Конспект лекций по математическому анализу

Лектор: Кучерук Екатерина Аркадьевна
Над конспектом работали:
Максим Шамсутдинов
Степан Жоголев
Михаил Петров
Айвар Сергеев

Содержание

Часть XI

Ряды и интегралы Фурье. Преобразование Лапласа

1 Общие понятия

1.1 Ортогональные системы функций

---

def : **Евклидово (унитарное)** пространство $(L, (\cdot,\cdot))$ — линейное пространство, на котором задано скалярное (псевдоскалярное) произведение.

Система векторов (элементов нашего линейного пространства) $\{e_k\}_{k\in I}$ называется **ортонормированной**, если $\forall i,j \in I \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij}$

Система векторов $\{v_k\}_{k\in I}$ называется **линейнонезависимой**, если любая её конечная подсистема линейнонезависима

Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта

Идея метода: выбираем один из векторов (например, первый) и ортогонализуем остальные относительно него следующим образом: проецируем нужный вектор на тот, что мы зафиксировали, после чего вычитаем эту проекцию и проводим нормировку.

Пусть имеется система векторов $\{v_k\}_{k\in I}$ — хотим из неё получить ортогональную систему векторов $\{b_k\}_{k\in I}$:

1. $b_1 = v_1$;
2. $b_2 = v_2 - c_1 b_1, \quad c_1 = \dfrac{(v_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$;
3. $\cdots$
4. $b_k = v_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} b_j c_j, \quad c_j = \dfrac{(v_k, b_j)}{(b_j, b_j)}$.

Процесс ортогонализации сохраняет линейную оболочку системы, то есть $\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_k)$.

---

def : Можем определить норму $||\cdot||$ и, соответственно, метрику $\rho(\cdot,\cdot)$ через скалярное произведение:

$$\forall x \in L \quad ||x|| := \sqrt{(x,x)}$$

$$\forall x, y \in L \quad \rho(x,y) = ||x - y||$$

Рассмотрим пространство функций $\{f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$, где $X \subseteq \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Для комплексного случая функция представляется в виде композиции двух вещественных:

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

Если $u, v \in \Re(X)$, то можем написать следующий интеграл:

$$\int\limits_X f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_X u(x)\mathrm{d}x + i\int\limits_X v(x)\mathrm{d}x$$

Теперь же рассмотрим пространство $\mathscr{L}^2(X)$ функций, таких, что:

$$\forall f \in \mathscr{L}^2(X) \qquad \int\limits_X |f(x)|^2 \mathrm{d}x \text{ сх.}$$

Замечание *Для комплексной функции* $|f|^2 = u^2 + v^2$.

---

def : Определим скалярное произведение для функций:

$$\forall f, g \in \mathscr{L}^2(X) \qquad (f, g) := \int\limits_X f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x$$

В таком случае возникает проблема — согласно аксиомам, скалярное умножение элемента самого на себя равно нулю тогда и только тогда, когда сам элемент нулевой, однако в определении интеграла заложено равенство подынтегральной функции нулю почти везде.

В связи с этим введём множество $\mathcal{L}^2(X)$ функций, которые считаются равными, если они различаются на множестве меры нуль.

Таким образом $\left(\mathcal{L}^2(X), (\cdot, \cdot)\right)$ — линейное пространство функций с введённым на нём скалярным произведением

Стоит показать, что интеграл, через который мы задали скалярное произведение, вообще сходится:

$$\left|\int\limits_X f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_X |f(x)\overline{g}(x)|\mathrm{d}x \leq \int\limits_X |f(x)||g(x)|\mathrm{d}x \leq \int\limits_X \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2}\mathrm{d}x$$

Ну и, так как интегралы $\int\limits_X |f(x)|^2\mathrm{d}x$ и $\int\limits_X |g(x)|^2\mathrm{d}x$ сходятся в силу существования нормы, сходимость доказана.

1.1.1 Классическая тригонометрическая система

Вещественный случай

Рассмотрим пространство $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ и систему функций $1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin kx, \cos kx, \ldots$. Проверим, что данная система будет ортогональна на заданном множестве относительно определённого ранее скалярного произведения:

$$(\sin kx, \cos mx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx \mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sin(kx + mx) + \sin(kx - mx)\right)\mathrm{d}x}_{\text{интеграл по периоду от периодической функции}} = 0$$

Абсолютно аналогично получаем, что $(\sin kx, \sin mx) = 0$ и $(\cos kx, \cos mx) = 0$. Теперь посчитаем нормы:

$$||\sin kx|| = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{\pi} = ||\cos kx||\,, \quad \forall k \neq 0$$

$$||1|| = \sqrt{2\pi}$$

Комплексный случай

Рассмотрим пространство $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ и систему функций $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Снова проведём проверку на ортогональность (расписываем экспоненту по формуле Эйлера и снова получаем интегралы по периоду от периодических функций):

$$(e^{ikx}, e^{imx}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-imx}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(k-m)x\mathrm{d}x + i\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(k-m)x\mathrm{d}x = 0$$

В отличие от вещественного случая, нормы всех элементов здесь равны:

$$\left|\left|e^{ikx}\right|\right| = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-ikx}\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}$$

Можно также рассматривать пространство $\mathcal{L}^2(-l,l)$ — в таком случае системы функций будут выглядеть немного иначе:

- **Вещественный случай:** $1, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{\pi x}{l}, \ldots, \sin\frac{\pi kx}{l}, \cos\frac{\pi kx}{l}, \ldots$

$$\left|\left|\sin\frac{\pi kx}{l}\right|\right| = \sqrt{l} = \left|\left|\cos\frac{\pi kx}{l}\right|\right| \qquad ||1|| = \sqrt{2l}$$

- **Комплексный случай:** $\{e^{ikx/l}\}_{k\in\mathbb{Z}}$

$$\left|\left|e^{ikx/l}\right|\right| = \sqrt{2l}$$

1.1.2 Многочлены Лежандра

Рассмотрим пространство $\mathcal{L}^2(-1,1)$ с канонической системой многочленов $\{1, x, x^2, \ldots\}$, образующей базис в конечномерном пространстве многочленов. Данная система, очевидно, является линейнонезависимой, поэтому имеет смысл ортогонализовать её при помощи метода Грамма-Шмидта. Полученные в результате ортогонализации многочлены будем называть многочленами Лежандра:

1. $b_0 = 1$;
2. $c_0 = \dfrac{(x, b_0)}{(b_0, b_0)} = \dfrac{\int_{-1}^{1} x\cdot 1\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\mathrm{d}x} = 0 \;\Rightarrow\; b_1 = x - b_0c_0 = x$;
3. $c_0 = \dfrac{(x^2, b_0)}{(b_0, b_0)} = \dfrac{1}{3}, \quad c_1 = \dfrac{(x^2, b_1)}{(b_1, b_1)} = 0 \;\Rightarrow\; b_2 = x^2 - c_0b_0 - c_1b_1 = x^2 - \dfrac{1}{3}$;
4. $b_3 = x^3 - b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 = x^3 - \dfrac{3}{5}x$;
5. $\ldots$

Существует формула, которая позволяет задать многочлены Лежандра с точностью до старших коэффициентов:

$$\boxed{l_k = \left(\left(x^2-1\right)^k\right)^{(k)}}$$

<u>Замечание</u> *Не трудно заметить, что* $\deg l_k = k$.

Th. ***Общая формула для многочленов Лежандра***

Следующая формула с точностью до старших коэффициентов совпадает с многочленами Лежандра:

$$l_k = \left(\left(x^2-1\right)^k\right)^{(k)}$$

Доказательство:

▶

Показав, что каждый l_k ортогонален многочленам Лежандра до $(k-1)$ степени включительно, мы сразу докажем то, что он с точностью до константы совпадает с многочленом, полученным методом Грамма-Шмидта. А так как многочлены Лежандра были получены путём ортогонализации канонической системы векторов, это будет эквивалентно утверждению теоремы. Таким образом, для доказательства необходимо проверить следующее утверждение:

$$\forall j = 1, 2, \ldots, k-1 \quad (l_k, x^j) = 0$$

Распишем скалярное произведение по определению через интеграл, после чего занесём l_k под дифференциал и возьмём по частям — повторяя этот алгоритм, получаем:

$$\underset{j=1,\ldots,k-1}{(l_k, x^j)} = \int\limits_{-1}^{1} x^j \left(\left(x^2-1\right)^k\right)^{(k)} \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} x^j \mathrm{d}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)^{(k-1)} =$$

$$= \cancelto{0}{x^j \left(\left(x^2-1\right)^k\right)^{(k-1)} \Big|_{-1}^{1}} - \int\limits_{-1}^{1} jx^{j-1} \left(\left(x^2-1\right)^k\right)^{(k-1)} \mathrm{d}x = \cdots = (-1)^j j! \int\limits_{-1}^{1} \left(\left(x^2-1\right)^k\right)^{(k-j)} \mathrm{d}x$$

Так как $j \leq k-1$, получаем, что оставшийся интеграл также равен нулю, что и доказывает вышеприведённое утверждение.

◀

Найдем значение многочлена Лежандра k-ой степени в точке 1:

$$l_k(1) = \left(\left(x^2-1\right)^k\right)^{(k)} \Big|_{x=1} = \left((x-1)^k (x+1)^k\right)^{(k)} \boxed{=}$$

Воспользуемся формулой Лейбница для вычисления производной произведения

$$\boxed{=} \sum_{m=0}^{k} C_k^m \left((x-1)^k\right)^{(m)} \left((x+1)^k\right)^{(k-m)} = k! 2^k$$

Данное значение используется в качестве нормировки для общей формулы Многочленов Лежандра (формула Родрига):

$$\boxed{\tilde{l}_k = \frac{\left(\left(x^2-1\right)^k\right)^{(k)}}{2^k k!}}$$

1.1.3 Многочлены Чебышёва

Здесь также рассматривается пространство $\mathcal{L}^2(-1,1)$, однако для скалярного произведения вводится вес (то есть в интеграле появляется добавочная функция, равная $(1-x^2)^{-1/2}$). Сами же многочлены задаются следующей формулой:

$$\boxed{\underset{k=0,1,2,\ldots}{T_k = \cos(k \arccos x)}}$$

Выведем рекуррентную формулу для многочленов Чебышёва:

$$T_{k+1} + T_{k-1} = \cos((k+1)\arccos x) + \cos((k-1)\arccos x) = 2\cos(k\arccos x)\cdot\cos(\arccos x)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{k+1} = 2xT_k - T_{k-1}}$$

<u>Замечание</u> *Пользуясь этой формулой, легко проверить, что* $\deg T_k = k$

Данная система также является ортогональной (при проверке не забываем, что в этом случае скалярное произведение задано с весом — именно он поможет нам сделать удобную замену):

$$(T_k, T_m) = \int\limits_{-1}^{1} \cos(k\arccos x)\cdot\cos(m\arccos x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = [t = \arccos x] = \int\limits_{0}^{\pi} \cos kt\cdot\cos mt\mathrm{d}t = 0$$

1.1.4 Многочлены Эрмита

Теперь рассмотрим пространство $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ с весом e^{-x^2}. Многочлены Эрмита задаются следующей формулой:

$$\boxed{H_k = \left(e^{-x^2}\right)^{(k)} e^{x^2}}$$

Посчитаем несколько первых степеней:

1. $H_0 = 1$;
2. $H_1 = -e^{-x^2}\cdot 2x\cdot e^{x^2} = -2x$;
3. $H_2 = e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right)e^{x^2} = 4x^2 - 2$;
4. …

<u>Замечание</u> *Данная система (о чудо!) также ортогональна*

Рекуррентная формула:

$$\boxed{H_k + 2xH_{k-1} + 2(k-1)H_{k-2} = 0}$$

1.1.5 Многочлены Лагерра

Рассматриваем пространство $\mathcal{L}^2(0, +\infty)$ с весом e^{-x}. Формула, задающая многочлены Лагерра:

$$\mathscr{L}_k = (x^k e^{-x})^{(k)} e^x$$

<u>Замечание</u> *Эта система тоже является ортогональной*

1.2 Теорема Пифагора

Рассмотрим некое линейное пространство с введённым на ним скалярным произведением $(L, (\cdot,\cdot))$. На этом пространстве рассмотрим систему функций $\{v_j\}_{j\in\Omega}$, где Ω — счётное множество. В таком случае верно следующее утверждение:

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} v_j \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}\left|\left|v - \sum_{j=1}^{n} v_j\right|\right| = 0,$$

причём $v_j, v \in L \qquad ||v|| = \sqrt{(v,v)}$

<u>Замечание</u> *Представленное выше утверждение эквивалентно введению ряда, состоящего из элементов рассматриваемого линейного пространства и утверждению о его сходимости к некоторому элементу этого же пространства*

Lm. ***Лемма перед теоремой Пифагора***

1. Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ является непрерывной функцией, как функция двух переменных по норме $||\cdot||$:
$$(x,y)\to(x_0,y_0)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x\to x_0\\ y\to y_0\end{cases}\quad \text{по } ||\cdot||$$

2. Операцию скалярного произведения можно производить под знаком ряда:
$$v=\sum_{j=1}^{\infty}v_j\ \Rightarrow\ \forall x\in L\quad (v,x)=\sum_{j=1}^{\infty}(v_j,x)$$

3. Разложение скалярного произведения векторов:
$$\begin{cases}x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ie_i\\ y=\sum\limits_{j=1}^{\infty}y_je_j\\ \{e_j\}_{j=1}^{\infty}\text{ — ортогон. сист. векторов}\end{cases}\qquad \Rightarrow\ (x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y}_i\,||e_i||^2$$

Доказательство:
▶

1. Доказывается несложным тарасобульбаньем и применением неравенства Коши-Буняковского ($|(x,y)|\le||x||\cdot||y||$)
$$|(x,y)-(x_0,y_0)|\le|(x,y)-(x_0,y)+(x_0,y)-(x_0,y_0)|\le|(x-x_0,y)|+|(x_0,y-y_0)|\le$$
$$\le||x-x_0||\cdot||y||+||x_0||\cdot||y-y_0||$$
Из полученного неравенства следует, что при покомпонентном стремлении аргументов к предельным значениям, скалярное произведение также стремится к скалярному произведению этих предельных значений.

2. Здесь всё просто — данное утверждение верно для конечных частичных сумм по свойству скалярного произведения, осталось лишь перейти к пределу и воспользоваться первым пунктом:
$$\left(\underbrace{\sum_{l=1}^{n}v_j}_{\longrightarrow v},x\right)=\sum_{l=1}^{n}(v_j,x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{l=1}^{\infty}(v_j,x)$$

3. Тут по очереди раскрываем оба аргумента и дважды применяем пункт 2, вынося знак суммы из под скалярного произведения:
$$(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_ie_i,y\right)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i(e_i,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\sum_{j=1}^{\infty}\overline{y}_j\underbrace{(e_i,e_j)}_{=0,\ i\ne j}=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y}_i||e_i||^2$$

◀

Th. ***Теорема Пифагора***

1. $$\begin{cases}v=\sum\limits_{j=1}^{\infty}v_j\\ v_j\text{ попарно ортогональны}\end{cases}\qquad\Rightarrow\ ||v||^2=\sum_{j=1}^{\infty}||v_j||^2$$

2.
$$\begin{cases} x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i e_i \\ \{e_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ — ортогон. сист.} \end{cases} \Rightarrow \ ||x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 ||e_i||^2$$

В частности, если $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированная система векторов, то $||x||^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$

Доказательство:
►

1. Следствие из второго пункта леммы — берём $x = v$:
$$(v, v) = \sum_{j=1}^{\infty} (v_j, v) = \sum_{j=1}^{\infty} (v_j, v_j) = \sum_{j=1}^{\infty} ||v_j||^2$$

2. Следствие из третьего пункта леммы:
$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{x_i \overline{x}_i}_{|x_i|^2} ||e_i||^2$$

◄

1.3 Ряд Фурье

Рассмотрим ортогональную систему $\{e_i\}$ в пространстве $(L, (\cdot, \cdot))$ и разложимый элемент $x \in L$: $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$. Если расписать скалярное произведение этого элемента с произвольным элементом системы, получаем:
$$(x, e_j) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (e_i . e_j) = c_j (e_j, e_j)$$

В таком случае $c_j = \dfrac{(x, e_j)}{||e_j||^2}$ определяются однозначно и называются **коэффициентами Фурье** для элемента x. **Рядом Фурье** для элемента x называется следующий ряд:
$$x \sim \sum_{i=1}^{\infty} c_j e_j$$

Теперь рассмотрим ортонормированную систему векторов $\{\hat{e}_j\}$:
$$\hat{e}_j = \frac{e_j}{||e_j||}$$

Для такой системы коэффициенты будут выглядеть следующим образом:
$$\hat{c}_j = \frac{(x, \hat{e}_j)}{||\hat{e}_j||} = (x, \hat{e}_j)$$

Распишем j-тое слагаемое ряда Фурье:
$$\hat{c}_j \hat{e}_j = (x, \hat{e}_j) \frac{e_j}{||e_j||} = \frac{(x, e_j)}{||e_j||^2} e_j = c_j e_j$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что нет разницы, является ли система векторов нормированной, — слагаемые ряда Фурье в любом случае будут одинаковыми.
Классические ряды Фурье

1. **Вещественный случай**

   Рассмотрим пространство $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ с классической тригонометрической системой. Здесь функции $f \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ будет сопоставляться следующий ряд:

   $$f \sim A \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \boxed{=}$$

   Рассчитаем коэффициенты ($k = 1, 2, \dots$):

   $$b_k = \frac{(f, \sin kx)}{||\sin kx||^2} = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \mathrm{d}x}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \mathrm{d}x$$

   $$a_k = \frac{(f, \cos kx)}{||\cos kx||^2} = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \mathrm{d}x}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \mathrm{d}x$$

   $$A = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}$$

   Подставляя, получаем вид классического ряда Фурье для функции f в вещественном случае:

   $$\boxed{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

   <u>*Замечание*</u> *Для чётной функции разложение представлено только косинусами, а для нечётной — только синусами*

2. **Комплексный случай**

   Тут рассматривается пространство $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ с системой $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ (в смысле симметричного промежутка). В таком случае функции $f \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ будет сопоставляться следующий ряд:

   $$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \mathrm{d}x,$$

   где $\hat{f}(k)$ — это наши коэффициенты Фурье:

   $$\hat{f}(k) = \frac{(f, e^{ikx})}{||e^{ikx}||^2} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x$$

   В таком случае сам ряд Фурье имеет вид:

   $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) c^{ikx} \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

   Рассмотрим частные случаи для коэффициентов:

   (a) $k > 0$

   $$\hat{f}(k) = \frac{a_k - ib_k}{2}$$

   (b) $k < 0$

   $$\hat{f}(k) = \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}$$

   (c) $k = 0$

   $$\hat{f}(0) = \frac{a_0}{2}$$

2 Общие свойства коэффициентов и рядов Фурье в Гильбертовом пространстве

<u>**def**</u> **:** $(L, ||\cdot||)$ (полное нормированное пространство) называется **Банаховым** пространством. **Гильбертовым** пространством называется Банахово пространство с нормой $||x|| = \sqrt{(x,x)}$

2.1 Неравенство Бесселя. Теорема Рисса-Фишера

Lm. ***об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье***

Рассмотрим пространство $(L, (\cdot,\cdot))$ с ортогональной системой $\{e_i\}$ и разложимый элемент $x \in L$:

$$x \sim \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \text{ — ряд Фурье}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \text{ — частичная сумма}$$

$$H_n = \operatorname{span}(e_1, \dots, e_n) \text{ — линейная оболочка системы}$$

В таком случае:

1. $x - S_n \perp H_n$
2. $\forall y \in H_n \quad ||x - S_n|| \le ||x - y||$
3. $||S_n|| \le ||x||$

   Здесь идёт речь об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье — сумма коэффициентов Фурье даёт наилучшее приближение элемента x элементами из H_n.

Доказательство:

►

1. Для того, чтобы показать ортогональность, рассмотрим скалярное произведение с учетом того, что система ортогональна:

$$\underset{j=1,\dots,n}{(x - S_n, e_j)} = \left(x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, e_j\right) = (x, e_j) - \sum_{i=1}^{n} c_i (e_i, e_j) = (x, e_j) - c_j (e_j, e_j) = 0 \Rightarrow x - S_n \perp H_n$$

2. Тарасобульбим и пользуемся теоремой Пифагора:

$$||x - y||^2 = ||\underbrace{x - S_n}_{\perp H_n \text{ по п. 1}} + \underbrace{S_n - y}_{\in H_n}||^2 = ||x - S_n||^2 + \underbrace{||S_n - y||^2}_{\ge 0} \ge ||x - S_n||^2$$

3. Аналогично предыдущему:

$$||x||^2 = ||\underbrace{x - S_n}_{\perp H_n} + \underbrace{S_n}_{\in H_n}||^2 = \underbrace{||x - S_n||^2}_{\ge 0} + ||S_n||^2 \Rightarrow ||S_n||^2 \le ||x||^2$$

◄

<u>**Следствие:**</u> (неравенство Бесселя)

$$\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2||e_i||^2 \leq ||x||^2$$

►

Просто поработаем с нормой частичной суммы

$$||S_n||^2 = \left|\left|\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right|\right|^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2||e_i||^2}_{\text{знакопостоянный}} \leq \underbrace{||x||^2}_{=const}$$

Получили, что знакопостоянный ряд равномерно ограничен. Таким образом этот ряд сходится, значит можем перейти к пределу частичных сумм и получить нужное неравенство.

◄

<u>**Тождество Бесселя:**</u>

$$\boxed{||x||^2 = ||x - S_n||^2 + ||S_n||^2}$$

В случае классических рядов Фурье (вещественный случай):

$$\frac{|a_0|^2}{4}||1||^2 + \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2||\cos kx||^2 + |b_k|^2||\sin kx||^2 \leq ||f||^2$$

$$\frac{|a_0|^2}{2}\pi + \pi\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 + |b_k|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\mathrm{d}x$$

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 + |b_k|^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\mathrm{d}x$$

Для комплексного разложения:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)|^2||e^{ikx}||^2 \leq ||f||^2$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\mathrm{d}x$$

<u>*Замечание*</u> *Не всякий тригонометрический ряд является рядом Фурье*

<u>**Ex.**</u> $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin kx}{\sqrt{k}} = f(x)$

Ряд сходится по признаку Дирихле, но не выполняется неравенство Бесселя:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}_{\text{расходящийся}} \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\mathrm{d}x$$

Таким образом, этот ряд не является рядом Фурье

Th. ***Рисса-Фишера***

$(L, (\cdot,\cdot))$ — гильбертово пространство. Элементу x сопоставлен ряд Фурье. $H = \mathrm{span}((e_i)_{i=1}^{\infty})$ — множество всевозможных линейных комбинаций. Тогда:

1. Ряд Фурье сходится по норме к своей сумме S
2. $x - S \perp \operatorname{cl} H$
3. $\forall y \in \operatorname{cl} H \quad ||x - S|| \leq ||x - y||$
4. $x = S \Leftrightarrow ||x||^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 ||e_i||^2$ — Тождество Парсеваля

Доказательство:
►

1. Расписываем разность частичных сумм ряда Фурье и применяем теорему Пифагора:
$$||S_{n+p} - S_n||^2 = \left|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k e_k\right|\right|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2 ||e_k||^2$$
Из неравенства Бесселя следует, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 ||e_i||^2 \leq ||x||^2$, значит можем применить критерий Коши:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N \quad \forall p > 0 \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2 ||e_k||^2\right| < \varepsilon$$
Таким образом, $S_n \xrightarrow[n \to \infty]{||\cdot||} S$, где $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_k|^2 ||e_k||^2$ — это сумма ряда Фурье

2. Покажем ортогональность любому $e_j \in H$:
$$(x - S, e_j) = \left(x - \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i, e_j\right) = (x, e_j) - \sum_{i=1}^{\infty} c_i (e_i, e_j) = (x, e_j) - c_j (e_j, e_j) = 0$$
Получили, что $x - S \perp H$
По определению, $\operatorname{cl} H$ — это само H и все его предельные точки. Возьмём предельную точку $y \in \operatorname{cl} H$. Найдётся последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ из H, сходящаяся к y. В таком случае переходим к пределу, пользуясь непрерывностью скалярного произведения:
$$(x - S, y_n) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} (x - S, y) = 0$$

3. Тарасобульбим и снова используем теорему Пифагора
$$||x - y||^2 = ||\underbrace{x - S}_{\perp \operatorname{cl} H} + \underbrace{S - y}_{\in \operatorname{cl} H}||^2 = ||x - S||^2 + \underbrace{||S - y||^2}_{\geq 0} \Rightarrow ||x - S||^2 \leq ||x - y||^2$$

4. Введём $x - S = z \perp \operatorname{cl} H$:
$$||z||^2 = ||x - S||^2$$
Расписываем левую часть доказываемого тождества:
$$x = S \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow ||z|| = 0$$
Расписываем норму элемента и пользуемся теоремой Пифагора:
$$||x||^2 = ||\underbrace{S}_{\in \operatorname{cl} H} + \underbrace{z}_{\perp \operatorname{cl} H}||^2 = ||S||^2 + ||z||^2$$
А с учётом того, что $||z|| = 0$, получаем:
$$||x||^2 = ||S||^2 = \left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 ||e_i||^2$$

◄

Запишем тождество Парсеваля для классических рядов Фурье:

$$\frac{a_0^2}{4}\cdot 2\pi + \pi\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2+|b_k|^2=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f|^2\mathrm{d}x$$

Поделив на π получим тождество Ляпунова:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2+|b_k|^2=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f|^2\mathrm{d}x$$

Для $f\in\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ это равносильно тому, что функция совпадает со своим рядом Фурье (равенство стоит в смысле нормы пространства $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

В комплексной записи тождество Парсеваля имеет вид:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)|^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f|^2\mathrm{d}x$$

Замечание *Вообще говоря, ряды Фурье существуют и для функций вида $f\in\mathcal{L}^1(-\pi,\pi)$, но чаще работа происходит именно с функциями из $\mathcal{L}^2$. Также на множествах X, имеющих конечную меру в смысле Лебега, верно включение $\mathcal{L}^2(X)\subset\mathcal{L}^1(X)$*

2.2 Базис в гильбертовом пространстве

def : Рассмотрим бесконечномерное линейное нормированное пространство L и линейнонезависимую систему векторов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ на нём

- Такая система называется **замкнутой**, если

$$\forall x\in L\quad \forall\varepsilon>0\quad \exists n\in\mathbb{N}\quad \exists\{x_k\}_{k=1}^{n}\qquad \left|\left|x-\sum_{k=1}^{n}x_ke_k\right|\right|<\varepsilon$$

  То есть можно любой элемент нашего линейного пространства приблизить конечной линейной комбинацией других элементов

- Такая система называется **полной**, если не существует элемента, кроме нулевого, ортогонального ко всем e_k

- Такая система называется **базисом**, если

$$\forall x\in L\quad x=\sum_{k=1}^{\infty}x_ke_k$$

Замечание *Если L — конечномерное, то эти три термина эквивалентны*

Ex. Замкнутая система, не являющаяся базисом.

Рассмотрим пространство функций, непрерывных на отрезке $C([-1,1])$ и линейнонезависимую систему одночленов $e_k=x^k$. Будем считать, что $\forall f\in C([-1,1])\quad ||f||=\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}|f|^2\mathrm{d}x}$

- Покажем, что система замкнутая

  ▶

  По теореме Вейерштрасса (формулировка предоставлена ниже) данная система является замкнутой

  > **<u>Th.</u>** ***Вейерштрасса***
  > $\forall f \in C([-1,1])\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n \in \mathbb{N}\ \ \exists p_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x^k$ — многочлен степени n, такой, что:
  >
  > $$||f - p_n||_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_n| < \varepsilon$$

  Покажем, что для $\mathcal{L}^2$ это также выполняется:

  $$||f||_{\mathcal{L}^2} = \int\limits_{-1}^{1} |f|^2 \mathrm{d}x \leq \max_{x \in [-1,1]} |f|^2 \cdot 2 = ||f||_\infty^2 \cdot 2 \ \Rightarrow\ \mathcal{L}^2([-1,1]) \supset l^\infty([-1,1])$$

  Получили определение замкнутости

  ◀

- Покажем, что система не является базисом:

  ▶

  Доказательство проведём от противного — пусть система является базисом, тогда верно следующее:

  $$\forall f \in C([-1,1]) \quad \forall x \in [-1,1] \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$$

  Последний ряд, по определению, должен сходиться, следовательно, должно выполняться необходимое условие, т.е. $\left|\left|\alpha_k x^k\right|\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Распишем норму общего члена ряда по определению:

  $$\left|\left|\alpha_k x^k\right|\right|^2 = \int\limits_{-1}^{1} |\alpha_k|^2 x^{2k} \mathrm{d}x = \frac{|\alpha_k|^2 \cdot 2}{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

  Отсюда следует, что н.с.н.м. $|\alpha_k| < \sqrt{2k+1}$. Но по свойствам степенного ряда, его сходимость влечёт за собой равномерную сходимость на любом подотрезке. Теперь заведём следующую функцию:

  $$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$$

  Заметим, что этот ряд равномерно сходится по $||\cdot||_\infty$, а равенство также предполагает сходимость ряда по норме заданного пространства. Отсюда имеем, что $f(x) \equiv \tilde{f}(x)$ на любом отрезке $[-q, q], \quad 0 < q < 1$, таким образом $f(x) \equiv \tilde{f}(x)$ на интервале $(-1, 1)$.

  По свойствам суммы степенного ряда, $\tilde{f}(x)$ бесконечное количество раз непрерывно дифференцируема. Однако при этом $f(x)$ введена как просто непрерывная функция, отсюда противоречие.

  ◀

Th. ***о базисе гильбертового пространства***

$(L, (\cdot,\cdot))$ — гильбертово, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система, ортогональная в L. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис
2. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута
3. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полная

Доказательство:

►

$(\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2})$: Пользуемся свойством базиса и расписываем равномерную сходимость по определению, получая определение замкнутости

$$\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ — базис } \Rightarrow \ \forall x \in L \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

$$\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \qquad \left|\left| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right|\right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ очевидно, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута

$(\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{3})$: Рассмотрим $z \perp e_k \quad \forall k$ — все коэффициенты его разложения в ряд Фурье будут равны нулю. Однако, по теореме Рисса-Фишера, что ряд Фурье — это наилучшее приближение среди всех частичных сумм рядов вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$

$$\left|\left| z - \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot e_k \right|\right| \leq \left|\left| z - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right|\right|$$

В силу замкнутости системы, всегда найдутся такие n и такие $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$, что норма этой разности будет меньше наперёд заданного ε. В таком случае, получили, что $\forall \varepsilon > 0 \quad ||z|| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ z = 0$, а из этого сразу следует полнота рассматриваемой системы

$(\mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1})$: $\sqsupset \ z = x - S = x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ — ряд Фурье для x. По свойствам полной системы не существует ненулевых элементов, ортогональных всей системе, поэтому рассмотрим скалярные произведения:

$$\forall j \quad (z, e_j) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \underbrace{(e_k, e_j)}_{=0,\ k \neq j} = \underbrace{(x, e_j) - c_j(e_j, e_j) = 0}_{\text{по } def \ c_j}$$

Отсюда получаем, что $z = 0 \ \Rightarrow \ x = S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, то есть мы нашли коэффициенты разложения x, следовательно $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис

◄

Следствие:

$(L, (\cdot, \cdot))$ — гильбертово, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система, ортогональная в L. При таких условиях верны следующие равносильности:

$$\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ — базис } \Leftrightarrow \ L = \operatorname{cl} \operatorname{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \ \Leftrightarrow \ \forall x \in L \quad x = S = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k}_{\text{ряд Фурье}} \ \Leftrightarrow \ \underbrace{\boxed{||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \, ||e_k||^2}}_{\text{тождество Парсеваля}}$$

►

Доказательство проведём в логической последовательности слева направо. По свойству базиса мы можем разложить по нашей системе любой элемент пространства, но, так как система является ортогональной, данное разложение будет единственным (!), а коэффициенты этого разложения всегда будут коэффициентами Фурье. Следовательно, само разложение будет рядом Фурье. Ну и, воспользовавшись теоремой Рисса-Фишера, можем утверждать, что при совпадении элемента с его разложением в ряд Фурье верно тождество Парсеваля. В целом, всё это и так очевидно, посему доказательство не нуждается в подробном описании.

◄

Замечание *Все раннее рассматриваемые нами системы ортогональных функций являются базисами своих пространств*

---

def : Если $L = \operatorname{cl} H$, то H называется **всюду плотным** в L. Если, к тому же, H является счётным множеством, то L называется **сепарабельным**

Ex. $C([-1,1]) = \operatorname{cl} H$, где H — это множество многочленов с рациональными коэффициентами

Покажем, что $C([-1,1])$ — сепарабельное.

►

Снова сошлёмся на теорему Вейерштрасса (будет доказана позже):

$$\forall f \in C([-1,1]) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_n : \quad ||f - p_n||_\infty < \varepsilon,$$

где $p_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k$ — многочлен степени n

Построим многочлен $q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k x^k$, где $b_k \in \mathbb{Q}$. $\forall k$ верно неравенство:

$$|\underbrace{a_k}_{\in\mathbb{R}} - \underbrace{b_k}_{\in\mathbb{Q}}| < \frac{\varepsilon}{n}$$

Распишем норму разности этих многочленов:

$$||p_n - q_n||_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} \left|\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)x^k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| < \varepsilon$$

Теперь посмотрим, насколько хорошо q_n приближает изначальную функцию — для этого напишем норму разности и затарасобульбим:

$$||f - q_n||_\infty \leq \underbrace{||f - p_n||_\infty}_{<\varepsilon} + \underbrace{||p_n - q_n||_\infty}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon \;\Rightarrow\; ||f - q_n||_{\mathcal{L}^2} < 2\varepsilon$$

Таким образом, мы показали, что **на множестве** $[-1,1]$ верно равенство $\operatorname{span}\{p_n\} = \operatorname{span}\{q_n\}$ (то есть любой элемент, который разложим в ряд Фурье, можно приблизить многочленом с рациональными коэффициентами). Таким образом, $C([-1,1]) = \operatorname{cl}\{q_n\}$, а $\{q_n\}$ — это счётное множество, следовательно, $C([-1,1])$ — сепарабельное

◄

Замечание *Гильбертово пространство сепарабельно, так как является замыканием всевозможных линейных комбинаций элементов своего базиса с рациональными коэффициентами*

3 Классические ряды Фурье

3.1 Основные определения и некоторые факты

В данном разделе мы рассматриваем 2π — периодические функции вида $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Периодичность в данном случае позволяет нам рассматривать функции на любом отрезке длинны 2π, однако, чаще всего, мы из соображений удобства всё ещё будем рассматривать отрезки от $-\pi$ до π, то есть будем писать $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$.

Вещественный случай

Зададим коэффициенты Фурье:

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \mathrm{d}x \\ b_k = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \mathrm{d}x \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Вид классического ряда Фурье:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Комплексный случай

Коэффициенты Фурье:

$$\tilde{f} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Вид классического ряда Фурье (в данном случае запись аналогична интегралу в смысле главного значения — по модулю верхний и нижний пределы суммы равны):

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

Ну и, соответственно, в центре нашего внимания в процессе большинства умозаключений будет сходимость этого ряда и характер данной сходимости.

Если $f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi) \subset \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$, то для этой функции выполняется тождество Парсеваля (которое в классическом анализе называется тождеством Ляпунова):

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \mathrm{d}x$$

Для комплексного случая это тождество выглядит следующим образом:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{f}(k))^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$$

- В 1926 году Колмогоров доказал существование функции $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$, такой, что её ряд Фурье расходится в любой точке в смысле поточечной сходимости
- В 1966 году Карлесон доказал, что $\forall f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ ряд Фурье сходится почти везде

3.2 Ядро Дирихле. Принцип локализации

Хотим получить условие для поточечной сходимости ряда Фурье (желательно также уметь находить его значение в точке). Будем рассматривать комплексный случай, то есть будем работать с частичными суммами ряда Фурье следующего вида:

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \tilde{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \mathrm{d}t \right) \cdot e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} \right) \mathrm{d}t$$

К этой частичной сумме мы ещё вернёмся позднее, а сейчас вычислим частичную сумму ряда $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{inu}$. Для этого произведём сдвиг, получив сумму геометрической прогрессии, после чего приведём полученную дробь к отношению синусов:

$$D_n(u) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = e^{-inu}\sum_{k=0}^{2n} e^{iku} = e^{-inu}\frac{e^{i(2n+1)u}-1}{e^{iu}-1} = \frac{e^{i(n+1)u}-e^{-inu}}{e^{iu/2}\left(e^{iu/2}-e^{-iu/2}\right)} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}$$

---

def : Рассмотренная выше частичная сумма называется **ядром Дирихле**:

$$D_n(u) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}$$

Свойства $D_n(u)$:

1. 2π-периодичность
2. чётность
3. $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\mathrm{d}u = 1$

   ►

   Так как экспонента — 2π-периодическая функция, интеграл будет зануляться при всех $k \neq 0$, то есть от всей суммы останется одно слагаемое:

   $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{iku}\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\mathrm{d}u = 1$$

   ◄

Теперь можем вернуться к рассмотрению частичной суммы нашего ряда Фурье:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t \boxed{=}$$

Так как функции 2π-периодические, можем поменять их аргументы местами:

$$\boxed{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t\right)\boxed{=}$$

Для первого интеграла сделаем замену $t \to -t$:

$$\boxed{=}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)D_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\boxed{=}$$

Синус в знаменателе создаёт нам проблему при $t \to 0$, поэтому выберем некоторую достаточно малую $\delta > 0$, такую, что $\sin t/2 \geq \sin\delta/2$, и разобьём интеграл по промежутку:

$$\boxed{=}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\delta}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\underbrace{\frac{\left(f(x+t)+f(x-t)\right)}{\sin\frac{t}{2}}}_{=g(t)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t\boxed{=}$$

Рассмотрим подробнее функцию $g(t)$:

$$|g(t)| \le \frac{\overbrace{|f(x+t)|+|f(x-t)|}^{\in\mathcal{L}^1(-\pi,\pi)}}{\underbrace{\sin(\delta/2)}_{const}} \;\Rightarrow\; g(t)\in\mathcal{L}^1(-\pi,\pi)$$

Теперь воспользуемся леммой Римана-Лебега и получим, что второй интеграл бежит к нулю при $n\to\infty$:

$$\boxed{=}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\delta (f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_\delta^\pi g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}$$

Таким образом, мы получили асимптотику для частичной суммы ряда Фурье:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\delta (f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t + \underset{n\to\infty}{\overline{o}}(1)$$

То, что мы сейчас сделали, называется **принципом локализации**. На самом деле, поточечная сходимость ряда Фурье зависит от точки. Действительно, если посмотреть на полученный интеграл, можно заметить, что мы находимся в окрестности точки x.

Th. ***Римана***

Если в достаточно малой окрестности точки $x\in(-\pi,\pi)$ $\quad f(x)\equiv g(x),\quad f,g\in\mathcal{L}^1(-\pi,\pi)$, то поведение рядов Фурье этих функций в окрестности точки x будет идентичным. При этом коэффициенты Фурье у функций могут значительно отличаться

Доказательство:

►

Предоставлено выше

◄

<u>Замечание</u> *Если $x=\pi(-\pi)$, то $f\equiv g$ на обоих концах интервала*

3.3 Условия Дини, Липшица. Достаточные условия поточечной сходимости ряда Фурье

<u>**def**</u> **:** Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет **условиям Дини** в окрестности точки x, если:

1. Существуют односторонние пределы в точке:

$$\exists f(x-0),\ f(x+0)$$

2. $\exists\delta>0$:

$$\int\limits_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x-0)-f(x+0)}{t}\mathrm{d}t \text{ абс. сх.}$$

Th. ***Условия Дини***

Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-периодическая, $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$, удовлетворяет условиям Дини в окрестности точки x, то её ряд Фурье сходится в этой точке, причём его сумма будет равна $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

<u>*Замечание*</u> *Если x, к тому же, является точкой непрерывности функции $f(x)$, то $f(x) = f(x-0) = f(x+0)$ и сумма ряда Фурье равна $f(x)$*

Доказательство:

▶

Для того, чтобы доказать сходимость ряда к определённому значению, воспользуемся уже классическим приёмом — по модулю ограничим разность частичных сумм с этим значением:

$$\left| S_n(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(f(x+t) + f(x-t)\right) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \right| \boxed{=}$$

Здесь воспользуемся тем фактом, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t = 2\pi$ и затарасобульбим эту константу во второе слагаемое:

$$\boxed{=} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(f(x+t) + f(x-t)\right) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t \right| \boxed{=}$$

Теперь, воспользовавшись чётностью подынтегральной функции, можем привести оба интеграла к одинаковым пределам:

$$\boxed{=} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(f(x+t) + f(x-t)\right) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t - \frac{2}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t \right| \boxed{=}$$

Берём $\delta > 0$ из условия Дини и разбиваем полученный интеграл по промежутку:

$$\boxed{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\delta} \frac{f(x-t)+f(x+t)-f(x-0)-f(x+0)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{f(x-t)+f(x+t)-f(x-0)-f(x+0)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что оба интеграла бегут к нулю, поэтому далее рассмотрим их по отдельности:

1. Для первого интеграла достаточно заметить, что $\sin\frac{t}{2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2}$, откуда сразу получаем, что интеграл от нашей дроби ведёт себя как интеграл из условия Дини — а он сходится абсолютно. Далее пользуемся леммой Римана-Лебега и получаем малость всего интеграла.

2. Во втором интеграле всё ещё проще — пользуясь оценкой $\sin\frac{t}{2} > \sin\frac{\delta}{2}$ снова получаем, что интеграл от дроби сходится абсолютно (так как все функции в числителе $\in \mathcal{L}^1(\delta, \pi)$) и так же пользуемся леммой Римана Лебега.

◀

---

def : Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет **условиям Липшица** порядка α в окрестности точки x, если для достаточно (сколь угодно) малого $t>0$:

$$|f(x\pm t)-f(x)|\leq Lt^{\alpha},$$

где $L=const$, $0<\alpha\leq 1$
<u>Замечание</u> *Под $\pm$ здесь мы понимаем не совокупность, а систему*

<u>Замечание</u> *Очевидно, что если f удовлетворяет условию Липшица в точке x, то она непрерывна в этой точке, то есть $f(x)=f(x+0)=f(x-0)$*

Проверим, следуют ли условия Дини из условий Липшица:

1. Сначала рассмотрим случай $0<\alpha<1$. Поделим обе части неравенства на $t>0$:

$$\frac{|f(x\pm t)-f(x)|}{t}\leq\frac{L}{t^{1-\alpha}}$$

Теперь, воспользовавшись правилом треугольника, можем ограничить подынтегральную функцию из условия Дини:

$$\left|\frac{f(x-t)+f(x+t)-f(x-0)-f(x+0)}{t}\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right|+\left|\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\right|\leq\frac{2L}{t^{1-\alpha}}$$

Таким образом, мы смогли ограничить подынтегральную функцию из условия Дини по модулю функцией, интеграл от которой сходится (так как $1-\alpha<1$):

$$\int\limits_0^\delta\frac{2L}{t^{1-\alpha}}\mathrm{d}t\text{ сх. }\Rightarrow\int\limits_0^\delta\frac{f(x-t)+f(x+t)-f(x-0)-f(x+0)}{t}\mathrm{d}t\text{ абс. сх.}$$

Значит в этом случае условия Дини выполняются

2. Теперь рассмотрим случай $\alpha=1$. Здесь всё ещё проще — подынтегральная функция ограничена просто константой, а значит сам интеграл собственный:

$$\frac{|f(x\pm t)-f(x)|}{t}\leq L\;\Rightarrow\int\limits_0^\delta\frac{f(x-t)+f(x+t)-f(x-0)-f(x+0)}{t}\mathrm{d}t\text{ абс. сх.}$$

Следовательно, в этом случае условия Дини также выполняются

Из условий Липшица следуют условия Дини

В частности, $\sqsupset\alpha=1$, тогда если f дифференцируема в точке x или $\exists f'(x\pm 0)$, то для неё выполняются условия Липшица, а значит и условия Дини, в этой точке.

►

1. Пусть f дифференцируема в точке x, тогда:

$$\left[\begin{aligned}&\exists\lim_{t\to0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=f'(x)\\&\exists\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=f'(x+0)\\&\exists\lim_{t\to+0}\frac{f(x-t)-f(x)}{-t}=f'(x-0)\end{aligned}\right.$$

А как мы уже знаем из первого семестра, существование предела говорит о локальной ограниченности функции, стоящей под пределом:

$$\left|\frac{f(x\pm t)-f(x)}{t}\right| \leq const$$

2. Теперь пусть x — точка разрыва первого рода, то есть существуют конечные $f(x-0)$ и $f(x+0)$, и пусть существуют следующие пределы:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \underset{\text{н.у.о.}}{=} f(x+0) \\ \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(x-t)-f(x-0)}{-t} \underset{\text{н.у.о.}}{=} f(x-0) \end{cases}$$

В этом случае, аналогично рассуждая, можно проверить выполнение условий Дини

◀

Таким образом, мы уже можем выделить некоторый класс функций, для которых ряд Фурье сходится во всех точках исследуемого интервала. **Для любой кусочно дифференцируемой функции ряд Фурье сходится во всех точках**

Итог:

Если функция f кусочно дифференцируема на $(-\pi,\pi)$ (то есть дифференцируема за исключением конечного числа точек, в которых $\exists f(x\pm 0), f'(x\pm 0)$), тогда:

1. Если x — точка непрерывности функции f, то ряд Фурье функции f сходится к $f(x)$

2. Если x — точка разрыва первого рода функции f, то ряд Фурье функции f сходится к значению $\frac{f(x-0)+f(x-0)}{2}$

Ex. Рассмотрим функцию $f(x)=\cos ax$ на интервале $(-\pi,\pi)$

Для начала напишем коэффициенты Фурье:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^\pi \cos ax \mathrm{d}x = 2\dfrac{\sin a\pi}{a\pi} \\ a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \dfrac{\sin a\pi}{\pi}(-1)^n\left(\dfrac{1}{a+n}+\dfrac{1}{a-n}\right) \\ b_n = 0 \end{cases}, \ n=1,2,\dots$$

Теперь можем написать само разложение функции:

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin a\pi}{\pi}(-1)^n\frac{2a}{a^2+n^2}\cos nx$$

Немного преобразуем обе части равенства:

$$2\pi\frac{\cos ax}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a}{a^2-n^2}\cos nx$$

Так как исследуемая нами функция гладкая на всём интервале, имеем право подставлять в полученное разложение любую точку, поэтому подставим $x=\pi$:

$$\pi\operatorname{ctg} a\pi = \frac{1}{a} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a}{a^2-n^2}\cdot(-1)^n$$

Проведя замену $a\pi = t$, получаем известную формулу для котангенса:

$$\boxed{\operatorname{ctg} t = \frac{1}{t} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{t^2 - n^2\pi^2}}$$

А если подставить $x = 0$, то получим известное разложение синуса (которым мы как раз пользовались в конце прошлого семестра):

$$\boxed{\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t}{t^2 - n^2\pi^2}}$$

3.4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Th. ***о дифференцируемости рядов Фурье***

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$ кусочно-гладкая, непрерывная, 2π— периодическая, тогда ряд Фурье функции $f'(x)$ может быть получен формальным дифференцированием ряда Фурье функции $f(x)$

Доказательство:

►

Из условия сразу можем написать вид ряда Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Посчитаем коэффициенты Фурье для функции $f'(x)$:

При вычислении a'_n вносим $f'(x)$ под дифференциал и берём по частям — первое слагаемое зануляется в виду 2π-периодичности функции $f(x)$ и косинуса, а второе слагаемое получается в точности равным nb_n:

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}(f(x)) = \cancel{\frac{1}{\pi}\cos nx f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}} \to 0 + n\cdot\underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x}_{=b_n} = nb_n$$

$$a'_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{d}x = 0$$

При вычислении b'_n проводим абсолютно аналогичные манипуляции:

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \mathrm{d}(f(x)) = \cancel{\frac{1}{\pi}\sin nx f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}} \to 0 - n\cdot\underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x}_{=a_n} = -na_n$$

Таким образом, можем написать ряд Фурье, который мы сопоставляем функции $f'(x)$, а он как раз в точности совпадает с производной от ряда Фурье функции $f(x)$

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx) = \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)\right)'$$

◄

Следствие:

$\exists f^{(k-1)}(x)$ кусочно-гладкая, 2π-периодическая и непрерывная, тогда ряд Фурье функции $f^{(k)}(x)$ получается формальным дифференцированием k раз ряда Фурье функции $f(x)$, причём $a_n = \underset{n\to\infty}{\overline{o}}\left(n^{-k}\right)$, $b_n = \underset{n\to\infty}{\overline{o}}\left(n^{-k}\right)$

►

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^k a_n \cos\left(nx + \frac{\pi k}{2}\right) + n^k b_n \sin\left(nx + \frac{\pi k}{2}\right)\right)$$

◄

Не стоит забывать, что все рассматриваемые нами функции $\in \mathcal{L}^1(-\pi,\pi)$ (если не указано иное), поэтому из необходимого условия сходимости ряда следует, что коэффициенты Фурье должны стремиться к нулю при $n \to \infty$, то есть:

$$\begin{cases} a_n, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ n^k a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ n^k b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

Именно отсюда следует, что $a_n = \underset{n\to\infty}{\overline{o}}\left(n^{-k}\right)$, $b_n = \underset{n\to\infty}{\overline{o}}\left(n^{-k}\right)$

Th. ***об интегрируемости рядов Фурье***

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ кусочно-непрерывная, 2π— периодическая, $f \in \mathcal{L}^1(-\pi,\pi)$, тогда:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n \sin nx}{n} + \frac{b_n(1-\cos nx)}{n}\right)$$

Доказательство:

►

Для начала введём две вспомогательные функции:

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0 x}{2}$$

$$F(x) = \Phi(x) + \frac{a_0 x}{2} = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

Если x — точка непрерывности $f(x)$, то $\exists F'(x) = f(x)$.

Если x — точка разрыва (первого рода) $f(x)$, то $\exists F'(x-0), F'(x+0)$

Тогда получается, что $F(x)$, а, следовательно, и $\Phi(x)$, — кусочно-гладкая и непрерывная функция. Теперь рассмотрим следующую разность (здесь воспользуемся тем, что $f(t)$ — 2π-периодическая и передвинем пределы интегрирования):

$$\Phi(x+2\pi) - \Phi(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)\mathrm{d}t - \frac{a_0\cdot 2\pi}{2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t - a_0\pi = 0$$

Получается, что $\Phi(x)$, к тому же, 2π-периодическая, а значит она совпадает со своим рядом Фурье во всех точках:

$$\Phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

Помимо того, $\Phi(x)$ подходит под условия теоремы о дифференцируемости, поэтому мы имеем право ей воспользоваться:

$$\begin{cases} -nA_n = b_n \\ nB_n = a_n \end{cases}$$

Осталось только найти A_0, для этого рассмотрим значение функции в нуле (которое, исходя из определения, равно нулю):

$$\Phi(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = 0 \;\Rightarrow\; \frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

Осталось лишь написать наш интеграл и убедиться в выполнении условий теоремы:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \Phi(x) + \frac{a_0 x}{2} = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nx)$$

◀

3.5 Теорема Фейера

Рассмотрим расходящийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и последовательность его частичных сумм $S_m = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$ и зададимся вопросом о существовании и значении следующего предела:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_1 + \cdots + S_m}{m} = \boxed{?}$$

Последовательность сумм, стоящих под пределом, обычно называют *Чезаровскими средними.* В свою очередь, *сходимость по Чезаро* подразумевает суммирование рядов в среднем
Замечание *В том случае, когда ряд сходится к некоторой константе, Чезаровские средние сходятся к той же константе*
Ex. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

Так как это знакочередующийся ряд, в котором значения частичных сумм чередуются между 1 и 0, рассматривая сходимость по Чезаро, мы будем говорить, что сумма этого ряда равна среднему арифметическому из этих двух значений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$$

Ядро Фейера

Данный метод применим и к рядам Фурье. Запишем k-тую частичную сумму для ряда Фурье:

$$S_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_k(t)\mathrm{d}t$$

Чезаровские средние для ряда Фурье будут выглядеть следующим образом:

$$\sigma_n(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} S_k}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \sum_{k=0}^{n} D_k(t)\mathrm{d}t$$

Ядром Фейера называется следующее выражение (расписываем ядро Дирихле через уже известное нам выражение и выносим константы за знак суммирования):

$$\mathcal{F}_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin\left((k+1/2)\,t\right)\boxed{=}$$

Тарасобульбим $\sin\frac{t}{2}$ и, пользуемся тригонометрическими тождествами, получаем финальное выражение для ядра Фейера:

$$\boxed{=}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\sin\left((k+1/2)\,t\right)\sin(t/2)}_{\cos(kt)-\cos((k+1)t)} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(1-\cos((n+1)t)\right)}{\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$= \boxed{\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{n+1}}$$

Свойства $\mathcal{F}_n(t)$:

1. $\mathcal{F}_n(t) \geq 0$
2. Чётное, так как D_k чётное
3. 2π-периодическое, так как D_k 2π-периодическое
4. $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathcal{F}_n(t)\mathrm{d}t = 1$

   ▶

   Просто расписываем ядро Фейера через ядро Дирихле и интегрируем под знаком суммы, пользуясь доказанным свойством ядра Дирихле:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{F}_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{n}D_k(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_k(t)\mathrm{d}t}_{=1} = 1$$

   ◀

Th. ***Теорема Фейера***

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad f\in\mathcal{L}^1(-\pi,\pi)$, $\quad f$ — 2π-периодическая. В таком случае верны следующие утверждения:

1. $E\subseteq\mathbb{R}$, $\quad f$ равномерно непрерывна на $E \Rightarrow\ \sigma_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}}f(x)$
2. $f\in C(\mathbb{R})\Rightarrow\ \sigma_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}}f(x)$
3. f непрерывна в точке $x\ \Rightarrow\ \sigma_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)$

Доказательство:

▶

1. Распишем равномерную непрерывность по определению (помним, что δ не зависит от x):

$$\forall x\in E,\ \forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall t:0<t<\delta\quad|f(x\pm t)-f(x)|<\varepsilon$$

Ну и, по классике, рассматриваем модуль разности Чезаровких средних с функцией $f(x)$ (расписываем средние по определению и, пользуясь нормировкой, тарасобульбим интеграл к $f(x)$):

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\mathcal{F}_n(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathcal{F}_n(t)\mathrm{d}t \right| \boxed{=}$$

Теперь объединяем интегралы и снова разделяем по промежутку, пользуясь δ из равномерной непрерывности, после чего применяем неравенство модулей:

$$\boxed{=} \left| \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta} \big(f(x-t) - f(x)\big)\mathcal{F}_n(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{\delta}^{\pi} \cdots + \int\limits_{-\delta}^{\delta} \cdots \right) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\left| \int\limits_{-\pi}^{-\delta} \cdots \right| + \left| \int\limits_{\delta}^{\pi} \cdots \right| + \left| \int\limits_{-\delta}^{\delta} \cdots \right| \right) \boxed{\leq}$$

Для третьего интеграла можем сразу написать оценку, пользуясь малостью $|f(x-t) - f(x)|$ и свойствами $\mathcal{F}_n(t)$ (снимаем модуль в силу неотрицательности и пользуемся нормировкой):

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \big(f(x-t) - f(x)\big)\mathcal{F}_n(t)\mathrm{d}t \right| < \varepsilon \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_n(t)\mathrm{d}t = \varepsilon$$

Первый интеграл преобразуем, сделав замену $t \to -t$ (не забываем про чётность $\mathcal{F}_n(t)$):

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{-\delta} \big(f(x-t) - f(x)\big)\mathcal{F}_n(t)\mathrm{d}t \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\delta}^{\pi} \big(f(x+t) - f(x)\big)\mathcal{F}_n(t)\mathrm{d}t \right|$$

В таком случае получаем следующую оценку для нашей разности:

$$\boxed{\leq} \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\delta}^{\pi} \big(f(x+t) - f(x)\big)\mathcal{F}_n(t)\mathrm{d}t \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\delta}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big)\mathcal{F}_n(t)\mathrm{d}t \right| + \varepsilon \boxed{<}$$

Теперь ограничим каждый из полученных интегралов (на примере первого). Закидываем модуль под интеграл и подставляем наше выражение для ядра Фейера через синусы. Теперь заметим, что $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$, а синусы ограничены — следовательно, всё подынтегральное выражение принадлежит классу $\mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$, то есть сам интеграл сходится. Отсюда сразу получаем, что при $n \to \infty$ всё выражение стремится к нулю:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n+1} \underbrace{\int\limits_{\delta}^{\pi} \overbrace{|f(x+t) - f(x)| \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin^2 \frac{t}{2}}}^{\in \mathcal{L}^1(-\pi,\pi)} \mathrm{d}t}_{=const} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ мы нашли такой $N \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N$ весь интеграл по модулю меньше ε. Проведя аналогичную оценку и для второго интеграла получаем:

$$\boxed{<} \ \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon = \varepsilon'$$

Осталось собрать всё, что мы написали и получить определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \quad |\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \sigma_n(x) \underset{n \to \infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x)$$

2. Если $f \in C(\mathbb{R})$, то она непрерывна на любом подотрезке (например, на $[-\pi, \pi]$). А так как это компакт, то получаем, что f равномерно непрерывна. А так как f 2π-периодическая, то можно будет по ε подобрать δ для всех $x \in \mathbb{R}$. Соответственно, дальше ссылаемся на доказательство первого пункта

3. При непрерывности функции f в точке x в доказательстве поменяется только тот факт, что δ станет зависеть от нашей точки x, однако при этом все показанные выше ограничения также будут работать. Ну и, так как δ больше не является общей для всех x, равномерная сходимость поменяется на поточечную

◄

Следствие 1:

Если функция f из условия теоремы непрерывна в точке x и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, т.е. ряд Фурье сходится поточечно в точке x, то:

$$S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

►

Из пункта 3 теоремы следует, что:

$$\sigma_n(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} S_k}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

Но, как мы знаем из первого семестра, что среднее арифметическое от сходящейся последовательности сходится к пределу этой последовательности. Таким образом сразу получаем, что:

$$S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

◄

Следствие 2: *(теорема Вейерштрасса)*

$$\forall f \in C([-1,1]) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_n(x): \quad ||f - p_n||_\infty < \varepsilon,$$

где p_n — многочлен некоторой степени n

►

Введём функцию $g(t) = f(\cos t)$ (в таком случае для функции $f(x)$ будет верно, что $t = \arccos x$). Так как аргумент функции f мы рассматриваем на отрезке $[-1,1]$, то $t \in [0, \pi]$. Функция $g(t)$ оказывается непрерывной как композиция непрерывных функций. Также заведём функцию $\tilde{g}(t)$ как чётное продолжение функции $g(t)$ на отрезок $[-\pi, 0]$. Функция $\tilde{g}(t)$ 2π-периодическая, чётная, непрерывная на $\mathbb{R}$ и $\tilde{g}(t) \in \mathcal{L}^1(-\pi,\pi)$. В таком случае получаем, что для этой функции Чезаровские средние будут равномерно сходиться к самой функции на всём $\mathbb{R}$:

$$\sigma_n(t) \overset{\mathbb{R}}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} \tilde{g}(t)$$

А частичные суммы её ряда Фурье будут выглядит следующим образом (выражаем t через x и получаем сумму многочленов Чебышёва, которая обязательно даст нам некоторый многочлен степени k):

$$S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{k} a_m \cos mt = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{k} a_m \underbrace{\cos m \arccos x}_{\text{мн-н Чебышёва } T_m(x)} = \tilde{p_k}(x)$$

Тогда для Чезаровских средних получаем:

$$\sigma_n(t) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} S_k(t)}{n+1} = p_n(x)$$

Теперь по определению распишем равномерную сходимость Чезаровских средних к функции $\tilde{g}(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad |\sigma_n(t) - \tilde{g}(t)| < \varepsilon$$

В частности, написанное выше верно и для $t \in [0, \pi]$, а при $t \in [0, \pi] \quad \tilde{g}(t) = f(x)$. Таким образом, получаем нашу сходимость по норме:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n: \quad \underbrace{\forall x \in [-1, 1] \quad |p_n(x) - f(x)|}_{||p_n - f||_\infty} < \varepsilon$$

◄

4 Интеграл Фурье

4.1 Основные понятия и определения

Рассмотрим $2l$-периодическую функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^1(-l, l)$, совпадающую со своим рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \right) \boxed{=}$$

Запишем формулы для коэффициентов Фурье:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{l}\right) \mathrm{d}t, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(t) \sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right) \mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

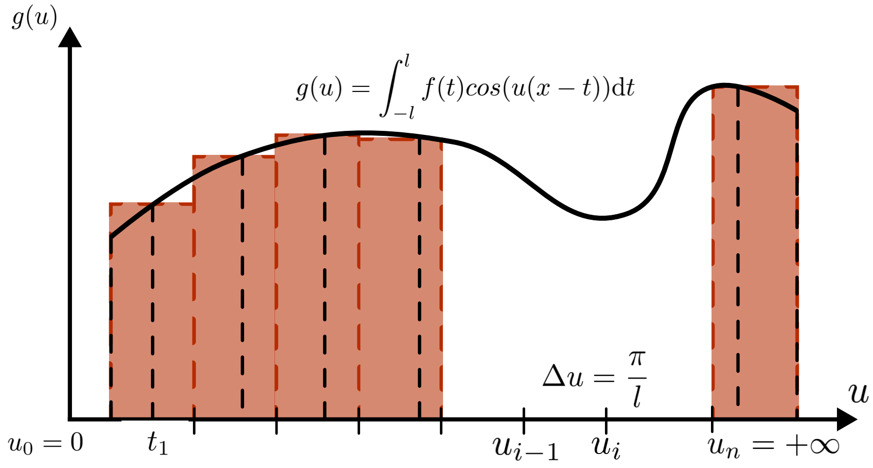
А теперь подставим эти выражения в наш ряд и затарасобульбим π:

$$\boxed{=} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \underbrace{\left(\cos\left(\frac{\pi n t}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \right)}_{\cos\left(\frac{\pi n (x - t)}{l}\right)} \mathrm{d}t$$

Пусть теперь $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Таким образом $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists l: \ |x| < l$. То есть можно считать сужение $f\big|_{(-l,l)}$ $2l$-периодической функцией и писать наше равенство для всех $x \in \mathbb{R}$. Теперь зададим следующую функцию:

$$g(u) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\left(u(x - t)\right) \mathrm{d}t$$

Если внимательно присмотреться, то наш ряд Фурье является Римановой суммой для функции $g(u)$ (разбиение с шагом π/l).



Переходя к пределу по l, получаем:

$$\underbrace{\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t}_{=const} \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0$$

$$f \xrightarrow[l\to+\infty]{} \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\mathrm{d}u\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\left(u(x-t)\right)\mathrm{d}t$$

$v.p.$ в интеграле пропадает в связи с тем, что $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, то есть интеграл сходится

Это был не совсем честный переход, поэтому теперь рассмотрим сразу функцию $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ и сопоставим ей следующую формулу, называемую **интегральной формулой Фурье**:

$$\boxed{f \sim \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\mathrm{d}u\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\left(u(x-t)\right)\mathrm{d}t}$$

Для начала вычислим промежуточные функции:

$$\begin{cases} a(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t \\ b(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t \end{cases}$$

Теперь снова распишем в интегральной формуле фурье косинус разности и подставим туда эти функции, получив тем самым **интеграл Фурье**:

$$\boxed{f(x) \sim \int\limits_{0}^{+\infty}\left(a(u)\cos ux + b(u)\sin ux\right)\mathrm{d}u}$$

$a(u)$ и $b(u)$ определены и существуют, так как $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, причём $a(u), b(u) \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$ по лемме Римана-Лебега

В центре нашего внимания снова окажется сходимость этого интеграла и характер этой сходимости. Несложно заметить, что как сам интеграл Фурье, так и его коэффициенты — это просто непрерывные аналоги таковых для ряда Фурье

<u>*Замечание*</u> *Стоит отметить, что внутренний интеграл и так сходится по определению, поэтому перед нами стоит вопрос о сходимости внешнего интеграла*

В функциональном же анализе, рассматривая тот же самый ряд Фурье, но уже для комплексной функции (везде на месте косинусов и синусов у нас появятся экспоненты), абсолютно аналогично получаем интегральную формулу Фурье для комплексной записи:

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iu(x-t)} \mathrm{d}t$$

Коэффициенты Фурье для комплексной записи также имеют свой непрерывный аналог:

$$c(u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itu} \mathrm{d}t$$

Опять же, по лемме Римана-Лебега $c(u) \xrightarrow[u \to \pm\infty]{} 0$

Интеграл Фурье в таком случае будет иметь вид:

$$f(x) \sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c(u) e^{iux} \mathrm{d}u$$

<u>**Преобразование Фурье:**</u>

Снова рассмотрим функцию $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. **Преобразованием Фурье** называется следующая операция:

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itu} \mathrm{d}t$$

Теперь введём **обратное преобразование Фурье** для функции $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$:

$$\check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{iux} \mathrm{d}u = \hat{g}(-x)$$

Таким образом, можно заметить, что наш интеграл Фурье при такой нормировке выражается через преобразования Фурье следующим образом:

$$\boxed{f(x) \sim \left(\hat{f}\right)^{\vee}(x) = \left(\hat{f}\right)^{\wedge}(-x)}$$

Для чётной функции:

$$a(u) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \cos ut \mathrm{d}t$$

$$f(x) \sim \int\limits_{0}^{+\infty} a(u) \cos ux \mathrm{d}u$$

Для такого случая задаётся **косинус-преобразование Фурье**:

$$\hat{f}_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \cos ut \mathrm{d}t$$

Соответственно преобразование, обратное ему:

$$\check{f}_c(x) = \hat{f}_c(x)$$

$$f(x) = \left(\hat{f}_c\right)^{\wedge}_{c}(x)$$

Для нечётных же функций:

$$b(u) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin ut \mathrm{d}t$$

$$f(x) \sim \int\limits_0^{+\infty} b(u)\sin ux \mathrm{d}u$$

Аналогично задаётся **синус-преобразование Фурье**:

$$\hat{f}_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin ut \mathrm{d}t$$

А преобразование, обратное ему:

$$\check{f}_s(x) = \hat{f}_s(x)$$

$$f(x) = \left(\hat{f}_s\right)^{\wedge}_{s}(x)$$

На самом деле, преобразование Фурье представимо в виде комбинации косинус- и синус-преобразований Фурье:

$$\hat{f}(u) = \frac{\hat{f}_c(u) - i\hat{f}_s(u)}{2}$$

4.2 Поточечная сходимость интеграла Фурье

Th. ***Достаточное условие поточечной сходимости интеграла Фурье***

Если функция $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям Дини в точке x, то её интеграл Фурье сходится в смысле главного значения, причём к среднему арифметическому односторонних пределов $f(x)$:

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \text{ удовл. усл. Дини в } (\cdot)x \ \Rightarrow \ v.p.\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iu(x-t)}\mathrm{d}t = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

Замечание *Замечания здесь аналогичны замечаниям в аналогичной теореме для рядов Фурье*

Доказательство:

►

Перед нами стоит вопрос существования следующего предела:

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A}\mathrm{d}u\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iu(x-t)}\mathrm{d}t$$

Для этого сразу рассмотрим разность данного интеграла с его предполагаемым предельным значением:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A}\mathrm{d}u\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iu(x-t)}\mathrm{d}t - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\boxed{=}$$

Затарасобульбим единичку через подходящий нам интеграл Дирихле:

$$\boxed{=}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A}\mathrm{d}u\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iu(x-t)}\mathrm{d}t - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t\boxed{=}$$

Теперь в первом интеграле сделаем замену $x - t \to t$:

$$\boxed{=}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A}\mathrm{d}u\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)e^{iut}\mathrm{d}t - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t\boxed{=}$$

Распишем экспоненту по формуле Эйлера:

$$\boxed{=}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A}\mathrm{d}u\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\left(\cos ut + i\sin ut\right)\mathrm{d}t - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t\boxed{=}$$

Теперь, поменяв порядок интегрирования, получаем интеграл по симметричному промежутку от нечётной функции (часть с синусом зануляется, остаётся только косинус):

$$\boxed{=}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\left(\int\limits_{-A}^{A}(\cos ut + \cancelto{0}{i\sin ut})\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t\boxed{=}$$

Ну а для косинуса мы уже в состоянии взять внутренний интеграл, получаем:

$$\boxed{=}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t\boxed{=}$$

Теперь разобьём первый интеграл по промежутку на $(-\infty, 0)$ и $[0, +\infty)$, после чего на отрицательном промежутке сделаем замену $t \to -t$, как мы уже делали, получаем:

$$\boxed{=}\frac{1}{2\pi}\cdot 2\int\limits_{0}^{+\infty}\left(f(x-t)+f(x+t)\right)\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t\boxed{=}$$

Изменение порядка интегрирования легально, так как внутренний интеграл, очевидно, равномерно сходится ($f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$)

Теперь объединяем всю эту радость в один интеграл:

$$\boxed{=}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(x-t)+f(x+t)-f(x-0)-f(x+0)}{t}\sin At\mathrm{d}t\boxed{=}$$

Теперь локализуем нашу особенность в точке 0 путём разбиения интеграла по промежутку с использованием δ из условия Дини:

$$\boxed{=}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}\dots + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{+\infty}\dots$$

$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, а синус представляет тригонометрическую компоненту, поэтому первый интеграл бежит к нулю по лемме Римана-Лебега. Теперь разбираемся со вторым интегралом. Разбиваем его на два, во втором выносим константу и делаем замену $At \to t$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{f(x-t)+f(x+t)}{t}\sin At\mathrm{d}t - \left(f(x-0)+f(x+0)\right)\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta A}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

При фиксированной δ и $A \to \infty$ второй интеграл превращается в хвост сходящегося интеграла и, соответственно, бежит к нулю. А первый интеграл бежит к нулю всё по той же лемме Римана-Лебега (снова пользуемся тем, что $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ и присутствием синуса)

Получили, что весь наш интеграл, а, соответственно, и разность рассматриваемой функции с её предельным значением, бежит к нулю, что и доказывает теорему

◀

4.3 Свойства преобразования Фурье

Напоминаем, что, говоря о преобразовании фурье, мы работаем с функцией $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ и рассматриваем следующую операцию:

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}\mathrm{d}t$$

Свойства преобразования Фурье:

1. Линейность:
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \widehat{\lambda f + \mu g}(u) = \lambda \hat{f}(u) + \mu \hat{g}(u)$$
Доказывается через линейность интеграла

2. $\hat{f}(u) \xrightarrow[u \to \pm\infty]{} 0$

   Доказывается при помощи леммы Римана-Лебега

3. $\hat{f}(u)$ непрерывна на $\mathbb{R}$

   Доказывается тем, что сама функция представлена интегралом с параметром, который равномерно сходится на всём $\mathbb{R}$, а подынтегральная функция непрерывна на $\mathbb{R}$

4. Если $\exists g(x) = x^n f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье дифференцируемо n раз:
$$\left(\hat{f}(u)\right)^{(n)} = (-i)^n \hat{g}(u) = (-i)^n \widehat{x^n f(x)}(u)$$

   ►

   Начнём с частного случая $\sqsupset n = 1$, тогда $g(x) = xf(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Запишем наше преобразование Фурье по определению:
$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}\mathrm{d}t$$

   Очевидно, что перед нами стоит вопрос о возможности дифференцирования данного интеграла по параметру u. Взяв частную производную от подынтегральной функции, получаем $f(t) \cdot (-it)e^{-iut}$. Равномерную сходимость интеграла от этой функции получаем очевидным ограничением функции, взятой по модулю, интеграл от которой сходится. Таким образом, дифференцирование по параметру легально:
$$\left(\hat{f}\right)'(u) = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot te^{-iut}\mathrm{d}t = -i\hat{g}(u)$$

   Для дальнейшего доказательства используем метод математической индукции.

   ◄

5. Рассмотрим функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **Свёрткой функций** будем называть следующие интегралы:
$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)\mathrm{d}s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)g(s)\mathrm{d}s = (g * f)(x)$$

   Достаточные условия существования свёртки:

(a) $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

▶

Пользуясь неравенством модулей и неравенством Коши-Буняковского, ограничиваем модуль интеграла сверху произведением норм функций в пространстве $\mathcal{L}^2$:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)g(s)\mathrm{d}s\right| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x-s)g(s)|\,\mathrm{d}s \overset{\text{Н.К.Б.}}{\le} \underbrace{\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f(x-s))^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}}_{||f||_{\mathcal{L}^2}} \underbrace{\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (g(s))^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}}_{||g||_{\mathcal{L}^2}}$$

◀

(b) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}),\ g$ ограничена на $\mathbb{R}$

▶

Снова ограничиваем при помощи неравенства модулей и выносим супремум ограниченной функции за знак интеграла:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)g(s)\mathrm{d}s\right| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x-s)g(s)|\,\mathrm{d}s \le \sup_{t\in\mathbb{R}}(g(t)) \cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)\mathrm{d}s}_{\text{абс. сх.}}$$

◀

(c) Хотя бы одна из функций равна нулю вне некоторого отрезка $[a, b]$, например:

$$g(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases} \quad , \quad f \in \Re([a,b])$$

▶

В таком случае весь интеграл сводится просто к собственному, который, очевидно, сходится

◀

Замечание *Для общего образования, в данном условии, вообще говоря, идёт речь о финитности функции (финитность функции означает, что её носитель имеет конечную меру)*

Операция свёртки функций обладает множеством интересных свойств, полезных, в первую очередь для физиков. Рассмотрим функции $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ и будем считать, что $\exists f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, в таком случае:

$$\boxed{\widehat{f * g}(u) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(u) \cdot \hat{g}(u)}$$

▶

Поочерёдно раскроем обе операции по определению через интегралы:

$$\widehat{f * g}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)e^{-iut}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)e^{-iut}\mathrm{d}s \boxed{=}$$

Теперь представим e^{-iut} как $e^{-iu(t-s)} \cdot e^{-ius}$ и поменяем порядок интегрирования (это потребует дальнейшего обоснования), после чего во внутреннем интеграле сделаем замену $t - s \to t$, после чего он превращается в функцию, никак не зависящую от s, то есть мы получаем произведение двух интегралов, каждый из которых представляет собой преобразование Фурье:

$$\boxed{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-ius}\mathrm{d}s \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)e^{-iu(t-s)}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-ius}\mathrm{d}s \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-iut}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\hat{f}(u)\cdot\hat{g}(u)$$

Осталось обосновать смену порядка интегрирования. С двойным интегралом всё и так понятно — он, очевидно, сходится. Интегралы по каждому из параметров также сходятся абсолютно, так как модуль комплексной экспоненты всегда ограничен сверху 1, а $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ по условию

◀

6. $\sqsupset f^{(k)}(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad k = 1, 2, \ldots, n$, в таком случае преобразование Фурье от n-ной производной функции будет иметь следующий вид:

$$\boxed{\widehat{f^{(n)}}(u) = (iu)^n \hat{f}(u)}$$

▶

Докажем сначала для случая $n = 1$. Рассмотрим преобразование Фурье от первой производной функции (заносим $f'(t)$ под дифференциал и интегрируем по частям):

$$\widehat{f'}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-iut} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut} \mathrm{d}\left(f(t)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iut} f(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \underbrace{\frac{iu}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} \mathrm{d}t}_{= iu \cdot \hat{f}(u)}$$

Не сложно заметить, что второе слагаемое даёт нам ровно ту формулу, которой требует постановка свойства, поэтому для завершения доказательства нам достаточно показать, что первое слагаемое равно нулю. Если заметить, что $|f(t)e^{-iut}| = |f(t)|$, то для доказательства нам достаточно показать, что модуль функции $f(t)$ на бесконечности бежит к нулю. Так как $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, то имеет место следующее интегральное равенство:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0) + \int\limits_0^{\infty} f'(x) \mathrm{d}x = A$$

Хотим показать, что константа $A = 0$, докажем от противного — $\sqsupset A \neq 0$ (н.у.о. $A > 0$):

$$\exists a: \quad \forall x > a \quad f(x) > \frac{A}{2} \; \Rightarrow \; \int\limits_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x \text{ расх. по призн. срав.}$$

Полученное утверждение противоречит тому, что $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, поэтому $A = 0$, а значит $|f(t)| \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 0$, откуда следует, что вся подстановка, представляющая первое слагаемое, зануляется, что и доказывает наше свойство

◀

7. $g(x) = f(x - x_0)$ — сдвиг аргумента. В таком случае:

$$\boxed{\hat{g}(u) = f\widehat{(x - x_0)}(u) = e^{-iux_0} \hat{f}(u)}$$

▶

Расписываем преобразование Фурье по определению и делаем замену $t - x_0 \to t$:

$$\hat{g}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t - x_0) e^{-iut} \mathrm{d}t = [t - x_0 \to t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iu(t + x_0)} \mathrm{d}t = e^{-iux_0} \hat{f}(u)$$

◀

8. $\forall\lambda\in\mathbb{R}:\quad \lambda\neq 0\quad g(x)=f(\lambda x)$ — растяжение:

$$\boxed{\hat{g}(u)=\widehat{f(\lambda x)}(u)=\frac{1}{|\lambda|}\hat{f}\left(\frac{u}{\lambda}\right)}$$

►

Снова расписываем преобразование Фурье по определению и делаем замену $\lambda t\to t$:

$$\hat{g}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda t)e^{-iut}\mathrm{d}t=[\lambda t\to t]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\left[\begin{array}{ll}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iut/\lambda}, & \lambda>0\\ \int\limits_{+\infty}^{-\infty}f(t)e^{-iut/\lambda}, & \lambda<0\end{array}\right.=\frac{1}{|\lambda|}\hat{f}\left(\frac{u}{\lambda}\right)$$

◄

9. **Теорема Планшереля**

Классическое преобразование Фурье продолжается до унитарного оператора в $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

---

def : $(L,(\cdot,\cdot))$ — унитарное пространство, оператор $A:L\to L$ называется унитарным, если $||Ax||=||x||\quad\forall x\in L$ (сохранение расстояний). Также, очевидным свойством унитарного оператора A является $\forall x,y\in L\quad (Ax,Ay)=(x,y)$

Для функций вида $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ верно тождество Парсеваля (непрерывный аналог тождества Ляпунова):

$$||\hat{f}(u)||_{\mathcal{L}^2}=||f(u)||_{\mathcal{L}^2}$$

Надо отметить, что здесь, в отличие от конечного интервала, который мы рассматривали ранее, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ не является подпространством $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, так как для бесконечного промежутка не выполняется неравенство Коши-Буняковского, которым мы негласно пользовались, оценивая нормы функции в конечном случае. Именно поэтому здесь рассматривается пересечение пространств

Таким образом, по сути, теорема Планшереля говорит о том, что тождество Парсеваля будет верно для всех $f\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Часть XII
Теория функции нескольких переменных (ф.н.п.)

5 Предел и непрерывность ф.н.п.

5.1 Предел и непрерывность

---

def : В данном разделе будет идти речь о функциях вида $f:X\to Y$, где X — некоторое n-мерное линейное пространство, а Y — некоторое m-мерное линейное пространство. При фиксированном базисе $e_1,\dots,e_n$ пространства X можно установить изоморфизм $X\cong\mathbb{R}^n$ (для пространства Y

аналогично). Таким образом, рассматриваемые нами функции будут сводиться к виду $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$:

$$y=f(x),\ y\in\mathbb{R}^m,\ x\in\mathbb{R}^n\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} y_1=f_1(x_1,\dots,x_n)=f_1(x)\\ \vdots\\ y_m=f_m(x_1,\dots,x_n)=f_m(x)\end{cases},$$

где f_j — **координатные функции** *(функции векторного аргумента)*.

Частным случаем является вектор-функции вида $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ (отображают скалярное поле в векторное)

Графиком функции нескольких переменных называется следующее множество точек:

$$\Gamma_f=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\big|x\in D_f,\ y\in f(x)\big\}$$

Рассматриваемые нами линейные пространства будут являться метрическими:

$$(X,\rho),\quad (Y,\mu),$$

где ρ,μ — метрики порождённые евклидовой нормой $||x||_2=\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}x_j^2\right)^{1/2}$ или любой ей эквивалентной (помним, что в конечномерных пространствах все нормы эквивалентны)

---

def : Определение предела функции по Коши переносится дословно:

$$\exists\lim_{x\to x_0}f(x)=A\in Y\ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in X:\quad 0<\rho(x,x_0)<\delta\quad \mu(f(x),A)<\varepsilon$$

Ex. $f:(\mathbb{R}^2,\rho)\to(\mathbb{R}^2,\rho)$

В частных случаях, подобных этому, определение предела функции по Коши расписывается покомпонентно:

$$\exists\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A=(A_1,A_2)\ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall(x,y):\quad 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

$$\sqrt{(f_1(x,y)-A_1)^2+(f_2(x,y)-A_2)^2}<\varepsilon$$

---

def : Определение предела функции по Гейне также переносится дословно:

$$\exists\lim_{x\to x_0}f(x)=A\in Y\ \Leftrightarrow\ \forall(x_n)_{n=1}^{\infty}:\begin{cases}x_n\neq x_0\\ x_n\in D_f\\ x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0\end{cases},\ x_0 \text{ — пред. точка о.о.ф.}\ \lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$$

Очевидно, что, говоря о пределе функции нескольких переменных, мы говорим о некотором векторе и, соответственно, о покомпонентной сходимости:

$$\exists\lim_{x\to x_0}f(x)=A=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ \forall i=1,\dots,m\quad\exists\lim_{x\to x_0}f_i(x)=A_i$$

Замечание *Определение непрерывности функции и все свойства предела функции также дословно переносятся с первого семестра*

5.2 Кратный и повторный предел

---

def : Введённый нами только что предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ для $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является **n-кратным пределом**.

Теперь распишем $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ и $x = (x_1, \dots, x_n)$ и будем поочерёдно переходить к пределу по каждой компоненте (в любом порядке):

$$\lim_{x_n \to x_0^n} \dots \lim_{x_1 \to x_0^1} f(x_1, \dots, x_n)$$

Такой предел называется **повторным**. В общем случае, он не обязательно должен совпадать с n-кратным.

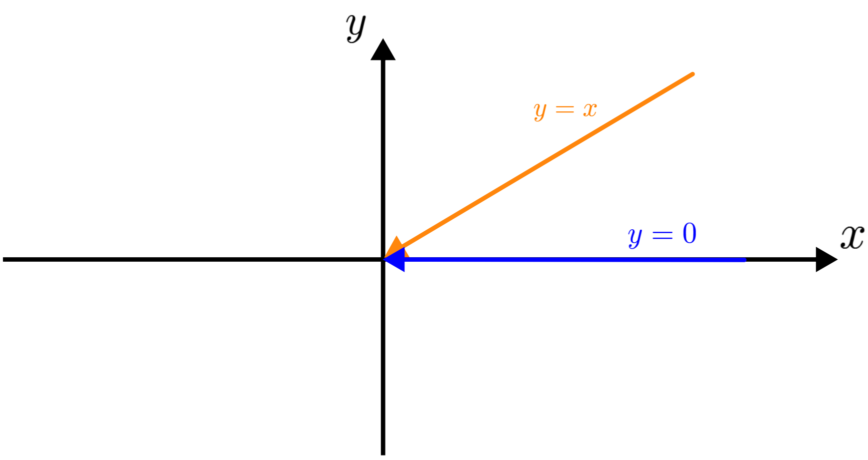
Ex. Пример функции, для которой кратный предел не совпадает с повторным

$$f(x,y) = \left[\begin{array}{l} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, \quad x^2+y^2 = 0 \end{array}\right.$$

Посмотрим для начала на повторные пределы:

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 0 = \lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$$

Теперь мы хотим показать, что двукратного предела в нуле у данной функции не существует, для этого воспользуемся отрицанием определения по Гейне (найдём две последовательности, подходящие под условия, но сходящиеся к разным значениям). Последовательности выберем по направлениям возможного приближения к точке $(0,0)$.



Для первой последовательности выберем направление вдоль прямой $y = x$, а для второй — вдоль прямой $y = 0$:

$$y = x \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \qquad\qquad y = 0,\ x \to 0$$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{1}{2} \qquad\qquad f(x,0) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Таким образом, двукратного предела у данной функции не существует

Ex. Пример функции, для которой не существует одного из повторных пределов, но при этом существует двукратный

$$f(x,y) = \left[\begin{array}{l} x + y\sin\dfrac{1}{x}, \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, \quad x^2+y^2 = 0 \end{array}\right.$$

Для начала разберёмся с повторными пределами:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(x+y\sin\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to 0}x=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(x+y\sin\frac{1}{x}\right)\right)\ \nexists$$

Теперь посмотрим на двукратный предел:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$$

Th. ***о повторном пределе***

Если $\exists\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$ и для любого фиксированного $y\in D_f:\quad y\neq y_0\ \ \exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$, то тогда:

$$\exists\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0}f(x,y)\right)=A$$

<u>*Замечание*</u> *Если условия теоремы выполняются относительно переменной x, то тогда $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)\right)=A$. Поэтому, если существуют оба повторных предела, но их значения не совпадают, то не существует двукратного предела*

Доказательство:

►

Расписываем двукратный предел по определению:

$$\exists\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A\ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall(x,y):\quad 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\quad|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

Теперь в этой формулировке зафиксируем y и устремим $x\to x_0$:

$$|\varphi(y)-A|\leq\varepsilon\ \Rightarrow\ \exists\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0}f(x,y)\right)=A$$

◄

---

6 Дифференцирование ф.н.п.

6.1 Линейный оператор и его норма

<u>**def**</u> **: Линейным оператором** $A:X\to Y$ называется линейное отображение из линейного пространства X размерности n в линейное пространства Y размерности m (ему можно сопоставить матрицу $(a_{ij})_{m\times n},\ a_{ij}\in\mathbb{R}$)

Линейные пространства, на которых работает линейный оператор, могут быть нормированными $(X,||\cdot||),\ (Y,||\cdot||)$ (вообще говоря, нормы могут быть разными, однако мы будет считать их равными из-за эквивалентности норм конечномерных пространств). Соответственно, эти нормы порождают метрики — то есть наши пространства становятся метрическими: $(X,\rho),\ (Y,\mu)$

Th. ***Теорема 1***

Следующие утверждения эквивалентны:

1. A — непрерывное отображение на X

2. A непрерывно в 0

3. $\exists c > 0 \quad \forall x \in X \quad ||Ax|| \leq c||x||$

Доказательство:

►

($\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2}$) Очевидно

($\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{3}$) Если A непрерывно в 0, то $\lim\limits_{x \to 0} Ax = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : \quad \rho(x, 0) = ||x|| < \delta \quad \rho(Ax, 0) = ||Ax|| < \varepsilon$$

Теперь возьмём $\sqsupset \varepsilon = 1$:

$$\forall z \in X : \quad \left|\left|\frac{z}{||z||} \cdot \frac{\delta}{2}\right|\right| = \frac{\delta}{2} \;\Rightarrow\; \left|\left|A\left(\frac{z}{||z||} \cdot \frac{\delta}{2}\right)\right|\right| < \varepsilon = 1$$

В таком случае получаем:

$$||Az|| < ||z||\,\frac{2}{\delta} = ||z|| \cdot c$$

($\mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1}$) Банально расписываем третье свойство и совершаем предельный переход:

$$||Ax - Ax_0|| \leq c \cdot ||x - x_0|| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \;\Rightarrow\; Ax \xrightarrow[x \to x_0]{} Ax_0$$

◄

---

def : Введём **норму** непрерывного оператора A:

$$||A|| := \inf_{x \in X} \{c : \; ||Ax|| \leq c \cdot ||x||\}$$

Также эквивалентно задание нормы непрерывного оператора как верхней границы множества коэффициентов растяжения:

$$||A|| := \sup_{x \in X} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Для нормы оператора верны следующие очевидные свойства:

1. $||A|| \geq 0$

2. $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$

3. $||A|| \geq \dfrac{||Ax||}{||x||} \quad \forall x \neq 0$

Th. ***Теорема 2***

Норма оператора может быть также задана следующим образом:

$$||A|| = \sup_{x \leq 1} \overset{C_1}{||Ax||} = \sup_{x < 1} \overset{C_2}{||Ax||} = \sup_{x = 1} \overset{C_3}{||Ax||} = \sup_{x \neq 0} \overset{C_4}{\frac{||Ax||}{||x||}}$$

Доказательство:

►

Для начала поработаем с C_4. Расписываем, пользуясь свойствами нормы и линейностью A:

$$x \neq 0 \quad \frac{||Ax||}{||x||} = \left|\left|\frac{Ax}{||x||}\right|\right| = \left|\left|A\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right| = ||A(y)||\,, \quad ||y|| = 1$$

Для C_1 пользуемся свойством нормы оператора и пишем очевидное ограничение сверху:

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \underset{||x||\leq 1}{\leq} ||A|| \;\Rightarrow\; \sup_{x\leq 1} ||Ax|| \leq ||A||$$

Заметим также, что верны следующие неравенства (супремум берётся по более узким множествам):

$$C_2 \leq C_1; \quad C_3 \leq C_1$$

Теперь очевидным образом получаем ограничение снизу:

$$\forall x \neq 0 \quad \frac{||Ax||}{||x||} \leq C_3 \;\Rightarrow\; ||Ax|| \leq ||x|| \cdot C_3 \;\Rightarrow\; ||A|| \leq C_3 \leq C_1 \leq ||A||$$

Теперь докинем в знаменатель ε и, наконец, зажмём все наши выражения:

$$\frac{||Ax||}{||x|| + \varepsilon} \leq C_2 \;\Rightarrow\; ||Ax|| \leq C_2(||x|| + \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} C_2 \cdot ||x|| \;\Rightarrow\; ||A|| \leq C_2 \leq C_1 \leq ||A||$$

◄

<u>*Замечание*</u> C_1, C_2, C_3, C_4 *— конечные величины* $\Leftrightarrow$ *A непрерывно*

Th. ***Теорема 3***

Для нормы оператора ($||A||$, $||\cdot|| \in \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathbb{R}$) выполняются стандартные аксиомы нормы

Доказательство:

►

1. $\boxed{?}$ $||A|| = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$ (пользуемся одним из равенств, доказанных в предыдущей теореме):

$$||A|| = 0 \;\Rightarrow\; \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = 0 \;\Leftrightarrow\; ||Ax|| = 0 \quad \forall x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$$

2. $\boxed{?}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad ||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||$ (пользуемся одним из равенств, доказанных в предыдущей теореме и свойствами обычной нормы в гильбертовом пространстве под знаком супремума):

$$||\lambda A|| = \sup_{||x||=1} ||\lambda Ax|| = \sup_{||x||=1} (|\lambda| \cdot ||Ax||) = |\lambda| \cdot ||A||$$

3. $\boxed{?}$ $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$ (пользуемся одним из равенств, доказанных в предыдущей теореме и свойствами обычной нормы в гильбертовом пространстве под знаком супремума):

$$||A + B|| = \sup_{||x||=1} ||Ax + Bx|| \leq \sup_{||x||=1} (||Ax|| + ||Bx||) \leq ||A|| + ||B||$$

◄

<u>**Ex.**</u> $A : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}^m, ||\cdot||_2) \;\leftrightarrow\; (a_{ij})_{m\times n}$

Мы хотим найти норму такого оператора. Для начала, отметим, что элементу x, на самом деле, сопоставляется некоторый вектор, а значит, Ax также представлен вектором:

$$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Ax \leftrightarrow \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

В таком случае норма $||Ax||$ будет иметь следующий вид:

$$||Ax|| = \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right)^2 \right)^{1/2} \boxed{\leq}$$

Отдельно применим неравенство Коши-Буняковского для внутренних сумм:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}}_{=||x||_2}$$

Теперь можем применить это неравенство к выражению для нормы $||Ax||$, вынеся $||x||_2$ из под внешней, так как она не зависит от её индекса:

$$\boxed{\leq} ||x||_2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}}_{:=const\ C} \Rightarrow ||Ax||_2 \leq ||x||_2 \cdot C$$

Из этого условия получаем непрерывность нашего отображения A

<u>Ex.</u> $A : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1) \to (\mathbb{R}^m, ||\cdot||_1)$

Для такого отображения норма расписывается следующим образом (применяем неравенство для нормы, играемся с порядком суммирования и ограничиваем сверху максимумом):

$$||Ax|| = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (|a_{ij}| \cdot |x_j|) = \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right) \leq \underbrace{\max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|}_{=const\ C} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |x_j|}_{=||x||_1}$$

Этим мы снова показали непрерывность оператора, а также верность следующего неравенства:

$$||A||_1 \leq \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

Теперь возьмём в качестве элементов x_j набор базисных векторов:

$$\sqsupset e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j, \quad ||e_j|| = 1, \quad ||Ae_j||_1 = \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

А теперь, расписав норму оператора через супремум ($||A||_1 = \sup\limits_{||x||=1} ||Ax||_1$), получаем следующее неравенство:

$$||A||_1 \geq \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \quad \forall j \Rightarrow ||A||_1 \geq \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

Отсюда получаем, что:

$$\boxed{||A||_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|}$$

Такую норму называют столбцовой и говорят, что норма оператора индуцирована (порождена) нормой пространства

<u>*Замечание*</u> *Норму* $||A||_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ *называют строчной нормой*

<u>**Ex.**</u> Теперь рассмотрим $A : V \to \mathbb{R}$. В таком случае $A \in V^*$, где V^* — сопряжённое пространство, то есть множество линейных функционалов (линейных форм)

Для евклидовых (унитарных) пространств работает **теорема Рисса**, которая говорит следующее:

$$\forall f \in V^* \quad \exists! y \in V : \quad \forall x \in V \quad f(x) = (x, y)$$

Если мы зафиксируем некоторый ортонормированных базис, то результат действия оператора можно разложить по векторам нашего пространства:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i,$$

где y_i выступает в роли результата действия оператора на i-й базисный элемент $(y_i = a_i = f(e_i))$

Элемент, получаемый в результате действия функционала на вектор, является числом, поэтому его норма выглядит следующим образом:

$$||f(x)|| = |f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \right|$$

В таком случае имеет смысл искать норму оператора через супремум (расписываем модуль через скалярное произведение и пишем очевидное неравенство):

$$||f|| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, a)|}{||x||} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{||x|| \cdot ||a||}{||x||} = ||a||$$

Если взять $x = a$, то получаем:

$$|f(x)| = ||a||^2 \;\Rightarrow \frac{|f(x)|}{||a||} = ||a||$$

Th. ***об обратном отображении***

Если для непрерывного линейного отображения $A : X \to Y$ существует обратное ему $A^{-1} : Y \to X$, то:

$$A^{-1} \text{ непр.} \;\Leftrightarrow\; \exists m > 0 \quad ||A^{-1}y|| \geq \frac{1}{m}||y||$$

Доказательство:

►

Рассмотрим действие обратного оператора A^{-1} на элемент $y = Ax$:

$$||A^{-1}y|| = ||A^{-1}Ax|| = ||x||$$

Из непрерывности A следует:

$$||y|| = ||Ax|| \leq c \cdot ||x|| = c \cdot ||A^{-1}y||$$

Теперь, если взять $m = c$, то получаем наше неравенство из условия теоремы

◄

6.2 Дифференцируемость и дифференциал ф.н.п.

Здесь также рассматриваем отображения вида $f : X \to Y$, где X — n-мерное нормированное пространство, а Y — m-мерное нормированное пространство и точку a — предельную точку D_f $(a \in D_f)$

---

def : Функция f называется дифференцируемой в точке a, если $\exists \cup(a) : \quad \forall x \in \overset{\circ}{\cup}(a)$

$$f(x) = f(a) + \underbrace{A(x-a)}_{\text{Лин. отобр.}} + \overline{o}\left((x-a)\right)$$

Так как в определении, представленном выше, идёт речь о функции нескольких переменных, очевидно, что все слагаемые представимы в виде матриц коэффициентов разложения при фиксированном базисе. В связи с этим следует сделать уточнение по поводу того, что подразумевает под собой $\overline{o}\left((x-a)\right)$:

$$\frac{||\overline{o}\left((x-a)\right)||}{||x-a||} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

<u>*Замечание*</u> *Все определения, включая приращения аргумента и функции, переносятся из первого семестра с поправкой на то, что каждый элемент является вектором*

Определение дифференцируемости в точке переписывается в терминах приращений следующим образом:

$$\Delta f(a) = A\Delta x + \overline{o}\left(\Delta x\right)$$

$$\Delta x \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}, \quad \Delta f(x) \leftrightarrow \begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(x) - f_m(a) \end{pmatrix}, \quad A \leftrightarrow (a_{ij})_{m\times n}$$

Также будем использовать следующее обозначение:

$$\Delta_h f(a) = Ah + \overline{o}\left(h\right), \quad h = \Delta x$$

Также сохраняется определение **сильной производной** (А.К.А. **производная по Фреше**, А.К.А. **касательное отображение**, А.К.А. **полный дифференциал**):

$$A = Df(a)$$

Однако, по аналогии с одномерными функциями, дифференциалом мы будем называть линейную часть приращения функции:

---

def : Дифференциалом функции f в точке a будем называть результат действия линейного отображения A, фигурирующего в определении дифференцируемости, на приращение аргумента в этой точке:

$$\mathrm{d}f(a) = A(x-a) = A\Delta x$$

В таком случае матрицу A будем обозначать следующим образом:

$$A \equiv f'(a)$$

Δx в свою очередь переходит в $\mathrm{d}x$. Из всего этого получаем равенство, составляющее полную аналогию с одномерным случаем:

$$\boxed{\mathrm{d}f(a) = f'(a)\mathrm{d}x}$$

Th. ***об однозначности отображения***

$\sqsupset f$ дифференцируема в точке a. В таком случае отображение A определяется однозначно

Доказательство:

►

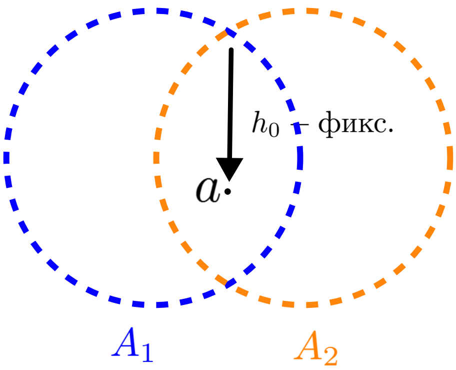
От противного — $\sqsupset \exists A_1, A_2 : \quad A_1 \neq A_2$. В таком случае найдётся некоторая окрестность точки a (пересекаем окрестности для A_1 и для A_2) такая, что $\forall x \in \cup(a)$ выполняются оба следующих равенства:

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + A_1(x-a) + \overline{o}\left((x-a)\right) \\ f(x) = f(a) + A_2(x-a) + \overline{o}\left((x-a)\right) \end{cases}$$

Вычитанием второго равенства из первого получаем:

$$(A_1 - A_2)(x-a) = \overline{o}\left((x-a)\right)$$

Давайте разберёмся, что в этом доказательстве происходит идейно:



Мы выбрали некоторую окрестность точки a, в которой мы подходим к этой точке по разным направлениям. Выберем фиксированное направление h_0 — в таком случае наше положение будет задаваться уравнением $x = a + h_0 t$, где $t \to 0$. Очевидно, что при таком выборе $\Delta x = h_0 t$ и наше равенство приобретает следующий вид:

$$(A_1 - A_2)\Delta x = \overline{o}\left(\Delta x\right)$$

$$t(A_1 - A_2)h_0 = \overline{o}\left(th_0\right)$$

Вспоминаем про определение $\overline{o}\left(\cdot\right)$:

$$\frac{||t(A_1 - A_2)h_0||}{||th_0||} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

По свойству нормы, t выносится как константа и сокращается — получаем выражение, не зависящее от t, которое, тем не менее, стремится к нулю при $t \to 0$. Для любого ненулевого h_0 это означает, что $(A_1 - A_2)$ — нулевое отображение:

$$\frac{||(A_1 - A_2)h_0||}{||h_0||} = const \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \;\Rightarrow\; (A_1 - A_2) = 0$$

Получили противоречие, следовательно, отображение A единственно

◄

Th. ***о непрерывности дифференцируемой функции***

Если функция f дифференцируема в точке a, то она непрерывна в этой точке

Доказательство:

►

Распишем приращение функции по определению:

$$\Delta f(a) = f(x) - f(a) = A\Delta x + \overline{o}\,(\Delta x)$$

Для непрерывности нам необходимо, показать, что это приращение бежит к нулю по норме:

$$||\Delta f(a)|| = ||f(x) - f(a)|| = ||A\Delta x + \overline{o}\,(\Delta x)|| \leq ||A\Delta x|| + ||\overline{o}\,(\Delta x)|| \boxed{\leq}$$

Теперь вспоминаем, что A — это непрерывное линейное отображение и, пользуясь его свойствами, ограничиваем первое слагаемое, вынося константу (можно брать как $c = ||A||_1$, так и $||A||_\infty$ и т.д.). Для $\overline{o}\,(\Delta x)$ всё ещё проще — выносим некоторый $\varepsilon \to 0$:

$$\boxed{\leq} c \cdot ||\Delta x|| + \varepsilon \cdot ||\Delta x|| \xrightarrow[||\Delta x|| \to 0]{} 0$$

Получили, что приращение функции стремится к нулю при стремлении к нулю приращения аргумента, что означает непрерывность нашей функции f

◄

6.3 Частные производные и дифференциал функции векторного аргумента

Th. ***о дифференцируемости функции векторного аргумента***

Рассмотрим функцию вида $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и точку a — предельную точку области определения функции ($a \in D_f$):

$$f \text{ дифференцируема в точке } a \;\Leftrightarrow\; f_j \text{ дифференцируема в точке } a \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Доказательство:

►

($\Rightarrow$) Рассмотрим приращение функции:

$$\Delta f(a) = f(x) - f(a) = \begin{pmatrix} \Delta f_1(a) \\ \vdots \\ \Delta f_m(a) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} + \overline{o}\,(\Delta x)$$

Теперь распишем $\overline{o}\,(\Delta x)$ как некоторую функцию $\alpha(\Delta x)$:

$$\overline{o}\,(\Delta x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\Delta x) \\ \vdots \\ \alpha_m(\Delta x) \end{pmatrix} \qquad \frac{||\alpha||}{||\Delta x||} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

здесь не важно, какую именно норму $||\alpha||$ мы выберем, так как они все эквивалентны

Теперь распишем, что у нас происходит с приращением функции по координатно:

$$\forall j = 1, \dots, m \quad \Delta f_j(a) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \Delta x_k + \alpha_j(\Delta x)$$

Здесь первым слагаемым, по факту, стоит произведение j-той строчки матрицы A на столбец координат вектора x. Эта строчка является линейным отображением $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то есть линейной формой. Для дифференцируемости f_j осталось показать, что $\alpha_j(\Delta x) = \overline{o}\,(\Delta x)$:

$$\frac{|\alpha_j(\Delta x)|}{||\Delta x||} \leq \frac{||\alpha||}{||\Delta x||} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

Более того, мы получили, что

$$\boxed{\mathrm{d} f_j(a) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \mathrm{d} x_k}$$

($\Leftarrow$) По координатно расписываем приращение функции и, пользуясь дифференцируемостью каждой компоненты, преобразуем вектор:

$$\Delta f(a) = \begin{pmatrix} \Delta f_1(a) \\ \vdots \\ \Delta f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} \Delta x_k + \alpha_1(\Delta x) \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk} \Delta x_k + \alpha_m(\Delta x) \end{pmatrix} \boxed{=}$$

Причём из покомпонентной непрерывности функции имеем:

$$\forall j = 1, \dots, m \quad \frac{|\alpha_j(\Delta x)|}{||\Delta x||} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

Можем расписать наше приращение, обозначив j-тую строчку матрицы A как $S_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$:

$$\boxed{=} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}}_{=A \text{ лин. отобр.}} \cdot \Delta x + \begin{pmatrix} \alpha_1(\Delta x) \\ \vdots \\ \alpha_m(\Delta x) \end{pmatrix}$$

Осталось показать, что $\alpha(\Delta x) = \overline{o}\,(\Delta x)$:

$$\frac{||\alpha(\Delta x)||}{||\Delta x||} \leq \frac{m \max\limits_{j=1,\dots,m} |\alpha_j(\Delta x)|}{||\Delta x||} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

Получили, что верно представление $\Delta f(a) = A\Delta x + \overline{o}\,(\Delta x)$, следовательно, f дифференцируема в точке a

◀

---

def : $\sqsupset a$ — внутренняя точка области определения функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Мы уже поняли, что можем выбирать различные направления движения внутри $\cup(a)$ относительно точки a — поэтому выберем некоторое фиксированное направление v

Слабой производной *(производной по Гато)* называется следующий предел (если конечен и существует):

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} =: \frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

Если $||v||=1$, то говорят о **производной по направлению**

Если зафиксировать базис, то мы получаем декартову систему координат, где направление осей совпадает с направлением базисных векторов в ортонормированном базисе. Частным случаем производной по направлению является **частная производная**, когда направление выбрано вдоль координатных осей ($v=e_j$):

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+e_jt)-f(a)}{t} =: \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = f'_{x_j}(a)$$

Если по координатно расписать частную производную, то становится очевидным, что изменение происходит только по j-той координате

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{f(a_1,\dots,a_j+t,\dots,a_n)}^{g(a_j+t)}-\overbrace{f(a_1,\dots,a_j,\dots,a_n)}^{g(a_j)}}{t} = g'(a_j)$$

Ex. Запишем частную производную для функции трёх переменных $f(x,y,z)$ в точке $a=(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}(a) = \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{y-y_0}$$

Th. ***о существовании частных производных***

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, a — внутренняя точка области определения функции, f дифференцируема в точке a, тогда:

$$\exists f'_{x_i}(a)\ \ \forall i=1,\dots,n$$

$$\boxed{\mathrm{d}f(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\mathrm{d}x_i}$$

Доказательство:

►

Исходя из дифференцируемости функции можем написать равенство:

$$\Delta f(a)=\sum_{i=1}^{n}s_i\Delta x_i+\overline{o}\,(\Delta x)$$

Теперь выберем в качестве направления приращения вектор, идущий по координатной оси:

$$\sqsupset \Delta x = x-a = te_i \leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ t\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow i$$

Теперь распишем приращение функции с учётом нашего выбора направления:

$$\Delta f(a)=f(a+te_i)-f(a)=s_it+\overline{o}\,(\Delta x)\ \Rightarrow\ \frac{\Delta f(a)}{t}=s_i+\frac{\overline{o}\,(\Delta x)}{t}$$

Расписав $\overline{o}\,(\Delta x)$ с учётом того, что $||\Delta x|| = |t|$, получаем, что второе слагаемое в правой части бежит к нулю, откуда сразу следует существование нашего предела, который по определению и является частной производной:

$$\frac{||\overline{o}\,(\Delta x)\,||}{t} = \frac{\varepsilon||\Delta x||}{t} = \frac{\varepsilon|t|}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \;\Rightarrow\; \exists \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\Delta f(a)}{t}}_{=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)} = s_i$$

Ну и элементарно получаем выражение для дифференциала:

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} s_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\mathrm{d}x_i$$

◄

---

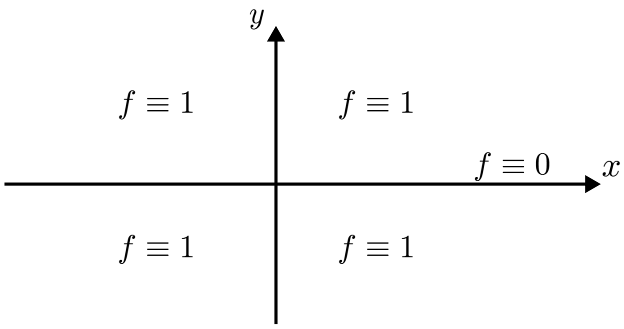
def : **Градиентом** функции f называется следующее выражение:

$$f'(a) = (a_1, \ldots, a_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \vec{\nabla} f = \operatorname{grad} f$$

Фигурирующая в определении дифференцируемости функции матрица A называется **матрицей Якоби**:

$$A = f'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} f_1(a) \\ \vdots \\ \vec{\nabla} f_m(a) \end{pmatrix}$$

Ex. Пример, показывающий, что наличие частных производных не гарантирует дифференцируемости функции:



$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

Данная функция будет равна 1 везде, кроме координатных осей, где она будет принимать значение 0. Очевидно, что f не дифференцируема на координатных осях, однако частные производные в точке $(0,0)$, например, существуют:

$$\begin{cases} f_x'(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \\ f_y'(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 \end{cases}$$

Ex. $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$

Частные производные в точке $(0,0)$ существуют и конечны:

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$$

Покажем, что функция не дифференцируема в этой точке, от противного — пусть f дифференцируема в точке $(0,0)$, тогда приращение функции в этой точке представимо в виде (тут мы пользуемся тем, что в точке $(0,0)$ $\Delta x = x$, $\Delta y = y$):

$$\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = \sqrt[3]{xy} = \underbrace{f'_x(0,0)\Delta x}_{=0} + \underbrace{f'_y(0,0)\Delta y}_{=0} + \overline{o}\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

Теперь осталось расписать $\overline{o}\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$:

$$\sqrt[3]{xy} = \overline{o}\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) = \underset{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)}{\underset{\varepsilon\to 0}{\varepsilon}}\sqrt{(\Delta x^2) + (\Delta y)^2}$$

Ну и, если это так, то:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

Так как при дифференцируемости подходить к предельной точке можно разными путями, причём значение предела от этого не поменяется, выберем направление $\Delta x = \Delta y$:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^{2/3}}{\sqrt{2}|\Delta x|} = \infty \neq 0$$

Получили противоречие, значит f не дифференцируема в точке $(0,0)$

Th. ***Достаточные условия дифференцируемости***

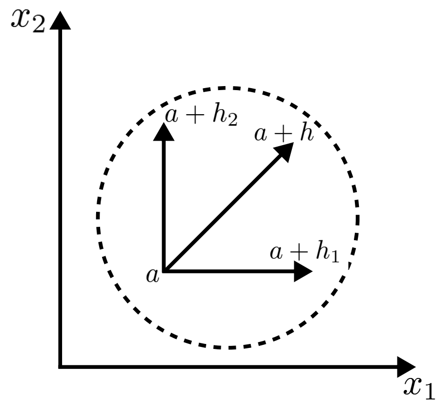
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a — внутренняя точка области определения функции и в некоторой окрестности точки a существуют непрерывные частные производные:

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ непр. в точке } a \ \forall j = 1, \ldots, n \ \Rightarrow \ f \text{ дифференцируема в точке } a$$

Доказательство:

▶

Будем рассматривать положение точки x внутри окрестности точки a через расстояние до этой точки, которое также раскладываем по проекциям на координатные оси:



$$x = a + h, \quad h = (h_1, \ldots, h_n)$$

Распишем приращение функции и натарасобульбим:

$$\Delta f(a) = f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n) - f(a_1,\dots,a_n) = \underbrace{f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n) - f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_n)}+$$

$$+\underbrace{f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_n) - f(a_1,a_2,a_3+h_3,\dots,a_n+h_n)}+\dots+\underbrace{f(a_1,\dots,a_{n-1},a_n+h_n) - f(a_1,\dots,a_n)}$$

Очевидно, что все точки, в которых мы рассматриваем значения функции, лежат в нашей окрестности точки a. Так как частные производные по каждой из координат существуют в этой окрестности, можем по координатно применить теорему Лагранжа ($\forall k = 1,\dots,n\ \exists \theta_k \in (0,1)$):

$$\Delta f(a) = f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h_1,\dots,a_n+h_n)\cdot h_1 + \dots + f'_{x_n}(a_1,\dots,a_n+\theta_n)\cdot h_n \boxed{=}$$

Теперь воспользуемся непрерывностью частных производных в точке a:

$$\boxed{=}\left(f'_{x_1}(a_1,\dots,a_n) + \underset{h\to 0}{\overline{o}}(1)\right)h_1 + \dots + \left(f'_{x_n}(a_1,\dots,a_n) + \underset{h\to 0}{\overline{o}}(1)\right)h_n = \sum_{i=1}^{n}\left(f'_{x_i}(a)h_i + \underset{h\to 0}{\overline{o}}(1)h_i\right)\boxed{=}$$

Теперь вспоминаем, что h_i вводилось нами как по координатное приращение, то есть $h_i = \Delta x_i$. А, так как $|h_i| \le c\cdot ||h||$, сумма $\overline{o}$ превращается в $\underset{h\to 0}{\overline{o}}(h)$:

$$\boxed{=}\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a)\Delta x_i + \underset{h\to 0}{\overline{o}}(h)$$

Получили необходимое нам представление приращения функции, откуда следует дифференцируемость функции f в точке a

◀

Следствие:

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a — внутренняя точка области определения функции и в некоторой окрестности точки a существуют непрерывные частные производные:

$$\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \text{ непр. в точке } a \ \substack{\forall j=1,\dots,m \\ \forall i=1,\dots,n} \ \Rightarrow \ f \text{ дифференцируема в точке } a$$

▶

По теореме доказываем дифференцируемость координатных функций, из которой следует дифференцируемость f

◀

---

def : Вводим класс непрерывных функций нескольких переменных ($f: X \to Y$):

$$\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \text{ непр. на } X \ \substack{\forall j=1,\dots,m \\ \forall i=1,\dots,n} \ \Rightarrow \ f \in C^1(X)$$

6.4 Основные правила дифференцирования

1. **Линейность:**

   Функции $f, g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке a, тогда $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{d}f + \mu \mathrm{d}g}$$

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$

   Координатная форма:

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)_i}{\partial x_j} = \lambda\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial g_i}{\partial x_j},\ \substack{\forall i=1,\dots,m \\ \forall j=1,\dots,n}$$

2. **Дифференциал произведения:**

   Функции $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемы в точке a, тогда

$$\boxed{\mathrm{d}\,(f, g) = (\mathrm{d}f, g) + (f, \mathrm{d}g)}$$

►

Расписываем приращение и тарасобульбим, после чего сворачиваем, пользуясь свойством скалярного произведения:

$$\Delta(f,g)(a) = (f(x),g(x)) - (f(a),g(a)) = (f(x),g(x)) - (f(a),g(x)) + (f(a),g(x)) - (f(a),g(a)) =$$

$$= (f(x)-f(a),g(x)) + (f(a),g(x)-g(a)) = (\mathrm{d}f(a) + \overline{o}\,(x-a), g(x)) + (f(a), \mathrm{d}g(a) + \overline{o}\,(x-a))$$

Распишем $g(x) = g(a) + \underset{x\to a}{\overline{o}\,(1)}$

$$\Delta(f,g)(a) = \underbrace{(\mathrm{d}f(a),g(a)) + (f(a),\mathrm{d}g(a))}_{\text{то, что нам нужно}} + \underbrace{(\overline{o}\,(x-a),g(x)) + (\mathrm{d}f(a), \underset{x\to a}{\overline{o}\,(1)}) + (f(a),\overline{o}\,(x-a))}_{\text{то, что нам не нужно}}$$

Теперь просто покажем, что всё, что нам не нужно, мало. Для первого слагаемого (для третьего аналогично) пишем неравенство Коши-Буняковского и пользуемся тем, что $g(x)$ ограничена в окрестности точки a, так как $g(x)$ непрерывна в этой точке:

$$|(\overline{o}\,(x-a), g(x))| \le ||(\overline{o}\,(x-a)|| \cdot \underbrace{||g(x))||}_{\text{огр.}} = \overline{o}\,(x-a)$$

Для второго неравенства также используем неравенство Коши-Буняковского, пользуемся теоремой Лагранжа и ограниченностью $f'(x)$:

$$(\mathrm{d}f(a), \underset{x\to a}{\overline{o}\,(1)}) \le ||\mathrm{d}f(a)|| \cdot \varepsilon \le \underbrace{||f'(a)||}_{\text{огр.}} \cdot ||(x-a)|| \cdot \varepsilon = \overline{o}\,(x-a)$$

Таким образом, мы отправили всё лишнее в $\overline{o}\,(x-a)$, тем самым доказав формулу

◄

Координатная форма записи (важно помнить, что все производные здесь представлены матрицами Якоби):

$$\mathrm{d}(f,g) = ((f,g))' \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = \left(f'(a) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}, g(a) \right) + \left(f(a), g'(a) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} \right)$$

Если мы хотим написать частную производную по i-той координате:

$$\boxed{\frac{\partial(f,g)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} g_j + f_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)}$$

<u>**Следствие:**</u>

Частный случай при $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f, g$ дифференцируемы в точке a:

$$\mathrm{d}(f,g) = \mathrm{d}f \cdot g + f\mathrm{d}g$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

3. **Дифференциал частного:**

   Функции $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке a и $g(a) \neq 0$, тогда

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

   По координатная запись:

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_j} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}g - f\frac{\partial g}{\partial x_j}}{g^2}$$

   ►

   Аналогично доказательству из первого семестра

   ◄

4. **Приращение линейного отображения:**

   $A : X \to Y$ — дифференцируемое линейное отображение, производная которого является матрицей

$$\Delta A(a) = Ax - Aa = A(x - a)$$

5. **Дифференцирование композиции:**

   Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ и функцию $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. f дифференцируема в точке a, g дифференцируема в точке $f(a)$, тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке a:

   Линейное отображение, действующее на композицию расписывается следующим образом:

$$\boxed{D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)}$$

   Следовательно, производная композиции функций расписывается аналогично:

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)}$$

   ►

   По классике расписываем приращение:

$$\Delta(g \circ f)(a) = (g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) = g(f(x)) - g(f(a))\boxed{=}$$

   Распишем дифференцируемость g в точке $f(a)$:

$$\boxed{=}g'(f(a))(f(x) - f(a)) + \overline{o}\,(f(x) - f(a))\boxed{=}$$

   Теперь вспоминаем, что f также дифференцируема в точке a :

$$\boxed{=}\underbrace{g'(f(a))\big(f'(a)(x - a)}_{\text{то, что нам нужно}} + \overline{o}\,(x - a)\big) + \overline{o}\,(f(x) - f(a))\boxed{=}$$

   Для доказательства осталось показать малость всего лишнего (g' и f' снова ограничены в силу непрерывности):

$$||g'(f(a))\overline{o}\,(x - a)|| \leq \underbrace{||g'(f(a))||}_{\text{огр.}} \cdot ||\overline{o}\,(x - a)|| = \overline{o}\,(x - a)$$

$$||\overline{o}\,(f(x)-f(a))|| = ||\overline{o}\left(f'(a)(x-a)\right)|| \le \underbrace{||f'(a)||}_{\text{огр.}} \cdot ||\overline{o}\,(x-a)|| = \overline{o}\,(x-a)$$

Снова получилось засунуть всё, что нам не нужно в $\overline{o}\,(x-a)$, получаем нашу формулу:

$$\boxed{=}\ \underbrace{g'(f(a))f'(a)(x-a)}_{=\mathrm{d}(g\circ f)(a)} + \overline{o}\,(x-a)$$

◀

Координатная форма записи:

Введём обозначения $y = f(x)$ и $z = g(y)$. Матрицы Якоби для наших функций будут выглядеть следующим образом:

$$g'(y) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}\right)_{m\times k} = \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_j}\right)_{m\times k} \qquad f'(x) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{k\times n} = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_{k\times n}$$

Матрица Якоби композиции отображений равна **произведению** их матриц Якоби

$$\begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix} \quad \underbrace{\boxed{\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j} = \frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{m=1}^{k}\left(\frac{\partial z_i}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial x_j}\right)}}_{\text{правило цепочки}}$$

<u>Ex.</u> $g(x,y,z) = \begin{pmatrix}\varphi(x,y,z)\\ \psi(x,y,z)\end{pmatrix}$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $\quad f(u,v) = \begin{pmatrix}\alpha(u,v)\\ \beta(u,v)\\ \gamma(u,v)\end{pmatrix}$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

Распишем действие композиции этих функций $g\circ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$:

$$g\circ f(u,v) = \begin{pmatrix}\varphi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\\ \psi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\end{pmatrix}$$

Посчитаем частную производную композиции по определению:

$$(g\circ f)'_u = \begin{pmatrix}\varphi'_x\cdot\alpha'_u + \varphi'_y\cdot\beta'_u + \varphi'_z\cdot\gamma'_u\\ \psi'_x\cdot\alpha'_u + \psi'_y\cdot\beta'_u + \psi'_z\cdot\gamma'_u\end{pmatrix}$$

6. **Дифференцирование обратного отображения:**

Будем говорить про отображение $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, так как нам необходимо будет пользоваться **Якобианом** (определителем матрицы Якоби), который существует только для квадратных матриц:

$$\underbrace{f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{n\times n}}_{\text{матрица Якоби}} \qquad \boxed{\underbrace{\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}}_{\text{Якобиан}} = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{n\times n}}$$

Th. ***о дифференцировании обратного отображения***

Функция $f:\underbrace{\cup(a)}_{\text{окр-ть}} \to \underbrace{\vee(f(a))}_{\text{окр-ть}}$ дифференцируема в точке a и имеет в этой точке ненулевой Якобиан ($\det f'(a)\neq 0$) и существует обратное отображение $f^{-1}:\vee(f(a)\to\cup(a))$, непрерывное в точке $f(a)$, тогда:

$$f^{-1} \text{ дифференцируема в точке } f(a) \text{ и } \boxed{\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \underbrace{\left(f'(a)\right)^{-1}}_{\text{обратная матрица}}}$$

Доказательство:

►

Представленное в формулировке теоремы равенство очевидно следует из дифференцируемости f^{-1} в точке a, поэтому будем доказывать дифференцируемость.

Воспользуемся дифференцируемостью f в точке a:

$$\underbrace{f(x) - f(a)}_{=\mu} = f'(a)(\underbrace{x - a}_{=h}) + \overline{o}\,(x - a)$$

μ является приращением аргумента для функции f^{-1} в точке $f(a)$. Очевидно, $h \to 0 \;\Rightarrow\; \mu \to 0$ в силу непрерывности f. Также $\mu \to 0 \;\Rightarrow\; h \to 0$ в силу непрерывности f^{-1}. Если представить x как $f^{-1}(f(x))$ и a как $f^{-1}(f(a))$, то получается, что h — это приращение функции f^{-1} в точке $f(a)$ $(\Delta f^{-1}(a))$. Из того, что $\det f'(a) \neq 0$ следует существование обратной матрицы $\left(f'(a)\right)^{-1}$ — домножим на неё обе части нашего равенства:

$$\left(f'(a)\right)^{-1} \cdot \mu = \underbrace{\Delta f^{-1}(f(a))}_{=h} + \left(f'(a)\right)^{-1} \cdot \overline{o}\,(h)$$

Несложно заметить, что мы получили определение дифференцируемости для функции f^{-1} — осталось только показать малость второго слагаемого:

$$\left|\left|\left(f'(a)\right)^{-1} \cdot \overline{o}(h)\right|\right| \leq \left|\left|\left(f'(a)\right)^{-1}\right|\right| \cdot \varepsilon ||h|| \boxed{\leq}$$

Если внимательно присмотреться к нашему равенству, то становится понятно, что обе части — величины порядка h, то есть $||h|| \leq c \cdot ||\mu||$, откуда получаем малость:

$$\boxed{\leq} \left|\left|\left(f'(a)\right)^{-1}\right|\right| \cdot \varepsilon \cdot c||\mu|| = \overline{o}\,(\mu)$$

◄

7 Дифференциальное исчисление функции векторного аргумента

7.1 Теорема о среднем. Признак постоянства функции

В данном разделе мы будем рассматривать функции векторного аргумента $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

<u>def</u> **:** **Отрезком** в $\mathbb{R}^n$ будем называть следующее множество точек:

$$[a, b] = \{x : \; x = a + (b - a)t, \; t \in [0, 1]\}$$

Th. ***о среднем***

$\sqsupset f : X \to \mathbb{R}$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое, связное множество. f непрерывна и дифференцируема на $[a, b] \subset X$, тогда:

$$\exists c \in (a, b) : \quad \boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)},$$

где

$$f'(c) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c)\right) = \vec{\nabla} f(c)$$

$$b - a = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}$$

Доказательство:

►

Введём функцию одной переменной $F(t) = f(a + (b-a)t)$ — она будет непрерывна на $[0,1]$ как композиция непрерывных функций и дифференцируема на (a,b) как композиция дифференцируемых функций: $F'(t) = f'(a+(b-a)t)\cdot(b-a)$. В таком случае эта функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа для функции одной переменной:

$$\exists t_0 \in (0,1): \quad F(1) - F(0) = F'(t_0)\cdot(1-0)$$

Простой подстановкой получаем, что $F(1) = f(b)$, а $F(0) = f(a)$ —отсюда сразу получаем наше равенство:

$$f(b) - f(a) = F'(t_0) = f'(\underbrace{a + (b-a)t_0}_{=c})\cdot(b-a)$$

◄

Следствие: (признак постоянства функции)

$\sqsupset f : X \to \mathbb{R}$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$. f дифференцируема на X — открытое, связное множество и $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in X$. Последнее условие равносильно тому, что $\forall i = 1,\ldots,n \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \ \ \forall x \in X$ или же $\mathrm{d}f(x) = 0 \ \ \forall x \in X$. При выполнении этих условий $f = \mathit{const}$

►

1. X — это некоторая область, поэтому зафиксируем точку $x \in X$ и рассмотрим некоторую окрестность $\cup_\varepsilon(x) \subset X$ этой точки и покажем, что $f = \mathit{const}$ в этой окрестности:

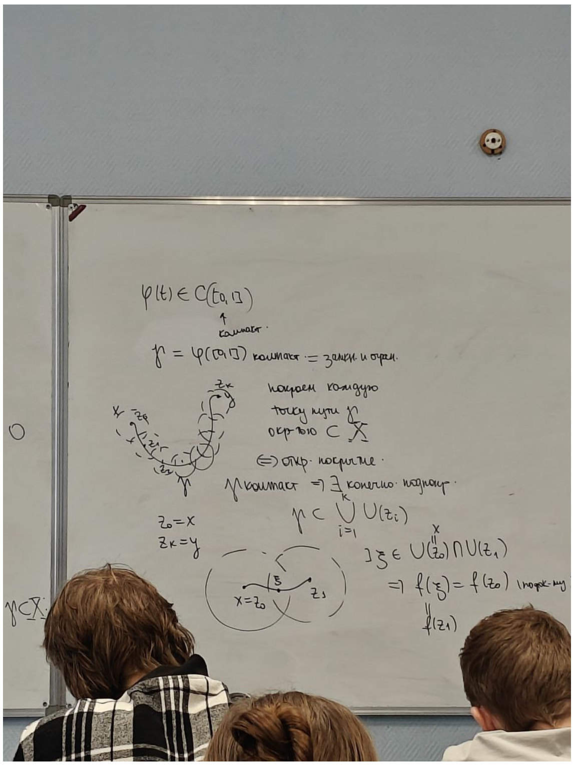
   $$\forall y \in \cup_\varepsilon(x) \ \ \rho(x,y) < \varepsilon, \quad [x,y] \subset \cup_\varepsilon(x) \subset X$$

   $\Rightarrow f$ непрерывна и дифференцируема на $[x,y]$, а значит мы можем применить нашу теорему (помним, что $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in X$):

   $$\exists c \in (x,y) \subset X: \quad f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{=0}\cdot(y-x) = 0 \ \Rightarrow \ f(y) = f(x) \ \ \forall y \in \cup_\varepsilon(x)$$

   Таким образом $f = \mathit{const}$ в $\cup_\varepsilon(x)$

2. Так как X — это область, то любые две точки, лежащие в этой области можно соединить непрерывным путём, то есть $\forall x, y \in X: \ x \neq y \ \ \exists l$ — непрерывный путь, соединяющий x и y. Любой путь мы можем преобразовать к отрезку $[0,1]$, тогда $l : [0,1] \to X$ — непрерывное отображение, то есть носителем нашего пути будет являться компакт. Покроем каждую точку нашего пути окрестностью, полностью лежащей в X, получив тем самым открытое покрытие нашего пути, для которого, по свойству компакта, можем выделить конечное подпокрытие



:

$$l \subset \bigcup_{k=0}^{m} \cup_{\delta_k}(z_k)$$

Рассмотрим две соседние окрестности на краю отрезка: $\cup_{\delta_0}(z_0)$ и $\cup_{\delta_1}(z_1)$, где $z_0 = x$ (нужен рисунок) и возьмём точку, лежащую в пересечении этих окрестностей $\xi \in \cup_{\delta_0}(z_0) \bigcap \cup_{\delta_1}(z_1)$:

$$\begin{cases} \xi \in \cup_{\delta_0}(z_0) \ \Rightarrow \ f(\xi) = f(x) \\ \xi \in \cup_{\delta_1}(z_1) \ \Rightarrow \ f(\xi) = f(z_1) \end{cases} \Rightarrow \ f(x) = f(z_1)$$

Воспользовавшись методом математической индукции, получаем, что $f(x) = \cdots = f(y)$, причём это верно $\forall x, y \in X$, следовательно $f = const$ на всём x

◀

7.2 Частные производные и дифференциал k-того порядка

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для которой в некоторой окрестности $\cup(a)$ определены частные производные: $\forall i \quad \exists f'_{x_i}(x) \quad \forall x \in \cup(a)$. Каждая из частных производных является функцией n аргументов:

$$\forall i \text{ фикс. } \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$$

Соответственно, можно попробовать взять частные производные функции g (в случае существования таковые будут называться частными производными второго порядка для функции f):

$$j = 1, \ldots, n \quad \overset{?}{\exists} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

---

def : Частной производной второго порядка в точке x называют (в случае существования) следующую функцию:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Проводя аналогичные рассуждения получаем определение производной k-того порядка в точке x:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x)=\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\cdots\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\right)(x)$$

Th. ***о порядке дифференцирования***

Функция $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ имеет частные производные f''_{xy} и f''_{yx} в некоторой области X. Тогда в любой точке этой области, где эти производные непрерывны, они совпадают:

$$\forall z\in X:\quad f''_{xy}(z),f''_{yx}(z)\text{ непр.}\quad f''_{xy}(z)=f''_{yx}(z)$$

Доказательство:

►

Пусть f''_{xy},f''_{yx} непрерывны в точке z. Рассмотрим некоторую окрестность $\cup(z)$ и некоторое приращение $h=(h_1,h_2)$ в точке $z=(x_0,y_0)$ такое, чтобы $z+h=(x_0+h_1,y_0+h_2)\in\cup(z)$. Зададим вспомогательную функцию:

$$F(h_1,h_2)=f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0+h_1,y_0)-f(x_0,y_0+h_2)+f(x_0,y_0)$$

Теперь во ведённой нами функции сгруппируем слагаемые так, чтобы получить приращение некоторой функции одного аргумента $\varphi(x)$:

$$F(h_1,h_2)=\underbrace{\big(f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0+h_1,y_0)\big)}_{\varphi(x_0+h_1)}-\underbrace{\big(f(x_0,y+h_2)-f(x_0,y_0)\big)}_{=\varphi(x_0)}=\varphi(x_0+h_1)-\varphi(x_0)\boxed{=}$$

Заметим, что $\varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема, так как $f(x,y)$ непрерывна и точно имеет частную производную по x — поэтому применяем теорему Лагранжа ($\exists\theta_1\in(0,1)$) и расписываем φ' через f'_x:

$$\boxed{=}\varphi'(x_0+\theta_1h_1)\cdot h_1=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1h_1,y_0+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1h_1,y_0)\right)\cdot h_1\boxed{=}$$

Так как $\exists f''_{xy}$, можем применить теорему Лагранжа второй раз ($\exists\theta_2\in(0,1)$):

$$\boxed{=}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1h_1,y_0+\theta_2h_2)\right)\cdot h_1h_2=f''_{xy}(x_0+\theta_1h_1,y_0+\theta_2h_2)\cdot h_1h_2$$

Теперь сгруппируем слагаемые во введённой нами функции иначе, чтобы получить приращение другой функции одного аргумента $\psi(y)$:

$$F(h_1,h_2)=\underbrace{\big(f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0+h_2)\big)}_{\psi(y_0+h_2)}-\underbrace{\big(f(x_0+h_1,y_0)-f(x_0,y_0)\big)}_{=\psi(y_0)}=\psi(y_0+h_2)-\psi(y_0)\boxed{=}$$

Относительно функции $\psi(y)$ применяем рассуждения, аналогичные тем, которые мы проводили для функции $\varphi(x)$. После двухразового применения теоремы Лагранжа получаем:

$$\boxed{=}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta_3h_1,y_0+\theta_4h_2)\right)\cdot h_1h_2=f''_{yx}(x_0+\theta_3h_1,y_0+\theta_4h_2)\cdot h_1h_2$$

Отсюда, после устремления $h\to0$ (в силу непрерывности) следует равенство частных производных второго порядка:

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1h_1,y_0+\theta_2h_2)=f''_{yx}(x_0+\theta_3h_1,y_0+\theta_4h_2)\xrightarrow[h\to0]{h_1,h_2\to0}const$$

$$\Rightarrow f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

◄

<u>Замечание</u> *Эта теорема верна также и для функций вида $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и по индукции распространяется на все производные k-того порядка*

<u>def</u> : Введём **классы гладкости** для функций векторного аргумента. $f : X \to \mathbb{R}$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$f \in C^k(X),$$

если у f существуют и непрерывны в X все частные производные k-того порядка

У таких функций не важен порядок взятия частных производных k-того порядка

<u>def</u> : Введём для функций вида $f \in C^2(X)$ **дифференциал второго порядка**:

$$\forall x \in X \quad \mathrm{d}^2 f(x) = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}f(x)\right) = \mathrm{d}\left(f'(x)\Delta x\right) = \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\Delta x_i\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x)\Delta x_i \Delta x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f''_{x_i x_j}(x)\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j = \sum_{i=1}^{n} f''_{x_i x_i}(x)\mathrm{d}x_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n} f''_{x_i x_j}(x)\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j$$

при условии, что $\Delta x = const$

По аналогии, применяя математическую индукцию, получаем определение **дифференциала k-того порядка** для функций вида $f \in C^k(X)$:

$$\forall x \in X \quad \mathrm{d}^k f(x) = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}^{k-1} f(x)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\right)^k f(x) =$$

$$= \boxed{\sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k \\ 0 \le \alpha_i \le k}} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_1}} \mathrm{d}(x_1)^{\alpha_1} \dots \mathrm{d}(x_n)^{\alpha_n}}$$

<u>Ex.</u> Напишем дифференциал третьего порядка для функции двух переменных $f(x, y) \in C^3(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathrm{d}^3 f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\mathrm{d}y^3$$

<u>Инвариантность формы первого дифференциала</u>

Рассмотрим функцию $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, где $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$. При подстановке зависимости получаем:

$$g(t) = f(x(t)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

При расписывании дифференциала пользуемся правилом дифференцирования сложной функции, после чего сворачиваем, пользуясь тем, что $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}\mathrm{d}t_i = \mathrm{d}x_j$:

$$\mathrm{d}g = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial t_i}\mathrm{d}t_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{m}}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\mathrm{d}t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}f$$

<u>Замечание</u> *Второй дифференциал уже неинвариантен, так как при попытке аналогичного расписывания с использованием инвариантности формы первого дифференциала вылезают лишние слагаемые, так как нам нужно будет брать дифференциал от произведения двух функций*

7.3 Формула Тейлора

Th. ***Формула Тейлора***

$\cup(x)$ — окрестность некоторой точки x, функция векторного аргумента $f \in C^{p+1}(\cup(x))$. Тогда для любого h, достаточно малого для того, чтобы $x + h \in \cup(x)$, верна следующая формула:

$$\boxed{f(x+h) = T_p(x,h) + r_p(x,h)},$$

где $T_p(x,h)$ — это многочлен Тейлора p-той степени:

$$\boxed{T_p(x,h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{d}^k f}{k!}(x)},$$

а $r_p(x,h)$ — это остаток, представимый тремя способами:

1. Остаток в интегральной форме:
$$r_p(x,h) = \frac{1}{p!}\int\limits_0^1 (1-t)^p \mathrm{d}^{p+1} f(x+th)\mathrm{d}t$$

2. Остаток в форме Лагранжа:
$$r_p(x,h) = \frac{1}{(p+1)!}\mathrm{d}^{p+1} f(x+\theta h), \quad \theta \in (0,1)$$

3. Остаток в форме Пеано (в этом случае достаточно условия $f \in C^p(\cup(x))$):
$$r_p(x,h) = \underset{h\to 0}{\overline{o}}\left(||h||^p\right)$$

Доказательство:

►

1. Введём вспомогательную функцию одной переменной:
$$F(t) = f(x+th)$$
В таком случае очевидно, что $F(0) = f(x)$ и $F(1) = f(x+h)$. Введённая функция также $p+1$ раз дифференцируема — запишем её первую производную:
$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)h_i = \mathrm{d}f(x+th)$$
Аналогично получаем, что $F^{(p+1)}(t) = \mathrm{d}^{p+1} f(x+th)$. Для функции F можем написать формулу Тейлора с остатком в интегральной форме:
$$F(1) = \sum_{k=0}^{p} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{p!}\int\limits_0^1 (1-t)^p F^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t$$
Теперь, подставив $F(1) = f(x+h), F^{(k)}(0) = \mathrm{d}^k f(x)$ и $F^{(p+1)}(t) = \mathrm{d}^{p+1} f(x+th)$, получаем нашу формулу.

2. Аналогично записываем формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа для функции F

3. Ослабим условие — $f \in C^p(\cup(x))$. С учётом этого условия можем по пункту 2 записать формулу Тейлора $(p-1)$ степени с остатком в форме Лагранжа:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathrm{d}^k f}{k!}(x) + \frac{\mathrm{d}^p f}{p!}(x+\theta h), \quad \theta \in (0,1)$$

Подробнее распишем остаток, пользуясь непрерывностью частных производных и раскрываем скобки:

$$\frac{\mathrm{d}^p f}{p!}(x+\theta h) = \frac{1}{p!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_p}}(x+\theta h)}_{\exists \text{ и непр., т.к. } f\in C^p(\cup(x))} \cdot h_{i_1}\cdots h_{i_p} =$$

$$= \frac{1}{p!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n}\left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_p}}(x) + \underset{h\to 0}{\overline{o}}(1)\right)\cdot h_{i_1}\cdots h_{i_p} = \frac{\mathrm{d}^p f}{p!}(x) + \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n}\underset{h\to 0}{\overline{o}}(1) h_{i_1}\cdots h_{i_p}$$

Теперь наша формула имеет следующий вид:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{d}^k f}{k!}(x) + \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n}\underset{h\to 0}{\overline{o}}(1) h_{i_1}\cdots h_{i_p}$$

Для доказательства осталось показать, что второе слагаемое $\underset{h\to 0}{\overline{o}}(||h||^p)$:

$$\forall j = 1,\ldots,p \quad h_{i_j} \le c\cdot||h|| \;\Rightarrow\; \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n}\underset{h\to 0}{\overline{o}}(1) h_{i_1}\cdots h_{i_p} \le n^p\cdot\underset{h\to 0}{\overline{o}}(1)\cdot c||h||^p = \underset{h\to 0}{\overline{o}}(||h||^p)$$

◄

Ex. Запишем формулу Тейлора второго порядка для функции двух переменных в точке (x_0, y_0):

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0) + \frac{\mathrm{d}^2 f}{2!}(x_0,y_0) + \underset{h\to 0}{\overline{o}}\left(||h||^2\right) =$$

$$= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \frac{1}{2!}\Bigg(f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 +$$

$$+2f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\Bigg) + \underset{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}{\overline{o}}\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)$$

7.4 Экстремум функции векторного аргумента

---

def : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a — внутренняя точка области определения функции f. Точка a называется точкой **локального** max(min) функции f, если:

$$\exists \cup(a) \in D_f : \quad \forall x \in \overset{\circ}{\cup}(a) \quad f(x) \underset{(\ge)}{\le} f(a),$$

причём в случае строгого неравенства точка a называется точкой **строгого локального** max(min) функции f (для нестрогого — **нестрого локального**)

Все вместе эти точки называются **точками экстремума** функции f

Th. *Ферма*

Функция $f : X \to \mathbb{R}$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $a \in X$. Если a — точка локального экстремума, то $\mathrm{d}f(a) = 0$

Доказательство:

►

Введём вспомогательную функцию $\varphi(t)$ одного аргумента, где t будет являться i-той координатой аргумента функции f:

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \;\Rightarrow\; \varphi(t) = f(x_1, \dots, t, \dots, x_n)$$

Из дифференцируемости функции f в точке a следует существование частных производных и, следовательно, дифференцируемость функции φ в точке a_i. Теперь, для определённости, пусть a — точка локального максимума функции f, тогда:

$$\exists \cup(a) : \quad \forall x \in \overset{\circ}{\cup}(a) \quad f(x) \leq f(a)$$

Пусть точка x отличается от точки a только i-той координатой:

$$a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \qquad x = (a_1, \dots, t, \dots, a_n)$$

Тогда можем перенести неравенство на функцию φ:

$$\varphi(t) \leq \varphi(a_i) \quad \forall t \in \overset{\circ}{\cup}(a_i)$$

В таком случае a_i является точкой локального максимума функции φ — можем воспользоваться теоремой Ферма для функции одной переменной, следовательно, $\varphi'(a_i) = 0$, но тогда:

$$\varphi'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}f(a) = 0$$

◄

Таким образом, если a — точка экстремума функции векторного аргумента f, дифференцируемой в этой точке, то $\mathrm{d}f(a) = 0$ (необходимость). А если f не дифференцируема в точке a?

Точки, подозрительные на экстремум:

1. если f дифференцируема в точке a, то $\mathrm{d}f(a) = 0$
2. если f не дифференцируема в точке a, например, $\exists j = 1, \dots, n : \quad \nexists f'_{x_j}$

def : Точки, в которых $\mathrm{d}f = 0$ называются **стационарными**

Ex. Пример функции, показывающей, что равенство нулю дифференциала необходимое, но не достаточное условие для экстремальности точки:

$$f(x, y) = y^3$$

Найдём точку, где зануляются обе частные производные:

$$\begin{cases} f'_x = 0, \quad \forall (x, y) \\ f'_y = 3y^2 = 0, \quad y = 0 \end{cases}$$

Таким образом точка $a = (0, 0)$ — стационарная, однако не существует такой окрестности этой точки, где значение функции $\leq (\geq) f(a)$:

$$f(0,0) = 0 \qquad \underset{y<0}{f(0,y)} < f(0,0) < \underset{y>0}{f(0,y)}$$

То есть точка a не является точкой экстремума функции f

Лирическое отступление

Квадратичные формы

---

def : Квадратичной формой называется выражение следующего вида:

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = x^\top A x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})$ — симметричная матрица ($A^\top = A$), её обычно называют **матрицей квадратичной формы**

Замечание *Второй дифференциал функции нескольких аргументов является квадратичной формой*

Таким образом, можем пользоваться следующей записью:

$$\mathrm{d}^2 f(a) = \Delta x^\top A \Delta x,$$

где Δx — это вектор приращения аргумента, а A— это матрица вторых частных производных:

$$\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_1x_n} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

---

def : Положительно определённой квадратичной формой называется форма, принимающая только положительные значения:

$$f > 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x \neq 0 \;\; f(x) > 0$$

Соответственно, **отрицательно определённой** квадратичной формой называется форма, принимающая только отрицательные значения:

$$f < 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x \neq 0 \;\; f(x) < 0$$

Аналогично вводятся понятия положительной и отрицательной **полуопределённостей** (знаки становятся нестрогими), то есть:

$$\exists x_0 \neq 0 : \quad f(x_0) = 0$$

Ну и квадратичная форма называется **неопределённой**, если:

$$\exists x, y : \;\; f(x) > 0, \; f(y) < 0$$

Рассмотрим различные свойства квадратичных форм и операции, которые возможно с ними проводить:

1. Приведение формы к **каноническому виду**:

   Если применить преобразование $x = Qy$, то получим форму $g(y)$, имеющую канонический вид:

   $$f(x) = g(y) = b_{11}y_1^2 + \cdots + b_{nn}y_n^2,$$

   причём $g(y) = y^\top B y, \; B = Q^\top A Q$

В каноническом виде имеется понятие **сигнатуры** — тройки чисел, определяющих количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов формы соответственно

При положительной определённости формы $f(x)$ все её коэффициенты в каноническом виде должны быть положительными, то есть сигнатура будет иметь вид $\sigma(f) = (n, 0, 0)$. По аналогии, отрицательная определённость означает, что все коэффициенты меньше нуля, то есть $\sigma(f) = (0, n, 0)$. При положительной полуопределённости сигнатура будет иметь вид $\sigma(f) = (m, 0, k)$, где $m + k = n$. Соответственно, при отрицательной полуопределённости $\sigma(f) = (0, m, k)$, где $m + k = n$. При неопределённости $\sigma(f) = (m, k, d)$, где $m + k + d = n$

2. **Критерий Сильвестра**: *(Работает, если $\Delta_k \neq 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n$)*

   Для положительной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры её матрицы были положительны:

   $$\Delta_k > 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n,$$

   где Δ_k угловой минор матрицы A ранга k

   Для отрицательной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры чётного порядка её матрицы были положительны, а нечётного порядка — отрицательны:

   $$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0, \ldots$$

   Для полуопределённостей критерий Сильвестра работает только в тех случаях, когда ранг матрицы квадратичной формы равен $(n - 1)$

3. Если Q — ортогональное преобразование из собственных векторов, то работает **метод ортогонального преобразования**, то есть в таком случае:

   $$g(y) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

   где λ_i — это собственные числа матрицы A (то есть в качестве коэффициентов формы в каноническом виде выступают собственные числа её матрицы)

   Соответственно, при положительной определённости квадратичной формы все собственные числа её матрицы строго больше нуля, а при отрицательной определённости — строго меньше нуля. Для полуопределённостей знаки нестрогие. Ну и в случае неопределённости:

   $$\exists i, j : \quad \lambda_i > 0,\ \lambda_j < 0$$

Вообще говоря, существует три метода приведения квадратичных форм к каноническому виду: **метод Лагранжа** (метод выделения полного квадрата), **метод ортогонального преобразования** и **метод Якоби**. Метод Якоби — это унитреугольное преобразование, которое работает только для матриц с рангом хотя бы $(n - 1)$. Метод Лагранжа и метод ортогонального преобразования работают всегда, однако метод ортогонального преобразования выигрывает засчёт простоты нахождения коэффициентов формы, поэтому чаще всего мы будем использовать именно его

Лирическое отступление окончено

Th. ***Достаточные условия гладкого экстремума в стационарной точке***
Функция $f \in C^2(\cup(a))$ и $\mathrm{d}f(a) = 0$, тогда:

1. Если $\mathrm{d}^2 f(a) > 0$ (положительно определён), то a — точка локального минимума функции f

2. Если $\mathrm{d}^2 f(a) < 0$ (отрицательно определён), то a — точка локального максимума функции f

3. Если $\mathrm{d}^2 f(a)$ не определён, то a не является точкой экстремума функции f

4. Во всех остальных случаях ничего сказать нельзя

Доказательство:
►

1. Пусть второй дифференциал положительно определён — запишем формулу Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{\mathrm{d}f(a)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(a)}{2!} + \overline{o}\left(||h||^2\right)$$

Из того, что a — стационарная точка, следует, что $\mathrm{d}f(a) = 0$:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\mathrm{d}^2 f(a)}{2} + \overline{o}\left(||h||^2\right)$$

Первое слагаемое в правой части положительно при любых $h \neq 0$, поэтому для того, чтобы показать, что a — точка локального минимума, достаточно доказать, что второе слагаемое не влияет на знак правой части при любых $h \neq 0$. Перепишем правую часть равенства, пользуясь свойством квадратичной формы:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(a)}{2} + \overline{o}\left(||h||^2\right) = \frac{h^\top A h}{2} + \overline{o}\left(||h||^2\right) = \frac{||h||^2}{2}\left(\frac{h^\top}{||h||} A \frac{h}{||h||} + \underset{h\to 0}{\overline{o}}(1)\right)$$

Перейдём от вектора h к отнормированному вектору $\xi = \frac{h}{||h||},\quad ||\xi|| = 1$. В таком случае получаем уже другую положительно определённую квадратичную форму:

$$\varphi(\xi) = \xi^\top A \xi = (\xi, A\xi) > 0 \quad \forall \xi$$

Причём φ непрерывна на сфере (компакте) $S = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \ ||\xi|| = 1\}$ вследствие непрерывности второго дифференциала. Таким образом φ достигает своих наименьшего и наибольшего значений:

$$\exists \xi_0 : \quad \varphi(\xi_0) = \min_{||\xi||=1} \varphi(\xi) > 0$$

Теперь возвращаемся и пишем неравенство, которое достигается при достаточно малых h:

$$\varphi(\xi) + \underset{h\to 0}{\overline{o}}(1) > \frac{\varphi(\xi_0)}{2} > 0 \ \Rightarrow\ \forall h \neq 0 \quad f(a+h) - f(a) > 0$$

Получили ровно то, что хотели — точка a является точкой локального минимума функции f

2. Для отрицательной определённости абсолютно аналогично

3. В случае неопределённости, минимум и максимум функции φ на нашей сфере будут иметь разные знаки:

$$\exists \xi_1, \xi_2 : \quad \varphi(\xi_1) = m = \min_{||\xi||=1} \varphi(\xi) < 0, \quad \varphi(\xi_2) = M = \max_{||\xi||=1} \varphi(\xi) > 0$$

Теперь рассмотрим два разных приращения $h_1 = t\xi_1,\ h_2 = \theta\xi_2$, где $t, \theta \in \mathbb{R}$ и пользуемся неравенствами, аналогичными тем, которые мы получали в первых двух пунктах доказательства:

$$f(a+h_1) - f(a) = \frac{t^2}{2}\left(\varphi(\xi_1) + \underset{t\to 0}{\overline{o}}(1)\right) > 0$$

$$f(a+h_2)-f(a)=\frac{\theta^2}{2}\left(\varphi(\xi_2)+\underset{\theta\to 0}{\overline{o}\,(1)}\right)<0$$

Ну и отсюда следует то, что a не является точкой экстремума

4. Тут прибегнем к рассмотрению различных примеров:

   (a) Рассмотрим функцию $f(x,y)=x^2$:
   Найдём нули частных производных:

   $$\begin{cases} f'_x = 2x = 0, \quad x = 0 \\ f'_y = 0, \quad \forall (x,y) \end{cases}$$

   Таким образом, точка $a=(0,0)$ — стационарная точка. Для построения матрицы квадратичной формы (второго дифференциала) вычислим вторые частные производные:

   $$A=\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Сразу получаем вид второго дифференциала функции (он оказывается положительно полуопределённым):

   $$\mathrm{d}^2 f(0,0)=2\mathrm{d}x^2\geq 0$$

   Ось Oy — точки нестрогого минимума функции

   (b) Теперь рассмотрим функцию $f(x,y)=x^2+y^3$:
   Найдём нули частных производных:

   $$\begin{cases} f'_x = 2x = 0, \quad x = 0 \\ f'_y = 3x^2 = 0, \quad y = 0 \end{cases}$$

   И снова точка $a=(0,0)$ — стационарная точка. Строим матрицу второго дифференциала:

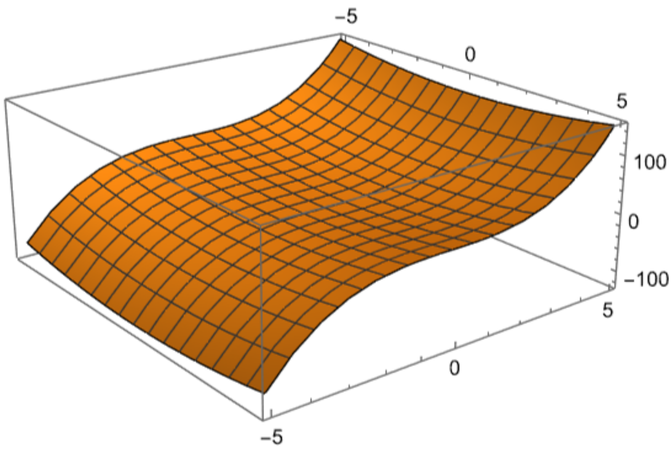
   $$A=\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}=[(x,y)=(0,0)]=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Второй дифференциал снова оказывается положительно полуопределённым:

   $$\mathrm{d}^2 f(0,0)=2\mathrm{d}x^2\geq 0$$

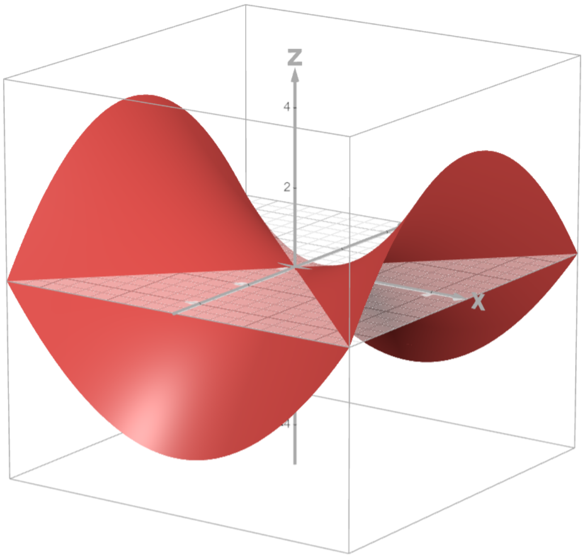
   Однако в этом случая точка $(0,0)$ вообще не является точкой экстремума функции — рассмотрим следующие точки (x,y в окрестности нуля):

   $$\underset{x\in\cup(0)}{f(x,0)>0} \quad \underset{y<0\in\cup(0)}{f(0,y)<0}$$



◀

Ex. $z = f(x,y) = x^2 - y^2$ — гиперболический параболоид (седло):



Найдём нули частных производных:

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0, \quad x = 0 \\ f'_y = -2y = 0, \quad y = 0 \end{cases}$$

Точка $a = (0,0)$ — стационарная точка. Построим матрицу второго дифференциала:

$$A = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Из вида матрицы следует неопределённость квадратичной формы, значит экстремума нет. Точки, в которых второй дифференциал не определён, называются **седловыми**

7.5 Производная по направлению. Вектор градиента

Здесь мы будем пользоваться определением **производной по Гато**. Вспомним суть этого определения — производной по Гато называется, в случае существования, следующий предел (для произвольно выбранного направления v):

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = f'(x)$$

Если $||v|| = 1$, то такая производная называется **производной по направлению**

В этом разделе также будут рассматриваться функции векторного аргумента вида $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для векторов единичной длины их проекции на координатные оси в точности совпадают со значениями косинусов углов между направлениями этих осей и направлением самого вектора. Поэтому для нашего вектора $v : \ ||v|| = 1$ вводится понятие **направляющих косинусов**:

$$v = (\cos \alpha_1, \ldots, \cos \alpha_n),$$

где α_i — это угол между осью Ox_i в вектором v

Если принять во внимание этот факт, то приращение функции расписывается следующим образом:

$$f(x+tv) - f(x) = f(x_1 + t\cos\alpha_1, \ldots, x_n + t\cos\alpha_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$$

Теперь пусть функция f дифференцируема в точке x. Введём вспомогательную функцию:

$$\varphi(t) = f(x + tv)$$

В таком случае $\varphi(0) = f(x)$. Воспользовавшись этим фактом, распишем наш предел:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$$

Можем расписать производную сложной функции:

$$\varphi'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \cos\alpha_i = \boxed{\left(\vec{\nabla} f(x), v\right) = \frac{\partial f}{\partial v}}$$

Таким образом мы получили, что производная по направлению в точке выражается как скалярное произведение вектора градиента функции в этой точке на вектор выбранного направления
<u>*Замечание*</u> *Это равенство сохраняется даже если* $||v|| \neq 1$

Не сложно догадаться, что в случае, когда $\vec{\nabla} f(x) \upuparrows v$, выбранное направление является направлением **наибольшего роста** (значение производной максимально). В случае, когда $\vec{\nabla} f(x) \perp v$, производная по направлению равняется нулю, то есть функция не меняется в этом направлении

<u>**def**</u> **:** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Говорят, что уравнение $z = f(x, y)$ задаёт **поверхность** в $\mathbb{R}^3$. **Графиком** Γ_f функции называется множество точек, удовлетворяющих уравнению этой поверхности.

Линией уровня называется множество точек, удовлетворяющих уравнению $f(x, y) = const$, то есть «срез поверхности» по оси z

---

Если «нарезать» всю нашу поверхность с некоторым фиксированным шагом h $(z = z_0 + kh)$, а затем отобразить все полученные линии уровней в плоскости xOy, то мы получим что-то вроде «карты высот» нашей поверхности, на которой сгущение линий будет свидетельствовать о более «крутом» характере поверхности (нужен рисунок)

Возьмём за направление v вектор, идущий по касательной к линии уровня (нужен рисунок). Очевидно, что в этом направлении $f(x, y) = const$, но в таком случае $\vec{\nabla} f \perp v$, откуда следует, что $\vec{\nabla} f$ всегда перпендикулярен линии уровня. Так как градиент — это мера скорости роста функции, на нашей «карте» он будет больше там, где линии уровней расположены кучнее. Если нарисовать на этой «карте» векторы градиентов функции в каждой точке, то мы получим так называемое **поле градиента** или портрет функции

Абсолютно аналогично эти понятия переносятся на функции вида $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Например, в случае функции вида $f(x, y, z)$ вместо линий уровней будут уже **поверхности уровней**, однако суть останется ровно такой же

7.6 Касательная плоскость к графику функции векторного аргумента

Для удобства будем говорить о функциях вида $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, однако для случаев $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, где $n > 2$, всё аналогично. Уравнение поверхности имеет вид $z = f(x, y)$. Тогда если взять точку $P_0 = (x_0, y_0)$ и подставить в это уравнение, получим $z_0 = f(x_0, y_0)$ и, соответственно, определим точку на графике нашей функции $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Gamma_f$ (нужен рисунок)

Теперь пусть f дифференцируема в точке P_0:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{f'_x(x_0, y_0)}_{=A} \cdot (x - x_0) + \underbrace{f'_y(x_0, y_0)}_{=B} \cdot (y - y_0) + \overline{o}\,(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Обозначим текущую точку за $P = (x, y)$ — тогда $\rho = \text{dist}(P, P_0)$ — приращение аргумента. В таком случае $M = (x, y, f(x, y))$ — текущая точка на поверхности

Теперь рассмотрим плоскость α, коротая будет задаваться следующим уравнением:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=z-z_0$$

Прямой проверкой можно убедиться в том, что α проходит через точку M_0 и имеет нормаль $\vec{N}=(A,B,-1)$. Эти факты записываются так:

$$\alpha(M_0,\vec{N})$$

Теперь, из нашего первого уравнения и уравнения, задающего нашу плоскость α, получаем:

$$d=f(x,y)-z=\overline{o}\,(\rho),$$

где z это z-товая координата точки M', лежащей на на α

В таком случае, $|d|$ — это «расстояние» от нашей поверхности до плоскости α (между точками M и M') в текущей точке.

В силу единственности дифференциала, плоскость α, обладающая такими свойствами, определяется единственным образом и называется **касательной плоскостью** к графику функции $z=f(x,y)$ в точке (x_0,y_0,z_0). В n-мерном случае это называется **касательной гиперплоскостью**

Нормаль к касательной плоскости, как мы уже выяснили, имеет вид $\vec{N}=(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1)$. Можно записать **уравнение нормали** к Γ_f в точке M_0:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

Снова лирическое отступление

Путь

Непрерывное отображение вида $r:[a,b]\to R^n$ называется **путём** (в случае биекции простым). $r([a,b])$ — **носитель пути** (кривая). Мы будем рассматривать трёхмерный случай, поэтому:

$$r(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix},\quad\forall t\in[a,b]$$

Путь называется **кусочно-гладким**, если $x,y,z\in C^1$ при разбиении $[a,b]$ на конечное число отрезков. В таком случае имеем право писать **касательный вектор** (вектор скорости):

$$\dot{r}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\\dot{y}(t)\\\dot{z}(t)\end{pmatrix}$$

Лирическое отступление окончено

Теперь рассмотрим произвольный путь, носитель которого лежит на нашей поверхности $z=f(x,y)$ и проходит через точку M_0:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\f(x(t),y(t))\end{pmatrix},\qquad\exists t_0:\ \ \vec{r}(t_0)=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\f(x_0,y_0)\end{pmatrix}=M_0$$

Запишем касательный вектор, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ f'_x(x,y)\dot{x}(t) + f'_y(x,y)\dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Подставим точку t_0:

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ f'_x(x_0,y_0)\dot{x}(t_0) + f'_y(x_0,y_0)\dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$$

Касательная плоскость α в точке t_0 задаётся уравнением:

$$f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) = z - z_0$$

и имеет нормаль $\vec{N} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1)$. В таком случае нетрудно заметить, что $(\dot{\vec{r}}, \vec{N}) = 0$, то есть наш касательный вектор в точке M_0 лежит в касательной плоскости (так как ортогонален к её нормали) (нужен рисунок)

Для любой кривой, лежащей на поверхности $z = f(x,y)$ и проходящей через точку M_0, касательный вектор к ней принадлежит касательной плоскости к поверхности в точке M_0. Причём верно и обратное — любой вектор, принадлежащий касательной плоскости α в точке M_0 к поверхности $z = f(x,y)$ является касательным вектором к некоторой кривой, лежащей на этой поверхности и проходящей через точку M_0. То есть касательная плоскость образована касательными векторами к кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку M_0

Докажем высказывание выше:

►

Рассмотрим вектор, лежащий в касательной плоскости $\vec{r}_1 = (a,b,c) \in \alpha$ и проходящий через точку $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$. Очевидно, что он будет перпендикулярен к нормали $\vec{r}_1 \perp \vec{N}$ — тогда верно следующее равенство:

$$af'_x(x_0,y_0) + bf'_y(x_0,y_0) - c = 0$$

Теперь построим кривую, лежащую на поверхности $z = f(x,y)$, проходящую через точку M_0 и имеющую в качестве касательного вектора наш вектор $\vec{r}_1$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} at + x_0 \\ bt + y_0 \\ f(at+x_0, bt+y_0) \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} = M_0$$

Теперь вычислим производную и покажем, что в точке M_0 (при подстановке $t = 0$) она совпадает с $\vec{r}_1$:

$$\dot{\vec{r}}(0) = \dot{\vec{r}}(t)\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ f'_x(at+x_0, bt+y_0)\cdot a + f'_y(at+x_0, bt+y_0)\cdot b \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{r}_1$$

◄

Для однозначного задания плоскости в пространстве необходимо два неколлинеарных вектора — в таком случае плоскость задаётся как линейная оболочка системы этих векторов. В случае касательной плоскости мы будем брать два конкретных неколлинеарных вектора, являющихся касательными векторами в точке M_0 к следующим двум кривым, лежащим на поверхности $z = f(x,y)$:

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t + x_0 \\ y_0 \\ f(t+x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x_0 \\ y_0 \\ f(x+x_0, y_0) \end{pmatrix} = \vec{r}_1(x), \qquad \vec{r}_2(y) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y + y_0 \\ f(x_0, y+y_0) \end{pmatrix}$$

Здесь мы н.у.о. осуществили параметризацию по одному из аргументов (для r_1 по аргументу x, а для r_2 — по y). Эти кривые представляют собой «срезы» нашей поверхности вдоль осей x и y соответственно, пересекающиеся в точке M_0. Теперь запишем касательные вектора к нашим кривым:

$$\dot{\vec{r}}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x(x + x_0, y_0) \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{r}}_2(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y(x_0, y + y_0) \end{pmatrix}$$

Подставим значения в нуле:

$$\dot{\vec{r}}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{r}}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Таким образом мы задали плоскость α. Теперь найдём нормаль к ней, пользуясь векторным произведением:

$$\vec{N} = \dot{\vec{r}}_1(x) \times \dot{\vec{r}}_2(y) = \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \left(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1\right)$$

Мы получили такую же нормаль, что и раньше (с точностью до знака), что говорит о верности проведённой работы

8 Неявные отображения

8.1 Постановка задачи

Мы говорим о том, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}$ — область определения) **явно задана**, если:

$$\forall x \in \Omega \quad \exists! y \in \mathbb{R} : \quad y = f(x)$$

Однако мы можем задать функцию просто каким-то уравнением. Рассмотрим $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ заданную равенством $F(x, y) = 0$ и зададимся вопросом, существует ли такая область Ω, чтобы:

$$\forall x \in \Omega \quad \exists! y \in \mathbb{R} : \quad F(x, y) = 0$$

В случае существования таком области, мы можем говорить о **неявном задании** функции $y = f(x),\ f : \Omega \to V$ уравнением $F(x, y) = 0$

<u>Ex.</u> $x^2 + y^2 = 1$ — уравнение, задающее окружность (нужен рисунок)

Сама функция, график которой представляет собой окружность радиуса 1, задана неявно, однако как верхнюю, так и нижнюю полуокружности можно задать явно. Таким образом, мы можем говорить о явном задании функции в окрестности любой точки, кроме точек -1 и 1

Также мы можем говорить о функциях вида $f : \Omega \to \mathbb{R}$, где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. В таком случае явное задание функции имеет вид $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

8.1.1 Простейшая постановка задачи о неявно заданной функции

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$$

Здесь $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. В этой задаче нас интересует, при каких условиях верно, что:

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \quad \exists! y \in V \subseteq \mathbb{R} : \quad F(x, y) = 0$$

И в случае существования таких областей мы говорим о том, что функция $y = f(x)$, где $f : \Omega \to V$, задана неявным образом уравнением $F(x, y) = 0$. Также мы будем говорить о непрерывности такой функции

<u>Ex.</u> $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ — уравнение, задающее сферу

Мы хотим получить выражение вида $z = f(x, y)$. Очевидно, что проблемы возникают в плоскости xOy, то есть при $z = 0$, в то время, как, например, верхняя полусфера вполне спокойно задаётся выражением $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

8.1.2 Общая постановка задачи о неявно заданном отображении

Рассмотрим области $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ и $Z \subseteq \mathbb{R}^m$ и отображение $F : \Omega \to Z$, где $\Omega = X \times Y$ и зададим следующее условие:

$$F(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} F_1(x,y) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x,y) = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\; \begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1\dots,y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1\dots,y_m) = 0 \end{cases}$$

Пусть в точке $M_0 = (x_0, y_0)$ наше условие выполняется, то есть $F(x_0,y_0) = 0$. Тогда, если мы найдём такие $\cup(x_0)$ и $\vee(y_0)$, что:

$$\forall x \in \cup(x_0) \quad \exists! y \in \vee(y_0) : \quad F(x,y) = 0$$

то тогда будем говорить, что отображение $y = f(x)$, где $f : \cup(x_0) \to \vee(y_0)$ является неявно заданным при помощи уравнения $F(x,y) = 0$:

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y_1 = f_1(x) = f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x) = f_m(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$

Ex. Рассмотрим СЛАУ, задающую две плоскости:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Если плоскости не параллельны, то ранг матрицы коэффициентов системы будет равняться 2, и, соответственно, пространство системы решений будет иметь размерность 1 — то есть мы сможем задать прямую пересечения этих плоскостей:

$$\sqsupset \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} y = y(x) \\ z = z(x) \end{matrix}$$

8.2 Вспомогательные утверждения

8.2.1 Сжимающее отображение

def : Отображение $g : (X,\rho) \to (Y,\mu)$, действующее между метрическими пространствами, называется **сжимающим**, если:

$$\exists c \in (0,1) : \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \mu(y_1,y_2) \le c \cdot \rho(x_1,x_2),$$

где $y_1 = g(x_1),\ y_2 = g(x_2)$ — элементы метрического пространства (Y,μ)

Сжимающее отображение всегда непрерывно (показывается устремлением к нулю расстояний)

def : Точка a называется **неподвижной точкой** отображения $g : X \to X$, если:

$$g(a) = a$$

Th. ***(Пикара-Банаха) о неподвижной точке сжимающего отображения***

$g : (X, \rho) \to (X, \rho)$, где (X, ρ) — полное метрическое пространство. Если g — сжимающее отображение, то существует единственная неподвижная точка

Доказательство:

►

Возьмём произвольную точку $x_0 \in X$ и построим последовательность:

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} : \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = g(x_n), \quad x_n \in X$$

Покажем, что построенная нами последовательность фундаментальна. Для этого сначала напишем очевидные неравенства на нормы:

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1}, x_n) \leq \dots \leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \boxed{\leq}$$

Теперь воспользуемся тем, что g — сжимающее отображение:

$$\forall k \quad \rho(x_{k+1}, x_k) = \rho(g(x_k), g(x_{k-1})) \leq c \cdot \rho(x_k, x_{k-1}) \leq \dots \leq c^k \cdot \rho(x_1, x_0)$$

Применим это неравенство для каждого слагаемого:

$$\boxed{\leq} \left(c^{n+p-1} + \dots + c^n\right) \cdot \rho(x_1, x_0) = c^n \underbrace{\left(1 + \dots + c^{p-1}\right)}_{\text{геом. прогрессия}} \cdot \rho(x_1, x_0) \leq \frac{c^n}{1-c} \underbrace{\rho(x_1, x_0)}_{=const}$$

Так как $c \in (0, 1)$, при устремлении $n \to \infty$, очевидно, полученное выражение бежит к нулю:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > \mathbb{N}, \ \forall p > 0 \quad \rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$$

И, так как наша последовательность является фундаментальной в полном пространстве, эта запись означает, что выполняется критерий Коши, то есть последовательность сходится:

$$\exists \lim_{n \to \infty} x_n =: a \in X$$

Так как g — сжимающее отображение, то оно, очевидно, непрерывное, значит можем выносить его из под предела:

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n = g\left(\lim_{n \to \infty} x_{n-1}\right) = g(a)$$

Отсюда следует, что a — неподвижная точка. Осталось показать единственность. Пойдём от противного — $\sqsupset \exists a_1 \neq a_2$ — неподвижные точки, то есть $g(a_1) = a_1, \ g(a_2) = a_2$, тогда:

$$0 \leq \rho(a_1, a_2) = \rho(g(a_1), g(a_2)) \leq c \cdot \rho(a_1, a_2)$$

Преобразовав это неравенство, получаем противоречие, что и доказывает единственность такой точки:

$$\underbrace{(1-c)}_{>0} \cdot \underbrace{\rho(a_1, a_2)}_{>0} \leq 0$$

◄

8.2.2 Конечное приращение

Lm. ***перед теоремой о конечном приращении***

Функции $F : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ и $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ непрерывны на $[0, 1]$ и дифференцируемы на $(0, 1)$, тогда:

$$\forall t \in (0, 1) \quad ||F'(t)|| \leq g'(t) \ \Rightarrow \ |F(1) - F(0)| \leq g(1) - g(0)$$

Доказательство:
►

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и назовём A_ε множество точек $t \in [0,1]$ таких, что:

$$||F(t) - F(0)|| \le g(t) - g(0) + \varepsilon t + \varepsilon$$

1. Множество A_ε не пусто, так как при достаточно малых t неравенство, очевидно, будет выполняться

2. Множество A_ε замкнуто, так как для каждой предельной точки множества можно подобрать последовательность, сходящуюся к ней, и, пользуясь непрерывностью функций, совершить предельный переход в неравенстве

Из замкнутости множества, следует, что оно содержит в себе свой супремум, то есть:

$$\exists \sup_{t \in A_\varepsilon} t = a \in A_\varepsilon \;\Rightarrow\; ||F(a) - F(0)|| \le g(a) - g(0) + \varepsilon a + \varepsilon$$

Покажем, что $a = 1$, так так в таком случае, после устремления $\varepsilon \to 0$, мы получим ровно то, что хотим. Покажем от противного — $\sqsupset 0 < a < 1$, тогда воспользуемся дифференцируемостью нашей функции F (н.у.о. $\sqsupset \theta > 0$ и достаточно мало):

$$||F(a+\theta) - F(a)|| = \left|\left|F'(a)\theta + \overline{o}(\theta)\right|\right| \le ||F'(a)|| \cdot \theta + \overline{o}\,(\theta) \le ||F'(a)|| \cdot \theta + \frac{\varepsilon}{2}\theta$$

Теперь проведём оценку для функции g (она неубывающая (по условию), также н.у.о. $\sqsupset \theta > 0$ и достаточно мало):

$$g(a+\theta) - g(a) = g'(a) \cdot \theta + \overline{o}\,(\theta) \ge g'(a) \cdot \theta - \frac{\varepsilon}{2}\theta$$

Объединяем наши неравенства, пользуясь неравенством из условия:

$$||F(a+\theta) - F(a)|| \le ||F'(a)|| \cdot \theta + \frac{\varepsilon}{2}\theta \le g'(a) \cdot \theta + \frac{\varepsilon}{2}\theta \le g(a+\theta) - g(a) + \frac{\varepsilon}{2}\theta + \frac{\varepsilon}{2}\theta$$

Пишем неравенство треугольника и применяем все наши неравенства:

$$||F(a+\theta) - F(0)|| \le \underbrace{||F(a+\theta) - F(a)||}_{1} + \underbrace{||F(a) - F(0)||}_{2} \le$$

$$\le \underbrace{g(a+\theta) - g(a) + \varepsilon\theta}_{1} + \underbrace{g(a) - g(0) + \varepsilon a + \varepsilon}_{2} = g(a+\theta) - g(0) + \varepsilon(a+\theta) + \varepsilon$$

Последнее означает, что $a + \theta \in A_\varepsilon$, но a задана как точная верхняя граница множества A_ε — противоречие. Таким образом, $a = 1 \;\Rightarrow$ устремляем $\varepsilon \to 0$ (можем так делать, так как всё написанное верно $\forall \varepsilon > 0$) и получаем наше неравенство:

$$|F(1) - F(0)| \le g(1) - g(0)$$

◄

Th. ***о конечном приращении***

Функция $f : X \to \mathbb{R}^m$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — область, непрерывна на $[x, x+h] \subset X$ и дифференцируема на $(x, x+h)$, тогда:

$$||f(x+h) - f(x)|| \le \sup_{\xi \in (x, x+h)} ||f'(\xi)|| \cdot ||h||$$

Доказательство:

►

Введём вспомогательную функцию одного аргумента $F : [0,1] \to \mathbb{R}^m$:

$$F(t) = f(x + th), \quad t \in [0,1]$$

Введённая функция непрерывна на $[0,1]$ и дифференцируема на $(0,1)$ как композиция соответствующих функций. Заведём ещё одну функцию от t:

$$g(t) = M \cdot ||h|| \cdot t, \quad M = \sup_{\xi \in (x, x+h)} ||f'(\xi)||$$

Функция g также непрерывна на $[0,1]$ и дифференцируема на $(0,1)$. Продифференцировав введённые функции, можем написать неравенство, из которого становится очевидно, что для них выполняются условия леммы:

$$||F'(t)|| = ||f'(x+th) \cdot h|| \le ||f'(x+th)|| \cdot ||h|| \le M \cdot ||h|| = g'(t)$$

Следовательно, пользуемся утверждением леммы:

$$||F(1) - F(0)|| \le g(1) - g(0)$$

Подставив, получаем:

$$||f(x+h) - f(x)|| \le M \cdot ||h||$$

◄

Следствие:

(утверждение из второго семестра)
$r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — гладкий путь, тогда для него верно следующее неравенство:

$$||\Delta r|| = ||r(b) - r(a)|| \le \max_{t \in (a,b)} \left|\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|\right| \cdot (b - a)$$

8.2.3 Матричное отображение

Замечание *Перед прочтением рекомендуется повторить пункт 6.1*

Пусть имеется три линейных нормированных пространства X, Y и Z. Каждому $x \in X$ будем сопоставлять линейное отображение $A_x : Y \to Z$, то есть мы построим отображение $[A] : X \to \mathrm{Hom}(Y, Z)$, которое и будет осуществлять это сопоставление. В случае конечномерных пространств (пусть $X \subseteq \mathbb{R}^k, Y \subseteq \mathbb{R}^n, Z \subseteq \mathbb{R}^m$) каждому элементу x, на самом деле, будет сопоставляться матрица $A_{x m \times n}$. Проще всего эту зависимость вида матрицы от x выразить как матрицу из функций:

$$x \leftrightarrow A_x \leftrightarrow A_{x m \times n} = (a_{ij}(x))_{m \times n}$$

То есть построенное нами отображение $[A] : \mathbb{R}^k \to A_{m \times n}(x)$

---

def : Введённое выше отображение $[A]$ называется **непрерывным** в точке x_0, если

$$||A_x - A_{x_0}|| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Lm. ***О непрерывности матричного отображения***

Отображение $[A] : \mathbb{R}^k \to A_{m \times n}(a)$ непрерывно в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывна каждая функция $a_{ij}(x)$ $\forall i, j$

Доказательство:

▶

Пусть во всех трёх пространствах используется Евклидова норма, тогда можем воспользоваться оценками, которые мы получили в пункте 6.1:

$$\forall i,j \quad |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)| \leq ||A_x - A_{x_0}|| \leq \sum_{i,j} \Big((a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0))^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Отсюда следует утверждение леммы

◀

8.3 Теорема о существовании и непрерывности неявного отображения

Th. ***о существовании и непрерывности неявного отображения***

Зададим области $X = \cup_\alpha(x_0),\ Y = \vee_\beta(y_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}^n,\ y_0 \in \mathbb{R}^m$ и рассмотрим отображение $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$, где $\Omega = X \times Y$. Если выполняются следующие условия:

1. $F(x_0, y_0) = 0$ и F непрерывно (то есть непрерывны все m координатных функций) в точке (x_0, y_0)
2. $\exists F'_y = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{m \times m}$ на всём Ω и F'_y непрерывно (то есть непрерывны $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\ \forall i, j)$ в точке (x_0, y_0)
3. Якобиан $\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}(x_0, y_0) = \det(F'_y(x_0, y_0)) \neq 0$ (то есть для $F'_y(x_0, y_0)$ существует обратная матрица)

тогда $\exists \cup(x_0) \subseteq \cup_\alpha(x_0), \vee(y_0) \subseteq \vee_\beta(y_0)$:

1. $F(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall x \in \cup(x_0)\ \ \exists! y \in \vee(y_0)$, то есть $y = f(x)$, где $f : \cup(x_0) \to \vee(y_0)$
2. $y_0 = f(x_0)$
3. f непрерывна в точке x_0

Доказательство:

▶

Для упрощения записи н.у.о. скажем, что $x_0 = 0,\ y_0 = 0$. Зафиксируем произвольный $x \in \cup_\alpha(0)$ и рассмотрим семейство функций $g_x(y)$:

$$\forall y \in \vee_\beta(0) \quad g_x(y) = y - \big(F'_y(0,0)\big)^{-1} \cdot F(x, y)$$

Давайте покажем, что введённое нами отображение является сжимающим. Рассмотрим области действий исследуемых функций — $F : \Omega \to \mathbb{R}^m,\ F'_y(0,0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, поэтому $g_x(y) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Функция g_x дифференцируема как композиция дифференцируемых — пишем её производную, пользуясь правилами дифференцирования функций нескольких переменных:

$$g'_x(y) = E_{m\times m} - \big(F'_y(0,0)\big)^{-1} \cdot F'_y(x,y) = \big(F'_y(0,0)\big)^{-1} \cdot \big(F'_y(0,0) - F'_y(x,y)\big)$$

Ограничим норму производной нашей функции и воспользуемся непрерывностью функции F'_y, чтобы показать её малость:

$$||g'_x(y)|| \leq \underbrace{\Big|\Big|\big(F'_y(0,0)\big)^{-1}\Big|\Big|}_{=const} \cdot \underbrace{\Big|\Big|\big(F'_y(0,0) - F'_y(x,y)\big)\Big|\Big|}_{\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0}$$

Теперь, пользуясь этим ограничением, мы можем сказать, что:

$$\exists_{\substack{0<\gamma<\alpha \\ 0<\gamma<\beta}} : \quad \forall_{\substack{x\in\cup_\gamma(0) \\ y\in\vee_\gamma(0)}} \quad \left|\left|g'_x(y)\right|\right| \leq \frac{1}{2}$$

Ограничим приращение функции внутри этой γ-окрестности, воспользовавшись теоремой о конечном приращении:

$$\sqsupset y_1, y_2 \in \vee_\gamma(0) \;\Rightarrow\; ||g_x(y_1) - g_x(y_2)|| \leq \sup_{y\in(y_1,y_2)} \left|\left|g'_x(y)\right|\right| \cdot ||y_1 - y_2|| \leq \frac{1}{2}\,||y_1 - y_2||$$

Таким образом, мы получили, что g_x — это сжимающее отображение. Чтобы воспользоваться теоремой о сжимающем отображении, надо показать, что g_x действует между полными пространствами. Хотим показать следующее:

$$\forall 0 < \varepsilon < \gamma \quad \exists 0 < \delta < \gamma : \quad \forall x \in \cup_\delta(0) \quad g_x : \overline{\vee_\varepsilon(0)} \to \overline{\vee_\varepsilon(0)},$$

где $\overline{\vee_\varepsilon(0)}$ — это замыкание окрестности в $\mathbb{R}^m$ и, следовательно, полное пространство

В таком случае, $\cup_\delta(0)$ — искомая окрестность для $x = 0$, а $\vee_\varepsilon(0)$ — это искомая окрестность для $y = 0$

Рассмотрим произвольную точку $y \in \overline{\vee_\varepsilon(0)}$ (то есть $||y|| \leq \varepsilon$) и распишем норму значения нашей функции в этой точке (тарасобульбим и пользуемся тем, что g_x — сжимающее):

$$||g_x(y)|| \leq \underbrace{||g_x(y) - g_x(0)||}_{\leq\frac{1}{2}||y||} + ||g_x(0)|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + ||g_x(0)|| \boxed{=}$$

Расписываем $g_x(0)$ (просто подставляем функцию так, как мы её задавали) и снова показываем малость через непрерывность:

$$\boxed{=} \frac{\varepsilon}{2} + \left|\left|\left(F'_y(0,0)\right)^{-1} \cdot F(x,0)\right|\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\left|\left|\left(F'_y(0,0)\right)^{-1}\right|\right|}_{=const} \cdot \underbrace{||F(x,0)||}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} \leq \varepsilon$$

Таким образом, мы подтвердили, что начиная с некоторого момента g_x действует между полными пространствами. Значит существует единственная неподвижная точка $y = g_x(y)$. Если посмотреть на то, как мы задавали g_x, то становится понятно, что это утверждение равносильно следующему:

$$\forall x \quad \exists! y : \quad F(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = f(x), \quad f : \cup_\delta(0) \to \vee_\varepsilon(0)$$

Осталось показать непрерывность функции f в нуле — для этого просто немного поиграемся с нормами и вспомним, что $y \in \overline{\vee_\varepsilon(0)}$:

$$||f(x)|| = ||y|| = ||g_x(y)|| \leq \varepsilon$$

◀

Следствие:

Если выполняются условия теоремы, причём F и F'_y непрерывны не просто в точке (x_0, y_0), а в некоторой её окрестности, то f также непрерывна в некоторой окрестности точки x_0

▶

Пусть $f : \cup \to \vee$ непрерывна в точке x_0, рассмотрим $\tilde{x} \in \cup$. В таком случае, для точки $(\tilde{x}, \tilde{y})$, где $\tilde{y} = f(\tilde{x})$, выполняются условия теоремы. При этом очевидно, что $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. Теперь, пользуясь непрерывностью функции в окрестности, можем построить $\tilde{f}$ следующий образом:

$$\exists \tilde{\cup}, \tilde{\vee} \quad \exists \tilde{f} : \tilde{\cup} \to \tilde{\vee},$$

причём $\tilde{f}$ также будет непрерывна в точке $\tilde{x}$. В таком случае, в некоторой окрестности $f(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x})$, то есть функции совпадают. Значит f также непрерывна в точке $\tilde{x}$

◀

Простейшая формулировка теоремы:

Зададим области $X = \cup_\alpha(x_0)$, $Y = \vee_\beta(y_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$ и рассмотрим отображение $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$, где $\Omega = X \times Y$. Если выполняются следующие условия:

1. $F(x_0, y_0) = 0$ и F непрерывно в точке (x_0, y_0)
2. $\exists F'_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ на всём Ω и F'_y непрерывно в точке (x_0, y_0)
3. $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$

тогда $\exists \cup (x_0) \subseteq \cup_\alpha(x_0), \vee(y_0) \subseteq \vee_\beta(y_0)$:

1. $F(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x \in \cup(x_0) \;\; \exists! y \in \vee(y_0)$, то есть $y = f(x)$, где $f : \cup(x_0) \to \vee(y_0)$
2. $y_0 = f(x_0)$
3. f непрерывна в точке x_0

Ex. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ — уравнение, задающее сферу (нужен рисунок)

(x_0, y_0, z_0) — точка на сфере, то есть точка, удовлетворяющая нашему уравнению. Существует частная производная $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$, непрерывная в этой точке. Эта частная производная ненулевая при $z \neq 0$. Таким образом, условия теоремы выполняются для всех точек сферы, кроме тех, что лежат на плоскости $z = 0$. Таким образом можем написать функциональную зависимость $z = f(x, y)$ для всех точек, не лежащих на этой плоскости. Например, для верхней полусферы:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Ex. СЛАУ, задающая пару плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Когда мы раньше рассматривали этот пример, мы говорили:

$$\sqsupset \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} y = y(x) \\ z = z(x) \end{matrix}$$

То есть мы параметризовали две переменные по третьей, значит наша функция, задающая неявный вид уравнения выглядела следующим образом:

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, z) \end{pmatrix}$$

Тогда Якобиан этого отображения имеет вид:

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

То есть, опять же, выполнены условия теоремы

Th. ***о существовании и непрерывности обратного отображения***

Рассмотрим точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$, область X — окрестность этой точки и отображение $f : X \to \mathbb{R}^n$ такое, что $f(x_0) = y_0$. Пусть:

1. f дифференцируема в X и все $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны в точке x_0
2. Якобиан $\det(f'(x_0)) \neq 0$

Тогда $\exists \cup (x_0),\ \vee(y_0),\ \exists f^{-1} : \vee \to \cup$

1. $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\cup},\quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\vee},\quad f^{-1}(y_0) = x_0$
2. f^{-1} непрерывна в точке y_0

<u>*Замечание*</u> *Если выполнено 1 и 2, то получаем теорему о дифференцируемости обратного отображения*

Доказательство:

▶

Составим вспомогательную функцию:

$$F(x,y) = y - f(x)$$

f дифференцируема в x_0, следовательно f непрерывна в X. Проверим выполнение условий теоремы о неявном отображении для построенной функции:

1. $F(x_0, y_0) = 0$, $F(x,y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0)
2. Все частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x,y)$ существуют в X и непрерывны в точке (x_0, y_0)
3. $\det\left(F'_x(x_0,y_0)\right) = \det(f'(x_0)) \neq 0$

Если 1) 2) 3) выполняются (x и y меняются ролями) относительно переменной x_j, то есть y_i — независимая, а x_j — зависимая. Так как эти условия выполняются, получаем:

$$\exists \vee (y_0), \cup(x_0),\ \exists g : \vee \to \cup$$

1. $y = f(x) \ \Leftrightarrow\ F(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall y \in \vee\ \exists! x \in \cup_1$

   $$U := g(\vee) \ \Rightarrow\ g = f^{-1} : \vee \to \cup$$

   Получили, что f и g взаимно обратные
2. $y_0 = f(x_0) \leftrightarrow x_0 = \underbrace{f^{-1}}_{g}(y_0)$
3. g — непрерывно в точке y_0

◀

<u>**Следствие:**</u>

При выполнении первых двух условий и непрерывности $f'(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 обратная функция f^{-1} непрерывна в некоторой окрестности точки y_0

<u>**Геометрическая интерпретация для $\mathbb{R}^3$**</u>

1. Поверхность в $\mathbb{R}^3$

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. График такого отображения имеет вид:

   $$\Gamma_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x,y) \in \Omega,\ z = f(x,y)\right\}$$

   В таком случае говорят о явном задании поверхности

2. Неявное задание поверхности

Мы уменьшаем количество независимых переменных путем задания связи между ними. При выполнении условий теоремы $F(x, y, z) = 0 \to z = f(x, y)$

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$\vec{\nabla} F(M_0) = (F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0))$$

Рассматриваем поверхность уровня для F. Вектор градиента перпендикулярен всем касательным векторам в точке M_0. Получается, что $\vec{\nabla} F$ — это нормаль к касательной плоскости и мы можем записать уравнение касательной плоскости в точке M_0:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

3. Параметризация поверхности в $\mathbb{R}^3$

Запишем функция $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \Phi_1(u, v) \\ \Phi_2(u, v) \\ \Phi_3(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix},$$

где $(u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

Рассмотрим только $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ и проверим для них выполнение условий теоремы. Нам нужен ненулевой Якобиан, то есть:

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

Раз это выполняется, то получается, что мы имеем обратное отображение (по одноименной теореме):

$$\Rightarrow \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

Ну и таким образом $z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$, то есть образ $\Phi(\Omega)$ — это поверхность в $\mathbb{R}^3$

Теперь поверхность задана, поэтому явную параметризацию можно рассматривать как частный случай параметризации.

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

Роль параметров играют x, y

Если взять плоскость uOv и задать на ней сетку, которую можно «спроецировать» на саму поверхность, то точке на поверхности будет соответствовать пересечение двух кривых, полученных при фиксированных u и v соответственно:

$$\vec{r}_1(u) = \Phi(u, v_0) = \begin{pmatrix} x(u, v_0) \\ y(u, v_0) \\ z(u, v_0) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2(v) = \Phi(u_0, v) = \begin{pmatrix} x(u_0, v) \\ y(u_0, v) \\ z(u_0, v) \end{pmatrix}$$

Запишем производную нашего отображения:

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}}_1(u) & \dot{\vec{r}}_2(v) \end{pmatrix}$$

В таком случае эта производная в точке (x_0, y_0) будет иметь вид:

$$\Phi'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}}_1(u_0) & \dot{\vec{r}}_2(v_0) \end{pmatrix}$$

Запишем вектор нормали:

$$\vec{N} = (A, B, C) = \times^{(x'_u, y'_u, z'_u)^\top}_{(x'_v, y'_v, z'_v)^\top}$$

<u>Ex.</u> Рассмотрим знакомую нам параметризацию — сферические координаты:

$$\begin{cases} x = a\cos(\varphi)\cos(\psi) \\ y = a\sin(\varphi)\cos(\psi) \\ z = a\sin(\psi) \end{cases}$$

Ну и в такой параметризации нормаль ищется как векторное произведение $\vec{r'}_\psi$ и $\vec{r'}_\varphi$ — полученный ответ, видимо, очевиден:

$$\vec{N} = \vec{r'}_\psi \times \vec{r'}_\varphi = \dots = c \cdot \vec{r}$$

<u>Ex.</u> Параметризация кривой в $\mathbb{R}^3$

Мы уже знакомы с определением пути как $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ — его естественным заданием и является параметризация кривой $\gamma = \varphi([a, b])$:

$$\varphi(t) = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in C([a, b])$$

Рассмотрим производную (считаем путь гладким):

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Будем считать $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq 0$, ну и не умаляя общности $\dot{x}(t_0) \neq 0$. В таком случае можем воспользоваться теоремой о неявном отображении

$$\Rightarrow t = t(x), \quad t_0 = t(x_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = y(t(x)) \\ z = z(t(x)) \end{cases}$$

Теперь мы можем считать x параметром:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

Значит можем перейти к неявному заданию кривой в пространстве:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(z, y, z) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

Потребуем ненулевой Якобиан:

$$\begin{vmatrix} F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} F_1 \nparallel \vec{\nabla} F_2$$

Требуется $\vec{\nabla} F_1 \neq 0,\ \vec{\nabla} F_2 \neq 0$ — не умаляя общности, скажем, что $F'_{1z} \neq 0,\ F'_{2z} \neq 0$. Теперь наша кривая задаётся так:

$$\gamma : \begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftarrow \vec{\nabla} F_1 \nparallel \vec{\nabla} F_2$$

$$\vec{\nabla} F_1 \times \vec{\nabla} F_2 = \vec{r} \text{ — какая-то касательная к } \gamma \text{ в точке } M_0$$

Условие достаточное, но не необходимое

8.4 Дифференцирование неявно заданных отображений

Простейшая формулировка

Пусть для функции $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ выполнены условия теоремы $\Rightarrow\ \exists f : y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Теперь представим, что f оказалась дифференцируемой и подумаем о виде функции f'.

Для начала заметим, что полный дифференциал $\mathrm{d}F = 0$ — распишем его:

$$\mathrm{d}F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i + \frac{\partial F}{\partial y} \mathrm{d}y = 0$$

Теперь можем выразить дифференциал функции f через производные F:

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{F'_x}{F'_y} \mathrm{d}x_i$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}}$$

Общая формулировка

Здесь уже условия теоремы выполняются для функций следующего вида:

$$F(x, y) = \begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \end{cases}$$

Соответственно, полученная функциональная зависимость также будет состоять из m координатных функций:

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Теперь поговорим о производных так же, как мы делали это в простейшей формулировке. Для начала, считаем Якобиан ненулевым:

$$\det\left(F'_y(x_0, y_0)\right) \neq 0$$

Сама производная в произвольной точке будет иметь вид:

$$F'_y(x, y) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j}(x, y)\right)_{m \times n}$$

Получаем функцию $y = f(x)$, где $f : \cup \to \vee$:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Пусть f дифференцируема, тогда:

$$\begin{cases} \mathrm{d}F_1 = 0 \\ \vdots \\ \mathrm{d}F_m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \mathrm{d}y_j = 0 \right. ,$$

причём здесь $\mathrm{d}y_j$ — это зависимый дифференциал

Дописать

Th. ***о дифференцировании неявно заданного отображения***

Пусть выполнены условия теоремы о неявно заданном отображении. Также пусть существуют частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ в окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывны в этой точке. Тогда f дифференцируема в точке (x_0, y_0), причём $f'(x_0, y_0) = -(F'_y(x_0, y_0))^{-1} F'_x(x_0, y_0)$

Замечание *Условие 2) + добавленное условие дают нам дифференцируемость F в точке (x_0, y_0)*

Доказательство:

▶

Построим вспомогательное отображение:

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ F(x, y) \end{pmatrix},$$

где $(x, y) \in X \times Y$

Также рассмотрим область X и Y — окрестности точек x_0 и y_0 соответственно

$$\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\exists \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}$ в точке (x_0, y_0) как композиция соответствующих функций и Φ' непрерывна в (x_0, y_0). Запишем производную:

$$\Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} [cccc|ccc]1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & & & & & \end{pmatrix}$$

$\det \Phi'(x_0, y_0) = \det[F'_y](x_0, y_0) \neq 0$

$$\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0_n \end{pmatrix}$$

Получили, что в окрестности точки (x_0, y_0) существует и производная Φ' (и непрерывна в точке (x_0, y_0)). Также Якобиан $\det \Phi'(x_0, y_0) = \frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_{n+m})}{D(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)}(x_0, y_0) \neq 0$. В таком случае, по теореме об обратном отображении:

$$\exists W \begin{pmatrix} x_0 \\ 0_m \end{pmatrix}, \ \exists \Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \Phi^{-1} : W \to \Omega \subseteq X \times Y,$$

причём Φ и Φ^{-1} взаимно обратные

$$\Phi^{-1}(x_0, 0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

По условиям теоремы о неявном отображении $\exists f : \cup \to \vee : \quad f(x) = y,\ f(x_0) = y_0$. Не умаляя общности, $\cup \subset \Omega = \cup_1 W_1$

$$\forall x \in \cup f(x) = y \ \Leftrightarrow \ F(x, y) = 0$$

$$x \in \cup \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} x \\ 0_m \end{pmatrix} \in W \xrightarrow{\Phi^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y = f(x) \end{pmatrix} \in \Omega \xrightarrow{\psi} y \in \vee$$

То есть полученные отображения связаны следующим образом:

$$f = \psi \circ \Phi^{-1} \circ \varphi$$

$\exists f'(x_0)$ как композиция соответсвтующих функций.

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} E_n \\ O_{m \times n} \end{pmatrix}$$

$$\psi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to (y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\psi'(x, y) =$$

Короче, получили, что $f'(x_0) = \psi'(x_0, y_0)(\Phi'(x_0, y_0))^{-1}\varphi'(x_0)$
Пишем матрицы $\Rightarrow \ C = -(F'_y(x_0, y_0))^{-1}F'_x(x_0, y_0)$

Дописать

◀

Следствие:

При выполнении условий теоремы о неявно заданном отображении и $F \in C^k(X \times Y)$, тогда $f \in C^k(\cup)$, где $\cup$ — это некоторая окрестность точки x_0

▶

В следствии к теореме об обратном отображении говорилось, что если к условиях теоремы добавить непрерывность в окрестности, то и полученная функция станет непрерывной в окрестности. Из только что доказанной теоремы получается, что если $[F'_x]$ непрерывна в точке (x_0, y_0), то $\exists f'(x_0)$. Для $k = 1$, получаем:

$$[F'_x], [F'_y] \text{ непр. в окрест. точки } (x_0, y_0) \ \Rightarrow \ \exists [f'(x)] \text{ в окрест.}$$

Для окрестности уже знаем, что f непрерывна в окрестности точки x_0 и определяется $F(x, y) = 0$. Тогда $\forall x \in \cup(x_0)$ $[F'_x]$ непрерывна в точке x, то есть мы можем применить только что доказанную теорему — получаем:

$$\exists f'(x) = -\left(F'_y(x, y)\right)^{-1} F'_x(x, y)$$

Можем построить обратную матрицу:

$$\left(F'_y(x, f(x))\right)^{-1}$$

Она окажется непрерывной как композиция непрерывных. Ну и тогда её элементы тоже непрерывны. По итогу получаем перемножение двух непрерывных матриц, значит полученное нами отображение $f(x)$ также непрерывно, то есть $f \in C^1(\cup)$. Ну и для произвольного k применяем метод математической индукции.

◀

Следствие 2:

Если для функции вида $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ выполнены первые два условия теоремы об обратном отображении, причём $f \in C^k(\cup) \Rightarrow f^{-1} \in C^k(\vee)$, где $\cup, \vee$ — окрестности точек x_0 и y_0 соответственно

▶

Смотри доказательство следствия из теоремы об обратном отображении, ну и использовать только что доказанное следствие 1

◀

Ex. Трёхмерная поверхность $F(x, y, z) = 0 \to z = z(x, y)$

$F'_z(x_0, y_0) \neq 0,\ z = f(x, y)$. Касательная плоскость в точке (x_0, y_0) задаётся следующим уравнением:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Пользуемся нашей теоремой:

$$f'(x_0, y_0) = -\left(F'_z(x_0, y_0)\right)^{-1}\left(F'_x(x_0, y_0)F'_y(x_0, y_0)\right)$$

Причём:

$$f'(x_0, y_0) = \Big(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0)\Big),$$

где $f'_x(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_z(x_0, y_0)},\ f'_y(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_z(x_0, y_0)}$

Подставим:

$$-\frac{F'_x}{F'_z}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{F'_y}{F'_z}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$\boxed{F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0)(z - z_0) = 0}$$

Получили ровно то же самое, что и раньше

Как НЕЛЬЗЯ делать!

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq \frac{1}{\frac{\partial x_j}{\partial f_i}}$$

Рассмотрим переход из декартовых координат в полярные:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \varphi(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Запишем связь дифференциалов:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \cos\varphi \mathrm{d}r - \sin\varphi r \mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}y = \sin\varphi \mathrm{d}r + \cos\varphi r \mathrm{d}\varphi \end{cases}$$

Ну и решаем систему с использованием метода Крамера — получается, что не получается, пу-пу-пу

9 Условный экстремум

9.1 Постановка задачи

Рассматриваем функции нескольких переменных $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, аргументы которых связаны некоторыми уравнениями, называемыми «уравнениями связи»:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}, \ m < n \quad (*)$$

Пусть внутренняя точка области определения функции точка $a \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет нашим уравнениям связи, то есть $F(a) = 0$

---

def : Точка a называется точкой условного(относительного) экстремума функции f, если $\forall x \in \overset{\circ}{\cup}(a) \cap M$:

$$f(x) \leq f(a) \ (f(x) \geq f(a))$$

Если неравенства строгие, то экстремум называется строгим

Ex. Функция $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{dist}(0, P)$, где $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

У данной функции существует экстремум: точка $(0, 0, 0)$ — точка строгого минимума

Пусть точка a — предполагаемая точка условного экстремума функции $f \in C^1(\cup(a))$. Предположим, что ранг матрицы $\text{rank}\, F'(a) = m$, где $F'(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{m \times n}$. Ну это эквивалентно существованию ненулевого минора m-того порядка. Не умоляя общности, скажем следующее:

$$\det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{m \times m} \neq 0$$

Ну и тогда, по теореме о неявном отображениии, существует дифференцируемое и c^k-гладкое отображение φ:

$$\begin{cases} x_{n-m+1} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-m}) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_m(x_1, \ldots, x_{n-m}) \end{cases}$$

Тогда точка эксстремума функции f переходит в экстремум функции $g(x_1, \ldots, x_{n-m}) = f(x_1, \ldots, x_{n-m}, \varphi_1$

Необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n-m \ \Leftrightarrow \ \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_{n-m+j}}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\tilde{a}) = 0},$$

где $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_{n-m})$

Достаточные условия экстремума зависят от того, какая получилась функция $g(x_1, \ldots, x_{n-m})$

Ex. $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$M : (x_1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$. Строим поверхность $z = z(x, y)$, $F'_z(x, y, z) = 2(z-1) \neq 0$ — это верно при $z \neq 1$. Тогда строим функцию $g(x, y) = f(x, y, z(x, y))$. Распишем производные:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

$$\begin{cases} f'_x + f'_z z'_x = 0 \ \Leftrightarrow\ g'_x = 0 \\ f'_y + f'_z z'_y = 0 \ \Leftrightarrow\ g'_y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \left(-\dfrac{2(x-1)}{2(z-1)}\right) = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \left(-\dfrac{2(y-1)}{2(z-1)}\right) = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (z-1)x - (x-1)z = 0 \\ (z-1)y - (y-1)z = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$$

Ну и далее, решая эту систему, можно выдавить какие-нибудь условия

9.2 Метод неопределённых множителей Лагранжа

Есть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, уравнение связи $F(x) = 0$ и точка a — предполагаемая точка условного экстремума ($\mathrm{d}f(a) = 0$). Распишем необходимое условие экстремальности:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\mathrm{d}x_i = 0$$

Но проблема заключается в том, что у нас $n - m$ дифференциалов независимы, а остальные m становятся зависимыми в виду существования связи. Наше условие выглядит немного иначе:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\mathrm{d}x_i}_{\text{независимые}} + \underbrace{\sum_{i=n-m+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\mathrm{d}x_i}_{\text{зависимые}} = 0$$

Лагранж предложил умножить каждое уравнение из связи на неопределённых коэффициент λ_k и прибавить полученное к нашей системе(тут немного изменена индексация для удобства):

$$\sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\mathrm{d}x_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+j}}(a)\mathrm{d}x_{n-m+j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(a)\mathrm{d}x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right) \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{незав.}} + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-m+j}}(a) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_{n-m+j}} \right) \underbrace{\mathrm{d}x_{n-m+j}}_{\text{зав.}}$$

Подберём λ_k таким образом, чтобы коэффициенты при каждом $\mathrm{d}x_{n-m+j}$ оказался нулевым. Из этого условия получаем СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-m+j}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n-m+j}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+j}}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы частных производных ненулевой по предположению. Ну тогда существует единственное решение:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_{n-m+j}}(a) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^0 \frac{\partial F_k}{\partial x_{n-m+j}}(a) = 0}$$

Таким образом, от нашего уравнения остались:

$$\sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^0 \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(a) \right) \mathrm{d}x_i = 0 \ \Leftrightarrow\ dfrac\partial f \partial x_i(a) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^0 \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(a) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, n-m$$

То есть неопределённые множители Лагранжа помогают избавиться от зависимых уравнений.

Таким образом, необходимыми условиями условного экстремума является следующая система:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial x_i}(a) = 0, \ i = 1, \ldots, n \\ F(x) = 0 \end{cases}$$

Точка a, удовлетворяющая системе с набором λ_k^0 будет точкой, подозрительной на экстремум.

Для удобсвта записи условий вводят функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k F_k(x)$$

Таким образом, функция Лагранжа зависит от $n + m$ независимых переменных.

Рассмотрим необходимое условие гладкого экстремума для $L(x, \lambda)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \ i = 1, \ldots, n \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0, \ k = 1, \ldots, m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial F_k}{\partial x_i} = 0, \ i = 1, \ldots, n \\ F_k(x) = 0, k = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Достаточные условия экстремума $f \in C^2(\cup(a))$ зависят от знака $\Delta f(a)$, где точка a подозрительна на экстремум:

$$\Delta f(a) = f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) = L(x, \lambda^0) - L(a, \lambda^0) = \Delta L(a, \lambda^0),$$

где λ^0, a удовлетворяют системе $\Rightarrow$ $\mathrm{d}L(a, \lambda^0) = 0$

Пользуясь гладкостью, можем разложить в Тейлора до второго порядка:

$$\Delta L(a, \lambda^0) = \underbrace{\mathrm{d}L(a, \lambda^0)}_{=0} + \frac{\mathrm{d}^2 L(a, \lambda^0)}{2!} + \underset{x \to a}{\overline{o}\left(||x - a||^2\right)}$$

$$\mathrm{d}^2 L(a, \lambda^0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a, \lambda^0) \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^0 \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j$$

Осатлось исключить зависимые дифференциалы:

$$\mathrm{d}F(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x_{n-m+1} = \psi_1(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_{n-m}) \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n = \psi_m(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_{n-m}) \end{cases}$$

После подстановки в $\mathrm{d}^2 L(a, \lambda^0)$ получили квадратичную форму от независимых дифференциалов $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_{n-m}$. Ну а далее применяем наш опыт работы с квадратичными формами (смотрим на определённость).

Достаточные условия условного экстремума подразумевают исследование знака $\mathrm{d}^2 L(a, \lambda^0)$в стационарной точке