdir. 1961-yilda Sigler entropiyaning yuzaga kelishida maksimal tezlik prinsipini ta'riflaydi. Bu ta'rifga ko'ra, berilgan termodinamik kuchlar ta'siri ostida bo'lgan sistema o'zining oxirgi holatiga eng qisqa mumkin bo'lgan usul bilan intiladi. Sigler shuni ko'rsatadiki, uning prinsipi Onzager prinsipiga ekvivalent ekan. Shunday qilib, qaytmas jarayonlar termodinamikasining eng umumiy variatsion prinsipi – «energiyaning eng minimal sochilish prinsipi» bo'lar ekan.

8.5. Onzager prinsipi. Termoelektrik hodisalarga tatbig'i

Qaytmas jarayonlar chiziqli termodinamikasining muhum tatbiqlaridan biri, bu termoelektrik hodisalar nazariyasini tuzishdir, chunki u har doim issiqqlikning qaytmas ko'chishi bilan bog'langandir. Tajribadan izotrop muhitlarda uchta termoelektrik hodisalar ma'lum.

1. *Zeeman effekti.* dT temperatura farqiga ega bo'lgan ikkita har xil o'tkazgichlarning tutashgan qismida $\mathcal{E} = \alpha_{12}T$ elektr yurituvchi kuch paydo bo'ladi. Bu yerda $\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2$ – berilgan o'tkazgichlar orasidagi termo-elektr yurituvchi kuch koefitsiyenti, α_i – berilgan o'tkazgichning differensial termo-EYK koeffitsiyenti. Shuning uchun, agar ikkita har xil o'tkazgichlardan yopiq zanjir tashkil qilib va kontakt joylari turli xil temperaturalarda ushlab turilsa, bu yopiq zanjirda elektr yurituvchi kuch yuzaga keladi.

2. *Peltye effekti*. Termik bir jinsli sistemada o'zgarmas elektr toki o'tganda ikkita har xil o'tkazgichlarning ulangan qismida tok kuchiga proporsional holda issiqlik ajraladi yoki yutiladi. (Peltne issiqligi):

$$q = \Pi j.$$

Bu jarayon Joul issiqligiga qo'shimcha ravishda sodir bo'ladi.

3. *Tomson hodisasi*. Temperatura gradientli o'tkazgichdan elektr toki o'tganda, Joul issiqligidan tashqari, temperatura gradienti va tok kuchiga proporsional holda qo'shimcha issiqlik miqdori (Tomson issiqligi) ajraladi:

$$q_r = \tau(j, \text{grad}T).$$

Bu hodisalarni nazariy tushuntirish uchun entropiyani yuzaga kelish tezligi σ ni topaylik. Buning uchun (8.1), (8.10) va (8.11) ifodalardan foydalanamiz.

Faraz qilaylik, $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$ elektr maydon (φ – maydon potensiali) ta'sirida zaryadlar $-e$ ($e > 0$) ko'chishi natijasida \mathbf{j} zichligi bo'lgan tok vujudga kelsin. Tok o'tayotganda metallning ko'rيلayotgan qismi hajmining o'zgarishini hisobga olmaymiz. Elektr maydon mavjudligida muvozanat, ikki o'tkazgich kontakt qismining sirtida (kimyoviy potensial μ) elektrkimyoviy potensial $\mu - e\varphi$, temperatura T , tok zichligi \mathbf{j} va energiya oqimining zichligi \mathbf{u} uzlusizlik shartida yuzaga keladi.

Agar μ bir mol harakatlanuvchi zaryadlangan zarralarga taalluqli va dN metallning berilgan qismiga kiruvchi zarralarning molyar sonini aniqlaydi deb olsak, bu holda (8.1) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$TdS = dE - (\mu - F\varphi)dN, \quad (8.19)$$

$F = eN_A = 96500$ C/mol – Faradey soni bo'lib, bir mol elektronlar zaryadining absolut kattaligiga teng, N_A – Avogadro soni,

$$\frac{\mu}{F} = \frac{\mu}{eN_A} = \frac{\xi}{e}, \quad \xi = \frac{\mu}{N_A} \quad \text{– bitta elektronga to'g'ri kelgan kimyoviy potensial.}$$

(8.19) tenglamadan vaqt bo'yicha hosila olib quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{T} (\mu - F\varphi) \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (8.20)$$

Bu tenglamadan $\frac{\partial S}{\partial t}$ ni topish uchun $\frac{\partial N}{\partial t}$ va $\frac{\partial E}{\partial t}$ ni topish kerak.

$\frac{\partial N}{\partial t}$ zaryadning saqlanish qonunidan, $\frac{\partial E}{\partial t}$ esa energiyaning saqlanish qonunidan topiladi.

Faraz qilaylik, 1 g metallagi harakatlanuvchi zaryadlarning mollyar soni N bo'lsin. U vaqtida metallda zaryad tashuvchilar soni $N_A N$ ga teng bo'ladi. Agar 1 sm³ metall hajmidagi elektronlar massa zichligi ρ ga teng bo'lsa, u holda birlik hajmdagi zaryad $-\rho N_A Ne$ bo'ladi. Demak, zaryadning saqlanish qonunini ifodalovchi uzluksizlik tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\rho N_A Ne) = \operatorname{div} \mathbf{j},$$

bu ifodadan

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{\rho F} \operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (8.21)$$

Endi energiyaning vaqt o'tishi bilan o'zgarishini topamiz. Metall o'tkazgich orqali tok o'tganda issiqlik oqimi \mathbf{I} tufayli – $\operatorname{div} \mathbf{I}$ ga teng bo'lgan energiya yo'qotadi, shu paytda birlik vaqtida elektr maydoni ta'sirida (\mathbf{jE}) issiqlik energiyasi va birlik hajmda zaryadning ortishi tufayli

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\rho N_A Ne)\varphi = \varphi \operatorname{div} \mathbf{j}$$

qo'shimcha potensial energiya oladi. Shunday qilib, energiyaning saqlanish qonuni bo'yicha

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{I} + (\mathbf{jE}) - \varphi \operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (8.22)$$

(8.21) va (8.22) formulalarni (8.20) ifodaga qo'yib, quyidagi tenglamani olamiz:

$$\rho \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{I}_S = \sigma, \quad (8.23)$$

bu yerda

$$\mathbf{I}_s = \frac{1}{T} \left[\mathbf{I} + \frac{\xi \mathbf{j}}{e} \right], \quad (8.24)$$

entropiya oqimining zichligi,

$$\sigma = \frac{1}{T} \left[\left(\mathbf{I}, -\frac{1}{T} \operatorname{grad} T \right) + \left(\mathbf{j}, \mathbf{E} + T \operatorname{grad} \frac{\xi}{eT} \right) \right] \quad (8.25)$$

vaqt birligida entalpiyaning lokal o'sishi. (8.23)–(8.25) ifodalar entropiya tashqaridan entropiya oqimi va ko'riliyotgan hajmda sodir bo'ladigan qaytmas jarayonlar hisobiga o'zgarishini ko'rsatadi.

Kuchining Ongazer ta'rifiga asosan, (8.25) ifoda

$$\sigma = \frac{1}{T} \sum_i I_i I_{S_i},$$

ko'rinishini oladi, bu yerda \mathbf{I} va \mathbf{j} oqimlarning chiziqli funksiyalaridir. Oqimlarning o'zлari esa chiziqli qonun (8.10) ga ko'ra, (8.25) formuladagi koeffitsiyentlarning chiziqli funksiyasidir:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= -L_{11} \frac{1}{T} \operatorname{grad} T + L_{12} \left(\mathbf{E} + T \operatorname{grad} \frac{\xi}{eT} \right), \\ \mathbf{j} &= -L_{21} \frac{1}{T} \operatorname{grad} T + L_{22} \left(\mathbf{E} + T \operatorname{grad} \frac{\xi}{eT} \right). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Ongazer o'zarolik munosabati (8.11) ga asosan (8.26) ni \mathbf{I} va \mathbf{E} ga nisbatan yechish natijasida quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$I = -\alpha \operatorname{grad} T - \Pi \mathbf{j}, \quad (8.27)$$

$$E = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} + \alpha \operatorname{grad} T - \operatorname{grad} \frac{\xi}{e}, \quad (8.28)$$

bu yerda α , Π , α^{-1} koeffitsiyentlar L_{11} , L_{12} orqali ifodalanadi va ularning ma'nosini (8.27) va (8.28) formulalarni tahlil qilish natijasida aniqlash mumkin.

Haqiqatan ham, o'tkazgichda tok bo'limganda (8.27) dan

$$\mathbf{I} = -\alpha \operatorname{grad} T.$$

Bu ifoda o'tkazgich bo'ylab issiqlik oqimini beradi. Demak, σ – issiqlik o'tkazuvchanlik koefitsiyenti bo'ladi. Bir jinsli o'tkazgichda issiqlik gradienti $\text{grad}T = 0$ bo'lsa, u holda (8.28) munosabat

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

ko'rinishni qabul qiladi va Om qonunining differensial ko'rinishini beradi. Demak, σ – elektr o'tkazuvchanlik koefitsiyenti bo'ladi.

Agar o'tkazgichda $\mathbf{j} = 0$ bo'lsa, u holda (8.28)

$$\mathbf{E} = \alpha \text{grad}T - \text{grad} \frac{\xi}{e}.$$

ko'rinishni oladi. Bundan shu narsa ko'rinaliki, ana shunday o'tkazgichda elektr maydon $\text{grad}T$ va $\text{grad}\xi$ hisobiga mavjud bo'lar ekan. Bu yerda α – termo elektr yurituvchi kuch. Agar $\text{grad}T = 0$ bo'lsa, u holda issiqlik oqimi $\mathbf{I} \neq 0$ va (8.27) dan $\mathbf{I} = -\Pi \mathbf{j}$. Bu oqim zaryadlarni ko'chirish bilan bog'langan. Π Pekiye koefitsiyenti deb yuritiladi.

(8.11) munosabatdan Π va α koefitsiyentlar orasidagi bog'lanishni topamiz:

$$\Pi = \alpha T. \quad (8.29)$$

Bu Tomsonning ikkinchi munosabati deb yuritiladi va Onzagardan prinsipining xususiy holini ifodalaydi.

Onzagardan bo'yicha qaytmas jarayonlarda entropiyani yuzaga keltirish uchun termodinamik kuchlar (8.25) ifodadan quyidagi larga teng bo'ladi:

a) issiqlik o'tkazuvchanlikda

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{T} \text{grad}T;$$

b) elektr toki o'tganda

$$\mathbf{x} = \mathbf{E} = -\text{grad}\varphi;$$

d) diffuziyada

$$\mathbf{x} = -T \text{grad} \frac{\mu}{T}.$$

Bu holda elektr oqimi $\mathbf{I}_e = -\mathbf{j}$ bo'ladi.

Endi termoelektrik hodisalarni olingan tenglamalar asosida turli xil temperaturali ikki xil o'tkazgichlardan tashkil topgan zanjirda qaraylik. (8.28) formulaga ko'ra, bu o'tkazgichlar orasida kontakt potensial farqidan tashqari, o'tkazgichlarning fizikaviy tabiatiga (α) va ularning temperaturasiga bog'liq holda termoelektr yurituvchi kuch yuzaga keladi:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{T_1}^{T_2} \alpha dT.$$

Agar shunday zanjir yopiq bo'lsa va payvand temperaturasi turli joylarida T_1 va T_2 ga teng bo'lsa, u holda zanjirda termoelektr yurituvchi kuch paydo bo'ladi:

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E}^{\text{chet}}, dl) = \oint \alpha dT = \int_{T_1}^{T_2} \alpha_1 dT + \int_{T_2}^{T_1} \alpha_2 dT = \int_{T_2}^{T_1} (\alpha_1 - \alpha_2) dT,$$

α_1 va α_2 larning farqi temperaturaga kuchsiz bog'langan bo'lsa,

$$\mathcal{E} = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_1 - \alpha_2) dT \approx (\alpha_1 - \alpha_2)(T_1 - T_2),$$

bu yerda T_1 – sovuq payvand temperaturasi, T_2 – issiq payvand temperaturasi. Demak, yopiq sistemada termo-EYK faqat turli metallar payvand temperaturalari har xil bo'lgandagina yuzaga kelishi mumkin ekan.

Termo-EYK ning yuzaga kelishi, temperatura gradienti tufayli, tok tashuvchilarining qayta taqsimlanishi bilan bog'langandir.

Zichligi j bo'lgan tok oqib o'tayotgan termik bir jinsli o'tkazgichlar sistemasini olib qaraylik. (8.27) formulaga ko'ra, ikkita turli xil o'tkazgichlar holida (kesmalari yuzasi 1 sm²) payvand joyga tok yo'nalishi bo'yicha birinchi o'tkazgichga 1 °C da $\Pi_1 j$ energiya kelsa, ikkinchi o'tkazgich orqali $\Pi_2 j$ energiya ketadi. Demak, shu o'tkazgichlarning payvand nuqtasida ($\Pi_2 - \Pi_1$)j energiya issiqlik ko'rinishda ajraladi (Pelte issiqligi). Bu hodisa Pelte hodisasi deb yuritiladi. Bundan shu narsa ko'rindikli, Pelte issiqligi tok kuchiga proporsional bo'lib, tajriba natijasiga mos keladi.

Endi tokli termik bir jinsli bo'lмаган sistemani olaylik va vaqt birligida birlik hajmda ana shunday kimyoviy bir jinsli

sistemada energiya o'zgarishi $\rho \frac{\partial U}{\partial t}$ ni topaylik. Buning uchun tok o'zgarmas yoki sekin o'zgaradigan ($\text{div} j = 0$) holida, (8.22) tenglamaga (8.27) va (8.28) ifodalarni qo'yish natijada quyidagi tenglamani olamiz:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}(\alpha \text{grad}T) + \frac{j^2}{\sigma} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} - \alpha \right) (\mathbf{j}, \text{grad}T). \quad (8.30)$$

Bu ifodadan shu narsa ko'rinaridiki, termik bir jinsli bo'limgan sistemada energiyaning o'zgarishi issiqlik o'tkazuvchanlik $\text{div}(\alpha \text{grad}T)$, Joul issiqligi j_z/σ ning ajralishi va issiqlik o'tkazuvchanlik va elektr o'tkazuvchanlik $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} - \alpha \right) (\mathbf{j}, \text{grad}T)$ larning birligida ta'siri bilan bog'langan.

Temperaturaning bir jinsli emasligi natijasida o'tkazgichda qo'shimcha ajraladigan issiqlik miqdori Tomson issiqligi deb ataladi, bu hodisaning o'zi Tomson hodisasi deb yuritiladi. Fenomenologiyadan bu issiqlik quyidagiga teng bo'ladi:

$$q_r = \tau(\mathbf{j}, \text{grad}T),$$

Bu yerda τ – Tomson koefitsiyenti bo'lib, (8.30) ifodadan

$$\tau = \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \alpha. \quad (8.31)$$

Bu Tomsonning birinchi munosabati deb yuritiladi. $(\mathbf{j} \text{grad}T)$ ning ishorasiga qarab, Tomson issiqligi musbat yoki manfiy bo'lishi mumkin. Faqat tok \mathbf{j} yoki faqat $\text{grad}T$ ning qarama-qarshi tomonga o'zgarishida kattalik q_r ishorasini o'zgartiradi. Shu sababdan Tomson hodisasi ba'zida qaytuvchi deb ham yuritiladi.

8.6. Nochiziqli nomuvozanat termodinamika asoslari

Keyingi yillarda qator mualliflarning va eng avvalo I. Prigojin va P. Glensdorf ishlarida kuchli nomuvozanat sistemalar taraqqiy qildi. Kuchli nomuvozanat sistemalarda termodinamik oqimlar va kuchlar orasidagi bog'lanish chiziqli bo'lmasdan

nochiziqli bo'lib qoladi hamda Ongazer o'zaro munosabati bajarilmaydi. Bu yangi, hali tugallanmagan fizikaviy ta'llimot nochiziqli nomuvozanat termodinamika nomini oldi. Bu ta'llimot bo'yicha turli xil nomuvozanat ochiq sistemalarda tartiblashgan strukturalarning (tuzilishlarning) sponton yuzaga kelishi mumkinligiga, ya'ni o'zi tashkillangan (samoorganizatsiya) jarayonga olib keladi.

Shunga o'xshash ayrim misollar oldindan ma'lum. Bu suyuqlikning notekis qizdirilgan gorizontal qatlamida yacheykali strukturalarning, turbalentlikni, uyurmalilarining va h.k. yuzaga kelishi.

Kuchli nomuvozanat ochiq sistemalarda qaytmas jarayonlarda, umuman, hamma hodisalarda tartiblashgan strukturalarning yuzaga kelishi katta guruhdagi molekulalarning birgalikdagi (kooperativ) harakatidir. Nemis olimi G.Xaken shunday o'zi tashkillashgan jarayonlar uchun «sinergetika» (grekcha *synergia* – birgalikda yoki kooperativ ta'sir) atamasini taklif qildi.

Sinergetikaning fizikaviy tabiatini shundan iboratki, muvozanat holatdan uzoqda, nochiziqli sohada sistema barqarorlikni yo'qtadi va kichik fluktuatsiyalar yangi tartibga (rejimga) – ko'p zarralarning birgalikdagi harakatiga olib keladi.

Kuchli nomuvozanat sistemalarda o'zi tashkillanishni yaratilishi fizika, kimyo va ayniqsa biologiya uchun muhim ahamiyatga ega. Chunki, tirik organizm va uning turli xil qismlari juda ko'p nomuvozanat mikrosistemalardan iborat bo'lib, juda katta kimyoviy modda konsentratsiyasi, temperatura, bosim, elektr potensiali gradiente mavjud bo'ladi.

8.7. VIII bobga oid masala va savollar

1. Nomuvozanat jarayonlarning yuzaga kelish sababları.
2. Sistema lokal muvozanati qanday tenglama yordamida aniqlanadi?
3. Entropiyaning hosil bo'lish tezligi.
4. Chiziqli qaytmas jarayonlar sanab o'tilsin.
5. Onzagerning o'zarolik munosabati.
6. Energiyaning eng kam sochilish prinsipi.
7. Termoelektrik hodisalar.
8. Tomsonning birinchi munosabati.
9. Tomsonning ikkinchi munosabati.
10. Tomson issiqligi deb qanday issiqlikka aytildi?
11. Sinergetika. Sinergetikaning fizikaviy tabiatı.

IX bob

FIZIKAVIY KINETIKA

Qaytmas jarayonlar statistik nazariyasining asosiy muammosi, dinamikaning qaytuvchi qonunlaridan qaytmas jarayonlarni ifodalovchi tenglamalarni olishdir. Bu ma'noda Brown harakati nazariyasi katta ahamiyat kasb etgan. Qaytmas jarayonlar nazariyasining rivojlanishiga Lanjeven, Fokker, Plank, Eynshteyn katta hissa qo'shgan.

9.1. Kinetik kimyo

Faraz qilaylik, termostat ichiga tushirilgan sistema termodynamik muvozanat holatida bo'lmasin. Bunday sistemada no-muvozanat jarayonlar o'tadi. Masalan, diffuziya, issiqlik uza-tish, kimyoviy reaksiya va hokazo. Atom-molekular tasavvur asosida nomuvozanat jarayonlarni o'rganish nomuvozanat statistik yoki fizikaviy kinetikaning asosini tashkil qiladi. Sta-tistik fizikaning bu bo'limi fizika va kimyoning bir qator zamo-naviy masalalarini hal qilishda muhim rol o'ynaydi.

Umuman, nomuvozanat holatlar va jarayonlar bir-biridan prinsipial holda farq qiluvchi ikkita fenomenologik va mikroskopik metodlar yordamida o'rniladi. Fenomenologik metod VIII bobda ko'rib chiqildi.

Kinetik metod statistik fizika metodlarini umumlashtirgan va uning keyingi taraqqiyoti hisoblangan nazariya bo'lib, nomuvozanat holatlar va jarayonlarni o'rganishda sistema holatini xarakterlovchi taqsimot funksiyasidan foydalaniladi. No-muvozanat funksiya umumlashgan koordinata, umumlashgan impuls va vaqtga bog'liq bo'ladi. Tashqi maydonlar bo'limgan holda ham nomuvozanat taqsimot funksiyasi koordinataga bog'liq bo'ladi.

Kinetikaning asosiy masalasi: birinchidan, (zamon va makonda) fazo va vaqt bo'yicha taqsimot funksiyasining o'zgarishini aniqlovchi tenglamani topish va ikkinchidan, taqsimot funk-siyasi va sistema holatini xarakterlovchi termodinamik katta liklar oqimlari orasidagi bog'lanishni aniqlashdan iborat.

Nomuvuzanat holatlar va jarayonlar uchun taqsimot funksiyasini topish masalasi muvozanat holatni xarakterlovchi taqsimot funksiyasini topishga nisbatan ancha murakkabdir.

Muvozanat holatni xarakterlashda umumiylar taqsimot funksiyasi – Gibbs taqsimot funksiyasi bo'lib hisoblanadi. Nomuvuzanat holatni xarakterlashda esa, sistemaga ta'sir etuvchi turli xil tashqi kuchlarning ta'siri tufayli, Gibbs taqsimot funksiyasiga o'xshash universal taqsimot funksiyasini topish mumkin emas. Bundan tashqari ko'p hollarda kinetik tenglamaning o'zini juda kuchli cheklanishlar asosida yozish mumkin bo'ladi.

Klassik kinetikada nomuvuzanat jarayonlarni tekshirishda, gazning «siyrak» yoki «zich» bo'lishiga qarab, ikkita metod mavjud.

Ma'lumki, gaz neytral zarralardan tashkil topgan bo'lsa, molekulalar orasidagi o'zaro ta'sir ular orasidagi masofa ortishi bilan kamayadi. Shuning uchun faraz qilish mumkinki, zarralar orasidagi qandaydir masofa r_0 dan boshlab ularning o'zaro ta'sir energiyasi $U(r_0)$ hisobga olmaslik darajada kichik bo'ladi. Ana shu r_0 masofaga molekulalararo kuchning ta'sir radiusi deyiladi. O'zaro ta'sir energiyasi $U(r_0)$ va issiqlik harakat o'rtacha energiyasi bir tartibda deb, r_0 ning qiymatini baholash mumkin, ya'ni $U(r_0) \approx kT$ dan $r_0 \approx 10^{-7} - 10^{-8}$ sm. $r > r_0$ masofalarda zarra inersiyasi bo'yicha yoki tashqi maydonlar ta'sirida harakatlanadi. Agar $r < r_0$ bo'lsa, zarralar orasidagi o'zaro ta'sir asosiy rol o'ynaydi. Zarraning erkin yugurish yo'li $\lambda \gg r_0$ bo'lsa,

gaz siyraklantirilgan hisoblanadi. Erkin yugurish yo'li $\lambda \sim \frac{1}{nr_0^2}$,

bu yerda n – zarralarning hajm zichligi. Shunga ko'ra siyraklantirilgan gaz uchun $\frac{1}{nr_0^2} \gg r_0$ va $nr_0^3 \ll 1$ o'rinli bo'ladi. Bu

tengsizlikdan siyrak gazlarda $n \ll 10^{21} - 10^{24}$ sm⁻³. Siyraklantirilgan gazlarda o'tayotgan nomuvuzanat jarayonlar Bolsman kinetik metodi yordamida o'rganiladi. Agar $\lambda \ll r_0$ bo'lsa, u holda gaz zich deb hisoblaniladi va to'qnashish tushunchasi ma'nosini yo'qotadi, chunki zarralar hamma vaqt qo'shni zarralar ta'sir sferasi ichida bo'ladi. Zichligi katta gazlarda o'tayotgan nomuvuzanat jarayonlar Smoluxovskiy va Fokker–Plank kinetik metodi yordamida o'rganiladi.

9.2. Broun harakatining fizik xarakteristikasi

Broun harakati – suyuqlik yoki gazlarda muallaq zarralarning muhit molekulalari ta'siridagi tartibsiz harakatidir. Broun harakati 1827- yilda ingliz botanigi R. Broun tomonidan kashf etilgan. Broun harakatining yuzaga kelish sabablarining nazarriyasi A.Eynshteyn va polyak olimi M. Smoluxovskiy tomonidan berilgan (1905–1906- y.y.). Broun harakatini tekshirish molekular-kinetik nazariyaning to'g'rilingini isbotladi. Broun harakati muhit molekulalari tomonidan unga tushirilgan makroskopik zarraga uzatiluvchi bosim fluktuatsiyasining natijasidir. Bu narsani ko'rsatish uchun suyuqlik yoki gazga muallaq tushirilgan makroskopik zarraga muhit molekulalari tomonidan ta'sir etuvchi kuchni aniqlaylik. Suyuqlik yoki gazga tushirilgan makroskopik zarraga muhit molekulalari uzlusiz issiqlik harakati tufayli bir sekundda taxminan 10^{12} marta zarba berib turadi va zARBAGA mos holda kuch impulsi uzatiladi. Natijada muhit molekulalari suyuqlik yoki gazdagi makroskopik zarra sirtiga bosim beradi. Agarda makroskopik zarra o'lchami 10^{-4} sm dan katta bo'lsa, zarra har tomonlama zARBALAR ta'sirida muvozanatlashadi va tinch holatda qoladi.⁴ Agar makroskomik zarra o'lchami 10^{-4} sm va undan kichik bo'lsa, u holda statistik muvozanat buziladi, ya'ni muhit molekulalari tomonidan zarra sirtiga teng ta'sir etuvchi kuch noldan farqli bo'lib qoladi. Natijada makroskopik zarra tartibsiz harakatlana boshlaydi. Bu hol makroskopik zarraga kelib uriluvchi muhit molekulalar sonini va uzatiluvchi impuls (va demak, bosimni) katta fluktuatsiyaga duchor bo'lishligini ko'rsatadi.

Broun harakatining miqdoriy nazariyasini berishda fluktuatsiya nazariyasining VII bobdag'i munosabatlaridan foydalanamiz.

Faraz qilaylik, suyuqlik yoki gazga m massali makroskopik, lekin juda kichik Broun zarrasi muallaq tushirilgan bo'lsin. Bu Broun zarrasining holatini qandaydir umumlashgan parametr x xarakterlasin. Eynshteyn bitta Broun zarrasini vaqt bo'yicha kuzatish o'rniga suyuqlik yoki gazga tushirilgan bir xildagi Broun zarralaridan tashkil topgan juda ko'p zarralar oqimini kuzatishni taklif qiladi. Bu zarralar muhit molekulalarining issiqlik harakat fluktuatsiyasi tufayli muhit tomonidan vaqt bo'yicha tartibsiz o'zgaruvchi kuch ta'siriga duchor bo'ladi.

Bu fluktuatsiya kuchi ta'sirida Broun zarralari oqimi kichik siljishga duchor bo'ladi. Muhitda qandaydir faraziy sirt orqali o'tuvchi Broun zarralar miqdorini topaylik.

Faraz qilaylik, biror x sirdan x , $x + \Delta x$ masofadagi bir birlik hajmdagi zarralar soni $c(x)$ bo'lsin. $\Delta = \sqrt{(\Delta x)^2}$ esa kichik τ vaqt davomida zarraning o'rtacha kvadratik siljishi bo'lsin. U vaqtida τ vaqt davomida 1 sm^2 faraziy sirt orqali chapdan o'ngga harakatlanuvchi Broun zarralarining o'rtacha soni $c(x - \Delta/2)\Delta/2$ bo'ladi. Shu vaqt davomida ko'rilib yotgan sirt orqali o'ngdan chapga harakatlanuvchi Broun zarralar soni $c(x + \Delta/2)\Delta/2$ bo'ladi. Natijada 1 sm^2 faraziy sirdan o'tgan zarralar soni

$$N = j\tau = \left[c\left(x - \frac{\Delta}{2}\right) - c\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) \right] \frac{\Delta}{2} \quad (9.1)$$

bo'ladi, bu yerda j – zarralar oqimi, r – Broun zarrasini kuzatish vaqt. Δ kichik deb hisoblab, $c(x)$ ni esa x koordinatalarning sekin o'zgaruvchi funksiyasi deb qarasak, (9.1) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$N \simeq -\frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial c}{\partial x}. \quad (9.2)$$

Bundan

$$j = -\frac{\Delta^2}{2\tau} \frac{\partial c}{\partial x} \quad (9.3)$$

kelib chiqadi. Zarralar oqimi uning konsentratsiyasi gradientiga proporsional va uning kamayishi tomon yo'nalgan. Bu yerda

$$D = \frac{\Delta^2}{2\tau} \quad (9.4)$$

diffuziya koeffitsiyenti deyiladi. (9.4) dan zarraning o'rtacha kvadratik siljishi

$$\Delta = \sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{2D\tau}. \quad (9.5)$$

Demak, zarralarning o'rtacha kvadratik siljishi kuzatish vaqt τ dan olingan ildizga proporsional bo'lar ekan.

Agarda zarralar oqimi, konsentratsiyasi gradientidan tashqari har bir Broun zarrasiga ta'sir etuvchi tashqi f kuch tufayli yuzaga kelayotgan bo'lsa, u holda zarralarning to'la oqimi

$$j = -D \frac{\partial c}{\partial x} + vc. \quad (9.6)$$

Bu yerda $v = bf$ – zarraning muhitdag'i tezligi (Stoks formulasi), $b = C\eta r$ – zarraning harakatchanligi, r – uning radiusi, η – muhit yopishqoqligi, C – proporsionallik koeffitsiyenti bo'lib, sferik zarra uchun 6π ga teng. f kuchga javob beruvchi potensial energiyani U desak, (9.6) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$j = D \frac{\partial c}{\partial x} - bc \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (9.7)$$

Faraz qilaylik, tashqi maydon ta'sirida yuzaga kelgan zarralar oqimi konsentratsiya tufayli yuzaga kelgan zarralar oqimiga teng va qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsin, bu holda zarralarning to'la oqimi j nolga aylanadi va natijada (9.6) dan zarralar konsentratsiyasining taqsimotini olamiz:

$$c = c_0 \exp\left(-\frac{bU}{D}\right). \quad (9.8)$$

Ikkinchchi tomondan, o'zaro ta'sirda bo'limgan zarralarning tashqi maydondagi taqsimoti Bolsman bo'yicha

$$c = c_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right). \quad (9.9)$$

(9.8) va (9.9) tengliklardan diffuziya koeffitsiyenti D ni topamiz:

$$D = bkT = \frac{kT}{C\eta r}.$$

Cferik zarralar uchun

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}.$$

Natijada, (9.5) quyidagicha yoziladi:

$$\Delta = \sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{\frac{kT\tau}{3\pi\eta r}}. \quad (9.10)$$

Shunday qilib, Broun zarralari o'tgan o'rtacha siljish muhit temperaturasi, yopishqoqligi, zarra o'lchami va zarraning qaytish vaqtiga bog'liq bo'ladi. (9.10) formulaga kiruvchi kattaliklar ma'lum yoki o'lhash mumkin. Bu formula yordamida Avagadro soni N_A va, demak, atomlarning absolut massasini aniqlash imkonini berdi. Broun harakati bo'yicha o'tkazilgan 1908-yildagi Jan Perren tajribalarda moddalarning molekular-kinetik nazariyasini to'g'rilingini va molekular jarayonlarning qaytuvchanlik prinsipi isbotlandi. Bu tajribalarda topilgan Avagadro soni ($N_A = 6,44 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$) ning qiymati o'sha davr uchun eng aniqlaridan biri bo'lib hisoblangan.

9.3. Smoluxovskiy tenglamasi

Nomuvozanat holatda yotgan bir atomli gazni olib qaraylik. Gaz holati olti o'lchovli – fazalar fazosidagi traektoriya bo'yicha harakatlanuvchi N ta tasviriy nuqtalar to'plami bilan xarakterlanadi.

Tasviriy nuqtalar zichligi yoki nomuvozanat holatlar uchun koordinata, impuls va vaqtga bog'liq bo'lgan taqsimot funksiya $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ ni kiritamiz. Taqsimot funksiya

$$\iiint f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} dp = N$$

sharti bilan normalashtirilgan. Bu yerda N – gazdagi to'la zarralar soni.

Taqsimot funksiyasi $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ ni topish masalasi fizikaviy kinetikaning muhim masalalaridan biri bo'lib hisoblanadi. Bu funksiyani bilish sistemaning nomuvozanat holatiga tegishli bir qator masalalarni yechish imkonini beradi. Masalan, bunday masalaga ko'chish hodisasida kinetik koeffitsiyentlar – diffuziya, issiqlik o'tkazuvchanlik va hokazolarni topish kiradi. Faraz qilaylik, L – bitta molekulaga tegishli kinetik energiya, impulsi va hokazo additiv bo'lgan fizik kattalik bo'lsin. U holda

$$\bar{L} = \frac{\int L f d\mathbf{p}}{\int f d\mathbf{p}}, \quad \bar{L v_i} = \frac{\int L v_i f d\mathbf{p}}{\int f d\mathbf{p}}.$$

Bu ifodalar mikroskopik kattalik uchun fazoviy zichlik va oqim zichligini xarakterlaydi. v_f – zarralar tezligi.

Biz zichligi katta bo'lgan gazlarni qaraylik. Har bir zarra bir vaqtida juda katta sondagi qo'shni molekulalar bilan o'zaro ta'sirda bo'lgani uchun, uning qolgan zarralar taqsimotiga ta'siri hisobga olmaslik darajada kichik bo'ladi. Shu bilan birga sistema zarralarining taqsimot funksiyasini topish bitta zarrani qolgan boshqa zarralar hosil qilgan maydondagi harakati masalasiga olib kelinadi. Zarra harakatda bo'lganligi tufayli, bu maydon fluktuatsiyalanadi va tanlangan zarra harakati tasodifiy (stoxastik) bo'ladi. Ana shunday tasodifiy jarayonlar uchun zarraning τ vaqt davomida x nuqtadan y nuqta yaqinidagi dy hajm elementiga o'tish ehtimolligi tushunchasini kiritish mumkin. x va y simvollar bilan nuqtalarni, dy simvol bilan fazoning elementar hajmini belgilaymiz. Agar x nuqtadan y nuqtaga τ vaqt davomida t vaqt momentida (tasviriy nuqtaning x dan chiqish vaqt) o'tish ehtimolligi zichligini $W(y, x/\tau, t)$ bilan belgilasak, o'tish ehtimolligi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$dw = W(y, x/\tau, t)dy. \quad (9.11)$$

Bu o'tish ehtimolligi faqat boshlang'ich va oxirgi holatlар bilan aniqlanadi. Va sistema qanday yo'l bilan x va y holatlarga tushishiga bog'liq bo'lmaydi. Ana shunday jarayonlar Markov jarayoni deyiladi. Boshqacha qilib aytganda, Markov jarayoni holida kelajak uchun jarayonning tasodifiyligi xarakteristikasi faqat hozirgi vaqt momentidagi jarayon xarakteristikasiga bog'liq bo'ladi va bu jarayon oldin qanday o'tganligiga bog'liq bo'lmaydi.

Shunday qilib, (9.11) faqat ana shu juft holatlarga bog'liq bo'ladi. Ana shunday holatlarning to'plamining ehtimollik nazar-riyasida Markov zanjiri deyiladi. Markov jarayonlari katta zichlikdagi gaz va suyuqliklarda kinetik jarayonlarni yuqori aniqlik bilan tavsiflaydi. Zarrani x nuqtadan y nuqtaga $t + \tau$ vaqt davomida oraliq z nuqta orqali o'tishini qaraylik. Bu yerda $t - x$ nuqtadan z nuqtaga o'tish vaqt, τ esa z nuqtadan y nuqtaga o'tish vaqt. x nuqtadan z nuqtagacha va z nuqtadan y nuqtagacha o'tish jarayonlari bog'lanmagan bo'lgani uchun, x nuqtadan dy intervalga dz aniqlik bilan oraliq nuqta orqali o'tish ehtimolligi

$$W(y, z/\tau, t_0 + t)W(z, x/t, t_0)dydz \quad (9.12)$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda t_0 zarraning x nuqtadan chiqish vaqt. (9.12) ni oraliq nuqta z ning hamma holatlari bo'yicha integral-

lash natijasida x nuqtadan y nuqtaga $t + \tau$ vaqt davomida t_0 vaqt momentida o'tish ehtimolligi zichligi uchun quyidagi ko'ri-nishdagi nochiziqli integral tenglamani olamiz:

$$W(y, x/t + \tau, t_0) = \int W(y, z, /t, t_0 + t)W(z, x/t, t_0)dz. \quad (9.13)$$

Bu tenglamaga Smoluxovskiy tenglamasi deyiladi. Smoluxovskiy tenglamasi umumiy xarakterga ega bo'lib, tatbiq qilish sohasi ancha keng.

9.4 Batafsil muvozanat prinsipi

Endi batafsil muvozanat prinsipi deb ataluvchi muhim fizik qonuniyatni ko'rib chiqaylik. Sistema mikroholatlarining vaqt bo'yicha o'zgarrishini aniqlovchi qonunlar yoki klassik mexanika qonunlari yoki kvant mexanika qonunlari bo'lib hisoblanadi. Berk sistema holi uchun har ikkala qonunlar vaqt ishorasi t ni $-t$ ga o'zgartirishga nisbatan simmetrikdir.

Klassik mexanikaning asosiy tenglamasi

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i$$

vaqtga nisbatan ikkinchi tartiblidir. Shuning uchun t ni $-t$ ga o'zgartirilganda tenglamaning chap tomoni invariant qoladi, o'ng tomoni esa umuman t ni oshkora holda o'z ichiga olmaydi.

Kvant mexanikasida spinsiz zarralar holi uchun vaqt t ni $-t$ ga almashtirilganda sistema to'lqin funksiyasi $\psi(q_i, t)$ uchun Shredinger tenglamasi

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

kompleks qo'shma funksiya $\psi^*(q_i, t)$ uchun tenglamaga aylanadi:

$$i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \hat{H}\psi^*.$$

To'lqin funksiyalar $\psi(q_i, t)^*$ va $\psi(q_i, t)$ bir holatning o'zini xarakterlaydi, ammo tok zichligi vektori \mathbf{j} ishorasi o'zgargan bo'ladi. Ikkinci tomondan t ni $-t$ ga almashtirganda sistemaning bosh-

lang'ich va oxirgi holatlari o'z o'rinalarini almashtirgan bo'ladi. Shuning uchun $x \rightarrow y$ va $y \rightarrow x$ ga to'g'ri va teskari o'tish ehtimolliklari bir xilda bo'lishi kerak va $W(y, x/\tau, t)$ funksiya birinchi juft argumentlari bo'yicha simmetrik bo'ladi, ya'ni

$$W(y, x/\tau, t) = W(x, y/\tau, t).$$

Bu tasdiq batafsil muvozanatlar prinsipi deb yuritiladi.

9.5. Fokker–Plank tenglamasi

Katta zichlikdagi gazda nomuvozanat jarayonlarning xususiy holi – sekin jarayonlarni qaraylik. Bunday jarayonlar uchun Smoluxovskiy tenglamasini soddalashtirish va Fokker–Plank differensial tenglamasiga keltirish mumkin.

Faraz qilaylik, makroskopik sistemada sekin jarayonlar o'tayotgan bo'lsin. Bu shuni anglatadiki, sistema holating muhim o'zgarishlari kam ehtimollikka ega bo'ladi. Demak, $x \rightarrow y$ o'tish ehtimolligi $|y - x|$ farqning o'sishi bilan tez kamayadi. Shuning uchun sistema holati nisbatan kam o'zgarganda o'tish ehtimolligi ancha katta bo'ladi.

Foker–Plank tenglamasini chiqarishga o'taylik. Buning uchun Smoluxovskiy tenglamasi (9.13) ni quydagicha yozaylik ($t_0 = 0$):

$$W(y, x/t + \tau, 0) = \int W(y, z, / \tau, t) W(z, x/t, 0) dz \quad (9.14)$$

– fazalar fazosida integrallanuvchi ixtiyoriy $g(x)$ funksiyani kiritaylik. $g(x)$ funksiya quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) \rightarrow 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial g}{\partial x_i} \rightarrow 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} \rightarrow 0, \dots$$

(9.14) tenglamaning har ikkala tomonini $\frac{1}{\tau} g(y) dy$ ga ko'paytirib, ning hamma qiymatlari bo'yicha integrallaymiz:

$$\int W(y, x/t + \tau, 0) \frac{1}{\tau} g(y) dy = \frac{1}{\tau} \int \int W(y, z, / \tau, t) W(z, x/t, 0) g(y) dy dz. \quad (9.15)$$

Bu tenglamaning o'ng tomonidagi $g(y)$ ni $(y_i - z_i)$ ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoyamiz:

$$g(y) = g(z) + \frac{\partial g}{\partial z_i} (y_i - z_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_k} (y_i - z_i)(y_k - z_k) + \dots$$

Bu qatorni (9.15) ning o'ng tomoniga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int W(y, x/t + \tau, 0) g(y) dy &= \frac{1}{\tau} \int \left[g(z) + \frac{\partial g}{\partial z_i} (y_i - z_i) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_k} (y_i - z_i)(y_k - z_k) + \dots \right] W(y, z/\tau, t) W(z, x/t, 0) dy dz. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Bu tenglamaning o'ng tomonidagi qo'shiluvchilarni soddalashтиraylik. (9.15) ning birinchi hadi normirovka sharti

$$\int W(y, x/\tau, t) dy = 1$$

ga ko'ra birga teng. Sekin jarayonlarda $(y_i - z_i)$ ayirma kichik bo'lganligi uchun integral ostidagi $(y_i - z_i)$ ayirmaning yuqori darajalari qatnashgan integrallar yaqinlashuvchi bo'ladi. Shuning uchun ikinchi tartibli haddan keyingi tartibli hadlar qatnashuvchi integrallar juda kichik bo'lishini inobatga olib, ularni hisobga olmaymiz. U holda (9.16) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int g(y) [W(y, x/t + \tau, 0) - (W(y, x/t, 0))] dy - \\ = \int a_i^{(\tau)}(z, t) \frac{\partial g}{\partial z_i} W(z, x/t, 0) dz - \\ - \frac{1}{2} \int b_{ik}^{(\tau)}(z, t) \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_k} W(z, x/t, 0) dz = 0. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Bu yerda

$$a_i^{(\tau)}(z, t) = \frac{1}{\tau} \int (y_i - z_i) W(y, z/\tau, t) dy,$$

$$b_{ik}^{(\tau)}(z, t) = \frac{1}{\tau} \int (y_i - z_i)(y_k - z_k) W(y, z/\tau, t) dy.$$

Bu yerda olti o'lchovli vektor $a_i^{(\tau)}$ fazalar fazosida tasviriy nuqtaning t vaqt momentida va z nuqtadagi (τ) vaqt davomidiagi o'rtacha tezligini beradi. Olti o'lchovli tensor $b_i^{(\tau)}$ birlik vaqtga nisbatan (τ) vaqt davomida tasviriy nuqtaning i - va k -silijs proeksiyalari oralig'ida korrelatsiya funksiyasini beradi.

Bu tenzorning shpuri esa (diogonal elementlar yig'indisi) birlik vuqtga nisbatan (τ) vaqt davomida tasviriy nuqtaning o'rtacha kvadratik siljishini beradi:

$$b_{ii}^{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \int (y_i - z_i)^2 W(y, z/\tau, t) dy. \quad (9.18)$$

(9.17) tenglamani $\tau \rightarrow 0$ hol uchun qaraymiz va

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} a_i^{(\tau)}(z, t) = a_i(z, t), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} b_{ik}^{(\tau)}(z, t) = b_{ik}(z, t)$$

bilan belgilaymiz. Ikkinci va uchinchi hadlarni bo'laklab integrallash, chegaraviy shartni hisobga olish va integrallash o'zgaruvchisi z ni y bilan almashtirish natijasida (9.17) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned} & \int g(y) \left[\frac{\partial W(y, x/t, 0)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_i} [W(y, x/t, 0) a_i(y, t)] \right] - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} [W(x, y/t, 0) b_{ik}(y, t)] dy = 0. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Bu $g(y)$ funksianing ixtiyoriyligidan (9.19) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W(y, x/t, 0)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_i} [W(y, x/t, 0) a_i(y, t)] - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} [W(y, x/t, 0) b_{ik}(y, t)] = 0. \end{aligned} \quad (9.20)$$

(9.20) tenglama Fokker–Plank tenglamasi yoki monomolekular kinetik tenglama deyiladi. Monomolekular kinetik tenglama deb atash shuni anglatadiki, sistema zarralarining kollektiv hurakatlari masalasini bitta zarraning «tentirashi», qolgan zarralarning joylashishi bo'yicha o'rtachalangan harakat masalasiga aylanganligini ko'rsatadi.

O'tish ehtimollik zichligi $W(y, x/\tau, t)$ taqsimot funksiyasi $f(x, t)$ bilan qanday bog'langanligini aniqlaylik. Bu yerda $x = \mathbf{r}, \mathbf{p}$. Faraz qilaylik, Γ - fazoda $t = 0$ da x nuqtada taqsimot funksiyasi $f(x, 0)$ bo'lsin. U holda t vaqt ichida dx hajmdan echiqib ketgan zarralar soni

$$dx \int W(z, x/t, 0) f(x, 0) dz,$$

shu vaqt ichida dx hajmga kirgan zarralar soni

$$dx \int W(x, z/t, 0) f(z, 0) dz$$

bo'ladi. t vaqt ichida dx hajmdagi zarralar sonining o'zgarishi

$$[f(x, t) - f(x, 0)] dx = dx \int [W(x, z/t, 0) f(z, 0) - W(z, x/t, 0) f(x, 0)] dz,$$

dx ga qisqartirish va normirovka sharti

$$\int W(z, x/t, 0) dz = 1$$

ni hisobga olish natijasida quyidagi tenglamani olamiz:

$$f(x, t) = \int W(x, z/t, 0) f(z, 0) dz. \quad (9.21)$$

(9.21) shuni ko'rsatdiki, $W(y, x/\tau, t)$ ga ko'paytirish va z bo'yicha integrallash bir vaqtida Γ -fazoda $x - z$ vektorga va t vaqt bo'lagi bo'yicha siljishiga ekvivalent ekan.

Shunday qilib, (9.20) tenglamani $f(x, 0)$ taqsimot funksiyaga ko'paytirib, x bo'yicha integrallash natijasida $f(y, t)$ taqsimot funksiyasi uchun Fokker-Plank tenglamasini olamiz:

$$\frac{\partial f(y, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_i} [f(y, t) a_i(y, t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} [f(y, t) b_{ik}(y, t)] = 0. \quad (9.22)$$

(9.22) ni Γ -fazalar fazosida uzlusizlik tenglamasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial j_i}{\partial y_i} = 0. \quad (9.23)$$

Bu yerda j_i – olti o'lchovli tok zichligi vektori komponentlari:

$$j_i = a_i(y, t) f(y, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_k} [b_{ik}(y, t) f(y, t)]. \quad (9.24)$$

Fokker-Plank tenglamasining (9.23) ko'rinishda yozilishi ba'zi bir umumlashtirishlarga olib keladi. Xususan, agar x, y, z, \dots

nuqtalarni uch o'lchovli fazo nuqtalari deb qarasak, u holda j_i uch o'lchovli fazoda tok zichligini, vektor a_i zarranining oddiy tezligi v ni, tenzor b_{ik} esa koordinata o'qlari yo'nallishi bo'yicha zurralar siljishlari orasidagi korrelatsiya funksiyasini beradi. Bu holda Broun zarrasi uchun olingan fluktuatsiya ifodasi (9.10) ni keltirib chiqarish mumkin.

Tashqi maydonda bo'limgan gazni olib qaraylik. Bu holda fazo va vaqtning bir jinsliligi tufayli o'tish ehtimolligi zichligi fuqat nuqtalar orasidagi masofaga bog'liq bo'lib, vaqtga bog'liq bo'lmasligi kerak, ya'ni $W(y, x/\tau, \tau + t) = W(|y - x|, \tau)$. Natijada $a_i(y, t)$ va $b_{ik}(y, t)$ uchun quyidagilarni olamiz:

$$a_i(y, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int W(|y - x|, \tau) (y_i - x_i) dx = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int W(|z|, \tau) z_i dz = 0$$

- integral ostidagi funksiyaning toqligiga asosan,

$$b_{ik}(y, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int W(|y - x|, \tau) (y_i - x_i) (y_k - x_k) dx = b \delta_{ik},$$

bu yerda

$$b = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int W(|z|, \tau) z_i^2 dz = \text{const.}$$

Fokker-Plank tenglamasi (9.23) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} b \nabla^2 f.$$

Bu esa diffuziya tenglamasi

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \nabla^2 f$$

ga mos tushadi. Bu tengliklardan Enshteyn munosabati $b = 2D$ ni olamiz (D - diffuziya koeffitsiyenti). Agar x ni gaz molekulasingin koordinatasi bo'lmasdan, gaz yoki suyuqlikda muallaq turgan Broun zarrasining koordinatasi deb qarasak, bu holda Fokker-Plank tenglamasi zarra harakatini xarakterlaydi. U vaqtda uch o'lchovli fazo holi uchun (9.18) ga asosan

$$\overline{\Delta x^2} = b\tau = 2D\tau. \quad (9.25)$$

Agar Broun zarrasi tashqi maydon ta'sirida bo'lsa, u holda (9.24) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\mathbf{j} = \mathbf{a}f - \frac{1}{2}b\nabla f. \quad (9.26)$$

Muvozanat holatda zarralar taqsimoti Bolsman taqsimoti bilan xarakterlanadi:

$$f = f_0 \exp\left(-\frac{U(x,y,z)}{kT}\right).$$

Tok zichligi $\mathbf{j} = 0$ bo'ladi. Demak, (9.26) dan quyidagi ifodani olamiz:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= f_0 \left(\mathbf{a} + \frac{1}{2} \frac{bU(x,y,z)}{kT} \right) \exp\left(-\frac{U(x,y,z)}{kT}\right) = \\ &= f_0 \left(\mathbf{a} - \frac{b\mathbf{F}}{2kT} \right) \exp\left(-\frac{U(x,y,z)}{kT}\right) = 0, \\ \mathbf{a} &= \mathbf{v} = \frac{b\mathbf{F}}{2kT} = \frac{D\mathbf{F}}{kT} = q\mathbf{F}. \end{aligned}$$

Yopishqoq suyuqlikning zarra harakatiga ko'rsatadigan qarshiligi uchun – Stoks formulasi. Bu yerda $q = \frac{D}{kT}$ – harakatchanlik, $\mathbf{F} = -\nabla U$ – kuch. Olingan kattaliklarni (9.25) ga qo'yish natijasida, ma'lum ifoda (9.10) ni olamiz.

Agar tasviriy nuqtalar to'plamini qandaydir aynan nomuvozanatdagi sistema ansambliga javob beradi deb qarasak, u holda taqsimot funksiyasi $f(y,t) = \rho(\lambda,t)$ ning tasviriy nuqtalar zichligi, vektor \mathbf{j} ni esa fazalar fazosida tasviriy nuqtalarning oqim zichligi deb qarash mumkin. Agar a_i va b_{ik} o'zgaruvchi λ ga bog'liq bo'lmasa, u holda (9.23) va (9.24) quyidagi ko'rinishlarni oladi:

$$\frac{\partial \rho(\lambda,t)}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{va} \quad j_i = a_i \rho - D \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}$$

yoki

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(a \rho - D \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right) = -a \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \lambda^2} = 0.$$

Statsionar holatda bir o'chovli hol uchun Fokker–Plank tenglamasi oson integrallanadi:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[a\rho - \frac{\partial}{\partial \lambda} (D\rho) \right] = 0.$$

Ajgar zarralar oqimi cheksizlikda nolga teng bo'lsa, yuqoridagi ifodani integrallash natijasida

$$\frac{\partial(D\rho)}{\partial \lambda} = a\rho$$

ni olamiz. Bundan

$$\rho(\lambda) = \frac{\text{const}}{D} \exp \left[\int_0^\lambda \frac{a(\lambda')}{D(\lambda')} d\lambda' \right].$$

9.6. Kinetik balans tenglama

O'tish ehtimollik zichligi $W(y, x/\tau, t)$ ning taqsimot funksiyasi $f(x, t)$ bilan bog'lanish masalasiga qaytamiz. Ifoda (9.21) ning ko'rinishini quyidagicha yozib olaylik:

$$f(y, t + \tau) = \int W(y, x/\tau, t) f(x, t) dx. \quad (9.27)$$

O'tish ehtimolligi zichligi $W(y, x/\tau, t)$ ni τ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyib, birinchi ikki had bilan chegaralaylik; u holda

$$W(y, x/\tau, t) = \Phi(y, x, t) + \tau P(y, x, t),$$

bu yerda $P(y, x, t)$ — vaqt birligida t vaqt momentida x nuqtadan y nuqtaga o'tish ehtimolligi zichligi, $\Phi(y, x, t)$ esa «bironta» x nuqtadan y nuqtaga o'tish ehtimolini beradi.

Nol vaqt davomida zarra x nuqtani tashlab keta olmaydi, τ ning nolinchi darajali hadini quyidagicha yozamiz:

$$\Phi(y, x, t) = A(y, t) \delta(y - x). \quad (9.28)$$

Normirovka sharti

$$\int W(y, x/\tau, t) dy = 1$$

vni (9.28) ga asosan

$$A(x, t) = 1 - \tau \int P(y, x, t) dy. \quad (9.29)$$

Bu ifodadan foydalanib, o'tish ehtimolligi zichligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$W(y, x/\tau, t) = 1 - \tau \int P(z, y, t) dz \delta(y - x) + \tau P(y, x, t). \quad (9.30)$$

(9.30) ni (9.27) ga qo'yib, $\tau \rightarrow 0$ da limitga o'tish natijasida quyidagi kinetik balans tenglamani olamiz:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \int [P(x, z, t)f(z, t) - P(z, x, t)f(x, t)] dz. \quad (9.31)$$

(9.31) ning chap tomoni vaqt birligi ichida t vaqt momentida x nuqtada zarralar zichligining o'zgarishini beradi. Bu o'zgarish x nuqtaga hamma z nuqtalardan kelgan zarralar va x nuqtagidan ketgan zarralar bilan bog'langan. Shuning uchun (9.31) tenglama kinetik balans tenglama nomi bilan yuritiladi.

Kinetik balans tenglamada Γ - fazalar fazosida holatning klassik tavsiflashdan kvant mexanikaviy diskret tavsiflashga o'tish mumkin. Bu holda, taqsimot funksiyasi $f(x, t)$ ning i - holatidagi zarralar soni $N_i(t)$, vaqt birligida z nuqtadan x nuqtaga o'tish ehtimoli $P(x, z, t)$ ni k - holatdan i - holatga o'tish ehtimolligi $P_{ik}(t)$ va $P(z, x, t)$ ni i - holatdan k - holatga o'tish ehtimolligi $P_{ki}(t)$ bilan almashtiramiz. U holda (9.31) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_{k \neq i} (P_{ik} N_k - P_{ki} N_i). \quad (9.32)$$

Agar sistema yopiq bo'lsa, u holda batafsil muvozanat prinsi o'rinali bo'ladi:

$$P(x, y, t) = P(y, x, t)$$

yoki

$$P_{ik}(t) = P_{ki}(t).$$

Bu holda (9.32) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_{k \neq i} (P_{ik}(t)(N_k - N_i)). \quad (9.33)$$

(9.32) va (9.33) tenglamalar nochiziqli integro-differensial tenglamalar bo'lib, faqat xususiy hollarda yechilishi mumkin.

Misol sifatida ikkita aynimagan E_1 va E_2 energetik sathli atomlardan tashkil topgan ideal gazni olib qaraylik. Faraz qilaylik, gaz termostat bilan kontaktda bo'lsin. Termostat ta'siri tufayli gazda atomlar bir holatdan boshqa holatga o'tishi yuzaga keladi. Natijada, o'tishlar atomlarning to'qnashishi tufayli emas, balki tashqi ta'sir ostida ro'y beradi. Shuning uchun o'tish ehtimolliklari P_{12} va P_{21} to'ldirish sonlariga va vaqtga bog'liq bo'lmaydi. Gaz yopiq sistema bo'lmasligi tufayli, batafsil muvozanat prinsipi o'rinsiz bo'ladi, ya'ni $P_{12} \neq P_{21}$. Kinetik balans tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{dN_1}{dt} = P_{12}N_2 - P_{21}N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = P_{21}N_1 - P_{12}N_2.$$

Tenglamalar sistemasi yechimini $N_i = C_i e^{\alpha t}$ ko'rinishda qidiramiz, u vaqtida C_i lar uchun algebraik tenglamalar sistemasini olamiz:

$$(\alpha + P_{21})C_1 - P_{12}C_2 = 0, \quad -P_{21}C_1 + (\alpha + P_{12})C_2 = 0.$$

Bu tenglamalar notrivial yechimga ega bo'lishi uchun quyidagi shart bajarilishi kerak:

$$\alpha(\alpha + P_{12} + P_{21}) = 0.$$

Bu tenglikdan $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -P_{12} - P_{21}$. Birinchi yechim muvozanat holatni beradi:

$$N_1^{(1)} = C_1, \quad N_2^{(1)} = C_2 = C_1 \frac{P_{21}}{P_{12}}.$$

$N = N_1 + N_2$ shartiga asosan

$$N_1^{(1)} = \frac{NP_{12}}{P_{12} + P_{21}}, \quad N_2^{(1)} = \frac{NP_{21}}{P_{12} + P_{21}}.$$

Ikkinci yechim esa statsionar holatdan eksponensial holda kumayuvchi chetlashishni beradi:

$$N_{1,2}^{(2)} = \pm n \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Demak, umumi yechim statsionar rejimga yaqinlashuvchi relaksion jarayonni tavsiflaydi;

$$N_1 = \frac{NP_{12}}{P_{12} + P_{21}} + n \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad N_2 = \frac{NP_{21}}{P_{12} + P_{21}} - n \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

bu yerda n – relaksiya vaqtı, boshlang‘ich shartlardan topiladi ($n = N_1 - N_1^{(1)} = N_2^{(1)} - N_2$ $t = 0$ da).

Agar gaz aynimagan bo‘lsa, Maksvell–Bolsman taqsimotidan foydalanib,

$$\frac{P_{12}}{P_{21}} = \exp\left(\frac{E_1 - E_2}{KT}\right)$$

ni topamiz. Agar $E_1 < E_2$ va $(E_1 - E_2)/KT \gg 1$ bo‘lsa, u holda $P_{21} < P_{12}$ va $\tau \approx 1/P_{12}$ bo‘ladi.

9.7. Eynshteyn bo‘yicha Plank formulasining kinetik isboti

Biz murakkabroq masala – termostatda yotgan elektromagnit nurlanish bilan muvozanatda bo‘lgan atomlar sistemasini olib qaraylik. Bu masala 1916- yillarda Eynshteyn tomonidan qaralgan. Bu hol yorug‘lik nurlanishi uchun Plank formulasining kinetik isbotiga olib keldi.

E_i va E_k energetik sathlarda yotgan atomlarni olib qaraylik. Batafsil muvozanat prinsipiغا ko‘ra vaqt birligida $i \rightarrow k$ va $k \rightarrow i$ ga o‘tish sonlari teng bo‘ladi. $E_i > E_k$ deb hisoblaylik. Bu holda $i \rightarrow k$ o‘tishda $E_i - E_k$ energiya nurlanishi yuz beradi, $k \rightarrow i$ o‘tishda esa shunday miqdordagi energiyani yutish yuz beradi. Natijada: $k \rightarrow i$ o‘tishda o‘tish soni ν chastotadagi nurlanish energiyasi zichligi $\rho(\nu, T)$ ga proporsional bo‘ladi:

$$n_{ki} = B_{ki} N_k \rho(\nu, T),$$

B_{ki} – proporsionallik koeffitsiyenti. $i \rightarrow k$ o‘z-o‘zidan o‘tish soni:

$$n_{ik}^{\text{spont}} = A_{ik} N_i$$

bo‘ladi. A_{ik} – sponton nurlanish koeffitsiyenti. Eynshteyn fikricha $i \rightarrow k$ ga o‘tishda sponton nurlanish bilan birga yuz beruvchi induksiyalangan nurlanish jarayoni ham mavjud bo‘ladi. Bu induksiyalangan o‘tish soni

$$n_{ik}^{\text{ind}} = B_{ik} N_i \rho(\nu, T)$$

bo'ladi. B_{ik} – majburiy nurlanish koeffitsiyenti, n_{ki} va n_{ik} – o'tish sonlari. N_i va N_k – i - va k - holatidagi zarralar soni.

Statsionar va muvozanat holatda $k \rightarrow i$ ga va $i \rightarrow k$ ga o'tish sonlari teng bo'ladi:

$$n_{ki} = n_{ik}^{\text{spont}} + n_{ik}^{\text{ind}}$$

yoki

$$B_{ki} N_k \rho(\nu, t) = A_{ik} N_i + B_{ik} N_i \rho(\nu, t).$$

Yuqorida keltirilgan ifodadan nurlanish energiya zichligi

$$\rho(\nu, T) = \frac{A_{ik} N_i}{B_{ki} N_k - B_{ik} N_i} = \frac{A_{ik}}{B_{ki} N_k / N_i - B_{ik}}.$$

Statsionar holatda N_i va N_k zarralar soni Maksvell–Bolsman taqsimotini qanoatlantirishi kerak:

$$\frac{N_k}{N_i} = \frac{g_k}{g_i} \exp\left(\frac{E_i - E_k}{kT}\right),$$

chunki $N_s = g_s \exp\left(-\frac{E_s}{kT}\right)$. Natijada

$$\rho(\nu, T) = \frac{\frac{g_i A_{ik}}{g_k B_{ki}}}{\exp\left(\frac{E_i - E_k}{kT}\right) - \frac{g_i B_{ik}}{g_k B_{ki}}}. \quad (9.34)$$

$T \rightarrow \infty$ da $\rho(\nu, T)$ chegaralanmagan holda ortishi uchun $g_i B_{ik} = g_k B_{ki}$ deb hisoblash kerak. U holda (9.34) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho(\nu, T) = \frac{\frac{A_{ik}}{B_{ik}}}{\exp\left(\frac{E_i - E_k}{kT}\right) - 1}. \quad (9.35)$$

Vinning termodinamik qonuniga ko'ra $\rho(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ ko'ri-nishda bo'lishi kerak. Shunga asosan, biz $E_i - E_k = h\nu$ va $A_{ik}/B_{ik} = A\nu^3$ deb hisoblaymiz. U holda (9.35) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho(\nu, T) = \frac{A\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}, \quad (9.36)$$

o'zgarmas A ni $h\nu/kT \ll 1$ shartdan topiladi. Kichik chastotalar sohasida (9.36) klassik qonun Reley-Jins formulasiga o'tadi:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi kT\nu^2}{c^3}.$$

$h\nu/kT \ll 1$ da (9.36) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\rho(\nu, T) = \frac{A\nu^3}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = \frac{AkT\nu^2}{h}.$$

Bu ifodani Reley-Jins formulasi bilan solishtirish natijasida o'zgarmas kattalik A uchun quyidagini olamiz:

$$A = \frac{8\pi h}{c^3}. \quad (9.37)$$

(9.37) ni (9.36) ga qo'yish natijasida quyidagi ko'rinishdagi ifodani olamiz:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}.$$

Bu ifoda Plank formulasi bo'lib, biz uning kinetik isbotini keltirdik.

Endi biz induksiyalangan, ya'ni majburiy nurlanish kvant kuchaytirish va nurlanish generatorlari nazariyasida muhim rol o'ynashini qarab chiqaylik.

Faraz qilaylik, E_i energetik sathli atomlarni o'z ichiga olgan.

Muhitga $\nu = \frac{E_i - E_k}{h}$ chastotali monoxromatik yorug'lilik dastasi tushayotgan bo'lsin. Bu nurlanish qisman E_k energetik sathda yotgan atomlar tomonidan yutiladi. Yutilgan bu energiya miqdori J_a esa $k \rightarrow i$ ga o'tish soniga va yutilgan $h\nu = E_i - E_k$ energiyaga proporsional bo'ladi:

$$J_a = n_{ki} h\nu = B_{ki} N_k \rho(\nu, T) h\nu.$$

Ikkinchi tomondan, E_i energetik sathli holatdagi atomlar ν chastyotali to'lqinni ham sponton va hamda induksiyalangan (majburiy) holda nurlantiradi. Nurlanuvchi energiya miqdori J_e esa $i \rightarrow k$ ga o'tishda sponton va majburiy nurlanishlar soniga va $h\nu$ energiyaga proporsional bo'ldi:

$$J_e = (n_{ik}^{\text{spont}} + n_{ik}^{\text{ind}})h\nu = A_{ik}N_i h\nu + B_{ik}N_i \rho(\nu T)h\nu.$$

Nurlangan va yutilgan energiya miqdorlarining farqi J :

$$J = J_e - J_a = \rho(\nu, T)h\nu[B_{ik}N_i - B_{ki}N_k] + A_{ik}N_i h\nu.$$

Bu ifodadan quyidagi muhim xulosa kelib chiqadi: Agar $J = J_e - J_a > 0$ bo'lsa, muhit shu nurlanish kuchaytirgichi bo'la oladi. Boshqacha qilib aytganda, muhit manfiy absorbsiyaga ega bo'lsa, ya'ni $(B_{ik}N_i - B_{ki}N_k) > 0$ bo'lsa. Bu shart bajarilishi mumkin, agar zarralarni pastki energetik sathdan yuqori energetik sathga ko'chirishda inversiya bandligi hosil qilinsa:

$$B_{ik}N_i > B_{ki}N_k \quad \text{yoki} \quad \frac{N_i}{N_k} > \frac{B_{ki}}{B_{ik}} = \frac{g_i}{g_k}, \quad \text{yoki} \quad \frac{N_i}{g_i} > \frac{N_k}{g_k}.$$

Bu esa bitta holatga hisoblangan E_i energiyali yuqori sathdagi atomlar soni $n_i = N_i/g_i$, E_k energiyali pastki sathdagi holatda yotgan atomlar soni $n_k = \frac{N_k}{g_k}$ dan katta bo'lsa. Inversiya hosil qilish mumkin, agar muhit absolut manfiy temperaturali holatda bo'lsa, ya'ni $T < 0$ bo'lsa. Ana shunday holatni hosil qilib turish mumkin, agarda zarralarni uzlusiz holda pastki energetik sathdan yuqori energetik sathga so'rib olib turilsa. Ana shu metod asosida lazerlar (kvant kuchaytiruvchilar) va mazerlar (elektromagnit to'lqin generatorlarini) qurilgan.

9.8. IX bobga oid masala va savollar

1. η koeffitsiyentli yopishqoq muhitda harakatlanuvchi m massali Broun zarrasining o'rtacha kvadratik siljishi aniqlansin. Zarra radiusi r_0 .
2. Og'irlilik maydonidagi Broun zarrasi uchun kvadratik o'rtacha siljish aniqlansin.

Yechish. Faraz qilaylik, og'irlik kuchi z o'qi bo'yicha ta'sir etayotgan bo'lzin, u holda $U = mgz$. Broun zarrasining tezligi

$$a = qF = -q \frac{\partial U}{\partial z} = -qmg.$$

Ikkinchi tomondan, Fokker-Plank tenglamasiga ko'ra

$$a = \frac{1}{\tau} \overline{(z - z_0)} \text{ yoki } \overline{(z - z_0)} = a\tau = -qmg\tau.$$

Agarda og'irlik kuchi maydoni bo'lmasa,

$$\overline{(z - z_0)^2} = b\tau = 2D\tau.$$

Og'irlik kuchi maydoni ta'sir etayotgan bo'lsa,

$$\overline{(z - z_0)^2} = 2D\tau - \tau q \overline{(z - z_0)F} = 2D\tau + (qmg)^2 \tau^2.$$

Bu yerda D – diffuziya koeffitsiyenti. $q = \frac{1}{6\pi\eta\eta_0}$ ekanligini hisobga olsak,

$$\overline{(z - z_0)^2} = 2D\tau + \left(\frac{mg}{6\pi\eta\eta_0} \right)^2 \tau^2.$$

3. Massasi m va radiusi r_0 bo'lgan Broun zarrasining τ vaqt davomida kvadratik o'rtacha siljishi $\overline{(\Delta x)^2}$ ga teng bo'lsa, Avogadro soni N_A aniqlansin.

4. Statsionar rejimda zarralar bir o'lchovli potensial to'siq $U(x)$ orqali diffuziyalanadi. Agar x_1 va x_2 kesimlarda zarralar sonining zichligi ma'lum bo'lsa, zarralar oqimining zichligi topilsin.

5. Berilgan o'rtacha energiya va zarralar sonida bir jinsli gaz uchun H-funksiyasining minimumlik sharti Maksvell taqsimotiga olib kelishi ko'rsatilsin.

Yechish.

$$S = -kH, \quad H = \iint f(r, v, t) \ln f(r, v, t) dr dv.$$

Muvozanat holatida sistemaning entropiyasi maksimum bo'ladi, H -funksiyaning birinchi variatsiyasi $\delta H = 0$ va ikkinchi variatsiyasi $\delta^2 H \gg 0$ bo'lishi kerak. Qo'shimcha shartlar:

$$\int \left[\frac{mv^2}{2} + U(r) \right] f(r, v, t) dr dv = E,$$

$$\int f(r, v, t) dr dv = N.$$

$$\frac{\partial}{\partial N} (S + \alpha E + \lambda N) = 0$$

entropiyaning maksimumlik shartiga asosan quyidagi yordamchi funksionalni tuzamiz:

$$H' = \int \left\{ \beta \left[\frac{mv^2}{2} + U(r) \right] + \ln f(r, v, t) + \lambda \right\} f(r, v, t) dr dv.$$

Bu funksionalning birinchi variatsiyasini nolga tenglashtiramiz:

$$\frac{\delta H'}{\delta f} = \beta \left[\frac{mv^2}{2} + U(r) \right] + (\lambda + 1) + \ln f(r, v, t) = 0.$$

Uning ikkinchi variatsiyasi noldan katta bo'lishi kerak:

$$\frac{\delta^2 H'}{\delta^2 f} = \frac{1}{f} > 0.$$

Bu minimumlik shartidir. Birinchi variatsiya ifodasidan

$$f = A \exp \left\{ -\beta \left[\frac{mv^2}{2} + U(r) \right] \right\}.$$

Bu ifoda Maksvell-Bolsman taqsimotini ifodalaydi. $A = e^{-\lambda-1}$ normirovka shartidan topiladi, $\beta = \frac{1}{kT}$.

6. Tashqi maydon $U(\bar{r})$ ning mavjudligida Bolsman kinetik tenglamasining statsionar yechimi Maksvell-Bolsman taqsimoti funksiyasi ekanligi ko'rsatilsin.

7. Broun harakati. Eynshteyn ishlari.
8. Smoluxovskiy tenglamasi va uning fizik ma'nosi.
9. Batafsil muvozanat prinsipi.
10. Monomolekular tenglama va uning fizik ma'nosi.
11. Fokker-Plank tenglamasi.
12. Broun zarrasining fluktuatsiyasi.
13. Klassik kinetik balans tenglama va uning fizik ma'nosi.
14. Kvant kinetik balans tenglama va uning fizik ma'nosi.
15. Plank formulasining kinetik isboti.
16. Lazer va mazerlarning ishslash prinsipi.

X bob

KINETIK TENGLAMALAR

Kinetik nazariyaga Maksvell va Bolsman qariyb bir yuz ellik yil muqaddam asos solishgan. Bolsman muhim ahamiyatga ega bo'lgan N-teoramani ta'rif-lagan. Maksvell klassik gazlar uchun tezliklar bo'yicha taqsimot funksiyasini topgan. Bu asos soluvchi ishlarga tan berib, ushbu bobni kinetik tenglamani o'rganishdan boshlaymiz.

10.1. Bolsmanning kinetik tenglamasi

9.6- bandda olingan asosiy kinetik tenglamani yechishda bir qator qiyinchiliklarda duch kelinadi. Shuning uchun asosiy kinetik tenglamani oddiy tenglama bilan almashtirish mumkin bo'lgan fizik sistemalarni ko'rib chiqamiz. Siyraklashgan gazlarni o'rganishga o'taylik.

Asosiy kinetik tenglama N , sonni aniqlaydi yoki sistema zarralari orasida mavjud bo'lgan hamma bog'lanishlar va o'zaro ta'sirlarni hisobga olgan holda, holatlar bo'yicha zarralar taqsimotini aniqlaydi.

Ammo bir qator hollarda, xususan, siyrak ideal gazlarda, makrosistema holatini ana shunday ko'rinishda xarakterlash haddan tashqari batafsil bo'lib hisoblanadi. Klassik yaqinlashishda berilgan holatdagi zarralar soni o'rniga sistema holatini uzluksiz taqsimot funksiyasi yordamida xarakterlash mumkin. Ideal gazlarda zarralar orasida o'zaro ta'sirning yo'qligi tufayli sistema taqsimot funksiyasi ayrim zarralar taqsimot funksiyalarining ko'paytmalari ko'rinishida ajraladi. Demak, ayrim zarralar taqsimot funksiyalarining berilishi ideal gaz holatini yaxlit holda xarakterlashga imkon beradi.

Nomuvozanat siyrak ideal gaz molekulalari uchun taqsimot funksiyasini qarab chiqaylik. Ideal gazda har bir molekulani kvazi yopiq sistemacha deb qarash mumkin. Muvozanatdagi gazdan farqli holda nomuvozanat holatdagi gaz taqsimot funksiyasi koordinata, impuls va vaqtga bog'liq bo'ladi. Faraz qilay-

lik, $dn = t$ vaqt momentida tasviriy nuqtalari fazalar fazosi elementar hajmi $d\gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z = dp dV$ da yotgan molekulalar soni bo'lsin. U holda $dn = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)d\gamma$, bu yerda $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ – izlanuvchi taqsimot funksiyasi. Elementar hajm $d\gamma$ dagi molekulalar sonining vaqt bo'yicha o'zgarishi gaz molekulalari orasidagi to'qnashish bilan bog'langan.

Agar impulslari \mathbf{p}_1 va \mathbf{p}_2 bo'lgan ikkita molekulaning to'qnashishi natijasida, ulardan birortasi \mathbf{p} impuls olsa, u holda uning tasviriy nuqtasi $d\gamma$ fazo elementiga kiradi. Aksincha, agar \mathbf{p} impulsiga ega bo'lgan molekula boshqa molekula bilan to'qnashib, yangi impulsiga ega bo'lsa, uning tasviriy nuqtasi $d\gamma$ hajmdan chiqadi. Hajm elementi qancha katta bo'lsa, vaqt birligi ichida tasviriy nuqtalari shu hajmdan chiquvchi va kiruvchi molekulalar soni ham shuncha katta bo'ladi. Vaqt birligida suzalar fazosi elementar hajmida zarralar sonining o'zgarishi

$$\frac{d(dn)}{dt} = \frac{df(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{dt} d\gamma = (b - a)d\gamma. \quad (10.1)$$

Bu yerda $(ad\gamma) = (\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \rightarrow (\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ tip to'qnashish natijasida tasviriy nuqtalari $d\gamma$ hajm elementini tark etgan molekulalar soni, $(bd\gamma)$ esa $(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$ tip to'qnashish tufayli tasviriy nuqtalar $d\gamma$ hajm elementiga kirgan molekulalar soni. Agar

$$\frac{df(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$$

tenglamani hisobga olsak, (10.1) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I. \quad (10.2)$$

Bu yerda $\mathbf{p}/m = \mathbf{v}$ – molekula tezligi, $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ – t vaqt momentida impuls va koordinatlari $d\gamma$ fazaviy hajm elementida yotgan molekulaga ta'sir etuvchi kuch.

$$I = b - a \quad (10.3)$$

ifoda to'qnashish integrali deb yuritiladi. Masala to'qnashish integralini topishdan iborat. To'qnashish integralini faqat to'qnashishlar juft-juft holda o'tuvchi yetarli darajada siyraklan-

tirilgan gazlar uchun hisoblash mumkin. Faraz qilaylik molekulalarning to'qnashishi qattiq sharlarning elastik to'qnashish qonuni bo'yicha yuz bersin.

Bir xil zarralarning juft-juft holda elastik to'qnashishlarida impuls va energiyaning saqlanish qonunlari quyidagicha yoziladi:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3, \quad (10.4)$$

$$\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2. \quad (10.5)$$

Molekulalarning elastik to'qnashish jarayonini $d\Omega_1$ fazoviy burchak elementida sochilish differensial effektiv kesimi bilan xarakterlash mumkin. Bu holda effektiv kesim to'qnashuvchi zarralarning nisbiy tezligining absolut kattaligi $v_n = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$ va sochilish burchagi $\alpha = \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$ ga bog'liq bo'ladi. Tezhigi \mathbf{v} bo'lgan zarraning $d\Omega_1$ fazoviy burchakda sochilish differensial effektiv kesimi

$$d\sigma = \sigma(v_n, \alpha) d\Omega_1.$$

Impulsi \mathbf{p} bo'lgan $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} dV$ bilan aniqlangan zarralarning har biri bir sekundda balandligi v_n va asos yuzasi $d\sigma$ bo'lgan silindr ichida yotgan \mathbf{p}_1 impulsli zarralar bilan $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) d\mathbf{p}_1 v_n d\sigma$ marta to'qnashadi. $d\gamma$ fazoviy hajm elementida yotgan zarring bir sekund ichidagi juft-juft to'qnashishlarining to'la soni

$$\sigma(v_n, \alpha) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) v_n d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 dV d\Omega_1$$

ga teng bo'ladi.

Bunday to'qnashishlar $(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \rightarrow (\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ tip to'qnashishlarga mansub bo'lib, hamma fazoviy burchak Ω_1 va \mathbf{p}_1 impulsning hamma qiymatlari bo'yicha integralash natijasida tasviriy nuqtalari $d\gamma$ hajm elementidan chiquvchi molekulalar soni $ad\gamma$ ni olamiz:

$$ad\gamma = d\mathbf{p} dV \int [v_n \sigma(v_n, \alpha) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) d\mathbf{p}_1] d\Omega_1$$

yoki

$$a = \iint [v_n \sigma(v_n, \alpha) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) d\mathbf{p}_1] d\Omega_1. \quad (10.6)$$

$b\delta\gamma$ kattalikni hisoblash uchun $(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$ tip to'qnashishlarni qaraymiz. Bu to'qnashishlar d γ fazoviy hajm elementida tasviriy nuqtalar sonini ortishiga olib keladi. $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ impulsli molekulalarning bir sekund ichida to'qnashishlar soni

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) d\mathbf{p}_2 dV_1 \cdot f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) d\mathbf{p}_3 v_n \sigma(v_n, \alpha) d\Omega_1 \quad (10.7)$$

ga teng bo'ladi. Bu yerda $v_n = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3|, \alpha = \alpha(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Elastik to'qnashishning klassik mexanika qonunlari (10.7) ifodani sod-dalashtirishga imkon beradi. (10.4) va (10.5) shartlarni qanoatlantiruvchi $(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$ tip to'qnashishlar uchun $v_n = v_n, d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 = d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1$ va $\alpha = \alpha$ larni isbotlash mumkin. Shuning uchun (10.7) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) v_n \sigma(v_n, \alpha) d\mathbf{p}_1 d\Omega_1. \quad (10.8)$$

Bu ifodani \mathbf{p}_1 va Ω_1 ning hamma qiymatlari bo'yicha integrallash natijasida $b\delta\gamma$ kattalikni topamiz:

$$b\delta\gamma = d\mathbf{p} dV \iint v_n \sigma(v_n, \alpha) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) d\mathbf{p}_1 d\Omega_1,$$

yoki

$$b = \iint v_n f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) d\mathbf{p} \sigma_1 d\Omega_1. \quad (10.9)$$

a va b uchun topilgan (10.6) va (10.9) ifodalar to'qnashishlar integralini aniqlaydi:

$$I = b - a = \iint \sigma v_n [f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t)] d\mathbf{p}_1 d\Omega_1. \quad (10.10)$$

(10.10) ni (10.2) ifodaga qo'yish natijasida quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial r} + F \frac{\partial f}{\partial p} =$$

$$= \iint \sigma v_n [f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t)] d\mathbf{p}_1 d\Omega_1. \quad (10.11)$$

$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t), f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t), f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t)$ larni, mos ravishda f, f_1, f_2, f_3 orqali belgilasak va $d\Omega_1$ kattalikni indeksiz yozsak, (10.11) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial r} + F \frac{\partial f}{\partial p} = \iint \sigma v_n [f_2 f_3 - f f_1] dp_1 d\Omega. \quad (10.12)$$

Taqsimot funksiyasiga nisbatan integro-differensial tenglama (10.12) birinchi marta Bolsman tomonidan olingan bo'lib, Bolsman kinetik tenglamasi deb yuritiladi. Bolsman tenglamasining tatbiq qilish sohasi ideal gaz fizikaviy kinetika doirasidan chetga chiqadi. Shuning uchun Bolsman tenglamasini tatbiq qilish sohasi juda kengdir. Xususan, ideal gazlardan mohiyati bo'yicha tamoman farq qiluvchi, ammo Bolsmanning kinetik tenglamasini isbotlashda foydalanilgan talablarga rasmiy tomondan qanoatlantiruvchi bir qator fizik-kimyoviy sistemalar (10.12) tenglama asosida tasvirlanadi.

Matematik nuqtayi nazardan Bolsman tenglamasi xususiy hosilali nochiziqli integro-differensial tenglamadir. Bu tenglamani yechish ancha murakkab masaladir. Chunki tenglama konkret ma'noga ega bo'lishi va uni yechish uchun effektiv kesimning nisbiy tezlik va sochilish burchagiga bog'liqligini va gaz zarrasiga ta'sir etuvchi kuch maydonini bilishi kerak. Ammo xususiy hollarda ham (10.12) ni integrallash ancha murakkab masaladir. (10.12) tenglamani ($\mathbf{r}, \mathbf{v}, t$) o'zgaruvchanlarda yozsak,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \iint \sigma v_n [f_2 f_3 - f f_1] dv_1 d\Omega \quad (10.13)$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamani vektorlarning tashkil etuvchilari orqali yozamiz:¹

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\mathbf{F}_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = \iint \sigma v_n [f_2 f_3 - f f_1] dv_1 d\Omega. \quad (10.14)$$

Bolsman tenglamasi, hatto, ideal gazlarda faqat juft-juft o'zarot ta'sirni hisobga olganda ham murakkab ko'rinishni saqlab qoldi.

10.2. Bolsman tenglamasining statsionar yechimi

Bolsman tenglamasining eng sodda yechimi sifatida uning statsionar yechimini xususiy holda, ya'ni tashqi maydon $U = 0$ bo'lganda ko'raylik. Statsionar holatda f taqsimot funksiyasi

¹ Takrorlanuvchi indekslar «soqov» indekslar deyiladi va ular bo'yicha albatta yig'indi ko'zda tutiladi.

nuqtga oshkor ko'rinishda bog'lanmagan bo'ladi, ya'ni $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Bundan tashqari, tashqi kuch bo'lmasligi tufayli, fazoda ajratilgan nuqtalar yo'q, shuning uchun f taqsimot funksiyasi koordinatlarga ham bog'liq bo'lmaydi, ya'ni $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$. Natijada (10.12)

tenglamaning chap tomoni nolga teng bo'ladi va f taqsimot funksiya quyidagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$\iint \sigma v_n [f_2 f_3 - ff_1] d\mathbf{p}_1 d\Omega = 0.$$

Bu tenglamaning xususiy yechimi $f_2 f_3 - ff_1 = 0$ shartdan yoki funksional tenglama

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) \quad (10.15)$$

dan topiladi. (10.15) ni logarifmlab, unga impuls va energiyaning saqlanish qonunini qo'llasak, u holda quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\ln f(\mathbf{p}_2) + \ln f(\mathbf{p}_3) = \ln f(\mathbf{p}) + \ln f(\mathbf{p}_1), \quad (10.16)$$

(10.16) tenglamalar sistemasini

$$\ln f(\mathbf{p}) = a\mathbf{p} + b\mathbf{p}^2 + c = b(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^2 + A$$

funksiya qanoatlantiradi. Bu yerda a, b, c, \mathbf{p}_0, A – konstantalar. Shunday qilib, Bolsman tenglamasining xususiy statsionar yechimi

$$f(\mathbf{p}) = B \exp[b(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^2] \quad (10.17)$$

ko'rinishda bo'ladi, ya'ni tezlik bilan harakatlanuvchi sanoq sistemasida Maksvell taqsimoti bo'lib hisoblanadi, chunki $b = -1/2mkT$ deb tanlash mumkin, konstanta B esa normirovka sharti

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} dr = N$$

dan aniqlaniladi. Bu yerda N – molekulalarning to'la soni. Hisoblash natijasi

$$B = \frac{N}{V} \left(\frac{1}{2\pi m k T} \right)^{3/2} = n \left(\frac{1}{2\pi m k T} \right)^{3/2}$$

ekanligini ko'rsatadi. Olingan kattaliklarni (10.17) ga qo'yish natijasida Bolsman tenglamasining xususiy statsionar yechimi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$f(\mathbf{p}) = n \left(\frac{1}{2\pi m k T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)^2}{2m k T} \right]. \quad (10.18)$$

$\bar{p}_x = \frac{1}{N} \int p_x f(\mathbf{p}) d\mathbf{p} dr = p_{0x}$ ekanligini ko'rsatish mumkin. Agar gaz yaxlitligicha harakatlanmasa, u holda $\bar{p}_x = \bar{p}_y = \bar{p}_z = 0$ bo'ladi va (10.18) quyidagicha yoziladi:

$$f(\mathbf{p}) = n \left(\frac{1}{2\pi m k T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{\mathbf{p}^2}{2m k T} \right]. \quad (10.19)$$

Maksvell taqsimoti (10.18) yoki (10.19) Bolsman tenglamasining yagona statsionar yechimini yoki (10.15) tenglamani qanoatlantiruvchi boshqa statsionar yechimlar ham mavjudmi degan muhim savolni aniqlash masalasi turadi. Bu savolni yechish uchun Bolsmanning H-teoremasini qarab chiqishimiz kerak.

10.3. Bolsmanning H-teoremasi va entropiyaning o'sish qonuni

Statistik fizikada muvozanatdagi sistemalarda entropiyani o'sish qonuni mukammal yoritildi. Unda entropiyaning o'sishi aniqlandi. Shu narsa ko'rsatildiki, yopiq sistema holati o'zgar-ganda oxirgi holat entropiyasi boshlang'ich holat entropiyasiga nisbatan har doim katta bo'ladi. Biroq statistik doirada qarash bilan sistemani boshlang'ich holatidan oxirgi holatiga o'tishning qanday bajarilishini aniqlash mumkin emas. Kinetikada esa entropiyaning o'zgarish xarakterini o'rganish va ideal gaz entropiyasining vaqt bo'yicha rnonoton o'sishini ko'rsatish mumkin bo'lar ekan. Muvozanat holatdagi berk sistema entropiyasi

$$S = -k \iint \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \ln \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} dr$$

bo'lgani kabi, kinetikada ham entropiya ana shu ko'rinishda bo'ladi:
342

$$S = -k \iint f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \ln f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} d\mathbf{r}. \quad (10.20)$$

Bolsman (10.20) ifodada integralni $H(t)$ - funksiya bilan belgilab oladi:

$$H(t) = \iint f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \ln f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} d\mathbf{r}. \quad (10.21)$$

(10.21) ifodaga Bolsmanning H - funksiyasi deb aytildi. Binobarin, sistema entropiyasi H - funksiya bilan

$$S = -kH \quad (10.22)$$

ko'rinishda bog'langan.

Biz eng avval $H(t)$ funksiyani Bolsman tenglamasidan foy-dalanib, vaqt bo'yicha kamayuchi, ya'ni $\frac{dH}{dt} \leq 0$ bo'lishligini imbotlaylik. U holda (10.20) ga asoslanib, entropiyaning vaqt bo'yicha o'sishini ko'rsatgan bo'lamiz.

(10.21) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{dH}{dt} = \iint (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (10.23)$$

Normirovka shartiga asosan (10.23) ning birinchi hadi nolga teng:

$$\iint \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial t} \iint f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} d\mathbf{r} = \frac{\partial N}{\partial t} = 0.$$

U holda (10.13) ga asosan, (10.23) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{dH}{dt} = \iint \left[-v \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v} + I \right] \ln f d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (10.24)$$

(10.24) ifodada quyidagi integrallar nolga teng:

$$\int \frac{\partial f}{\partial r} \ln f dr = f \ln f \Bigg|_{\text{lower}}^{\text{upper}} - \int \frac{\partial f}{\partial r} dr = f(\ln f - 1) \Bigg|_{\text{lower}}^{\text{upper}} = 0,$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial v} \ln f dv = f \ln f \Bigg|_{\text{lower}}^{\text{upper}} - \int \frac{\partial f}{\partial v} dv = f(\ln f - 1) \Bigg|_{\text{lower}}^{\text{upper}} = 0,$$

Bu yerda kuch tezlikka bog'liq emas deb hisoblangan. Natijada to'qnashish integrali (10.10) ni hisobga olib (10.24) ni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{dH}{dt} = \iiint \sigma v_n \ln f (f_2 f_3 - f f_1) dr dv dv_1 d\Omega. \quad (10.25)$$

Impuls va energiya saqlanish qonunlarining simmetriyasiga ko'ra, (10.25) ifodada $(v, v_1) \rightarrow (v_2, v_3)$ bilan va, aksincha, $(v_2, v_3) \rightarrow (v, v_1)$ bilan almashtirish mumkin. Bundan tashqari Liuvill teoremasidan foydalaniib, $dv_2 dv_3 = dv dv_1$ va $v'_n = v_n$, $\sigma(v'_n, \alpha') = \sigma(v_n, \alpha)$ ekanligini hisobga olsak, (10.25) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{dH}{dt} = \iiint \sigma v_n \ln f_1 (f_2 f_3 - f f_1) dr dv dv_1 d\Omega, \quad (10.26)$$

$$\frac{dH}{dt} = - \iiint \sigma v_n \ln f_2 (f_2 f_3 - f f_1) dr dv dv_1 d\Omega, \quad (10.27)$$

$$\frac{dH}{dt} = - \iiint \sigma v_n \ln f_3 (f_2 f_3 - f f_1) dr dv dv_1 d\Omega. \quad (10.28)$$

(10.25)–(10.28) tenglamalarni qo'shish natijasida quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{4} \iiint \sigma v_n \ln \left(\frac{ff_1}{f_2 f_3} \right) (f_2 f_3 - f f_1) dr dv dv_1 d\Omega. \quad (10.29)$$

(10.29) dagi integral ostidagi ifoda hech vaqt musbat bo'la olmaydi. Chunki $(f_2 f_3 - f f_1)$ ning har qanday qiymatida

$$\ln \left(\frac{ff_1}{f_2 f_3} \right) (f_2 f_3 - f f_1) \leq 0. \quad (10.30)$$

Shunday qilib, (10.30) ga ko'ra Bolsman kinetik tenglamasining yechimi bo'lgan har qanday taqsimot funksiyalarini uchun

$$\frac{dH}{dt} < 0, \text{ agar } f_2 f_3 \neq f f_1,$$

$$\frac{dH}{dt} = 0, \text{ agar } f_2 f_3 = f f_1. \quad (10.31)$$

Demak, $\frac{dH}{dt} \neq 0$ faqat nostatsionar yechimlarda, ya'ni vaqtga oshkora ko'rinishda bog'langan f taqsimot funksiyalarida bo'lishi

mumkin. Statsionar yechim esa faqat $\frac{dH}{dt} = 0$ da bo'lishi mumkin. Shunday qilib, (10.31) ga ko'ra, statsionar yechimlar uchun $f(\mathbf{v}_2)f(\mathbf{v}_3) = f(\mathbf{v})f(\mathbf{v}_1)$ shart, ya'ni Maksvell taqsimot funksiyasida olingan shartning o'zi albatta bajarilishi kerak. Bino'larin, Maksvell taqsimoti Bolsman kinetik tenglamasining yagona statsionar yechimidir. Isbotlangan

$$\frac{dH}{dt} \leq 0 \quad (10.32)$$

tengsizlik Bolsmanning H- teoremasi deyiladi. $S = -kH$ dan vaqt bo'yicha hosila olib, (10.31) ni hisobga olish natijasida

$$\frac{dS}{dt} \geq 0 \quad (10.33)$$

ifodani olamiz.

Shunday qilib, yopiq sistema – bir atomli ideal gaz entropiyasi vaqt bo'yicha monoton ortadi yoki o'zgarmasdan qoladi.

10.4. Ko'chishning umumlashgan tenglamasi. Enskog tenglamasi

Bolsman tenglamasi (10.14) dan taqsimot funksiyasi f ning oshkora ko'rinishi bilan bog'liq bo'limgan bir qator muhim umumiy natijalarni olish mumkin.

Faraz qilaylik, gaz bir butun holda o'rtacha \mathbf{u} tezlik bilan harakat qilsin. Bolsman tenglamasi yordamida nisbiy harakat tezligi ixtiyoriy funksiyasining o'rtacha qiymatini qanoatlashtiruvchi umumiy tenglamani topish mumkin ekan, ya'ni $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ nisbiy harakat tezligi bo'lsa, $\phi(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \phi(\mathbf{V})$ funksiyaning o'rtacha qiymati uchun umumiy tenglamani olish mumkin. Bu funksiyaning o'rtacha qiymati

$$\bar{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \phi f d\mathbf{v}}{\int f d\mathbf{v}} = \frac{1}{N} \int \phi(\mathbf{V}) f d\mathbf{v}, \quad (10.34)$$

bu yerda N – birlik hajmdagi zarralar soni bo'lib, koordinata va vaqtning funksiyasidir, ya'ni $N = N(\mathbf{r}, t)$. (10.34) ifodani N ga ko'paytirib vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\bar{\phi} \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = \int \phi(\mathbf{V}) \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v}. \quad (10.35)$$

Bu yerga Bolsman tenglamasi (10.13) dan $\frac{\partial f}{\partial t}$ ni (10.35) ning o'ng tomoniga qo'ysak, u holda

$$\begin{aligned} \bar{\phi} \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} &= - \int \phi(\mathbf{V}) \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial r} d\mathbf{v} - \\ &- \int \phi(\mathbf{V}) \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} + \int \phi(\mathbf{V}) I d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (10.36)$$

(10.36) ifodaga kirgan integrallarni o'zgartiramiz:

$$\int \phi \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \phi \mathbf{v} f d\mathbf{v} = \frac{\partial N(\bar{\phi})}{\partial \mathbf{r}},$$

$$\int \phi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \phi f \Big|_{|\mathbf{v}| \rightarrow \infty} - \int f \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = - \int f \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = -N \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \mathbf{v}} \right).$$

Bu yerda tezlik moduli cheksizga intilganda taqsimot funksiyasi nolga intiladi deb olindi. Ushbu o'zgarishlarni hisobga olib (10.36) ni qayta yozamiz:

$$\bar{\phi} \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial N(\bar{\phi})}{\partial \mathbf{r}} - N \frac{F_k}{m} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \mathbf{v}} \right) = \int \phi I d\mathbf{v}. \quad (10.37)$$

Bu tenglama ko'chishning umumlashgan tenglamasi yoki Enskog tenglamasi deb yuritiladi. Agar (10.37) ga kirgan ixtiyoriy kattalik ϕ additiv harakat integrallaridan (massa $- m$, nisbiy harakat impulsi $- m\mathbf{V}$ yoki kinetik energiya $- m\mathbf{V}^2/2$) biri bo'lsa, u holda ko'chishning umumlashgan tenglamasi sod-dalashadi. Xususan, zarralarning to'qnashishida

$$m_1 + m_2 = \text{const},$$

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{const},$$

$$\frac{m_1 \mathbf{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \mathbf{v}_2^2}{2} \text{const}$$

tengliklar o'rini ekanligini hisobga olsak, ϕ additiv harakat integrali bo'lgan holda to'qnashish integralining simmetriya

xususiyatlaridan foydalanim, (10.37) tenglama o'ng tomonining nolga teng bo'lishini isbotlash mumkin. Bu holda ko'chishning umumlashgan tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\bar{\phi} \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial N(\bar{\mathbf{v}}\bar{\phi})}{\partial \mathbf{r}} - N \frac{F_k}{m} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0. \quad (10.38)$$

Bu tenglama (10.37) tenglamaga nisbatan ancha soddalashdi. Eng muhimi nochiziqli tenglama chiziqli tenglamaga aylandi. Yu'ni juft ta'sirlarni hisobga oluvchi had yo'qoldi. Shu sababli tenglamani keng doiradagi masalalarga tatbiq qilish mumkin.

10.5. Additiv kattaliklar saqlanish qonunlari

Ko'chishning umumlashgan tenglamasi (10.38) yordamida bir qator fizik kattaliklar uchun ko'chish masalasini yoki saqlanish qonunlarini ko'rib chiqamiz.

1. Massa saqlanish qonuni. Umumlashgan ko'chish tenglamasidan harakatdagi uzluksiz muhitlarda massaning saqlanish qonunini keltirib chiqarish mumkin. Bir jinsli moddalarning makroskopik zichligi $\rho = mN$, bu yerda N – gaz konsentratsiyasi. Bu misolda additiv kattalik $\phi \equiv m$. Shu sababi (10.38) tenglamadagi ikkinchi va to'rtinchi had $m = \text{const}$ bo'lganligi uchun nolga teng bo'ladi. Demak, (10.38) to'g'ridan-to'g'ri uzluksizlik tenglamasi ko'rinishida yoziladi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (10.39)$$

Bu tenglama massaning saqlanish qonuni beradi. Birorta hujmdagi massaning o'zgarishi shu hajmni o'rab turgan sirt bo'ylab shuncha miqdor massa oqimiga ekvivalent ekanligini ko'rsatadi.

Massaning saqlanish qonuni ko'p komponentli gazlar uchun ham o'rinlidir, chunki zarralar orasidagi o'zaro ta'sir tenglamasidan yo'qolanligi uchun gazni tashkil etuvchi har bir komponentlar oqimda mustaqil ravishda ishtirot etadi. Agar har bir komponent uchun saqlanish qonunini yozsak, unda qo'shimcha hadlar paydo bo'ladi. Lekin, qo'shimcha hadlar barcha komponentlar uchun yozilgan saqlanish qonunida yo'qolib ketadi. Shu masalani batafsil ko'rib chiqamiz.

Bu holda gazning α - komponenti uchun zichlik va tezlik tushunchasini quyidagicha kiritamiz:

$$\rho^\alpha = N^\alpha m^\alpha = m^\alpha \int f^{(\alpha)} d\mathbf{v}, \quad u^\alpha = \int v^\alpha f^{(\alpha)} d\mathbf{v}. \quad (10.40)$$

Umumiy holda massa zichligi va tezligi

$$\rho = \sum \rho^\alpha, \quad \rho \mathbf{u} = \sum \rho^\alpha u^\alpha \quad (10.41)$$

ifodalar bilan aniqlanadi. α - komponent zichligidan vaqt bo'yicha hosilani ochiq yozib chiqamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} &= m^\alpha \int \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} d\mathbf{v} = -m^\alpha \int \mathbf{v}^\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial r} d\mathbf{v} = \\ &= -m^\alpha \frac{\partial}{\partial r} \int \mathbf{v}^\alpha f^\alpha d\mathbf{v} = -\frac{\partial \rho^\alpha u^\alpha}{\partial r}. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Bu ifodadagi \mathbf{v}^α ga \mathbf{u} ni qo'shib ayiramiz va natijani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{j}^\alpha + \mathbf{u} \rho^\alpha). \quad (10.43)$$

Bu yerda α - komponentning diffuziya oqimi deb nomlanuvchi kattalik

$$\mathbf{j}^\alpha = m^\alpha \int (\mathbf{v}^\alpha - \mathbf{u}) f^\alpha d\mathbf{v}, \quad \sum \mathbf{j}^\alpha = 0 \quad (10.44)$$

kiritildi. Bu kattalik gaz aralashmasining umumiy zichlik saqlangan holdagi turli komponentlarning oqimiga teng. Bu oqimni turli komponentlar bo'yicha yig'ib chiqsak, yig'indi nolga teng bo'ladi. Natijada to'liq massanening saqlanish qonuni (10.38) ko'rinishda yoziladi. Bu holda massa zichligi va uning oqimining zichligi (10.41) bilan aniqlanadi.

2. Impuls saqlanish qonuni. Makroskopik impuls saqlanish qonunini olish uchun (10.38) ifodadagi ixtiyoriy kattalik ϕ o'rniga $m\mathbf{v}$ impulsni qo'yamiz. Soddalik uchun bir komponentli gazni qaraymiz. Birlik hajmdagi impuls

$$\rho \mathbf{u} = N m \int \mathbf{v} d\mathbf{v}. \quad (10.45)$$

Ushbu ifodadan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = N m \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v}. \quad (10.46)$$

Bu tenglamaning o'ng tomonini Bolsman tenglamasining vektor kattaliklarning komponentlari orqali yozilgan ko'rinishi (10.14) dan foydalanib o'zgartiramiz. Bunda additiv kattaliklar uchun Bolsman tenglamasining o'ng tomoni nolga tengligini hisobga olamiz va uning ikkinchi hadi bilan bog'liq bo'lган integral ostidagi tezliklarga u ning mos tashkil etuvchilarini qo'shib nyiramiz. Bundan tashqari uncha murakkab bo'lмаган hisoblashlarni amalga oshirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \mathcal{F}_i. \quad (10.47)$$

Bu gazning makroskopik harakat tenglamasi (Nyuton II qonuni) yoki impuls saqlanish qonunini beradi. Bu yerda

$$\mathcal{F}_i = NF_i$$

birlik hajmdagi gazga ta'sir etuvchi tashqi kuch,

$$\sigma_{ik} = mN \int (v_i - u_i)(v_k - u_k) f dv = mN \overline{(v_i - u_i)(v_k - u_k)} \quad (10.48)$$

kuchlanish tenzori deb ataladi. Kuchlanish tenzori aniqlanishiga binoan simmetrikdir, ya'ni $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$. Bu kattalik gaz molekularining xaotik issiqlik harakati bilan bog'liq bo'lган «qayish-qoqlik» oqimi natijasida paydo bo'ladigan kuchga teng. Nihoyat, o'ng tomondagi birinchi had impulsning konvektiv oqimi hisobiga paydo bo'ladigan kuchdir. Umuman olganda, to'liq impulsining manbayi tashqi kuchdir.

3. Energiya saqlanish qonuni. Impuls saqlanish qonunini olishdagi kabi hisoblashlarni olib borib gazning makroskopik energiyasining saqlanish qonunini olish mumkin, ya'ni

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (q_k + Eu_k) - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad (10.49)$$

bu yerda

$$q_k = \frac{mN}{2} \int (v_i - u_i)^2 (v_k - u_k) f^{(0)} dv \quad (10.50)$$

energiya oqimi zichligi. Demak, birlik hajmda energiya o'zgarishi, shu hajmni o'rab turuvchi sirt orqali to'la energiya oqimi

$(q_k + Eu_k)$ va ichki kuchlarga qarshi bajarilgan ish - $\left(\sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)$ bilan bog'langan ekan.

Agar ideal gaz energiyasini temperatura orqali ifodalasak, u holda (10.49) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$C_V \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (q_k + C_V T u_k) - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (10.51)$$

Massa, impuls va energiya saqlanish qonunlari ideal gaz uchun chiqarilgan bo'lsada, ularning tatbiq qilish sohasi anchagina kengdir.

10.6. Makroskopik qaytmaclik va mikroskopik qaytuvchanlik

Bolsmanning H-teoremasi entropiyaning o'sish qonuniga ekvivalent ma'noga egadir. Bu qonun makroskopik jarayonlar qaytmas jarayon ekanligini ko'rsatuvchi matematik ifodadir, chunki H-teorema Bolsmanning gazokinetik tenglamasini qaytmas jarayonlarni ifodalashini isbotlaydi. Mikroskopik qonunlar vaqt inversiyasiga ($t \rightarrow -t$) nisbatan invariantdir. Klassikada bu holat harakat tenglamalari vaqt bo'yicha ikkinchi tartibliligidan kelib chiqadi. Qvant nazariyada esa, vaqt inversiyasi to'lqin funksiyasi $\Psi(\mathbf{r}, t)$ ni kompleks qo'shmasi $\Psi^*(\mathbf{r}, t)$ bilan almashtirishga ekvivalent, chunki bu ikkala funksiya bir holatni ifodalaydi. Bunga asosan barcha mikroskopik jarayonlar principial qaytuvchandir, ya'ni boshlang'ich shartni, mos ravishda, o'zgartirsak (klassik fizikada boshlang'ich tezliklarning yo'naliishini teskariga almashtirish) ixtiyoriy jarayon to'g'ri va teskari yo'naliishlarda o'tadi. Bunda ular bir xil oraliq holatlar orqali o'tadi. Qaytmas jarayonlarni ifodalovchi Bolzman tenglamasi vaqt bo'yicha qaytuvchi statistik fazoviy ansambl harakat tenglamasidan keltirib chiqarilgan, chunki uning asosida Gamilton tenglamasi yotadi. Shunday qilib, mikroskopik qaytuvchanlikdan keltirib chiqarilgan makroskopik qaytmaslik paradoksi paydo bo'ladi.

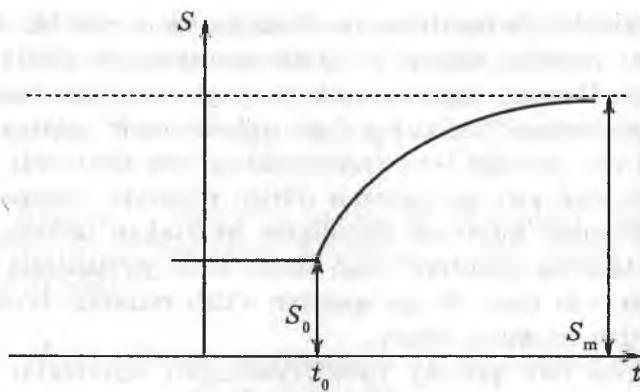
Shu narsa aniqliki, bu paradoks, qaytuvchi mikroskopik harakat tenglamalaridan olinadigan qaytmas makroskopik harakat tenglamalariga asoslanuvchi har qanday statistik nazariyada ham paydo bo'ladi. Haqiqatan ham, har qanday makroskopik holat mikroskopik holat funksiyasi bo'ladi. Ammo mikroharakat tenglamalarining qaytuvchanligiga ko'ra, sistema qandaydir

«a» mikroskopik holatdan «b» holatga va, aksincha, «b» holatdan «a» holatga tashqi ta'sirsiz spontan (o'z-o'zidan) o'tishi mumkin. Demak, makroskopik nuqtayi nazardan ham sistema «A» makroskopik holatdan («a» mikroskopik holatga mos keluvchi) «B» holatga («b» mikroholatga mos keluvchi) va aksincha «B» dan «A» ga spontan o'tishi mumkin. Ammo agar biz makroharakat qaytmas ekanligini isbotlagan bo'lsak, u holda tashqi ta'sirsiz sponton o'tish faqat bitta yo'nalihsda mumkin, masalan, «A» dan «B» ga spontan o'tish mumkin bo'lsa, aksincha, o'tish mumkin emas.

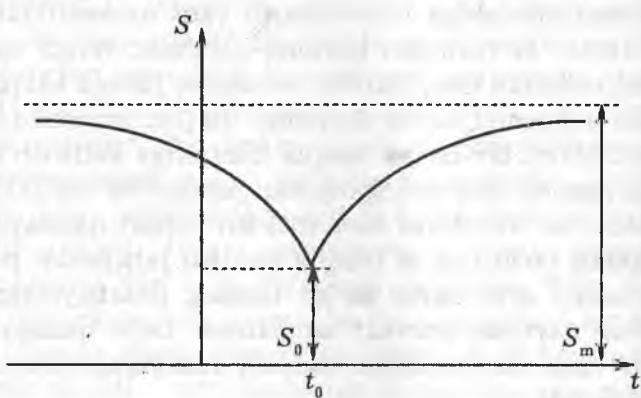
Agarda har qanday izolatsiyalangan sistemalar qaytmas makroskopik harakat tenglamalari, qandaydir boshlang'ich vaqt momentidan, ya'ni sistemaning izolatsiyalanmagan holatidan izolatsiyalanishiga tayyorlanish vaqt momentidan boshlab o'rinali desak, ko'rsatilgan qarama-qarshilik yengil hal bo'ladi. Masalan, nisbatan issiq jismdan sovuqroq jismga issiqlik uzatish qaytmas jarayonini ko'rib chiqamiz. Bu jismlar orasidagi issiqlik uzatilishi ularni bir-biriga issiqlik kontaktga keltirish momentidan boshlanadi. Shu vaqtga qadar jismlar bir-birlaridan ajralgan holda edi va ularni birlashtirish uchun qandaydir tashqi ta'sir kerak bo'ldi, ya'ni issiqlik uzatish jarayonini boshlanishi uchun tashqi ta'sir zarur bo'ldi. Demak, izolatsiyalangan sistema uchun qaytmas harakat tenglamasi, faqat qandaydir boshlang'ich vaqt momentidan boshlab hisoblangandagina o'rinali bo'lishi kerak.

Agar sistema izolatsiyalangan va hech qanday tashqi ta'sirga duchor bo'limgan bo'lsa, u holda bunday sistemada qaytmas jarayon faqat sponton fluktuatsiya natijasida yuzaga kelishi mumkin. Yuqorida ko'rilgan misolda holat, issiqlik kontaktida bo'lgan ikkita jismdan biri T_1 , ikkinchisi T_2 temperaturada bo'lsa, sponton fluktuatsiya temperaturalar farqi natijasidagina amalga oshishi mumkin. Ammo bu holda t_0 vaqt momentiga qadar issiqlik sovuq jismdan issiq jismga, t_0 dan keyin issiq jismdan sovuq jismga o'tishi kerak edi. Boshqacha qilib aytganda, t_0 vaqt momentiga qadar issiqlik o'tkazuvchanlik jarayoni vaqt yo'nalihsa bo'yicha teskari o'tgan, t_0 dan so'ng esa to'g'ri yo'nalihsa bo'yicha o'tishi kerak bo'lib chiqadi.

Birinchi (jismlar t_0 vaqtida tashqi ta'sir yordamida kontaktga keltirilgan) holda, umumiy entropiyaning vaqtga bog'lanishi 10.1-rasmdagi ko'rinishda bo'ladi. Ikkinchi (fluktuatsiya nati-



10.1- rasm.



10.2- rasm.

jasida issiqlik almashinish) holda, izolatsiyalangan sistema uchun umumiyl entropiyaning vaqtga bog'lanishi har doim 10.2- rasmida ko'rsatilgandek bo'lishi mumkin. Demak, birinchi va ikkinchi hollarda ham entropiyaning o'sishi faqat t_0 vaqt momentidan boshlab o'rini bo'ladi. Ikkinci holda t_0 vaqt momentiga qadur, entropiyaning o'sishi emas, balki entropiyaning kamayishi o'rini bo'lmoqda. Birinchi holda esa t_0 vaqt momentiga qadur entropiya umuman o'zgarmaydi, ya'ni istalgan yo'naliishda vaqt davomida qaytmas qonunlari o'rini bo'lishi mumkin.

Shunday qilib, Boltzman kinetik tenglamasidan faqat qandaydir boshlang'ich vaqt momenti t_0 dan boshlab, ya'ni nomuva zanat sistema tayyorlanish vaqtidan boshlab foydalanish mumkin. Bu vaqtida entropiya maksimum yoki H minimum bo'ladi.

vaqtga qadar Bolsman tenglamasidan o'ng tomonidagi ishonusi bilan farq qiladigan boshqa tenglamadan foydalanish kerak. Bunday tenglamaga asosan entropiya kamayadi, H esa o'sadi.

Demak, doimo izolatsiyalangan sistema uchun makroskopik tenglama shundayki, cheksiz vaqt oralig'ining hammasi qaytuvchi, chunki entropiya avvalo kamayadi, keyin esa ortadi. Izolatsiyalumagan sistema uchun esa har doim boshlang'ich vaqt momenti boshlang'ich shart bilan ajratilgan va shu vaqt momentidan boshlab, makroskopik tenglama faqat entropianing o'sishini berishi mumkin, bu esa mikroskopik qaytuvchanlikka zid bo'lmaydi.

Yuqorida masalani amaliy nuqtayi nazardan ko'rib chiqdik. Savol qayta paydo bo'ladi – nima uchun biz foydalanadigan kinetik tenglama qaytuvchi jarayonni o'rganish imkonini bermaydi? Bu joyda izolatsiyalangan har qanday sistema yetarlichakutta vaqtdan so'ng boshlang'ich holatga cheksiz yaqin holatlarga qaytishi kerakligi to'g'risidagi Puankarening teoremasini eslash lozim. Ya'ni Bolsman tenglamasi Puankare teoremasiga ziddir. Bu ziddiyatga (umuman kinetik parodoks) Bolsman tenglamasini olishda asos solingan. Chunki Bolsman tenglamasi uniq tenglama emas. Bu tenglama zanjir tenglamani uzish natijasida olingan bo'lib, molekulalarning uchtalab, to'rttalab va h.k. o'zaro ta'sirlari hisobga olinmaydi. Shu sababli ular nisbatan qisqa vaqlarda o'rinni bo'ladi. Shuning uchun mexanikadagi mutlaq qaytuvchanlik bilan qaytmas kinetik tenglamlar orasida ziddiyat yo'q.

10.7. Ideal gazda Maksvell muvozanat va lokal muvozanat taqsimoti

Biz entropianing o'sish qonuni $\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0$ ni oldik. $t \rightarrow \infty$ da entropiya o'sib borib qandaydir o'zgarmas kattalikka intiladi, ya'ni $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$. $t \rightarrow \infty$ da emas, balki relaksatsiya vaqtiga τ da $S \rightarrow S_{\max}$. Shu $t \geq \tau$ vaqtida

$$\ln \left(\frac{f_2 f_3}{f f_1} \right) (f_2 f_3 - f f_1) = 0$$

shart bajariladi. Bundan $f_2 f_3 = f f_1$ yoki $\ln f_2 + \ln f_3 = \ln f + \ln f_1$ bo'lishi kerak. Bu esa lnf harakatning additiv integrali ekanligini

ko'rsatadi. Ikkita zarra to'qnashishida beshta harakat additiv integrali mavjud bo'ladi: massa, impuls va energiya integrallari. Shuning uchun, lnf ana shu kattaliklarning chiziqli funksiyasi bo'lishi kerak:

$$\ln f = ma + b_k m\mathbf{v} + c \frac{m\mathbf{v}^2}{2},$$

bu yerda a, b_k, c – o'zgarmas kattaliklar bo'lib, birlik hajmdagi zarralar soni « n », o'rtacha makroskopik tezlik « u_i » va muvozanat holatdagi bir atomli gaz o'rtacha energiyasi orqali ifodalanadi. Agar gaz bir butun holda tinch turgan bo'lsa va $u_i = 0$ bo'lsa, u holda

$$\int f d\mathbf{v} = n, \quad \int v_i f d\mathbf{v} = 0, \quad n \int \frac{mv_k^2}{2} f d\mathbf{v} = \frac{3}{2} nkT.$$

Bu tenglamalar asosida Maksvell muvozanat taqsimot funksiyasini topamiz:

$$f^{(M)} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right).$$

Muvozanatdagi gazda temperatura T va zichlik n butun gaz hajmida o'zgarmas qiymatga ega bo'ladi va unda makroskopik harakat yuzaga kelmaydi. Agarda temperatura va zichlik koordinata va vaqtga bog'liq bo'lsa va gaz o'rtacha u_i tezlik bilan harakatlansa, u holda Bolsman tenglamasidagi to'qnashish integrali nolga aylanadi, agarda taqsimot funksiyasi o'rniiga quyidagi ifodani olsak:

$$f^{(0)} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m(v-u)^2}{2kT} \right), \quad (10.52)$$

bu yerda n va T – koordinata va vaqtning funksiyasi. Taqsimot funksiyasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$f^{(0)} = \exp(\alpha + \beta_i v_i + \gamma v^2). \quad (10.53)$$

Agarda taqsimot funksiyasi $f^{(0)}$ Bolsman tenglamasining o'ng va chap tomonlarini nolga aylantirsa, u holda Bolsman teng lamasing yechimi bo'la oladi. Buning uchun α, β_i, γ quyidagi

shartlarni qanoatlantirish kerak. Odatda, (10.52) va (10.53) Maksvell–Bolsman lokal taqsimoti deb yuritiladi. (10.53) taqsimotni Bolsman tenglamasining chap tomoniga qo'yamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0. \quad (10.54)$$

v_i ning bir xil darajalaridagi koeffitsiyentlarni tenglashtirish natijasida quyidagi ifodalarni olamiz:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{F_i \beta_i}{m} = 0, \quad (10.55)$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial t} + 2\gamma \frac{F_i}{m} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = 0, \quad (10.56)$$

$$\delta_{ij} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (10.57)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 0. \quad (10.58)$$

Shunday qilib, (10.55)–(10.58) tenglamalar sistemasi Maksvell–Bolsman taqsimotiga mos bo'lgan harakatning o'rtacha tezligi u_i ga chegaralanish yuklanadi:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{m}{2kT} \right) = 0$$

tenglama temperatura T butun fazoda o'zgarmas bo'lishligini ko'rsatadi. Ammo gaz temperaturasi vaqt bo'yicha o'zgarishi mumkin. (10.57) ni koordinita bo'yicha differensiallaymiz:

$$\delta_{ij} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial x_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial r \partial x_j} + \frac{\partial^2 \beta_j}{\partial r \partial x_i} \right) = 0.$$

Bundan

$$\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial r \partial x_j} + \frac{\partial^2 \beta_j}{\partial r \partial x_i} = 0$$

yoki $\beta_i = \frac{mu_i}{kT}$ asosan va $i = j$ bo'lsa,

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \mathbf{r} \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial \mathbf{r} \partial x_i} = 0.$$

Bundan

$$\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \mathbf{r} \partial x_i} = 0 \quad (10.59)$$

ekanligi kelib chiqadi. (10.59) ning yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$u_i = a_i(t) + b_{ij}(t)x_i \quad \text{yoki} \quad u_i = 0. \quad (10.60)$$

b_{ij} koeffitsiyentni topish uchun (10.60) ni (10.57) ga qo'yamiz va quyidagi ifodani olamiz:

$$b_{ij} = -b_{ji} \quad \text{va} \quad b_{ij} = \frac{m}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Shunday qilib, gaz o'rtacha tezligini quyidagicha topamiz:

$$u_i = a_i(t) + \frac{m}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial t} x_i$$

yoki vektor shaklida:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}(t) + [\omega, \mathbf{r}] + \frac{m}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial t} \mathbf{r}.$$

Bu yerda ω – aylanma harakat burchak tezligi. Agarda gaz idish ichiga qamalgan bo'lsa, u holda (10.60) dagi yechimda $u_i = 0$ va $\beta_i = 0$ deb olish kerak. U holda (10.56) quyidagi ko'rinishini oladi:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} + 2\gamma \frac{F_i}{m} = 0.$$

Agarda tashqi kuch potensialga ega bo'lsa, u holda

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad \text{va} \quad \alpha = -\frac{U}{kT} + \text{const}$$

bo'ladi. Bu holda Maksvell–Bolsman muvozanat taqsimoti quyidagi ko'rinishni oladi:

$$f^{M-B} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{U}{kT} \right).$$

Bu holda gazda Maksvell-Bolsman muvozanat taqsimoti ildunar ekan. Relaksatsiya vaqt $\tau \sim \bar{\lambda}/\bar{v}_n$ bo'ladi. Bu esa fazoda tezliklar taqsimotining tiklanishi bilan bog'langaligini ko'rsatadi.

Boshlang'ich vaqt momenti $t = 0$ da fazoda zarralarning ildiyoriy taqsimoti $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ berilgan bo'lsin deb faraz qilaylik, u holda τ vaqtida fazoning har bir nuqtasida Maksvellning tezliklar bo'yicha taqsimoti Maksvellning lokal taqsimotiga intiladi: $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rightarrow f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Lokal taqsimot esa $t \approx \tau_{macro} = L/c$ da $f^{(0)} \rightarrow f^{(M-B)}$ ga intiladi.

10.8. Gidrodinamika tenglamasi. Kinetik koeffitsiyentlar

Biz yuqorida shu narsaga amin bo'ldikki, xususiy holda Bolsman tenglamasi tutash muhitlar mexanikasining qonunlarini olish imkonini beradi. Ammo, amalda kuchlanish tenzori σ_{ik} ni topish taqsimot funksiyasi f ni bilishni talab qiladi.

Shuning uchun bиринчи navbatda makroskopik harakatdagi ideal gaz uchun nomuvozanat taqsimot funksiyasini hisoblashni ko'rib chiqamiz. Gazning makroskopik harakat tezligi u koordinatining funksiyasi bo'lsin deb faraz qilamiz. Ammo tezlikning bu o'zgarishini yetarli darajada sekin deb qabul qilamiz. Bunday harakatda sistemaning ayrim bo'laklarida Maksvell lokal muvozanat taqsimoti yuzaga keladi. Gazning turli bo'laklarida makroskopik harakat tezligi turlicha bo'ladi, ya'ni $u = u(\mathbf{r}, t)$.

Biz gaz harakatining izotermik rejimi bilan chegaralanamiz, shu sababli butun gaz hajmi bo'ylab temperatura o'zgarmas bo'ladi. Lokal muvozanat yuzaga kelgan deb hisoblab, kuchlanish tenzori (10.48) va issiqlik oqimi zichligi (10.50) ni hisoblash uchun (10.52) bilan aniqlangan Maksvell lokal taqsimot funksiyasi $f^{(0)}$ dan foydalanamiz. Hisoblashlar natijasida

$$\sigma_{ik} - NkT\delta_{ik} - p\delta_{ik}, \quad (10.61)$$

$$q_k = 0 \quad (10.62)$$

ifodalarni olamiz. Shunday qilib, kuchlanish tenzori σ_{ik} normal bosimga o'tar ekan. Bu yaqinlashishda massa (10.38) va (10.47) impuls saqlanish qonunlari tutash muhitlar uchun quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (10.63)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (10.64)$$

Umuman, (10.64) tenglama ideal tutash muhitlarning harakat tenglamasi bo'lib Eyler tenglamasi deyiladi. Yuqoridagiga o'xshash birlik hajmdagi entropiya uchun tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial j_i^s}{\partial x_i} = 0. \quad (10.65)$$

Bu yerda j_i^s – entropiya oqimining zichligi. Bu tenglamaga asosan tutash muhit harakatida solishtirma entropiya s o'zgarmas qolar ekan, ya'ni ko'chish jarayoni adiabatik xarakterga ega bo'ladi.

Bu yaqinlashishda tutash muhitni holat tenglamasi

$$p = NkT \quad (10.66)$$

ko'rinishda bo'lgan ideal suyuqlik deb qarash mumkin. (10.63)–(10.67) tenglamalar to'plami tutash muhit yaqinlashishida gaz harakatini to'la holda aniqlaydi.

Bu yaqinlashishda real (qayishqoq) gaz gidrodinamik tenglamasini olish uchun Bolsman tenglamasining yechimini ketma-ket yaqinlashish metodidan foydalanamiz. Taqsimot fuksiyasini quyidagi ko'rinishda qidiramiz:

$$f = f^{(0)}(1 + \xi), \quad (10.67)$$

bu yerda $\xi \ll 1$ lokal taqsimot funksiyasi $f^{(0)}$ ga tuzatma bo'lib, mikroskopik jarayonlar xarakterli vaqtli τ_m ga nisbatan kattal Δt vaqtarda gaz evolutsiyasini aniqlaydi. Masalani yanada soddalashtirish uchun bir qator cheklanishlar kiritamiz. Gaz izotermik, siqilmaydigan, tashqi kuchlar yo'q va bosim deb o'zgarmas bo'lsin.

Bolsman kinetik tenglamasi (10.14) ga (10.67) ni qo'yib, ξ bo'yicha birinchi tartibli kichik hadlar bilan chegaralanib, quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + v_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = f^{(0)} \int f_1^{(0)} \sigma v_n [\xi_2 + \xi_3 - \xi_1 - \xi] d\mathbf{v}_1 d\Omega. \quad (10.68)$$

Yuqoridagi cheklanishlar doirasida lokal taqsimot funksiyasining oshkora ko'rinishi (10.52) ni inobatga olsak, (10.68) ifodaning chap tomoni

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + v_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{m}{kT} \left(V_i V_k - \frac{V^2}{2} \delta_{ik} \right) U_{ik} f^{(0)}, \quad (10.69)$$

bu yerda

$$U_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

deformatsiya tezligi tenzori, \mathbf{V} – nisbiy tezlik. Natijada Bolsman tenglamasi (10.70) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{m}{kT} \left(V_i V_k - \frac{V^2}{3} \delta_{ik} \right) U_{ik} f^{(0)} = f^{(0)} \int f_1^{(0)} \sigma v_n [\xi_2 + \xi_3 - \xi_1 - \xi] d\mathbf{v}_1 d\Omega. \quad (10.70)$$

Lokal taqsimot funksiyasiga tuzatma $f^{(0)}\xi(\mathbf{v})$ (10.70) tenglama dan tashqari, massa, impuls va energiya saqlanish qonunlari bajarilishini ta'minlashi kerak. Bunga asosan, $f^{(0)}\xi(\mathbf{v})$ yordamida hisoblangan massa, impuls va energiyaga tuzatmalar nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$m \int f^{(0)} \xi d\mathbf{v} = 0, \quad (10.71)$$

$$mN \int V_i f^{(0)} \xi d\mathbf{v} = 0, \quad (10.72)$$

$$\frac{mN}{2} \int V^2 f^{(0)} \xi d\mathbf{v} = 0. \quad (10.73)$$

Bu shartlarning bajarilishi bir jinsli bo'limgan integral tenglama (10.70) ning yechimi mavjudligining zaruriy sharti bo'lib hisoblanadi.

Tenglama (10.70) yechimlari mavjudligi tahlil qilishni davom etdirish, birinchidan, chigal va mashaqqatli, ikkinchidan yangi fizik ma'lumot bermaydi. Bundan tashqari sochilish effektiv kesimi σ ni bilishni talab qiladi. Real molekulalar, hatto bir atomli molekulalar uchun ham bu funksiyaning ko'rinishi no'

malum. Sochilish effektiv kesimi faqat burchakka bog'liq bo'lган sodda misolda (10.70) tenglamaning yechimini analitik ko'rinishda yozish mumkin, ya'ni

$$f = f^{(0)} \left[1 - \frac{8}{3N\sigma} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \left(V_i V_k - \frac{V^2}{3} \delta_{ik} \right) U_{ik} \right]. \quad (10.74)$$

Ushbu taqsimot funksiyasi yordamida kuchlanish tenzorining (10.48) oshkora ko'rinishi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \frac{4m}{3\sigma} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (10.75)$$

Shu joyda uzluksiz muhit mexanik harakat qonunlari asosida olingan kuchlanish tenzori uchun ifodani keltiramiz:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (10.76)$$

Bu ikkala ifodani solishtirish natijasida ideal gaz yopishqoqlik koeffitsiyenti uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\eta = \frac{4m}{3\sigma} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}. \quad (10.77)$$

Bu formula sifat jihatdan tajriba natijalari bilan mos tushadi. (10.77) dan shu narsa ko'rindaniki, gaz yopishqoqligi zichlikka bog'liq bo'lmaydi, ammo sochilish kesimi σ ga bog'liq bo'ladi. Yopishqoqlik – kinetik koeffitsiyentlardan birinchisi hisoblanadi.

Xuddi yuqoridagiga o'xshash termik bir jinsli bo'lмаган gazda issiqlik oqimini hisoblash mumkin. Bu yerda gazning temperaturasi koordinataning funksiyasi va gaz makroskopik harakat bajarmaydi deb hisoblaymiz. Bolsman tenglamasining yechimini yuqoridagi metod yordamida topamiz. Bu holda taqsimot funksiyasi

$$f = f^{(0)} \left[1 - \left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \frac{2}{\sigma NT} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right], \quad (10.78)$$

issiqlik oqimi

$$q_i = -\frac{5mk}{2\sigma} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\infty \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (10.79)$$

Iessiqlik o'tkazuvchanlik

$$\alpha = \frac{5mk}{2\sigma} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}. \quad (10.80)$$

Iessiqlik o'tkazuvchanlik – ikkinchi kinetik koeffitsiyent bo'ladi. Iessiqlik o'tkazuvchanlik va yopishqoqlik koeffitsiyentlarini nisbati

$$\frac{\alpha}{\eta} = \frac{15}{4} k = \frac{5}{2} C_v \quad (10.81)$$

Nochilish kesimi σ ga bog'liq bo'lmaydi. Bu esa tajriba natijalariga mos keladi.

10.9. Relaksatsiya vaqtı

Kuch maydoni tashqarisida yotgan fazoviy bir jinsli gazning muvozanat holatga o'tishini qarab chiqaylik. Muvozanat holatda yetarli darajada yaqin yotgan gaz bilan cheklanamiz. U holda 10.8-bandga asosan taqsimot funksiyasini

$$f = f^{(0)}(1 + \xi)$$

Ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $f^{(0)}$ – lokal muvozanat taqsimot funksiya. Bu holda Bolsman tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \int f_i^{(0)} \sigma v_n [\xi_2 + \xi_3 - \xi_1 - \xi] d\Omega. \quad (10.82)$$

Bu bir jinsli bo'limgan integro-differensial tenglamani yechimini

$$\xi(\mathbf{v}, t) = \sum A_i \psi_i(\mathbf{v}) e^{-\frac{t}{\tau_i(\mathbf{v})}} \quad (10.83)$$

Ko'rinishda qidiramiz. Natijada $\psi_i(\mathbf{v})$ uchun chiziqli integral tenglama olinadi. Olingan tenglamaning yechimi uchun $\sigma(v, \alpha)$ funksiyaning berilishi talab qilinadi. Shunday qilib, taqsimot funksiyasining vaqtga bog'lanishi (10.83) qator ko'rinishda ifodalananib, cheksiz τ_i kattaliklar bilan aniqlanadi. Sistemada muvozanat turli tezliklar uchun turli relaksatsiya vaqtı $\tau_i(\mathbf{v})$ davomida yuzaga keladi.

Bu shuni anglatadiki, tezliklar fazosining har xil soholarida, Maksvellning tezliklar bo'yicha taqsimoti turli xil vaqt ichida tiklanadi. Demak, gazning o'rtacha xarakteristikalarini (o'rtacha tezlik, o'rtacha energiya) o'zlarining o'rtacha relaksatsiya davrigiga ega bo'ladi va h.k. Agar (10.83) da faqat bitta hadni hisobga olsak:

$$f(t) = f^{(0)} \left(1 + \psi e^{-t/\tau} \right). \quad (10.84)$$

Bu ifodadan ko'rinish turibdiki sistema muvozanatga kelishini xarakterlovchi vaqt τ mavjud ekan. Bu relaksatsiya vaqtini deyi-ladi. Tenglama (10.83) ga asosan shu vaqtini baholaymiz:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \sim \frac{\xi}{\tau} \approx \frac{I}{f^{(0)}}. \quad (10.85)$$

Ikkinchi tomondan, (10.82) tenglamaga asosan,

$$I(v) \sim N f^{(0)} \xi \bar{v}_n. \quad (10.86)$$

(10.85) va (10.86) ifodalarni solishtirib, τ uchun quyidagini josal qilamiz:

$$\frac{1}{\tau} \simeq N f^{(0)} \xi \bar{v}_n. \quad (10.87)$$

Ko'paytuvchi N o'rtacha \bar{v}_n ni hisoblash tufayli paydo bo'ladi. Ko'rileyotgan aniqlikda

$$\xi = \frac{f - f^{(0)}}{f^{(0)}} = I(v) \quad (10.88)$$

yozish mumkin. U holda, ana shu yaqinlashishda kinetik tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f - f^{(0)}}{\tau}. \quad (10.89)$$

Bu tenglama shu narsani anglatadiki, f ning muvozanat holatiga yaqinlashish tezligi qancha katta bo'lsa, muvozanat taqsimoti dan chetlanish shuncha katta bo'ladi. Muvozanat holatdan yetarli darajada kichik chetlanishlarda (10.89) ko'rinishda $\frac{\partial f}{\partial t}$ ning o'garish qonuni, qator amaliy tatbiqlarda relaksatsiya jarayonini yetarlicha aniqlikda ifodalaydi. Bu esa lokal taqsimot funksiyasi tezlik $v = \bar{v}_n$ da keskin maksimumga ega bo'lishini ko'rsatadi.

Shuning uchun relaksatsiya jarayoniga o'rtachaga yaqin tezlik-ka ega bo'lgan zarralar asosiy hissa qo'shadi.

Ko'pincha tashqi kuch maydonida yotgan fazoviy bir jinsli bo'lman gazlar kinetikasini o'rganishda (10.89) ko'rinishdagi kinetik tenglama bilan bir qatorda, umumiy holda taqsimot funksiyasini olish uchun relaksatsion yaqinlashish foydalaniadi. Bu holda, Bolsman kinetik tenglamasidagi to'qnashish integrali (10.88) bilan almashtiriladi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = \frac{f - f^{(0)}}{\tau}. \quad (10.90)$$

Bu yerda relaksatsiya vaqt $\tau(r)$ dan farqli ravishda koordinata funksiyasi hisoblanadi, chunki gaz zichligi ρ koordinataga bog'liq. Bu yaqinlashish relaksatsiya jarayonini miqdor jihatdan aniq tushuntira olmasada, ko'p masalalarda kinetika tenglama (10.89) ko'rinishga keltiriladi. Shuning uchun relaksatsion yaqinlashish muhim aqamiyatga ega.

10.10. Bolsman kinetik tenglamasining gazlarga ba'zi bir tatbig'i

1. Gazlarning mikroskopik holatini tavsiflashda qulay bo'lган qator kattaliklarni keltirib chiqaraylik. Agar gaz o'zining muvozanat holatidan chetlanishi uncha katta bo'lmasa, bu kattaliklar muvozanatda bo'lgan gaz uchun yetarli darajada aniqlik bilan uniqlanadi. Muvozanatda bo'lgan gaz molekulalarining bir sekunddagи o'rtacha to'qnashish sonini aniqlaylik. ν ni aniqlash uchun birlik hajmda v tezlikdagi molekulalarni v_1 tezlikdagi molekulalar bilan bir sekundda to'qnashish soni (10.6) ni v bo'yicha integrallab, $f(r, v, t)$ va $f(r, v_1, t)$ lar o'rniga Maksvell muvozanat taqsimot funksiyasini qo'yib, molekulalar konentratsiyasini n ga bo'lish kerak, ya'ni

$$\nu = \frac{1}{n} \int v_n \sigma f(v) f(v_1) dv dv_1 d\Omega. \quad (10.91)$$

Bu yerda

$$f(v) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right). \quad (10.92)$$

$f(v_1)$ uchun ifoda (10.92) ga o'xshash.

$\sigma(v_n, \alpha)$ nisbiy tezlikka bog'liq emas deb faraz qilsak, (10.91) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\nu = n\sigma_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^3 \int v_n \exp\left(-\frac{m(v^2 + v_1^2)}{2kT}\right) dv dv_1, \quad (10.93)$$

bu yerda $\sigma_0 = \int \sigma(v_n, \alpha) d\Omega$ – sochilishning to'la kesimi.

(10.93) ifodani integrallashda yangi o'zgaruvchilar – massni markazining harakat tezligi v_c va $v_n = v - v_1$ nisbiy harakat tezligini kiritamiz. U holda (10.93) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\nu = 16\pi^2 n\sigma_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^3 \int v_c^2 \exp\left(-\frac{mv_c^2}{2kT}\right) dv_c \int v_n^3 \exp\left(-\frac{mv_n^2}{2kT}\right) dv_n. \quad (10.94)$$

(10.94) ifodani integrallash natijasida vaqt birligida muvozanatdagi gaz molekulalarining to'qnashish sonini aniqlaymiz:

$$\nu = \sqrt{2}n\sigma_0 \bar{v}.$$

Bu yerda $\bar{v} = \bar{p}/m = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ – molekulalar o'rtacha tezligi. Molekulalarning ketma-ket ikkita to'qnashishlar orasidagi o'rtacha vaqt oralig'i, yoki erkin yugurish o'rtacha vaqt

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma_0 \bar{v}}.$$

$\tilde{\tau}$ kattalik relaksatsiya vaqt bilan bir xil tartibdadir.

Ikkita ketma-ket to'qnashishlar orasidagi masofa molekulalarning erkin yugurish yo'li

$$\lambda = \bar{\tau} \bar{v} = \frac{\bar{v}}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma_0}.$$

Misol tariqasida azot molekulasi olib qaraylik. Azot molekulasining diametri $d = 2,5 \cdot 10^{-8}$ sm, to'la kesimi $\sigma_0 = \pi d^2 \approx 2 \cdot 10^{-15}$ sm². Normal sharoitda $n = 2,7 \cdot 10^{19}$ sm⁻³ konsentratsiyali shunday gaz uchun erkin yugurish yo'li $\lambda \approx 10^{-5}$ sm bo'ladi. 0 ° C temperaturada azot gazi molekulasining o'rtacha tezligi $\bar{v} = 4,5 \cdot 10^4$ sm/s, shuning uchun erkin yugurish o'rtacha vaqt $\bar{\tau} \approx 2 \cdot 10^{-10}$ s.

Shunday qilib, normal sharoitlarda gaz uchun $\lambda \gg n^{-1/3} \gg d$ bo'ladi. Bu esa Bolsman kinetik tenglamasini gazlarga tatbiq qilish o'rini ekanligini ko'rsatadi.

Ko'p hollarda faqat erkin yugurish yo'li emas, balki erkin yugurish yo'lining taqsimot qonuni qiziqtiradi. Faraz qilaylik, molekulaning to'qnashishga duchor bo'lmasdan x masofani o'tish ehtimoli $W(x)$ bo'lsin. $x + dx$ masofani to'qnashmasdan o'tish ehtimoli esa $W(x + dx)$ bo'lsin. Bu holda

$$W(x + dx) = W(x)W(dx) = W(x)(1 - adx), \quad (10.95)$$

bu yerda $W(dx) = (1 - adx)$ ifoda dx masofani molekula to'qnashmasdan o'tish ehtimoli. (10.95) ning chap tomonini dx darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$W(x) + dW(x) = W(x)(1 - adx)$$

yoki

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -adx.$$

Ushbu tenglamaning yechimi

$$W(x) = C \exp(-ax).$$

O'zgarmas C boshlang'ch shartdan topiladi, ya'ni $W(x \rightarrow 0) = 1$ dan $C = 1$. Demak,

$$W(x) = \exp(-ax). \quad (10.96)$$

O'zgarmas a ni topish uchun molekulaning x dan $x + dx$ masofaga to'qnashmasdan o'tish ehtimolligini aniqlaylik:

$$dP(x) = W(x)W(dx) = W(x)adx = a \exp(-ax)dx. \quad (10.97)$$

Bu yerda $W(dx) = adx$ molekulaning dx masofada to'qnashish ehtimolligi. O'rtacha erkin yugurish yo'li

$$\lambda = \int_0^\infty x dP(x) = a \int_0^\infty x \exp(-ax) dx = \frac{1}{a}.$$

Demak, $a = 1/\lambda$ va natijada (10.96) hamda (10.97) ifodalar quyidagi ko'rinishlarni oladi:

$$W(x) = \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), \quad dP(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) dx.$$

10.11. Kristallda o'tkazuvchi elektronlar

XIX asr oxirlarida nemis fiziklari E. Rikke va P. Drude oldinga surgan gipotezalarga ko'ra, metallarda elektr toki «erkin» elektronlarning harakati bilan bog'langan. Elektronlar manfiy zaryadga ega, shunga ko'ra ular qo'yilgan musbat tashqi maydon E ga qarama-qarshi yo'nalishda harakatlanadi. Erkin elektronlarning metall ionlari bilan to'qnashishi tufayli elektronlarning o'rtacha (dreyf tezligi) tezligi elektr maydon kuchlanganligiga proporsional bo'ladi, bu to'g'ridan-to'g'ri Om qonuniga olib keladi: $j = \sigma E$.

Agar G.A. Lorens bo'yicha, maydon yo'q bo'lganda erkin elektronlar metall ionlari bilan issiqlik muvozanatda yotadi va shuning uchun Maksvell tezliklar taqsimotiga ega bo'ladi deb faraz qilsak, u vaqtida nazariya qator qarama-qarshiliklarga olib keladi, shulardan bittasi metall issiqlik sig'imiga erkin elektronlar hissasining yo'qligidadir.

Bu qarama-qarshiliklar shu bilan tushuntiriladiki, metalldagi erkin elektronlarga klassik statistikani tatbiq qilish mumkin emas va ular Fermi-Dirak statistikasiga bo'ysunadi. Biroq anu shu qarama-qarshiliklar bartaraf qilingandan so'ng ham ba'zi narsalar tushunilmasdan qoldi, masalan, nima uchun metall va yarimo'tkazgichlarda o'tkazuvchi elektronlar o'zini erkin zarra kabi tutadi va katta erkin yugurish yo'liga ega bo'ladi. Faqat kvant mexanika kristallning uch o'lchovli davriy may donda elektron tabiatini o'rganishi tufayli bu muammoni tu shuntirdi va kubik kristallarda o'zini effektiv massali erkin zarra kabi tushishini ko'rsatdi.

Keyingi yillardagi nazariy tekshirishlar ko'rsatdiki, ko'p hollarda faqat yarimo'tkazgichdagagi elektronlar orasidagi o'zarotasi'sirni emas (konsentratsiya $n = 10^{14}-10^{18} \text{ sm}^{-3}$), balki metallarda ham ($n = 10^{22}-10^{23} \text{ sm}^{-3}$) hisobga olmasligimiz mumkin, ya'ni ularni ideal gaz deb qarashimiz mumkin.

Agar kristallda o'tkazuvchan elektronlar m^* effektiv massa orqali xarakterlansa va nomuvozanat holatda yotsa, ularning tabiatini Bolsman kinetik tenglamasi bilan tavsiflanadi. Bunda erkin elektronlarning bir-biri bilan to'qnashishini emas, balki ularning aralashma, atomlar (ionlar) yoki panjara tebranishlari bilan to'qnashishi hisobga olinadi, natijada kinetik tenglamada to'qnashish hadi oddiy ko'rinishni oladi.

Bolsman kinetik tenglamasi (10.12) ni qo'yidagi ko'rinishda yozaylik:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{dreyf}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{to'qn}} . \quad (10.98)$$

Bu yerda

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{dreyf}} = -\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\mathbf{F}}{m^*} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{to'qn}} = I = b - a.$$

a va b kattaliklar to'qnashish natijasida (\mathbf{r} , \mathbf{v}) fazoda molekularning kelish va ketish tezligini aniqlaydi. (10.98) ifoda $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ taqsimot funksiyasi uchun a va b larni oshkora holda $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ orqali ifodalash zarur. Umumiy holda bajarish murakkabdir, ammo ba'zi hollarda

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{to'qn}} = -\frac{f - f_0}{\tau} \quad (10.99)$$

deb faraz qilsa bo'ladi. Bu yerda $(f - f_0)$ – nomuvozanat taqsimot funksiyasini muvozanat taqsimot funksiyasidan chetlanishi, $\tau(\mathbf{v})$ – relaksatsiya vaqtisi.

(10.59) kinetik tenglamani o'tkazuvchi elektronlar konsentratsiyasi n o'zgarmas bo'lganda $\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0 \right)$ va statsionar holda $\left(\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \right)$ qaraylik. Bunda elektr maydon ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_x$) x o'qi yo'nalishi bo'yicha qo'yilgan bo'lsin. Agar elektron energiyasi $\mathcal{E} = m^* v^2 / 2$ va ularning sochilishi elastik o'tayotgan bo'lsa, u holda kinetik tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{e \mathbf{E}_x}{m^*} \frac{\partial f}{\partial v_x} = \frac{f - f_0}{\tau}. \quad (10.100)$$

Taqsimot funksiyasi f ning muvozanat taqsimot' funksiyasi f_0 dan birinchi yaqinlashishda chetlanishi elektr maydon kuchlanganligiga proporsional bo'ladi. Agar biz maydon kuchlanganligi \mathbf{E} bo'yicha chiziqli (Om qonuni) effektlar bilan qiziqsak, u holda (10.100) ning chap tomonini $f = f_0 + f_1 \approx f_0$ funksiya bilan almashtiramiz. Bu holda

$$\frac{eE_x}{m^*} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} = \frac{eE_x}{m^*} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_x} = eE_x \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} v_x.$$

Demak,

$$f = f_0 + eE_x \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} v_x \tau(v). \quad (10.101)$$

Agar elektr maydon x o'qi bo'yicha qo'yilgan bo'lsa, u vaqtida tok x o'qi bo'ylab oqadi. Elektr tok zichligi $j = j_x$ elektron zaryadi ($-e$) bilan o'qi bo'yicha elektronlar oqimining ko'paytligiga tengligini va $\int f_0 v_x dv = 0$ ni hisobga olsak,

$$j = -e \int f v_x dv = -e^2 E_x \int \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \tau v_x^2 d^3v. \quad (10.102)$$

Bu yerda integralni hisoblash uchun x o'qi bo'yicha yo'nalган quilliga koordinatalariga o'tamiz. U holda $v_x = \cos\theta$, $d^3v = v^2 \sin\theta dx d\phi d\psi$, f_0 ni Maksvell tezliklar bo'yicha taqsimot funksiyasi bilan almashitirib, (10.102) ni burchaklar bo'yicha integrallash natijasida tok zichligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$j = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{ne^2 E_x}{m^*} \int_0^\infty \tau(\xi) e^{-\xi} \sqrt{\xi^3} d\xi, \quad (10.103)$$

bu yerda relaksatsiya vaqtiga τ o'zgaruvchi orqali ifodalangan Shunday qilib, Om qonuning differensial ko'rinishi uchun

$$j = \sigma E = neu \quad (10.104)$$

ifodani olamiz. Bu yerda $\sigma = neu$ – solishtirma elektr o'tkazuvchanlik, $u = e < \tau > / m^*$ – tok tashuvchilarining harakatchanligi

$$\langle \tau \rangle = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \tau(\xi) e^{-\xi} \sqrt{\xi^3} d\xi$$

– o'rtacha relaksatsiya vaqtiga. Agar relaksatsiya vaqtiga tezliklari (ya'ni ξ ga) bog'liq bo'lmasa, u holda $< \tau > = \tau$ bo'ladi.

O'tkazuvchi elektronlar kuchli aynigan va Fermi statistikasiaga bo'ysinuvchi metallar holida, f_0 taqsimot funksiyasini hozir fazoviy yacheykadagi elektronlarning o'rtacha soniga teng deb qabul qilinsa, u holda integrallashni kvant holatlar bo'yicha almashitirish kerak:

$$2 \frac{dp}{h^3} = 2 \left(\frac{m^*}{h} \right)^3 dv.$$

Natijada elektr o'tkazuvchanlik uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\sigma = -\frac{16\sqrt{2}\pi}{3} \frac{e^2 \sqrt{m^*}}{h^3} \int \tau(\mathcal{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \mathcal{E}^{3/2} d\mathcal{E}. \quad (10.105)$$

Nolinchı yaqinlashishda $\frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}}$ ni delta funksiya bilan almashtirish mumkin, ya'ni

$$\frac{\partial f_0}{\partial E} = \delta(\mathcal{E} - \mu_0). \quad (10.106)$$

Bu yerda $\mu_0 = \mu_{T=0} = \mathcal{E}_F$ absolut nol temperaturada elektronlar kimyoviy potensiali. (10.106) ni (10.95) ga qo'yib integrallash natijasida

$$\sigma = \frac{ne^2}{m^*} \tau(\mu_0)$$

ni olamiz. Bu yerda $\mu_0 = \frac{h^2}{2m^*} (3n/8\pi)^{2/3}$ bilan almashtirildi.

10.12. Bogolyubov kinetik zanjir tenglamasi

Bolsman kinetik tenglamasining isboti o'ta sodda va ko'rgazmali bo'lib, ammo prinsipial va amaliy jihatdan bir qator kamchiliklardan holi emas. Haqiqatan, bu isbotda faqat molekulalarning juft-juft to'qnashishlari qaralgan. Bu yerda to'qnashishlarning juftlik xarakteri o'ta muhim, lekin uchtalab, to'rttalab va h.k. to'qnashishlar holi uchun qanday yo'l bilan xulosa qilish mumkinligi tamoman ko'rinxaydi. Umumiy nazariyaning tatbiq qilish sohasi o'ta siyrak gazlar holi uchun o'rinxidir. Bolsman tenglamasining keltirilgan isbotida muhim prinsipial moment tomoman ko'rinxaydi: bir tomondan klassik mexanika tenglamalarining vaqt bo'yicha qaytuvchanligi hisobga olingan va zarralar harakati, ularning to'qnashishlari qat'iy sur'atda determinlashtirilgan qonunlar bo'yicha sodir bo'ladi. Ikkinchidan, Bolsman tenglamasidan shu narsa kelib chiqadiki, to'qnashishlar natijasida gazda molekular xaos barqaror topadi va gaz entropiyasi vaqt monoton o'sib qandaydir limitga intil-

gan holda ortib boradi. Ammo bu yerda, tenglamani hisoblab chiqish davomida qaysi joyda jarayonning statistik, ehtimollik xarakteriga ega ekanligi kiritilishi noma'lum.

Biz bu mavzuda korrelativ funksiyalardan foydalanishga asoslangan Bogolyubov varianti bo'yicha kinetik tenglamasi isbotini keltiramiz.

VI bobda past tartibli korrelativ funksiyalarni yuqori tartibli korrelyativ funksiyalar bilan bog'lovchi Bogolyubovning zanjir tenglamasining isboti berildi. U yerda korrelativ funksiyalar faqat zarra koordinatasiga bog'liq deb olingan edi. Bu bu yerda korrelyativ funksiyalarni aniqlashni zarraning koordinatasi, impulsi va vaqtga bog'liq bo'lgan hol uchun umumlash tiramiz.

N ta zarradan tashkil topgan sistema $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ taqsimot funksiyasi fazalar fazosida tasviri yuqorida sonining saqlanish qonunini ifodalovchi umumiy tenglamani

$$\frac{d\rho(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{dt} = 0 \quad (10.107)$$

yoki Liuvill tenglamasini

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] \quad (10.108)$$

qanoatlantirilishi kerak. Bu yerda

$$\{H, \rho\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \right)$$

Puasson qavsi.

Faqat juft-juft o'zaro ta'sirda bo'lgan m massali N ta zarradan tashkil topgan sistema uchun Gamilton funksiyasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j}^N U(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) + \sum_{i=1}^N U_0(\mathbf{r}_i) \quad (10.109)$$

VI bobdagidek quyidagi ko'rinishda korrellativ funksiyalarni kiritamiz:

$$\rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) = V \int \rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t) d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_N,$$

$$\rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = V^2 \int \rho(\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t) d\mathbf{r}_3 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_N,$$

$$\rho_s(r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s, t) = \\ = V^s \int \rho(r_1, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N, t) dr_{s+1} \dots dr_N dp_{s+1} \dots dp_N \quad (10.110)$$

$\rho_1(r_1, p_1, t)$ uchun tenglamani olish uchun (10.107) ning har ikkala tomonini $r_2 \dots r_N p_2 \dots p_N$ bo'yicha integrallaymiz:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = V \int \{H, \rho\} dr_2 \dots dr_N dp_2 \dots dp_N. \quad (10.111)$$

Gamilton funksiyasi (10.109) ni hisobga olsak, Puasson qavsi quyidagi ko'rnishni oladi:

$$\{H, \rho\} = \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{p_i}{m} \frac{\partial \rho}{\partial r_i} + \frac{\partial U_0}{\partial r_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} + \sum_{j>i}^N \frac{\partial U_{ij}}{\partial r_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_j} \right\}. \quad (10.112)$$

Bu yerda qisqacha quyidagi belgilash qabul qilingan:

$$U_{ij} = U(|r_i - r_j|). \quad (10.113)$$

(10.112) ni (10.111) ga qo'yib, $\rho(r_1, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N, t)$ funksiyaning normirovka shartiga ko'ra, quyidagi hadlarning cheksizlikda nolga tengligini, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_i}{m} \frac{\partial \rho}{\partial r_i} dr_i = \frac{p_i}{m} \rho \Bigg[\dots \rightarrow 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U_0}{\partial r_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} dp_i = \frac{\partial U_0}{\partial r_i} \rho \Bigg] \rightarrow 0$$

ekanligini hisobga olsak, u holda ρ_1 funksiya uchun quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = V \int \left\{ -\frac{p_1}{m} \frac{\partial \rho}{\partial r_1} + \frac{\partial U_0}{\partial r_1} \frac{\partial \rho}{\partial p_1} + \sum_{j=2}^N \frac{\partial U_{ij}}{\partial r_1} \frac{\partial \rho}{\partial p_j} \right\} dr_2 \dots dr_N dp_2 \dots dp_N. \quad (10.114)$$

Zarralarning to'la ravishda o'xshashligiga (aynanligiga) ko'ra funksiyani, istalgan zarralarni o'rin almashtirilishiga nisbatan simmetrik deb hisoblash mumkin. Bu esa (10.114) da oxirgi haddagi yig'indida ($N - 1$) ta hadning bir xilda ekanligini ko'rsatdi. Demak, bu yig'indi ($N - 1$) ga ko'paytirilgan bitta had bilan almashtiriladi. Natijada, (10.114) ifoda birinchi zarranining koordinata, impuls va vaqtga bog'liq bo'lgan ordinar funksiya $\rho_1(r_1, p_1, t)$ uchun quyidagi ko'rnishni oladi:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial \rho_1}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial \mathbf{p}_1} + \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial U_2}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial \rho_2}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2,$$

yoki $U_0(\mathbf{r}_1)$ ni impulsga bog'liq emasligini hisobga olsak, u holda (10.114) quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \{H_1, \rho_1\} + \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial \rho_2}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (10.115)$$

Ammo (10.115) ko'rinishdagi ρ_1 uchun olingan aniq tenglama yopiq emasdир, chunki unga nomalum bo'lgan binar funksiya ρ_{12} kiradi. Bu ρ_{12} binar funksiya uchun tenglama tuzish mumkin, lekin u no'malum funksiya ρ_{123} ternar funksiyani o'z ichiga olgan bo'ladi. ρ_{123} uchun tuzilgan tenglama o'z navbatida ρ_{1234} no'malum funksiyani o'z ichiga oladi va h.k.

Yuqoridagi kabi usul bilan $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_N$ no'malum funksiyalar uchun quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} &= \{H_2, \rho_2\} + \frac{N-2}{V} \sum_{i=1}^2 \int \frac{\partial U_{2+1,i}}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \rho_3}{\partial \mathbf{p}_i} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{p}_3, \\ &\dots \\ \frac{\partial \rho_S}{\partial t} &= \{H_S, \rho_S\} + \frac{N-S}{V} \sum_{i=1}^{S-1} \int \frac{\partial U_{S+1,i}}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \rho_{S+1}}{\partial \mathbf{p}_i} d\mathbf{r}_{S+1} d\mathbf{p}_{S+1}, \\ &\dots \\ \frac{\partial \rho_N}{\partial t} &= \{H, \rho_N\}. \end{aligned} \quad (10.116)$$

Bu yerda H_S – S ta zarra uchun zarralar orasidagi o'zarot'a'sir hisobga olinmagandagi Gamilton funksiyasi, ya'ni

$$H_S = \sum_{i=1}^S \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{1 \leq i \leq S} U_{ij} + \sum_{i=1}^S U_0(r_i).$$

Demak, olingan zanjir tenglamaning oxirida yana boshlang'ich tenglama (10.107) ga qaytib kelamiz, ρ_N funksiya esa $\rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t)$ funksiya bilan mos tushar ekan.

Yuqorida olingan tenglamalar sistemasi (10.115) va (10.116) ga Bogolyubovning kinetik zanjir tenglamasi deb yuritiladi. Bu N ta zarradan tashkil topgan sistemaning fazalar fazosida

harakat tenglamasi bo'lib hisoblanadi. Kinetik zanjir tenglamalar sistemasidan shu narsa tushinarlik, ρ_1 funksiya uchun aniq yechimni izlash (10.115) va (10.116) tenglamalar sistemasining yechimiga ekvivalentdir. Ammo N ta moddiy nuqta uchun mexanika tenglamalar sistemasini echish mumkin bo'lmasligi kabi, (10.115) va (10.116) tenglamalar sistemasining ham amaliy nuqtayi nazardan yechimini topish mumkin emas.

Shunday qilib, yuqoridagi tenglamalar sistemasini yechish uchun ρ_1 funksiyani aniqlovchi tenglama (10.115) ga kirgan ρ_{12} funksiyani taqriban ρ_1 funksiya orqali ifodalovchi qandaydir boshqa funksiya bilan almashtirish kerak. ρ_{12} funksiyani taqriban ρ_{12} funksiya orqali ifodalash uchun soddalashtiruvchi farazlar qabul qilish zarur. Bu farazlarning xarakteri sistemaning fizik xususiyatiga, ya'ni juft o'zaro ta'sirlar potensali $U(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)$ ning ko'rinishiga bog'liq bo'lishi kerak. Masalan, sistemada zarralar orasidagi o'zaro ta'sir kuchlarining uzoqdan yoki yaqindan ta'sir etish xarakteriga qarab, unar funksiya ρ_1 uchun olin-gan taqrifiy tenglama, sistema holatini aniqlovchi kinetik tenglamaga olib keladi:

$$\rho_1 = \frac{V}{N} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t), \quad \rho_2 = \left(\frac{V}{N}\right)^2 f_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t), \dots$$

almashtirishlar natijasida $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ uchun tenglamalar sistemasidan f_1, f_2, \dots, f_N taqsimot funksiyalari uchun Bogolyubov kinetik zanjir tenglamalar sistemasiga o'tish mumkin.

Yuqoridagi almashtirishlar natijasida unar taqsimot funksiyasi uchun $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$ tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} - \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} = \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f_{12}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (10.117)$$

Agar indeks «1» ni tushirib qoldirsak, U_{12} ning zarra impulsiga bog'liq emasligini va $\mathbf{F} = -\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}}$ ekanligini hisobga olsak, u holda (10.117) tenglama unar taqsimot funksiya $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ uchun quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \int \{U_{12}, f_2\} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (10.118)$$

(10.118) ifoda Unar taqsimot funksiyasi uchun Bogolyubovning asosiy kinetik tenglamasi deyiladi. Agar (10.118) ning o'ng tomoni ma'lum bo'lsa, u holda kinetik tenglamaning yechimi sistema holatini xarakterlovchi taqsimot funksiyasi bo'la oladi.

10.13. O'zi moslashuvchan maydon kinetik tenglamasi. Vlasov tenglamasi

Yuqorida qo'yilgan masala – unar funksiya uchun taqrifiy tenglamani olishni qarab chiqaylik. Faraz qilaylik, gazning ayrim zarralari orasidagi o'zaro ta'sir kuchi uzoqdan ta'sir qiluvchi, ya'ni masofaga qarab, yetarli darajada sekin kamayuvchi (masalan, masofa bo'yicha r^{-2} ko'rinishda kamayuvchi kulon yoki gravitatsion kuch) kuch bo'lsin. Masalan, ionlashtirilgan gazda, ya'ni plazmada elektronlar va ionlar orasida ana shunday kuchlar ta'sir etadi.

Agar kuchlar masofaga qarab, yetarli darajada sekin kamaysa, masalan, r^{-2} ko'rinishda bo'lsa, u holda har bir zarra bir vaqtning o'zida unga yaqin turgan zarraga, hamda undan katta masofaga uzoqlashtirilgan zarraga effektiv ta'sir etadi, chunki dr intervalda yotgan zarralar soni r^2 ga proporsional holda ortadi. Binobarin, tanlangan juft zarralarning harakati ularning juft o'zaro ta'sirlashuvining natijasi deb qaralmay, balki ikkala zarralarning har birini qolgan barcha zarralar bilan o'zaro ta'siri deb qaraladi. Shu sababdan tanlangan ikkita zarra harakatini amalda moddiy nuqtalarning bir-biridan statistik bog'lanmagan harakati deb qarash mumkin. Bu hol uchun binar funksiya ρ_{12} ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)\rho_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t). \quad (10.119)$$

(10.119) ni (10.115) ga qo'yib, quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial \rho_1}{\partial \mathbf{r}_1} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial \mathbf{p}_1} = [U, \rho_1], \quad (10.120)$$

bu yerda

$$U = U_0(\mathbf{r}_1) + \frac{N-1}{V} \int U_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \rho_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2.$$

Yoki $\rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$ unar funksiyadan taqsimot funksiyaga o'tsak, (10.120) tenglama

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \nabla_{\mathbf{r}} f + \bar{\mathbf{F}} \nabla_{\mathbf{p}} f = 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}} f + \bar{\mathbf{F}} \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \quad (10.121)$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda $\nabla_{\mathbf{r}}$ va $\nabla_{\mathbf{p}}$ mos ravishda koordinata va impuls gradient operatoridir. Tenglamani isbotlashda sistema va sistemadagi zarralar soni etarli darajada katta deb hisoblaniladi. Tenglamaga o'zi moslashuvchan maydon kinetik tenglamasi deyiladi.

Bir nechta navdagi zarralardan tashkil topgan gaz holiga (10.121) tenglama oson umumlashtiriladi. Masalan, elektron va musbat ionlardan tashkil topgan to'la ionlashgan plazma uchun (10.121) tenglamaga muvofiq quyidagi tenglamalar sistemasini yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \nabla_{\mathbf{r}} f_e + \frac{e}{m_e} \nabla_{\mathbf{r}} \varphi \nabla_{\mathbf{v}} f_e &= 0, \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla_{\mathbf{r}} f_i - \frac{e}{m_i} \nabla_{\mathbf{r}} \varphi \nabla_{\mathbf{v}} f_i &= 0. \end{aligned} \quad (10.122)$$

Bu yerda $\varphi(\mathbf{r})$ elektronlar va ionlar hosil qilgan maydon potensiali, f_e va f_i mos ravishda elektronlar va ionlar taqsimot funksiyasi. (10.122) tenglamalar sistemasi A.A. Vlasov tenglamasi deb yuritiladi. Bu tenglamalar sistemasi yordamida, odatda, o'ta siyraklashgan plazmada nomuvozanat jarayonlar tekshiriladi.

Neytral atomlarning ionlashish jarayonida elektronlar va ionlar rekombinatsiyasini hisobga olish zarur bo'lgan o'ta zinch plazmalar holi uchun (10.122) tenglamalar sistemasi kollektiv o'zaro ta'sir va juft to'qnashishlarni hisobga oluvchi hadlar bilan to'ldirilishi kerak.

10.14. Bolsman kinetik tenglamasining Bogolyubov bo'yicha isboti

Zarralari faqat juft-juft to'qnashuvchi o'ta siyraklantirilgan gazni olib qaraylik. Bunda gaz uchun $r_0/\lambda \ll 1$. Bu yerda r_0 – o'zaro ta'sir radiusi, λ – zarraning erkin yugirish yo'li.

Masalani soddalashtirish uchun gazni fazoviy birjinsli deb qaraymiz. Bu holda taqsimot funksiyasi ρ_1 faqat impuls va vaqt t ga bog'liq bo'ladi, ya'ni

$$\rho_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \rho_1(\mathbf{p}, t).$$

Binar taqsimot funksiyasi ρ_{12} esa ikkita zarraning o'zgarmas a vektorga fazoviy siljitimida o'zgarmasdan qolishi kerak, ya'ni

$$\rho_2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t).$$

Bu shart bajariladi, agar ρ_{12} faqat zarralar orasidagi masofaning funksiyasi bo'lsa, ya'ni

$$\rho_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = \rho_{12}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t).$$

Quyidagi uchta xarakterli vaqtлarni kiritamiz:

- 1) to'qnashishlar effektiv davomligi $\tau_0 \sim r_0/v$;
- 2) to'qnashishlar orasidagi o'rtacha vaqt $\tau_0 \sim \lambda/v$ (v – o'rtacha tezlik, τ – o'rtacha erkin yugirish yo'li);
- 3) turli xil fizik masalalarda turlicha bo'lgan makroskopik relaksatsiya vaqt $\tau_m \sim L/v$ (L – idish o'lchami). τ_m har doim τ dan juda katta bo'ladi. Bu esa qaraladigan gazni yetarli darajada siyrakligini ko'rsatadi.

Shunday qilib, har doim quyidagi tengsizliklar bajariladi:

$$r_0 \ll \lambda \ll L, \quad \tau_0 \ll \tau \ll \tau_m.$$

Shunday qilib, bir qator bosqichlar orqali o'tishi tufayli, sis temaning boshlang'ich nomuvozanat holati vaqt bo'yicha evolutsiyalanadi.

Δt vaqt oralig'ida gaz tabiatini qarab chiqaylik.

1. $\Delta t \sim \tau_0$ boshlang'ich xoatizatsiya bosqichi. Bu holda sistema holati to'la N -zarrali $\rho_{12\dots N}$ taqsimot funksiya orqali tavsiflanadi.

2. $\tau_0 \ll \Delta t \leq \tau$ – bu bosqichni Bogolyubov kinetik deb ataydi va bu vaqt ichida gazda molekulalarning juda ozgina qismi to'qnashishga ulguradi. Shuning uchun, Δt vaqt ichida asosiy zarralar sonining vaqt bo'yicha tabiat funksiya bilan tavsiflanadi. Δt vaqt ichida to'qnashishga ulgurgan ozgina zarralarni fikran juftlab yig'aylik. Bu juftlar soni to'la zarralar soni N ga nisbatan juda kichik. To'qnashishga duchor bo'lgan juft zarralar tabiat ρ_{12} binar korrelativ funksiya bilan tavsiflanadi. Bizning vazifamiz ρ_1 va ρ_{12} orasidagi bog'lanishni tiklashdan iborat. Bu bog'lanishni mulohaza orqali aniqlash faqat vaqt Δt uchun to'g'ri bo'ladi.

3. $\tau < \Delta t$ – bu bosqich gidrodinamik deb ataladi va shu bilan xarakterlanadiki, bir qancha juft to'qnashishlardan so'ng, bu bosqichda gazning kichik hajmlarida lokal muvozanat tiklanadi.

Endi biz quyilgan masalaga o'taylik. Buning uchun korrelativ funksiyalarning tabiatini $V/N = \frac{1}{v} \rightarrow 0$ limitda qaraylik. Bu holda cheksiz kichik zichlikdagi gaz, taqsimot funksiyasi uchun tenglama fazoviy bir jinsli gazda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{d\rho_1(\mathbf{p}_1, t)}{dt} = 0. \quad (10.123)$$

Bu formula shu ma'noni anglatadiki – bu yaqinlashishida zarralar bir-biridan mustaqil harakatlanadi. (10.123) ning yechimini quyidagi simvolik ko'rinishda yozish qulay:

$$\rho_1(\mathbf{p}, t) = \hat{S}_1 \rho_1(\mathbf{p}_1, t - \tau_0).$$

Operator $\hat{S}_1 \rho_1(\mathbf{p}_1, t)$ funksiyaga ta'siri tufayli $t - \tau_0$ boshlang'ich vaqt momentida olingan funksiyani t vaqt momentidagi funksiyaga o'tkazadi. Zarralar bir jinsli gazda o'zgarmas impuls bilan to'qnashishsiz harakatlanganligi uchun:

$$\rho_1(\mathbf{p}_1, t) = \rho_1(\mathbf{p}_1, t - \tau_0).$$

Shunga o'xshash $1/v \rightarrow 0$ yaqinlashishda τ_{12} korrelativ funksiya uchun tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d\rho_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t)}{dt} = 0. \quad (10.124)$$

Ushbu tenglamaning yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$\rho_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = \hat{S}_2 \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t - \tau_0). \quad (10.125)$$

Operator \hat{S}_2 ta'siri tufayli $\rho_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t)$ $t - \tau_0$ boshlang'ich vaqt momentidagi qiymatidan t vaqt momentidagi qiymatiga o'tkazadi.

(10.125) tenglama qolgan molekulalar tomonidan ta'sirga duchor bo'lmanagan juft molekulalar tabiatini tavsiflaydi.

Shu narsa tushinarlikki, biz yuritayotgan fikr va (10.124) tenglama faqat $\Delta t \leq \tau$ vaqt ichida ma'noga ega. Ammo bu vaqt molekulalarning to'qnashish vaqtiga nisbatan ancha kattadir. Bogolyubov fikriga ko'ra, (10.124) tenglamadan taqriban katta vaqtlar ($t \rightarrow \infty$) uchun ham foydalanish mumkin.

(10.125) ni quyidagicha yozamiz:

$$\begin{aligned}\rho_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) &= \widehat{S}_2 \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t - \tau_0) = \\ &= \widehat{S}_2 [\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t - \tau_0) - \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t - \tau_0) \rho_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t - \tau_0)] + \\ &\quad + S_2 \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t - \tau_0) \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t - \tau_0).\end{aligned}\quad (10.126)$$

$t \rightarrow -\infty$ da limitga o'taylik, ya'ni korrellativ funksiyani to'qnashishga qadar ancha avval qaraylik. Bu holda juft zarralar tabiatli nokorrellativ bo'ladi va

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \widehat{S}_2 \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t - \tau_0) = \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t - \tau_0) \rho_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t - \tau_0)]. \quad (10.127)$$

Shuning uchun korrellatsiyani susaytirish shartini yozish mumkin:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t - \tau_0) \rho_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t - \tau_0)]. \quad (10.128)$$

Fazoviy birjinsli gazda, ρ_1 taqsimot funksiyasi faqat impulsiga bog'liq bo'ladi. $t \rightarrow -\infty$ limitga $t - \tau_0$ vaqt momentida to'qnashishga kiruvchi zarralar $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ impulslarining chegaraviy qiymatlari javob beradi, ya'ni

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} S_2 \mathbf{p}_1 = \mathbf{P}_1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} S_2 \mathbf{p}_2 = \mathbf{P}_2, \quad (10.129)$$

bu yerda \mathbf{P}_1 va \mathbf{P}_2 – o'zaro ta'sir doirasidan tashqarida yotgan vaqtida, to'qnashishga qadar zarralar impulslarining chegaraviy qiymatlari. \mathbf{P}_1 va \mathbf{P}_2 to'qnashuvchi zarralar impulslari \mathbf{p}_1 va \mathbf{p}_2 bilan quyidagicha bog'langan:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2) + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2m} (\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2), \quad (10.130)$$

(10.129) dan foydalanish va (10.124) ni hisobga olish natijasida (10.126) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned}\rho_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) &\approx \lim_{t \rightarrow -\infty} S_2 [\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t - \tau_0) - \\ &\quad - \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t - \tau_0) \rho_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t - \tau_0)] + \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow -\infty} S_2 \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t - \tau_0) \rho_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t - \tau_0) = \\ &= \rho_1(\mathbf{p}_1, 0) \rho_1(\mathbf{p}_2, 0) = \rho_1(\mathbf{P}_1, t) \rho_1(\mathbf{P}_2, t).\end{aligned}\quad (10.131)$$

(10.131) formula ρ_{12} binar funksiyani ρ_1 unar funksiyasi orqali ifoda qilish imkonini beradi. Biroq, $\rho_{12} t$ vaqt momentida to'qnashuvchi zarralar \mathbf{p}_1 va \mathbf{p}_2 impulslarining funksiyasi bo'lsa, (10.131) formulada ρ_1 unar funksiya esa to'qnashishga qadar zarralar \mathbf{P}_1 va \mathbf{P}_2 impulslarining chegaraviy qiymatlariga bog'liq bo'ladi.

Agar $\frac{1}{v}$ parametrning kichik qiymatida taqsimot funksiyasi uchun tenglamani olishga o'tmoqchi bo'lsak, u holda (10.118) ning o'ng tomoniga binar funksianing nolinchi yaqinlashishini (10.131) dan keltirib qo'yish natijasida quyidagi ko'rinishni olamiz:

$$\frac{\partial f(\mathbf{p}_1, t)}{\partial t} = \int \{U_{12}; f(\mathbf{P}_1, t)f(\mathbf{P}_2, t)\} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (10.132)$$

\mathbf{P}_1 va \mathbf{P}_2 impulslerning o'zgarmas vektorlar ekanligini hisobga olgan holda, Puasson qavslari almashtiramiz. Shunga ko'ra

$$\{H; f(\mathbf{P}_1, t)f(\mathbf{P}_2, t)\} = 0$$

yoki (10.120) dan foydalansak,

$$\left\{ \frac{\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2}{2m} + U_{12}; f(\mathbf{P}_1, t)f(\mathbf{P}_2, t) \right\} = 0.$$

Bu ifodadan

$$\begin{aligned} \{U_{12}; f(\mathbf{P}_1, t)f(\mathbf{P}_2, t)\} &= - \left\{ \frac{\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2}{2m}; f(\mathbf{P}_1, t)f(\mathbf{P}_2, t) \right\} = \\ &= \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial f(\mathbf{P}_1, t)f(\mathbf{P}_2, t)}{\partial (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}. \end{aligned}$$

Shunday qilib, (10.132) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial f(\mathbf{p}_1, t)}{\partial t} = \int \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial f(\mathbf{P}_1, t)f(\mathbf{P}_2, t)}{\partial \mathbf{r}_{12}} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2 = \int I d\mathbf{p}_2, \quad (10.133)$$

bu yerda

$$I = \int \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial f(\mathbf{P}_1, t)f(\mathbf{P}_2, t)}{\partial \mathbf{r}_{12}} d\mathbf{r}_2, \quad (10.134)$$

(10.134) ni hisoblash uchun r, φ, ξ silindrik koordinatalar sistemasiga o'tamiz. Qutb o'qi ξ ning musbat yo'nalishi $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ vektor yo'nalishi bilan mos kelsin. U holda

$$x_1 = x_2 + r \sin \varphi, \quad y_1 = y_2 + r \cos \varphi, \quad z_1 = z_2 + \xi,$$

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = [0, 0, (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)], \quad d\mathbf{r}_{12} = r dr d\varphi d\xi.$$

Bu holda

$$(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \frac{\partial f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)}{\partial \mathbf{r}_{12}} = (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \frac{\partial f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)}{\partial \xi}.$$

Endi \mathbf{P}_1 va \mathbf{P}_2 impulslar r, φ, ξ kordinatalarning funksiyasi bo'ldi. Koordinata boshi qilib, r_{12} nuqtani, ya'ni to'qnashish sodir bo'layotgan nuqtani tanlaymiz. O'qlarni ana shunday tanlashda

$$I = \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{m} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)}{\partial \xi} r dr d\varphi d\xi =$$

$$= 2\pi \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{m} \int_0^\infty r dr [f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)] \Big|_{\xi \rightarrow -\infty}^{\xi \rightarrow \infty},$$

$$[f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)] |^{\xi \rightarrow \infty} = [f(\mathbf{P}_1, t - t') f(\mathbf{P}_2, t - t')] |^{\xi \rightarrow \infty}. \quad (10.135)$$

Ko'paytmani qaraylik. Bu yerda $t \leq \tau$ va zarralarni bir-biridan katta masofalarda turishiga javob beradi (o'zaro ta'sir sferasidan tashqarida). Bunda zarralar bir-biridan uzoqlashadi (chunki $(p_2 - p_1)/m = v_n$ ξ ning ortishi bilan ortadi). Eu shuni anglatadiki, agar zarralar t vaqt momentida bir-biridan katta masofada turgan bo'lsa, u vaqtida avval qandaydir $t - t'$ vaqt momentida, ular yaqin masofada bo'ladi, o'zaro ta'sirlashib va keyin ajralishadi. (10.125) dagi \mathbf{P}_1 va \mathbf{P}_2 impulslar zarralarning to'qnashishga qadar (xususan, to'qnashishga kirishish oldidagi) impulslarini anglatadi. Ana shu holni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$[f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)] |^{\xi \rightarrow \infty} = [f(\mathbf{P}_1^*, t) f(\mathbf{P}_2^*, t)], \quad (10.136)$$

bu yerda \mathbf{P}_1^* va \mathbf{P}_2^* – to'g'ridan-to'g'ri to'qnashish impulsleri

$$[f(\mathbf{P}_1, t) f(\mathbf{P}_2, t)] |^{\xi \rightarrow \infty}$$

ko'paytma ham $\xi \rightarrow -\infty$ vaziyatda t vaqt momentida o'zaro ta'sir sferasidan tashqarida katta masofalarda turgan zarralar ga javob beradi. Biroq bu zarralar $t \rightarrow \tau_0$ dan t gacha vaqt oralig'i ichida yaqinlashishga va to'qnashishga ulgura olmaydi. Ular o'zgarmas impulslar bilan harakatlanadi. Bu holda

$$[f(\mathbf{P}_1, t)f(\mathbf{P}_2, t)]^{\xi \rightarrow \infty} = [f(\mathbf{p}_1, t)f(\mathbf{p}_2, t)], \quad (10.137)$$

bu yerda \mathbf{p}_1 va $\mathbf{p}_2 - t$ vaqt momentidagi impulslar. (10.136) va (10.137) larni I integralga qo'yish natijasida quyidagini topamiz:

$$I = \frac{p_2 - p_1}{m} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} [f(\mathbf{P}_1^*, t)f(\mathbf{P}_2^*, t) - f(\mathbf{p}_1, t)f(\mathbf{p}_2, t)] d\varphi. \quad (10.138)$$

(10.138) ifodaning ko'rinishini o'zgartirish uchun quyidagilarni hisobga olamiz. Birinchidan, zarralarning nisbiy tezligini kiritamiz v_n , ikkinchidan, r va φ lar o'rniga fazoviy burchak va effektiv kesimini kiritamiz, ya'ni $rdrd\varphi = \sigma d\Omega$ va, uchinchidan, integral ostidagi ifodaga to'g'ridan-to'g'ri to'qnashish oldidagi \mathbf{P}_1^* va \mathbf{P}_2^* impulslar kiradi. Vaqt ni almashtirishga nisbatan ikki jismnning simmetriya masalasiga ko'ra

$$f(\mathbf{P}_1^*, t)f(\mathbf{P}_2^*, t) = [f(\mathbf{p}_3, t)f(\mathbf{p}_4, t)],$$

bu yerda \mathbf{p}_3 va $\mathbf{p}_4 - t$ to'qnashishdan keyingi impulslar. Shunday qilib, (10.138) ning yangi ko'rinishini olamiz:

$$I = \iint v_n \sigma [f(\mathbf{p}_3, t)f(\mathbf{p}_4, t) - f(\mathbf{p}_1, t)f(\mathbf{p}_2, t)] d\mathbf{p}_2 d\Omega. \quad (10.139)$$

Ushbu ifodani (10.133) ga qo'yish natijasida Bolsman kinetik tenglamasiga kelamiz:

$$\frac{\partial f(\mathbf{p}_1, t)}{\partial t} = \iint v_n \sigma [f(\mathbf{p}_3, t)f(\mathbf{p}_4, t) - f(\mathbf{p}_1, t)f(\mathbf{p}_2, t)] d\mathbf{p}_2 d\Omega. \quad (10.140)$$

Bir jinsli bo'limgan gazlar holida shunga o'xshash birikish birmuncha shakli o'zgargan Bolsman tenglamasini olamiz. (10.140) tenglamani isbotlashda shu narsani ko'rdikki, mexanikaning qaytuvchi qonuni - Liuvill tenglamasidan Bolsmanning kinetik tenglamasiga o'tish statistik bosqich - (10.131) formulani o'z ichiga oladi. (10.131) formulada boshidayoq vaqt bo'yicha jarayonning asimetriyaligi faraz qilingan. Berilgan t vaqt momentida gaz holatini qayd qilib, uning berilgan holatga qanday kelishini tahlil qildik. Bunda berilgan vaqt momentda statistik taqsimot, avval qanday bo'lganligi bilan bog'lanadi. Boshqacha qilib aytganda, sistema tasodifan shunday vaziyatga tushib qoladiki, biz uni to'qnashish deb ataymiz. To'qnashish-

gacha «juft» zarralar o'zaro ta'sirlashmaydigan zarralardan tashkil topgan. t vaqt momentida ta'sirlashish tasodifiy aktdir. Shu vaqt momentidan boshlab, to «juft» zarralar keyingi to'q-nashishga duchor bo'lgan $t + \tau$ vaqt momentiga qadar, ularning harakati determinizmlashtirilgan xarakterga ega bo'ladi. Shunday qilib, Bolsman tenglamasini isbotlashda vaqtning asimmetriyaligi, boshlang'ich va oxirgi holatlari farqlanishi faraz qilingan, $t - \tau_0$ va $t + \tau$ vaqt ichida sistema tabiatini taman turli xildir.

10.15. bobga oid masala va savollar

1. Agar Ox o'qi bo'yicha statsionar temperatura gradienti mavjud va E maydon qo'yilgan bo'lsa, metalldagi aynimagan elektron gazi uchun elektr o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti aniqlansin. $\tau = Av^l$ ($A > 0$, $l > -7$).

Yechish. Berilgan masala uchun Ox o'qi bo'yicha tok zichligi j_x va issiqlik oqimi Q

$$j_x = \int ev_x f dv, \quad Q = \int \frac{mv^2}{2} v_x f dv$$

ko'rinishda yoziladi. Kinetik tenglamadan taqsimot funksiyasini topamiz:

$$f = f_0 - \tau \left(\frac{e\mathcal{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} + v_x \frac{\partial f_0}{\partial x} \right).$$

Bu yerda

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right).$$

Elektr maydon \mathcal{E} va temperatura gradienti taqsimot funksiyasini kam o'zgartiradi, bu holda

$$f = f_0 + \frac{\tau e \mathcal{E}}{kT} v_x f_0 - \frac{\tau v_x}{kT^2} \left(\varepsilon - \frac{3}{2} kT \right) f_0 \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Bu ifoda yordamida tok zichligini va issiqlik oqimini topamiz:

$$j_x = \frac{4enA}{3m\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{l+5}{2} \right) \left(\frac{2kT}{m} \right)^{l/2} kT \left[eE - \left(\frac{l}{2} + 1 \right) k \frac{\partial T}{\partial x} \right],$$

$$Q = \frac{4\pi A}{3m\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{l+7}{2}\right) \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} kT \left[e\mathcal{E} - \left(\frac{l}{2} + 2\right) k \frac{\partial T}{\partial x} \right]$$

yoki

$$j_x = L_{11} \mathcal{E} + k L_{12} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Q = L_{21} \mathcal{E} + k L_{22} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ shartdan:

$$\sigma = \frac{4e^2 n A}{3m\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{l+5}{2}\right) \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2},$$

$j_x = 0$ shartdan:

$$\mathcal{E} = \frac{nA}{m\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{l+7}{2}\right) \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} kT$$

kelib chiqadi.

2. To'qnashish integrali va uni olish.
3. Bolsman kinetik tenglamasi va uning fizik ma'nosi.
4. Bolsman kinetik tenglamasining statsionar yechimi.

Taqsimot funksiyasi.

5. Bolsman H- funksiyasi.
6. Entropiyaning vaqt bo'yicha o'sish qonuni.
7. Lokal muvozanat va taqsimot funksiyasi.
8. Gazlarda to'qnashish soni, o'rtacha erkin yugurish vaqt va erkin yugurish yo'li.
9. Kristallarga Bolsman tenglamasining tatbig'i. Om qonuni.
10. Umumlashgan ko'chirish tenglamasi.
11. Energiya saqlanish qonuni.
12. Bolsman kinetik tenglamasini yechishda Chepmann-Enskiy metodi.
13. Ideal gazlarda issiqqliq o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti α bilan yopishqoqlik koeffitsiyenti η orasidagi bog'lanish.
14. Gazda relaksatsiya vaqt.
15. Bogolyubovning kinetik zanjir tenglamasi.
16. O'zi moslashgan va Vlasov tenglamalari.

MASALALARING JAVOBLARI

I bobga oid masalalarining javoblari

4. $p^2 - p_0^2 = 2m^2g(z - z_0)$. 5. $p = \pm \sqrt{2mee_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$. 6. $p_1 = p_0 - mgt$,
 $z_1 = z_0 + \frac{p_0 t}{m} - \frac{gt^2}{2}$; $p_2 = p_0 - mgt$; $z_2 = z_1 + a$; $p_3 = p_1 + b$; $z_3 = z_1 + \frac{b}{m}t$.

Yangi uchburchak yuzasi $S = \frac{ab}{2} = S_0$. 9. $D = \frac{\partial(q,p)}{\partial(q_0, p_0)} = e^{-t/r}$. 10. $\Gamma(\varepsilon) = h$.

11. $\Gamma(\varepsilon) = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{\varepsilon^2}{c^2} - m_0^2 c^2 \right)^{3/2}$. 12. $d\Omega = 2\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$.

13. $d\Omega = A_s V^* \frac{\varepsilon^{s/3-1}}{h^s c^{s/3}} d\varepsilon$, A_s – hajm va energiyaga bog‘liq bo‘lmagan o‘zgarmas. 15. $\Omega(\varepsilon) = \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m \varepsilon}{\omega h} \right)^N$, $\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$.

II bobga oid masalalarining javoblari

1. $Z(\theta) = (2\pi m k T)^{3N/2} V^N$. 2. $dW = \frac{2}{\sqrt{\pi \theta^3}} e^{-\varepsilon/\theta} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$,

$dW = \frac{1}{\sqrt{\theta^{3N}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)} e^{-\varepsilon/\theta} \varepsilon^{3N/2-1} d\varepsilon$. 3. $dW(\varepsilon) = \frac{1}{kT} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon$, $\bar{\varepsilon} = kT$.

6. $C = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2}$. 7. $dW = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} dx$. 9. $\varepsilon_e = \frac{kT}{2}$, $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT$, $\bar{\varepsilon} \neq \varepsilon_e$.

10. $\frac{N_e}{N} = \Phi(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \approx 43\%$. 11. $\frac{N_1}{N} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} e^{-3/2} + 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \approx 0,39$. Bu yerda

$N_1 = N \int_{\bar{\varepsilon}}^{\infty} d\rho(\varepsilon)$ energiyasi $\varepsilon \geq \frac{3}{2} kT$ bo‘lgan zarralar soni. 13. $\bar{v} = \sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}}$,

$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{4kT}{m}}$. 14. $\nu = 4\pi\sigma \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$, $\lambda = \frac{\bar{v}}{\nu} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi n} R_0^2}$. 15. $\frac{N_{<}}{N_{>}} = \frac{\sqrt{\pi} e \Phi(1) - 2}{\sqrt{\pi} e (1 - \Phi(1)) + 2}$.

16. $\bar{z} = z_0 = \frac{kT}{mg}$. 17. $z_0 = \frac{nkT}{gM} - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n \frac{h m_k}{e^{h/z_{lo}} - 1}$, $M = \sum_{k=1}^n N m_k$.

18. $\frac{n_{ee}}{n_0} = \exp\left(-\frac{m g r_0}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{Nm g r_0}{RT}\right) = 10^{-344}$. 19. $M = \frac{S p_2}{\sqrt{2\pi m k T_2}} \cdot 0,41$.

III bobga oid masalalarining javoblari

1. $A = pV_2 = 3125,7 \text{ J}$, $Q = \lambda_i m = 40624 \text{ J}$. Bu yerda $\lambda_i = 2258 \text{ J/g}$ – suv uchun bug' hosil qilish issiqligi. 2. $\delta A = -EdP$. 4. $p_k = \frac{a}{275^2 RT}$, $V_k = 3b$,

$T_k = \frac{8a}{27Rb}$, $s = \frac{8}{3} \cdot 5$. $p_k = \frac{a}{4e^2 b^2}$, $V_k = 2b$, $T_k = \frac{a}{4Rb}$, $s = \frac{e^2}{2}$. 6. $s = 3,75$,

$s_{eks} = 3,5 - 39,5$, $s_B = 2,67$. 7. $p_k = \frac{RT_k}{8(b+C)}$, $V_k = 3b + 2C$, $T_k = \sqrt{\frac{8a}{27R(b+C)}}$,

$s = \frac{8(b+C)}{3b+2C}$. 10. $B_1 = \left(b - \frac{a}{RT} \right)$, $B_2 = b^2$, $B_3 = b^3$, $T_B = \frac{a}{Rb}$.

12. $TV^{n-1} = \text{const}$, $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, $pV^n = \text{const}$, $pV^\gamma = \text{const}$.

13. a) $v = \sqrt{\gamma \frac{K_{izo}}{\rho}}$; b) $v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} = 331,6 \text{ m/s}$. 14. $v_B = v_{id} \left(1 + \frac{b}{V} \right)$.

15. $E = \mu \frac{v^2}{\gamma(\gamma-1)} + E_0$, $\chi = \frac{\mu v^2}{\gamma-1} + \chi_0$. 17. $C_H - C_M = \frac{CH^2}{T^2}$, C – Kyuri doimiysi.

18. $HM^{-\gamma} = \text{const}$, bu yerda $\gamma = \frac{C_H}{C_M}$. 25. $S = C_V \ln T + R \ln(V-b) + S_0$,

$T(V-b)^{R/C_V} = \text{const}$. 26. $C_p - C_V = \frac{TV_0 \alpha^2}{\beta}$. 29. $(dS)_p = \frac{C_p}{\alpha TV} dV$.

31. $\Delta S = k \left(N_1 \ln \frac{N_1+N_2}{N_1} + N_2 \ln \frac{N_1+N_2}{N_2} \right)$. 33. $\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2-v_1)}$,

v_1, v_2 – suyuqlik va bug'ning solishtirma hajmlari.

34. $F = C_V T (1 - \ln T) - RT \ln V - S_0 + E_0$,

$\Phi = C_p T (1 - \ln T) + RT \ln p - TS_0 + E_0$, $\chi = C_p p^{1-1/\gamma} \exp \left(\frac{S-S_0}{C_p} \right) + E_0$.

35. $pV = RT$, $E = (\alpha - R)T + E_0$. 36. $C_p - C_V = -T^3 \frac{\partial \alpha}{\partial p} \frac{\partial \alpha}{\partial V}$.

37. $T_i = \frac{8}{9Rb} \left(1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{3b^2}{a} p} \right)^2$. 38. $\left(\frac{\partial T}{\partial H} \right)_{S,p} = \frac{CH}{C_{H,p} T}$.

IV bobga oid masalalarining javoblari

4. $\mu + \varphi = \text{const}$, φ – bitta zarraga to'g'ri kelgan potensial energiya.

10. $Q = -T \frac{d\sigma}{dT} (\Sigma_2 - \Sigma_1)$, $\frac{d\sigma}{dT} \Sigma = \text{const}$ tenglamadan temperatura-ning o'zgarishi aniqlanadi. 12. $\frac{d\lambda}{dT} = C_{p''} - C_{p'}$, $V'' \gg V'$ holda.

13. $s_n - s_s = \frac{H_0^2 T}{2\pi T_c^2} \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right)$, $c_n - c_s = \frac{H_0^2 T}{2\pi T_c^2} \left(1 - 3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right)$. 17. $\mu = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)^{-1}$.

18. Kritik nuqtada tovush tezligi nolga teng bo'ladi.

V bobga oid masalalarning javoblari

$$1. F = -NkT \left(\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi mkT}{h^2} + 1 \right), \quad p = \frac{NkT}{V},$$

$$S = Nk \left(\ln \left(\frac{2\pi m}{p^{2/3} h^2} \right)^{3/2} + \frac{5}{2} \right) + C_p \ln kT, \quad \Phi = NkT \ln \left(\frac{ph^3}{(2\pi m)^{3/2}} \right) - C_p T \ln kT.$$

$$3. F = -NkT \left(\ln \frac{8\pi k^3 T^3 V}{Nc^3 h^3} + 1 \right), \quad p = \frac{NkT}{V}. \quad 4. S = \frac{3}{2} Nk \ln E + Nk \ln V + \text{const.}$$

$$5. C_V^{\text{re}} = 2C_V^{\text{id}}. \quad 6. dn = \frac{g d\Omega}{\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) \pm 1}. \quad \text{Bu yerda } d\Omega = E, E + dE \text{ energiya}$$

oralig'iadiagi kvant holatlari soni, μ – kimyoviy potensial, $g = 2s + 1$ –

$$\text{statistik vazn, } s \text{ – zarra spini. 9. } dn_0(v) = \begin{cases} \frac{8\pi m^3 v^2}{h^3} dv, & v < v_m, \\ 0, & \text{agar } v > v_m. \end{cases} \quad \text{Bu yerda}$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2E_F}{m}}, \quad E_F = 0 \text{ K dagi Fermi energiyasi. 10. } \bar{v} = \frac{3}{4} \vartheta, \quad \overline{v^2} = \frac{3}{5} v_m^2,$$

$$\overline{\left(\frac{1}{v}\right)} = \frac{3}{2v_m}. \quad 11. N = \frac{8\pi V}{3} \left(\frac{2m\varepsilon_m}{h^2} \right)^{3/2}, \quad p = (3\pi)^{2/3} \frac{h^2}{5m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3}, \quad E = \frac{3}{5} N\varepsilon_m.$$

$$12. E = \frac{3}{5} N\varepsilon_m \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right], \quad E_f = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right], \quad C_V = \frac{\pi^2}{2E_F} nk^2 T \left[1 - \frac{3\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right].$$

$$13. \frac{N'}{N} = 0,65. \quad 14. \Phi = NE_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right], \quad F = \frac{3}{5} NE_F \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right],$$

$$\chi = NE_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right]. \quad 16. C_V^{\text{el}} = \frac{\pi^2 N k^2 T}{2E_F}. \quad 17. T_0 = 0,084 \frac{h^2}{km} \left(\frac{N}{(2s+1)V} \right)^{2/3}.$$

$$18. N'' = N - N' = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \right]. \quad 19. S = \frac{5}{2} \alpha T^{3/2}, \quad p = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{V} T^{5/2}, \quad F = -\frac{2}{3} \alpha T^{5/2},$$

$$\Phi = 0. \quad 20. VT^{3/2} = \text{const} \text{ yoki } pV^{5/3} = \text{const}. \quad 21. p = \frac{2}{3} \frac{E}{V}.$$

$$22. pV = NkT \left[1 \pm \frac{N}{2gV} \left(\frac{\pi h}{mkT} \right)^{3/2} \right], \quad \text{bu yerda «+» fermionlarga, «-» bozonlarga tegishli, } g = 2s + 1, s \text{ – zarra spini.}$$

$$23. E = N\varepsilon_0 + N\Delta\varepsilon \frac{g_1}{g_0} \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}\right) \left[1 + \frac{g_1}{g_0} \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}\right) \right]^{-1},$$

$$C_V = Nk \left(\frac{\Delta\varepsilon}{kT} \right)^2 \frac{g_1}{g_0} \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}\right) \left[1 + \frac{g_1}{g_0} \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}\right) \right]^{-2}.$$

$$24. E = N \left(h\nu + \frac{2h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \right), \quad C_V = \frac{Nk}{2} \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \cosech^2 \left(\frac{h\nu}{kT} \right).$$

$$26. F = \frac{NkT_c}{2} + NkT \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{T_c}{T} \right) \right],$$

$$S = \frac{NkT_c}{T} \left[\exp \left(\frac{T_c}{T} \right) - 1 \right]^{-1} - Nk \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{T_c}{T} \right) \right].$$

$$27. E = \frac{3Nh^2}{4\pi^2 I} \exp \left(-\frac{2T_c}{T} \right), C_V = 12Nk \left(\frac{T_c}{T} \right)^2 \exp \left(-\frac{2T_c}{T} \right).$$

$$28. \frac{N_0}{N_n} = 9 \exp \left(-\frac{2T_c}{T} \right). 30. \lambda T_m = 0,3668. 31. \Phi = F + pV = 0.$$

$$32. E = \frac{4\pi^5 k^4 V}{5c^3 h^3} T^4 = \frac{3\pi^4 Nk}{5\theta^3} T^4, C_V = \frac{12\pi^4 Nk}{5\theta^3} T^3, \text{ bu yerda } \theta = \frac{h\nu_{max}}{k} -$$

$$\text{Debay temperaturasi. 33. } T = \sqrt{\frac{5k\theta^3}{24\pi^2 \varepsilon_{max}}} = 5, \text{ bu yerda } \varepsilon_{max} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{2/3}.$$

$$35. P = Np_0 L \left(\frac{p_0 E}{kT} \right), L(x) = x - \frac{1}{x} \text{ - Lanjeven funksiyasi. 36. } \epsilon = 1 + \frac{4\pi}{3} \frac{n p_0^2}{kT}.$$

$$37. \epsilon = 1 + 4\pi n \left(\infty + \frac{p_0^2}{3kT} \right).$$

VI bobga oid masalalarining javoblari

$$3. \Phi = \Phi_{id} + \frac{n^2}{V} (bRT - a), \text{ bu yerda } n = \frac{N}{N_0} = \frac{m}{M_{mol}} - modda miqdori.$$

$$4. S = kN_0 n \left[\ln \frac{V}{nN_0} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} + \frac{5}{2} \right] - \frac{n^2 Rb}{V}, n - mollar soni.$$

$$5. a = \frac{12}{2^n(n-3)} N_0^2 U_0 v, v = \frac{4}{3} \pi r_0^3. 6. p_{int} = \frac{2\pi}{3} d^3 \left(\frac{N}{V} \right)^2 kT \left(1 - \frac{3}{n-3} \frac{\alpha}{kTd^n} \right).$$

$$7. E = E_{id} - \frac{n^2 a}{V}, F = F_{id} + \frac{n^2}{V} (bRT - a). 8. E_{pl} = E_{id} - Ne^3 \sqrt{\frac{8\pi N}{kTV}},$$

$$E_{id} = C_V + E_0. 9. F_{pl} = F_{id} - \frac{2}{3} Ne^3 \sqrt{\frac{8\pi N}{kTV}}, S_{pl} = S_{id} - \frac{1}{3} \frac{Ne^3}{T} \sqrt{\frac{8\pi N}{kTV}},$$

$$p_{pl} = \frac{NkT}{V} - \frac{1}{3} \frac{Ne^3}{V} \sqrt{\frac{8\pi N}{kTV}}, (C_V)_{pl} = (C_V)_{id} + \frac{1}{2} \frac{Ne^3}{T} \sqrt{\frac{8\pi N}{3kTV}}.$$

$$10. R_D = \sqrt{\frac{kT_e T_i}{4\pi n_0 e^2 (T_e + T_i)}}.$$

VII bobga oid masalalarining javoblari

$$1. \overline{(\Delta V)^2} = kT \left| \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right) \right|^2. 2. \overline{(\Delta T)^2} = \frac{kT_0}{C_V}, T_0 - termostat temperaturasi.$$

$$4. \overline{\Delta T \Delta p} = \frac{k^2 T^2}{C_V} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V. 5. \overline{\Delta V \Delta p} = -kT, \overline{\Delta S \Delta T} = kT, \overline{\Delta S \Delta V} = kT \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

$$6. \overline{(\Delta A)^2} = k^2 T^2 C_p - kTV^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S \cdot 8. \overline{(\Delta E)^2} = \theta^2 \left(\frac{\partial E}{\partial \theta} \right)_V = kT^2 C_V.$$

$$9. \delta_E = \frac{\sqrt{(\Delta E)^2}}{E} = \frac{5}{6} \sqrt{\frac{\pi}{N}} \frac{k^{3/2} T}{\sqrt{\epsilon_{\max}}} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_{\max}} \right)^2 \right]^{-1} \cdot 10. \delta_E = \sqrt{\frac{5\theta^3}{3\pi^4 N T^8}}.$$

$$11. \overline{(\Delta E)^2} = \frac{(\Delta \epsilon)^2}{2g_1 g_2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\Delta \epsilon}{2kT} + \gamma \right), \gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{g_1}{g_2}. 13. \delta_N = \frac{1}{\sqrt{N}}, \delta_n = \sqrt{\frac{1-n_i}{n_i}}, \delta_{\bar{n}} = \sqrt{\frac{1+n_i}{n_i}}.$$

IX bobga oid masalalarining javoblari

$$1. \Delta = \sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{\frac{kT\tau}{3\pi r_0}}. 3. N_A = \frac{RT\tau}{3\pi\eta(\Delta x)^2}.$$

$$4. J_x = -D \frac{n(x_2) \exp\left(\frac{U(x_2)}{kT}\right) - n(x_1) \exp\left(\frac{U(x_1)}{kT}\right)}{\int\limits_{x_1}^{x_2} \exp\left(\frac{U(x)}{kT}\right) dx}.$$

Foydalanimilgan adabiyotlar

- Левич В.Г. Курс теоретической физики. Том I. – М., Наука, 1969.
- Левич В.Г., Бдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоритической физики. Том II. – М., Наука, 1971.
- Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. Статистическая физика. Учеб. пособие. – М., Наука, 1976.
- Базаров И.П. Термодинамика. – М., Высш. школа, 1991.
- Румер Ю.Б., Рывкин М.С. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. Учеб. пособие. – М., Наука, 1976.
- Boydedayev A. Nomuvozanatli statistik fizika asoslari. O'quv qo'llanma. – T., O'qituvchi, 1992.
- Boydedayev A. Klassik statistik fizika. O'quv qo'llanma. – T., O'zbekiston, 2003.
- Терлецкий Я.П. Статистическая физика. – М., Высш. школа, 1973.
- Кубо Р. Термодинамика. – М., Mir, 1970.
- Исхахара А. Статистическая физика. – М., Mir, 1973.
- Киттель Ч. Статистическая термодинамика. – М., Наука, 1977.
- Корнелл Э.А., Виман К.Э. Бозе-Эйштеновская конденсация в разреженном газе. Первые 70 лет и несколько последних экспериментов. (Нобелевские лекции по физике – 2001), УФН, 173, № 12, 1320 (2003).
- Кеттерле В. Когда атомы ведут себя как волны. Бозе-эйштеновская конденсация и атомный лазер (Нобелевские лекции по физике – 2001), УФН, 173, № 12, 1340 (2003).
- Гречко А.Г., Сучаков В.И., Томашевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. – М., Просвещение, 1979.
- Серова Ф.Г., Янкина А.А. Сборник задач по теоретической физике. – М., Просвещение, 1979.
- Mamatqulov R., Tursunov A.A., Mamatqulov B.R. Termodinamika, statistik fizika va kinetika bo'yicha masalalar to'plami. – T., O'zbekiston, 2003.

MUNDARIJA

SO'ZBOSHI	3
KIRISH	6
I bob. STATISTIK FIZIKANING ASOSIY TASAVVURLARI	8
1.1. Statistik fizika vazifalari	8
1.2. Fazalar fazosi	9
1.3. Liuvill teoremasi	14
1.4. Statistik taqsimot	15
1.5. I bobga oid masala va savollar	19
II bob. STATISTIK MEXANIKANING UMUMIY METODLARI	23
2.1. Gibbsning mikro va kichik kanonik taqsimotlari	23
2.2. Gibbs kvaziklassik va klassik taqsimotlari	27
2.3. Maksvell va Maksvell-Bolsman taqsimotlari	30
2.4. Maksvell taqsimoti	31
2.5. Bolsman taqsimoti	34
2.6. II bobga oid masala va savollar	37
III bob. STATISTIK VA FENOMENOLOGIK TERMODINAMIKA	42
3.1. Kirish	42
3.2. Termodinamikada asosiy tushunchalar	44
3.3. Holatning termik va kalorik tenglamalari	52
3.4. Termodinamikaning birinchi qonuni	55
3.5. Termodinamika birinchi qonunining suyuqliklarning statsionar oqimiga tatbig'i	59
3.6. Kvazistatik jarayonda sistema ichki energiyasining o'zgarishi	62
3.7. Termodinamikada issiqlik sig'imi tushunchasi	65
3.8. Asosiy termodinamik jarayonlar va ularning tenglamalari	68
3.9. Termodinamikaning ikkinchi qonuni	69
3.10. Entropiya. Termodinamikaning asosiy tenglamasi	71
3.11. Entropiyaning o'sish qonuni	73
3.12. Qaytuvchi va qaytmas jarayonlar uchun termodinamikaning asosiy tenglamasi	76
3.13. Karko sikli va Karko teoremasi	77
3.14. Entropiyanı fenomenologik aniqlash	80
3.15. Nomuvozanat jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonunining asosiy tenglamasi	84
3.16. Holatning termik va kalorik tenglamalari orasidagi bog'lanish	85
3.17. Bolsman prinsipi	88
3.18. Termodinamika ikkinchi qonunini tatbiq qilish chegarasi	89
3.19. Termodinamikaning uchinchi qonuni. Nernst issiqlik teoremasi	91
3.20. Termodinamik metodlar	93
3.21. Ideal gaz uchun termodinamik potensiallar	97
3.22. Murakkab sistemalar termodinamik potensiallari	98
3.23. Gibbs-Gelmgols tenglamalari	99
3.24. Qaytmas va qaytuvchi adiabatik kengayishda gazlarning sovishi	101
3.25. Magnetiklar va dielektriklar termodinamikasi	105
3.26. Magnit va yadro sovitish metodlari	108
3.27. Termodinamik kattaliklarni statistik fizika metodi bo'yicha hisoblash	109
3.28. III bobga oid masala va savollar	110

IV bob. ZARRALAR SONI O'ZGARUVCHAN SISTEMALAR.**FAZA O'TISHLAR**

118

4.1. Zarralar soni o'zgaruvchan sistema termodinamik potensiallari	118
4.2. Gibbsning katta kanonik taqsimoti	121
4.3. Holat kattaliklari	125
4.4. Nurlanish termodinamikasi	127
4.5. Termodinamik sistemalarning muvozanati va barqarorlik shartlari	134
4.6. Gomogen sistemaning muvozanati	136
4.7. Geterogen sistemalarda muvozanat sharti	138
4.8. Gibbsning fazarlar qoidasi. Uchlamchi nuqta	140
4.9. Sirt hodisalar termodinamikasi	142
4.10. Faza o'tishlar. Birinchi xil faza o'tishlar	144
4.11. Ikkinchchi xil faza o'tishlar. Erenfest tenglamalari	150
4.12. O'ta o'tkazuvchanlik holatda faza o'tish. Rutgers formulasi	154
4.13. Faza o'tishlar Landau va Yang-Li nazariyaları	155
4.14. IV bobga oid masala va savollar	162

V bob. IDEAL SISTEMALAR LARNING STATISTIK NAZARIYASI

167

5.1. Bir atomli kvant ideal gazlar	167
5.2. Termodinamik kattaliklarni hisoblash	169
5.3. Maksvell va Maksvell-Bolsman taqsimotlarining Gibbs taqsimoti ko'rinishida yozilishi	171
5.4. Boze-Eynshteyn va Fermi-Dirak taqsimotlari	174
5.5. Absolut nol temperaturalarda Fermi-gaz	177
5.6. Metallarda elektron gaz. Issiqlik sig'imi	181
5.7. Fermi-Dirak taqsimoti tatbig'i	184
5.8. Past temperaturalarda Boze-gaz. Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi ..	185
5.9. Boze-gaz va Fermi-gaz holat tenglamalari	188
5.10. Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi	191
5.11. Muvozanatlari nurlanish. Plank formulasi	194
5.12. Foton gazi statistikasi	197
5.13. Qattiq jismalar issiqlik sig'imi. Eynshteyn nazariyasi	199
5.14. Debay nazariyasi	201
5.15. Kristall panjara holat funksiyasi	204
5.16. Ko'p atomli molekulalardan tashkil topgan ideal gazlar issiqlik sig'imining klassik nazariyasi	207
5.17. Erkinlik darajalari bo'yicha kinetik energiyaning teng taqsimot teoremasi. Virial teorema	211
5.18. Ikki kvant holatlari sistema issiqlik sig'imi	215
5.19. Ikkita atomli kvant ideal gaz	217
5.20. Tebranma harakatning issiqlik sig'imiga qo'shgan hissasi	219
5.21. Aylanma harakatning gaz issiqlik sig'imiga qo'shgan hissasi	221
5.22. Ideal sistemalarning magnit va elektr xususiyatlari	225
5.23. Absolut manfiy temperatura	227
5.24. V bobga oid masala va savollar	231

VI bob. NOIDEAL SISTEMALAR STATISTIK NAZARIYASI

238

6.1. Noideal klassik bir atomli gaz. Holat funksiyasi	238
6.2. Noideal gaz holat tenglamasi	242
6.3. Bir atomli noideal gaz termodinamik kattaliklarini hisoblash	246
6.4. Juft korrelyatsion funksiyalar metodi. Bogolyubovning zanjir tenglamasi ..	248
6.5. Katta zichlikdag'i sistema holat tenglamasi va energiyasi	254
6.6. Plazma. Plazma holat tenglamasi	256
6.7. VI bobga oid masala va savollar	260

VII bob. FLUKTUATSİYA NAZARIYASI..... 264

7.1. Fluktuatsiyaning termodinamik nazariyasi	264
7.2. Bir jinsli sistemalarda termodinamik kattaliklar fluktuatsiyasi	268
7.3. Bajarilgan ish fluktuatsiyasi	274
7.4. Fluktuatsiyaning statistik nazariyasi	276
7.5. Zichlik fluktuatsiyasining korrelatsiyasi	278
7.6. Foton gazida fluktuatsiya	280
7.7. Kvant gazlarda fluktuatsiya	283
7.8. Turli xil o'lchov asboblarning sezgirligi	284
7.9. Osmounning havo rangilik nazariyasi	287
7.10. VII bobga oid masala va savollar	291

VIII bob. NOMUVOZANAT JARAYONLAR TERMODINAMIKASI..... 293

8.1. Nomuvozanat jarayonlar termodinamikasining asosiy tenglamalari	295
8.2. Balans tenglamasi va saqlanish qonunlari	297
8.3. Chiziqli qaytmas jarayonlar	299
8.4. Qaytmas jarayonlar termodinamikasining variatsion prinsiplari	302
8.5. Onzager prinsipi. Termoelektrik hodisalarga tatbig'i	303
8.6. Nochiziqli nomuvozanat termodinamika asoslari	309
8.7. VIII bobga oid masala va savollar	310

IX bob. FİZİKAVIY KINETİKA..... 313

9.1. Kinetik kimyo	311
9.2. Broun harakatining fizik xarakteristikasi	313
9.3. Smoluxovskiy tenglamasi	316
9.4. Batafsil muvozanat prinsipi	318
9.5. Fokker-Plank tenglamasi	319
9.6. Kinetik balans tenglama	325
9.7. Eynshteyn bo'yicha Plank formulasining kinetik isboti	328
9.8. IX bobga oid masala va savollar	331

X bob. KINETİK TENGLAMALAR

10.1. Bolsmanning kinetik tenglamasi	334
10.2. Bolzman tenglamasining statsionar yechimi	338
10.3. Bolsmanning H-teoremasi va entropiyaning o'sish qonuni	340
10.4. Ko'chishning umumlashgan tenglamasi. Enskog tenglamasi	343
10.5. Additiv kattaliklar saqlanish qonunlari	345
10.6. Makroskopik qaytmaclik va mikroskopik qaytuvchanlik	348
10.7. Ideal gazda Maksvell muvozanat va lokal muvozanat taqsimoti	351
10.8. Gidrodinamika tenglamasi. Kinetik koeffitsiyentlar	355
10.9. Relaksatsiya vaqtি	359
10.10. Bolzman kinetik tenglamasining gazlarga ba'zi bir tatbig'i	361
10.11. Kristallda o'tkazuvchi elektronlar	364
10.12. Bogolyubov kinetik zanjir tenglamasi	367
10.13. O'zi moslashuvchan maydon kinetik tenglamasi. Vlasov tenglamasi	372
10.14. Bolzman kinetik tenglamasining Bogolyubov bo'yicha isboti	373
10.15. bobga oid masala va savollar	380

Masalalarning javoblari	382
Foydalilanigan adabiyotlar	388

Abdumalikov A.A.

Nazariy fizika kursi: J. 4: Termodinamika va statistik fizika.
Oliy o'quv yurtlari uchun darslik/A.A. Abdumalikov, R. Mamatqulov.
– T.: «Voris nashriyot» MChJ, 2006. – 392 b.

BBK 22.317ya73

ABDUMALIKOV ABDULAZIZ ABDUVAHABOVICH
MAMATQULOV RAXMON

TERMODINAMIKA VA STATISTIK FIZIKA

Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik

«Voris nashriyot» MChJ
Toshkent–2006

Muharrir N. Go'ipov
Musahhih S. Musaxojiyev
Kompyuterda sahifalovchi M. To'xtaxo'jayeva

Original-maketdan bosishga ruxsat etildi 05.12.06. Bichimi $60 \times 90^1/_{16}$.
Kegli 11 shponli. Journal garn. Ofset bosma usulida bosildi. Hajmi 24,5 b.t.
1000 nusxada bosildi. Buyurtma № 192

«Voris nashriyot» MChJ, Toshkent, Shiroq ko'chasi, 100.

«Sano-Standart» bosmaxon asida chop etildi.
Toshkent, Shiroq ko'chasi, 100.

ISBN 978-9943-304-07-09

«VORIS-NASHRIYOT»