Задание на ряды Фурье

> **ФИО:** Караганов Павел Эдуардович
> **Вариант:** 14

Задание V

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \operatorname{ch}(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

1. Вычисление коэффициентов Фурье

Общий вид ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Для четной функции $\operatorname{ch}(ax)$ все коэффициенты $b_n = 0$ (т.к. $ch(ax)\sin(nx)$ нечётная функция по симметричному промежутку), а коэффициенты a_n вычисляются по формулам:

Постоянный член:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch}(ax) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch}(ax) dx = \frac{2}{a\pi} \operatorname{sh}(a\pi)$$

Коэффициенты при косинусах ($n \geq 1$):

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch}(ax) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch}(ax) \cos(nx) dx$$

Используем определение:

$$\operatorname{ch}(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$$

Тогда интеграл преобразуется к виду:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} e^{ax} \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} e^{-ax} \cos(nx) dx \right]$$

Для интегралов вида $\int e^{kx} \cos(nx) dx$ используем метод интегрирования по частям:

1. **Первый интеграл** ($k = a$):

$$\int e^{ax}\cos(nx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(a\cos(nx) + n\sin(nx)) + C$$

2. **Второй интеграл** ($k = -a$):

$$\int e^{-ax}\cos(nx)dx = \frac{e^{-ax}}{a^2+n^2}(-a\cos(nx) + n\sin(nx)) + C$$

Вычислим оба интеграла от 0 до π:

- Для первого интеграла:

$$\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(a\cos(nx) + n\sin(nx))\Big|_0^\pi = \frac{e^{a\pi}(-1)^n a - a}{a^2+n^2}$$

- Для второго интеграла:

$$\frac{e^{-ax}}{a^2+n^2}(-a\cos(nx) + n\sin(nx))\Big|_0^\pi = \frac{e^{-a\pi}(-1)^n(-a) - (-a)}{a^2+n^2}$$

Объединяя оба интеграла и учитывая множитель 1/π:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{a(e^{a\pi}(-1)^n - 1) + a(1 - e^{-a\pi}(-1)^n)}{a^2+n^2}\right]$$

Упрощаем выражение:

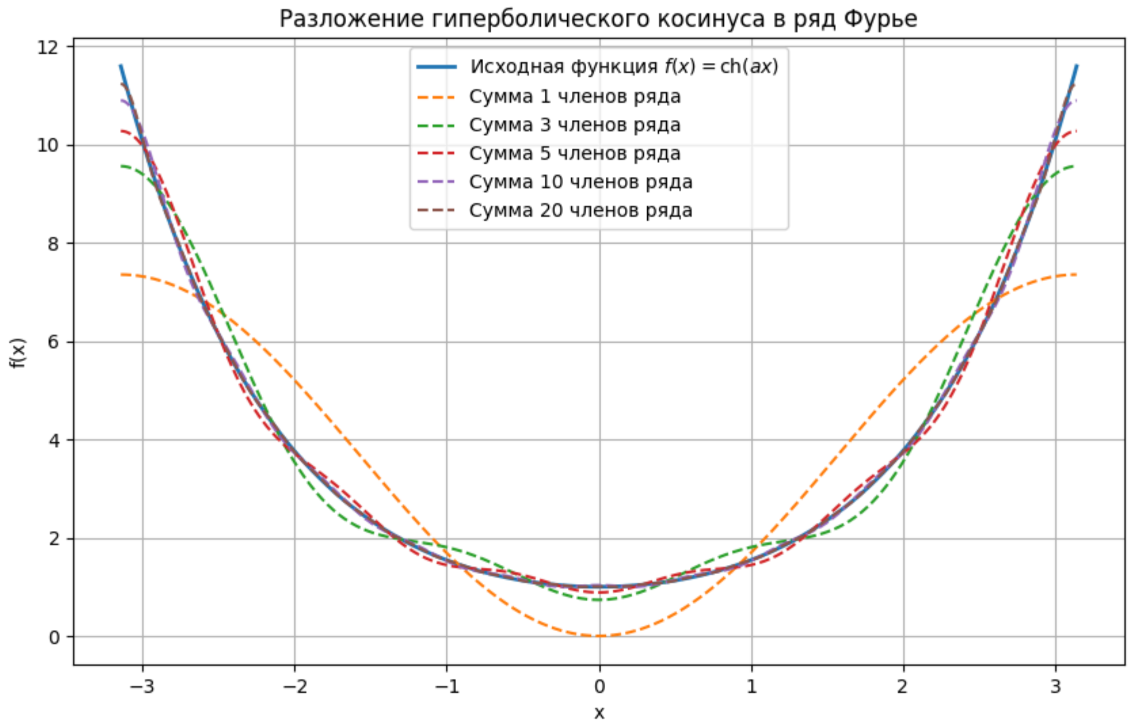
$$a_n = \frac{a}{\pi(a^2+n^2)}\left[(-1)^n(e^{a\pi} - e^{-a\pi})\right] = \frac{2a(-1)^n\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)}$$

2. Ряд Фурье

Получаем разложение:

$$\boxed{\mathrm{ch}(ax) = \frac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a\pi}\left[1 + 2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\cos(nx)\right]}$$

3. Графическая иллюстрация



4. Листинг программы на Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a = 1.0  # Параметр гиперболического косинуса
x = np.linspace(-np.pi, np.pi, 500)
f = np.cosh(a*x)

# Частичные суммы ряда Фурье
def fourier_sum(x, N):
    sum_terms = 1
    for n in range(1, N+1):
        sum_terms += 2*a**2 * (-1)**n / (a**2 + n**2) * np.cos(n*x)
    return np.sinh(a*np.pi)/(a*np.pi) * sum_terms

# Построение графиков
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(x, f, label='Исходная функция $f(x) = \mathrm{ch}(ax)$', linewidth=2)
for N in [1, 3, 5, 10, 20]:
    plt.plot(x, fourier_sum(x, N), '--',
            label=f'Сумма {N} членов ряда')
plt.title('Разложение гиперболического косинуса в ряд Фурье')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
```

```
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

ЗаданиеVI

1. Определение функции

- Так наша функция на отрезке $[0, 2]$ линейно убывает и проходит через точки $(0, 2)$ и $(2, 0)$, то при $t \in [0, 2]$ $f(t) = -t + 2$.
- А при $t \in [2, 4]$ $f(t) = 0$

Значит, функция задана на интервале $[0, 4]$ с периодом T=4:

$$f(t) = \begin{cases} -t+2, & t \in [0,2] \\ 0, & t \in [2,4] \end{cases}$$

2. Комплексные коэффициенты Фурье

Общий вид ряда Фурье в комплексной форме имеет вид

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t}$$

Вычисляем коэффициенты по формуле:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^b f(t) e^{-i\omega n t} dt \quad \text{где} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}, a = 0, b = 4$$

Интеграл для коэффициентов:

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{4} \left[\int_0^2 (-t+2) e^{-i\frac{\pi n}{2}t} dt + \int_2^4 0 \cdot e^{-i\frac{\pi n}{2}t} dt \right] = \frac{1}{4} \int_0^2 (-t+2) e^{-i\frac{\pi n}{2}t} dt$$

Вычисление интеграла:

Интегрируем по частям, и упрощаем:

$$\int (-t+2) e^{-i\alpha t} dt = -\frac{e^{-i\alpha t}}{\alpha^2}(1 + i\alpha(t-2)), \text{где } \alpha = \frac{\pi n}{2}$$

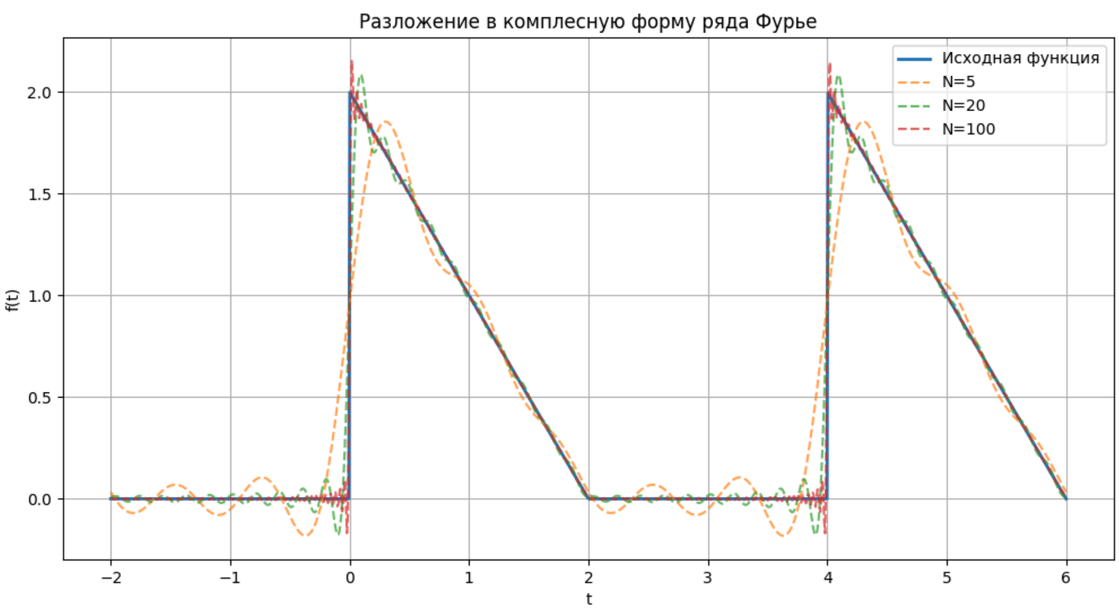
После подстановки пределов и упрощений:

$$c_n = -\frac{i\pi n + e^{-i\pi n} - 1}{(\pi n)^2}$$

3. Ряд Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{i\pi n + e^{-i\pi n} - 1}{(\pi n)^2} e^{i\frac{\pi n}{2}t}$$

4. Графическое представление



5. Листинг программы на Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Определение функции
def f(t):
    t_mod = t % 4
    return np.where(t_mod <= 2, -t_mod + 2, 0)

# Вычисление коэффициентов
def cn(n):
    if n == 0:
        return 0.5
    return -(1j*np.pi * n + np.e ** (-1j * np.pi * n) - 1) / ((np.pi * n) **
2)

# Частичная сумма ряда
```

```python
def S(t, N):
    total = 0
    for n in range(-N, N+1):
        total += cn(n) * np.exp(1j * np.pi * n * t / 2)
    return np.real(total)

# Построение графиков
t = np.linspace(-2, 6, 1000)
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(t, f(t), label='Исходная функция', linewidth=2)
for N in [5, 20, 100]:
    plt.plot(t, S(t, N), '--', alpha=0.7, label=f'N={N}')
plt.title('Разложение в комплесную форму ряда Фурье')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('f(t)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```