Однородные цепи Маркова

Лекция 6

Определение и способ задания цепи Маркова

Изученная ранее схема Бернулли основывалась на понятии *независимых* испытаний. Однако имеется большое количество задач, в которых последовательно проводимые испытания не являются независимыми, а связаны между собой в определённого рода *цепь*.

Определение и способ задания цепи Маркова

Сделаем предположения.

1) В отличие от схемы Бернулли, где рассматривалась последовательность из n испытаний, будем теперь считать, что проводится *бесконечная* последовательность испытаний.

2) Примем, что имеются m попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (m – фиксированное число), таких, что в результате каждого испытания обязательно наступает одно из них (то есть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – полная группа событий для каждого испытания). Это условие обобщает одно из требований к испытаниям в схеме Бернулли (в схеме Бернулли для каждого испытания возможны лишь два исхода: A или $\overline{A}$).

Определение и способ задания цепи Маркова

3) Будем считать, что испытания связаны между собой так: вероятность наступления того или иного из событий $A_1, A_2, ..., A_m$ при очередном, n-м испытании *зависит только от результата предыдущего*, $(n - 1)$-го испытания (т.е. при фиксированном «настоящем» «будущее» не зависит от «прошлого»).

Дадим определение: неограниченная последовательность испытаний с возможными исходами $A_1, A_2, ..., A_m$ называется ***цепью Маркова***, если вероятность появления любого из этих исходов при очередном испытании однозначно определяется результатом только предыдущего испытания.

Определение и способ задания цепи Маркова

Для задания цепи Маркова необходимо указать $p_{ij}(n)$ $(i, j = 1, 2, ..., m;\ n = 2, 3, ...)$ – условные вероятности того, что при n-м испытании наступит событие A_j, если в предыдущем $(n - 1)$-м испытании наступило A_i. В дальнейшем ограничимся изучением только ***однородных цепей Маркова***, то есть таких, когда вероятности $p_{ij}(n)$ не зависят от n (будем просто писать p_{ij}).

Каждое из чисел p_{ij} называют ***вероятностью перехода*** $A_i \to A_j$ ***за один шаг***: $p_{ij} = P\{A_i \to A_j\}$.

Определение и способ задания цепи Маркова

Таким образом, в обозначении p_{ij} первый индекс указывает номер предшествующего, а второй – номер последующего состояния. Например, p_{11} – вероятность перехода из 1-го состояния A_1 в это же 1-е состояние A_1, т.е. $p_{11} = P\{A_1 \to A_1\}$; p_{23} – вероятность перехода из 2-го состояния A_2 в 3-е состояние A_3, т.е. $p_{23} = P\{A_2 \to A_3\}$ и так далее.

Вероятности перехода p_{ij} удобно располагать в виде квадратной матрицы (***матрицы вероятностей перехода однородной цепи Маркова за один шаг***):

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}, \text{ или, более кратко, } P_1 = \left(p_{ij}\right).$$

Для полного описания цепи Маркова недостаточно знать только матрицу $\boldsymbol{P_1}$. Необходимо ещё задать так называемые ***начальные вероятности*** $p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0$, т.е. вероятности каждого из событий $A_1, A_2, ..., A_m$ для 1-го испытания.

Итак, однородная цепь Маркова считается заданной, если указаны начальные вероятности p_i^0 $(i = 1, 2, ..., m)$ и вероятности перехода p_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., m)$ за один шаг.

Отметим обязательные соотношения для этих чисел:

1) $p_i^0 \geq 0, \; p_{ij} \geq 0$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^0 = 1, \quad \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Обязательность условия 1) очевидна. Соотношения 2) следуют из того факта, что при 1-м испытании обязательно наступает одно из попарно несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_m$. Аналогично для любого испытания.

Цепи Маркова часто используются для описания различных систем, которые могут находиться в одном из m состояний и в дискретные моменты времени (например, при $t = 1, t = 2, ..., t = n, ...$) меняют состояние. В этом случае номер испытания n можно интерпретировать как время, а события $A_1, A_2, ..., A_m$ – как возможные состояния системы в момент времени n.

С цепью Маркова естественно связать последовательность дискретных случайных величин $X_0, X_1, ..., X_n, ...$, где индекс n играет роль времени. Если система в момент времени n находится в состоянии A_i, то будем считать, что $X_n = i$. Таким образом, введённые случайные величины являются номерами состояний системы. В этом случае

$$p_i^0 = P\{X_0 = i\},\ p_{ij} = \{X_n = j \mid X_{n-1} = i\} \ (i, j = 1, 2, ..., m),$$

и не зависят от n для однородной цепи Маркова.

Использование графа для описания эволюции цепи

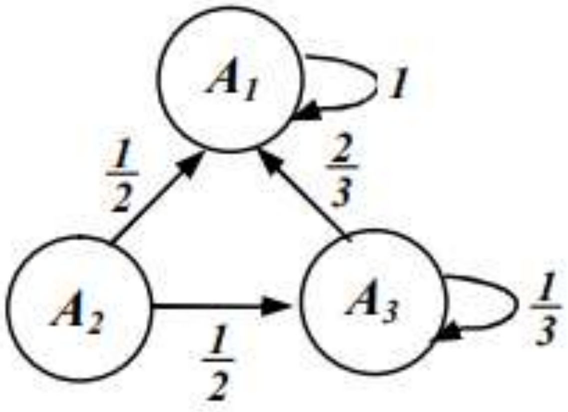
Для описания эволюции цепи можно использовать граф, вершинами которого являются состояния цепи, а стрелка, идущая из состояния A_i в состояние A_j с числом p_{ij} над ней, показывает, что из состояния A_i возможен переход в состояние A_j с вероятностью p_{ij}. Если $p_{ij} = 0$, то соответствующая стрелка не проводится.

Пример 1 Пусть A_1, A_2, A_3 – возможные состояния системы и P_1 – матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова за один шаг:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Построить граф, соответствующий матрице P_1.

Решение. Так как $p_{11} = 1$, то, если система попала в состояние A_1, она в нём и останется (***поглощающее состояние***). Из состояния A_2 система с равными вероятностями $p_{21} = p_{23} = \dfrac{1}{2}$ переходит в соседние состояния A_1 и A_3. Состояние A_3 таково, что система остаётся в нём с вероятностью $p_{33} = \dfrac{1}{3}$ и переходит в состояние A_1 с вероятностью $p_{31} = \dfrac{2}{3}$. Граф изображён на рисунке.



Пример 2 На окружности расположены четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4, равноотстоящие друг от друга. Частица движется из точки в точку следующим образом: из данной точки она перемещается в одну из ближайших соседних точек с вероятностью $0,25$ или в диаметрально противоположную точку с вероятностью $0,5$. Выписать матрицу P_1 вероятностей перехода для этого процесса и построить граф, соответствующий этой матрице.

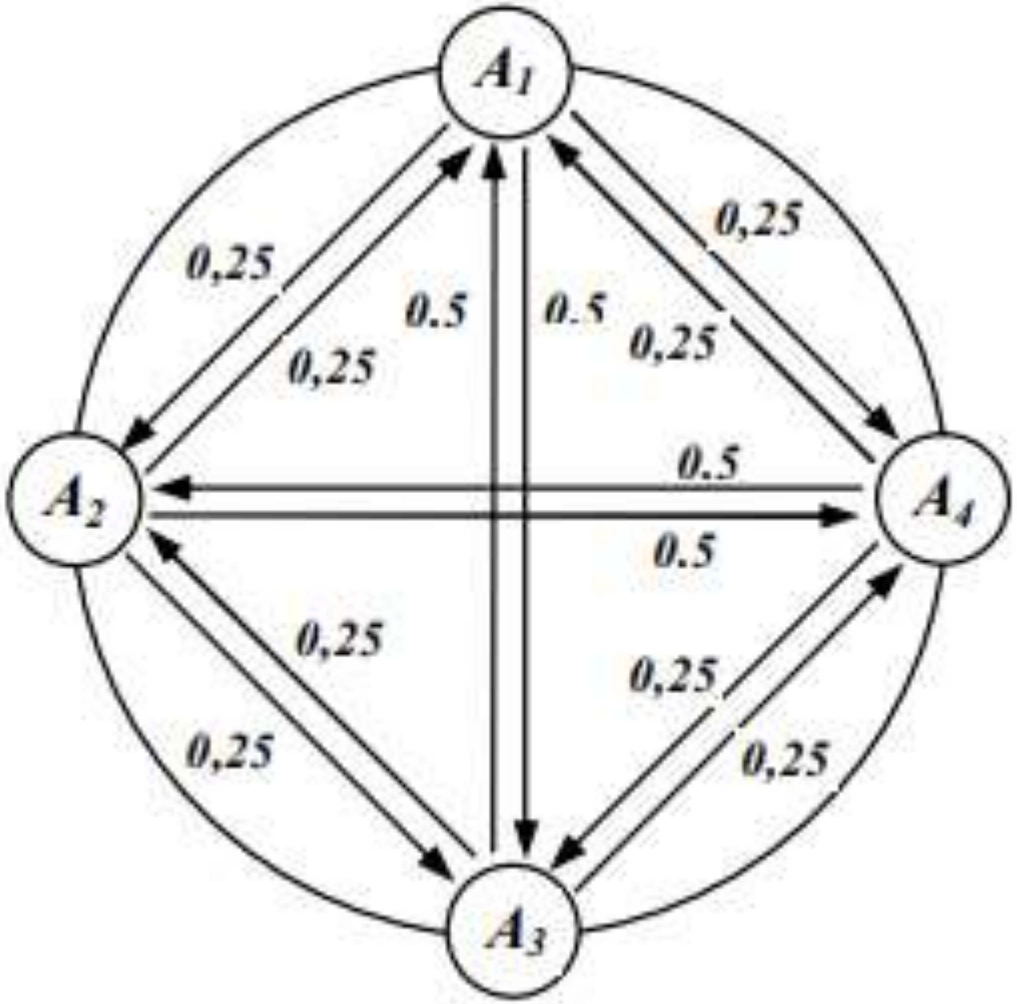
Решение. Если частица находилась в точке A_1 (в состоянии A_1), то, по условию задачи, вероятность p_{11} остаться частице в этой же точке равна 0, вероятность p_{12} перехода в точку A_2 равна $0,25$ (точка A_2 ближайшая точка к A_1), вероятность $p_{13} = 0,5$ (точка A_3 диаметрально противоположная точка к A_1), вероятность $p_{14} = 0,25$ (точка A_4 ближайшая точка к A_1).

Определение и способ задания цепи Маркова

Аналогично определяются вероятности перехода частицы из положения A_2, A_3, A_4.

Записываем матрицу перехода и изображаем соответствующий граф:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0,25 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$



Нахождение вероятностей перехода за несколько шагов

Выше была рассмотрена вероятность p_{ij} перехода системы из состояния A_i в состояние A_j за один шаг.

Пусть система в момент времени n находилась в состоянии A_i, найти вероятность того, что в момент времени $(n+2)$ (т.е. через два шага) система окажется в состоянии A_j.

Решение. Интересующий нас переход от A_i к A_j за два шага может осуществиться m различными способами:

$$A_i \to A_1 \to A_j$$

$$A_i \to A_2 \to A_j$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_i \to A_m \to A_j$$

Здесь запись $A_i \to A_k \to A_j$ означает, что в момент времени $(n+1)$ произошёл переход $A_i \to A_k$, а в момент времени $(n+2)$ – переход $A_k \to A_j$.

Нахождение вероятностей перехода за несколько шагов

Вероятность осуществления такого «двойного» перехода можно найти, применяя формулу полной вероятности:

$$P\{X_{n+2}=j\}=\sum_{k=1}^{m} P\{X_{n+1}=k\}P\{X_{n+2}=j \mid X_{n+1}=k\}.$$

Для однородной цепи Маркова имеем

$$P\{X_{n+1}=k\}=P\{X_{n+1}=k \mid X_n=i\}=p_{ik},\ P\{X_{n+2}=j \mid X_{n+1}=k\}=p_{kj},$$

следовательно, $P\{X_{n+2}=j\}=\sum\limits_{k=1}^{m} p_{ik}p_{kj}$.

Вспоминая операцию умножения матриц, получим, что матрица P_2 вероятностей переходов за два шага системы из состояния A_i в состояние A_j будет равна $P_2=P_1\cdot P_1=P_1^2$.

Обозначая соответствующие элементы матрицы P_2 как

$p_{ij}(2)$, получим $p_{ij}(2)=\sum\limits_{k=1}^{m} p_{ik}p_{kj}$.

Нахождение вероятностей перехода за несколько шагов

Аналогично, повторяя это рассуждение, можно получить матрицу вероятностей перехода системы из состояния A_i в состояние A_j за r шагов ($r = 1, 2, \ldots$)

$$P_r = \left(p_{ij}(r)\right) = P_1^r,$$

где $p_{ij}(r) = P\{X_{n+r} = j \mid X_n = i\}$ $p_{ij}(r) = P\{X_{n+r} = j / X_n = i\}$.

Итак, задача о нахождении вероятностей переходов за любое число шагов решена.

Нахождение вероятностей перехода за несколько шагов

Пример На столе лежит стопка из трёх книг. Обозначим эти книги номерами *1*, *2*, *3*. Состояние системы будем определять порядком расположения книг в стопке (пусть сверху вниз). Каждое испытание (переход) заключается в том, что из стопки берётся одна из книг и (после извлечения из неё нужной информации) кладётся наверх. Пусть каждая книга берётся с определённой вероятностью: книга i ($i = 1, 2, 3$) – с вероятностью p_i. Указать матрицы переходов за один и за два шага.

Решение. Ясно, что число возможных состояний системы равно числу перестановок трёх элементов (книг) $3! = 6$:

$$A_1 = (1, 2, 3),\ A_2 = (2, 3, 1),\ A_3 = (3, 1, 2),\ A_4 = (1, 3, 2),$$

$$A_5 = (3, 2, 1),\ A_1 = (2, 1, 3).$$

Здесь в упорядоченной тройке на 1-м месте указывается номер книги, лежащей сверху, на 2-м месте – номер книги, лежащей под ней, на 3-м месте – номер нижней книги.

При очередном шаге состояние (i_1, i_2, i_3) либо остаётся неизменным (это произойдёт с вероятностью p_{i_1} при выборе лежащей сверху книги с номером i_1), либо заменится на одно из двух состояний: (i_2, i_1, i_3) или (i_3, i_1, i_2) соответственно с вероятностями p_{i_2} или p_{i_3}. Остальные переходы за один шаг невозможны. Поэтому матрица P_1 перехода за один шаг имеет вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 & 0 & 0 & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & p_2 & p_3 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & p_2 & 0 & p_1 & p_3 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & p_3 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что сумма элементов любой строки этой матрицы равна $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ (см. обязательные соотношения для вероятностей перехода).

Матрицу P_2 – матрицу перехода системы за два шага – найдём по формуле $P_2 = P_1^2 = P_1 \cdot P_1$, используя известное правило умножения матриц:

$$P_2 = P_1 \cdot P_1 = \begin{pmatrix} p_1^2 + p_1p_2 & p_2p_3 & p_3^2 + p_3p_1 & p_1p_3 & p_2p_3 & p_2^2 \\ p_1^2 + p_1p_2 & p_2^2 + p_2p_3 & p_1p_3 & p_1p_3 & p_2p_3 + p_3^2 & p_1p_2 \\ p_1p_2 & p_2^2 + p_2p_3 & p_3^2 + p_1p_3 & p_1p_3 + p_1^2 & p_2p_3 & p_1p_2 \\ p_1p_2 & p_2p_3 & p_3^2 + p_1p_3 & p_1^2 + p_1p_3 & p_2p_3 & p_1p_2 + p_2^2 \\ p_1p_2 & p_2^2 + p_2p_3 & p_1p_3 & p_1^2 + p_1p_3 & p_2p_3 + p_3^2 & p_1p_2 \\ p_1^2 + p_1p_2 & p_2p_3 & p_1p_3 & p_1p_3 & p_2p_3 + p_3^2 & p_2^2 \end{pmatrix}.$$

Предельные вероятности

Следующей важной задачей является исследование поведения вероятностей $p_{ij}(n)$ при неограниченном увеличении числа

Теорема о предельных вероятностях. Пусть при некотором n_0 все вероятности $p_{ij}(n_0) > 0$. Тогда для каждого состояния A_j $(j = 1, 2, ..., m)$ существует предельная вероятность его наступления, т.е. такое число p_j^*, что имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j^* \quad (i, j = 1, 2, ..., m).$$

При этом предельные вероятности p_j^* не зависят от начального состояния A_i и являются единственным решением системы уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} p_j^* = 1, \\ \sum\limits_{k=1}^{m} p_k^* p_{kj} = p_j^*. \end{cases} \qquad (*)$$

Предельные вероятности

Итак, смысл этой теоремы состоит в том, что вероятность нахождения системы в состоянии A_j практически не зависит от того, в каком состоянии она находилась в далёком прошлом.

Цепь Маркова, для которой существуют предельные (***финальные***) вероятности p_j^*, называется ***эргодической***.

Решение ($p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*$) системы $(*)$ называется ***стационарным распределением вероятностей*** для цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода $P_1 = \left(p_{ij}\right)$.

Предельные вероятности

Пример Пусть в некоторой местности погода меняется следующим образом:

1) не бывает двух ясных дней подряд;

2) после ясного дня на другой день с равной вероятностью идёт дождь или снег;

3) если сегодня дождь (или снег), то с вероятностью ***0,5*** завтра погода не изменится;

4) если всё же она изменится, то в половине случаев снег заменяется дождём или наоборот, и лишь в половине случаев на следующий день будет ясная погода.

Предельные вероятности

Требуется:

а) считая в качестве состояний цепи различные виды погоды A_1 = *Д*(дождь), A_2 = *Я*(ясно), A_3 = *С* (снег), выписать матрицу P_1 вероятностей перехода;

б) построить граф, соответствующий матрице P_1;

в) определить вероятность ясной погоды через **2** дня после дождя;

г) найти предельные вероятности.

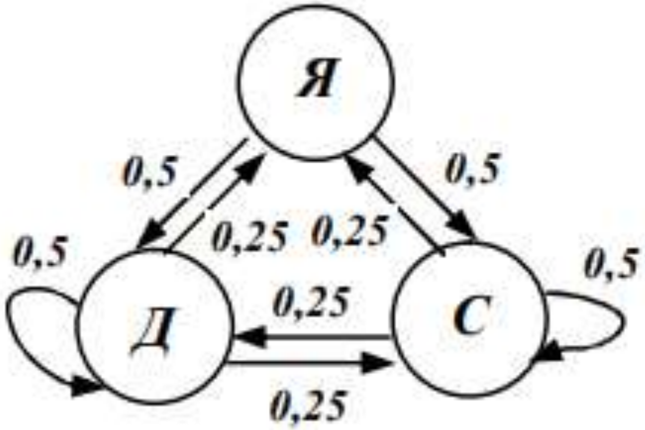
Решение. а) Исходя из условий задачи имеем:

$$p_{11}=P\{Д\to Д\}=0{,}5;\quad p_{12}=P\{Д\to Я\}=0{,}25;\quad p_{13}=P\{Д\to С\}=0{,}25;$$
$$p_{21}=P\{Я\to Д\}=0{,}5;\quad p_{22}=P\{Я\to Я\}=0;\quad p_{23}=P\{Я\to С\}=0{,}5;$$
$$p_{31}=P\{С\to Д\}=0{,}25;\quad p_{32}=P\{С\to Я\}=0{,}25;\quad p_{33}=P\{С\to С\}=0{,}5.$$

Таким образом, $P_1=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25\\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5\end{pmatrix}$.

Отметим, что числа в первой строке матрицы P_1 – это вероятности трёх видов погоды после дождя; во второй строке – после ясного дня, в третьей строке – после снега.

б) Изобразим граф, соответствующий этой матрице:



в) Найдём $p_{12}(2)$:

$$p_{12}(2)=\sum_{k=1}^{3}p_{1k}p_{k2}=p_{11}p_{12}+p_{12}p_{22}+p_{13}p_{32}=0{,}1875\,.$$

г) Для определения предельных вероятностей p_1^*, p_2^*, p_3^* решаем систему (см. формулу $(*)$ при $m = 3$):

$$\begin{cases} p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \\ p_1^* p_{11} + p_2^* p_{21} + p_3^* p_{31} = p_1^* \\ p_1^* p_{12} + p_2^* p_{22} + p_3^* p_{32} = p_2^* \\ p_1^* p_{13} + p_2^* p_{23} + p_3^* p_{33} = p_3^* \end{cases}$$

Заменяя p_{ij} их значениями, приводя подобные и умножая на число 4 последние три уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \\ -2\,p_1^* + 2\,p_2^* + p_3^* = 0 \\ p_1^* - 4\,p_2^* + p_3^* = 0 \\ p_1^* + 2\,p_2^* - 2\,p_3^* = 0 \end{cases}.$$

Эту систему можно решить, например, методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -15 & -6 \\ 0 & 0 & 15 & 6 \end{array}\right).$$

Итак, рассматриваемая система равносильна системе вида:

$$\begin{cases} p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \\ p_2^* - 3p_3^* = -1 \\ 5p_3^* = 2 \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим: $p_1^* = 0,4$; $p_2^* = 0,2$; $p_3^* = 0,4$.