ИДЗ №2 по математическому анализу

> **ФИО:** Караганов Павел Эдуардович
> **Вариант:** 14

Задание 1

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \ln 3 \ldots \ln(n+1)}{\ln(2+e)\ln(3+e)\ldots\ln(n+e)}$$

1. Упрощение общего члена:

Обозначим:

$$a_n = \prod_{k=2}^{n+1} \frac{\ln k}{\ln(k+e)} = \exp\left(\sum_{k=2}^{n+1} (\ln\ln k - \ln\ln(k+e))\right)$$

2. Оценка множителей:

Для больших k:

$$\ln(k+e) = \ln(k(1+\frac{e}{k})) = \ln(k) + \ln(1+\frac{e}{k}) = \ln k + \frac{e}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\frac{\ln k}{\ln(k+e)} = \frac{\ln(k)}{\ln(k)(1+\frac{e}{k\ln(k)} + O(\frac{1}{k^2\ln(k)}))}$$

Используем разложение $(1+x)^{-1}$ для $x \to 0$

$$(1+x)^{-1} \approx 1 - x + x^2 - \ldots$$

где $x = \frac{e}{k\ln k} + O(\frac{1}{k^2\ln k})$. Ограничиваясь первым порядком:

$$\frac{\ln k}{\ln(k+e)} \approx 1 - \frac{e}{k\ln k} + O\left(\frac{1}{k^2\ln k}\right)$$

3. Логарифмическая оценка:

$$\ln a_n \approx -\sum_{k=2}^{n+1} \frac{e}{k\ln k}$$

4. Интегральный признак:

Ряд $\sum \frac{1}{k \ln k}$ расходится (по интегральному признаку):

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \big|_2^\infty = +\infty$$

5. Вывод:

Поскольку $\ln a_n \to -\infty$, то $a_n \to 0$, но слишком медленно для сходимости ряда.

Итог: ряд **расходится**.

$$\boxed{\text{Ряд расходится}}$$

б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2 + e^{2n}) - \ln(n^3 + e^n)}{n\sqrt{n}}$$

Рассмотрим общий член ряда

$$a_n = \frac{\ln\bigl(n^2 + e^{2n}\bigr) \; - \; \ln\bigl(n^3 + e^n\bigr)}{n\sqrt{n}} \, .$$

Для больших n имеем

$$\ln\bigl(n^2 + e^{2n}\bigr) = \ln\Bigl(e^{2n}\bigl(1 + n^2 e^{-2n}\bigr)\Bigr) = 2n + \ln\bigl(1 + n^2 e^{-2n}\bigr) = 2n + O(n^2 e^{-2n}),$$

$$\ln\bigl(n^3 + e^n\bigr) = \ln\Bigl(e^n\bigl(1 + n^3 e^{-n}\bigr)\Bigr) = n + \ln\bigl(1 + n^3 e^{-n}\bigr) = n + O(n^3 e^{-n}).$$

Следовательно,

$$\ln\bigl(n^2 + e^{2n}\bigr) - \ln\bigl(n^3 + e^n\bigr) = (2n - n) + O(n^2 e^{-2n}) - O(n^3 e^{-n}) = n + O(1)$$

где $O(n^2 e^{-2n}) - O(n^3 e^{-n}) = O(1)$ так как при $n \to \infty$:

- $n^3 e^{-n}$ убывает **медленнее**, чем $n^2 e^{-2n}$,
- Поэтому разность $O(n^2 e^{-2n}) - O(n^3 e^{-n})$ ведёт себя как $-O(n^3 e^{-n})$.

Но $n^3 e^{-n} \to 0$ настолько быстро, что $\mid n^3 e^{-n} \mid \leq C$ для всех $n \geq 1$, где C — константа
Значит, $O(n^2 e^{-2n}) - O(n^3 e^{-n}) = O(1)$

Итак,

$$a_n = \frac{n + O(1)}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + O\bigl(n^{-1/2}\bigr).$$

Поскольку $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ — расходящийся p-ряд с $p = \frac{1}{2} \leq 1$, по признаку предельного сравнения наш ряд тоже расходится.

Ответ: ряд **расходится**

$$\boxed{\text{Ряд расходится}}$$

в)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2\left(\frac{n}{4}\right)}{n - \ln n}$$

1. Проверка абсолютной сходимости

Оценим модуль общего члена:

$$\left|\frac{\sin^2\left(\frac{n}{4}\right)}{n - \ln n}\right| \leq \frac{1}{n - \ln n} \sim \frac{1}{n}$$

Ключевые наблюдения:

- Функция $\sin^2(n/4)$ не стремится к нулю (её среднее значение около $1/2$)
- Ряд $\sum \frac{\sin^2(n/4)}{n}$ ведёт себя как гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ и расходится

Вывод: исходный ряд не сходится абсолютно.

2. Проверка условной сходимости (признак Дирихле)

Представим общий член в виде:

$$a_n b_n = \frac{1}{n - \ln n} \cdot (-1)^n \sin^2\left(\frac{n}{4}\right)$$

Где:

- $a_n = (-1)^n \sin^2\left(\frac{n}{4}\right)$
- $b_n = \frac{1}{n - \ln n}$ (монотонно убывает к нулю)

Преобразуем a_n:

$$\sin^2\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{n}{2}\right) \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}(-1)^n - \frac{1}{2}(-1)^n \cos\left(\frac{n}{2}\right)$$

Оба слагаемых дают ограниченные частичные суммы:

1. $\sum(-1)^n$ - ограничена
2. $\sum(-1)^n \cos(\frac{n}{2})$ - тоже ограничена между $[-1; 1]$

По признаку Дирихле: ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

Итоговый вывод

Ряд **условно сходится**, но не абсолютно.

$$\boxed{\text{Ряд сходится условно}}$$

г)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(e^n + n^2)}{n^2 \ln^2(n+1)}$$

Для больших значений n числитель ведёт себя как:

$$\ln(e^n + n^2) = \ln\left(e^n(1 + n^2 e^{-n})\right) = n + \ln(1 + n^2 e^{-n}) = n + O(n^2 e^{-n}) \sim n$$

Оценка общего члена ряда

Для всех $n \geq 1$

$$\ln(e^n + n^2) \leq \ln(2e^n) = n + \ln 2 \leq 2n$$

Следовательно:

$$0 < a_n \leq \frac{2n}{n^2 \ln^2(n+1)} = \frac{2}{n \ln^2(n+1)}$$

Ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n \ln^2(n+1)}$$

сходится по признаку сравнения с рядом с общим членом $a_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$

Итоговый вывод

$$\boxed{\text{Ряд сходится абсолютно}}$$

д)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+7}\right)^n \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n^2}$$

Рассмотрим общий член:

$$a_n = \left(\frac{3n}{n+7}\right)^n \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n^2}$$

1. Анализ первой скобки

Разложим $\frac{3n}{n+7}$:

$$\frac{3n}{n+7} = \frac{3}{1+7/n} = 3\left(1 - \frac{7}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Логарифмируем:

$$\ln\left(\frac{3n}{n+7}\right) = \ln 3 + \ln\left(1 - \frac{7}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \ln 3 - \frac{7}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Умножаем на n:

$$n\ln\left(\frac{3n}{n+7}\right) = n\ln 3 - 7 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Экспоненцируем:

$$\left(\frac{3n}{n+7}\right)^n = 3^n e^{-7+O(1/n)} \sim e^{-7}3^n$$

2. Анализ второй скобки

Разложим $\frac{n+3}{n+4}$:

$$\frac{n+3}{n+4} = 1 - \frac{1}{n+4} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Логарифмируем:

$$\ln\left(\frac{n+3}{n+4}\right) = -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Умножаем на n^2:

$$n^2\ln\left(\frac{n+3}{n+4}\right) = -n + O(1)$$

Экспоненцируем:

$$\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n^2} = e^{-n+O(1)} \sim C_1 e^{-n}$$

где $C_1 = e^{O(1)}$ - некоторая константа.

3. Итоговая асимптотика

Объединяя результаты:

$$a_n \sim e^{-7} 3^n C_1 e^{-n} = C\left(\frac{3}{e}\right)^n, \quad C = e^{-7} C_1 \neq 0$$

Так как $\frac{3}{e} > 1$, общий член a_n растет экспоненциально и не стремится к нулю.

Вывод

По необходимому условию сходимости ряд **расходится** ($a_n \nrightarrow 0$).

$$\boxed{\text{Ряд расходится}}$$

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_n^{2n} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + n^2}}$$

Рассмотрим общий член ряда:

$$u_n = (-1)^{n+1} \int_n^{2n} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + n^2}}$$

1. Анализ интеграла I_n

Преобразуем интеграл:

$$I_n = \int_n^{2n} \frac{dx}{x(1 + \frac{n^2}{x^3})^{1/3}}$$

Для $x \in [n, 2n]$ имеем $\frac{n^2}{x^3} = O(\frac{1}{n}) \to 0$. Разложим подынтегральное выражение:

$$(1 + \frac{n^2}{x^3})^{-1/3} = 1 - \frac{1}{3}\frac{n^2}{x^3} + O(\frac{1}{n^2})$$

2. Вычисление асимптотики I_n

Подставляем разложение:

$$I_n = \int_n^{2n} \left(\frac{1}{x} - \frac{n^2}{3x^4} + O(\frac{1}{n^2})\right) dx = \int_n^{2n} \frac{dx}{x} + O(\frac{1}{n}) = \ln 2 + O(\frac{1}{n})$$

где

- $\int_n^{2n} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_n^{2n} = \ln(2n) - \ln n = \ln 2$
- $\int_n^{2n} -\frac{n^2}{3x^4} dx = -\frac{n^2}{3} \int_n^{2n} \frac{1}{x^4} dx = -\frac{n^2}{3}(-\frac{1}{3(2n)^3} + \frac{1}{3n^3}) = -\frac{7}{72n} = O(\frac{1}{n})$
- $\int_n^{2n} O\left(\frac{1}{n^2}\right) dx = O(\frac{1}{n^2})(2n - n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$

3. Поведение общего члена

Получаем предельное поведение:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \ln 2 \neq 0$$

Следовательно:

$$u_n = (-1)^{n+1} I_n \nrightarrow 0$$

4. Вывод о сходимости

Не выполняется необходимое условие сходимости ($u_n \nrightarrow 0$), поэтому:

$$\boxed{\text{Ряд расходится}}$$

Задание 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n} \cos nx}{9^n \ln^3 n}$$

1. Абсолютная сходимость

Применим **радикальный признак Коши**:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x+1)^{2n} \cos nx}{9^n \ln^3 n} \right|} = \frac{(x+1)^2}{9} < 1$$

Решаем неравенство:

$$(x+1)^2 < 9 \Rightarrow |x+1| < 3 \Rightarrow -4 < x < 2$$

Проверка граничных точек:

- При $x = -4$:

$$\sum \frac{\cos 4n}{\ln^3 n} \quad \text{сходится абсолютно, так как} \quad \left| \frac{\cos 4n}{\ln^3 n} \right| \leq \frac{1}{\ln^3 n}$$

- При $x = 2$:

$$\sum \frac{\cos 2n}{\ln^3 n} \quad \text{сходится абсолютно по аналогии}$$

Область абсолютной сходимости:

$$x \in [-4, 2]$$

2. Условная сходимость

Поскольку:

1. Для всех

$$x \in [-4, 2]$$

ряд сходится абсолютно
2. Вне этого интервала общий член не стремится к нулю

Область условной сходимости:

$$\emptyset$$

3. Итоговый результат

$$\boxed{\begin{array}{rl} \text{Абсолютная сходимость:} & x \in [-4, 2] \\ \text{Условная сходимость:} & \text{отсутствует} \end{array}}$$

Задание 3

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

1. Предельная функция

Известный предел:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = e^x \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}$$

2. Исследование равномерной сходимости

Случай а) E = (a, b), где 0 < a < b

На интервале (a, b):

$$\sup_{x \in (a,b)} |f_n(x) - e^x| \leq \max\left\{\left|\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n - e^a\right|, \left|\left(1 + \frac{b}{n}\right)^n - e^b\right|\right\} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

⇒ Сходимость равномерная

Случай б) E = (-∞, ∞)

Рассмотрим x = -n:

$$f_n(-n) = \left(1 - \frac{n}{n}\right)^n = 0 \quad \text{в то время как} \quad e^{-n} \to 0$$

Однако:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - e^x| \geq |f_n(-n) - e^{-n}| = e^{-n} \nrightarrow 0$$

⇒ Сходимость неравномерная на всей числовой прямой

3. Итоговые выводы

Для E = (a, b), 0 < a < b:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Предел: } f_n(x) \rightrightarrows e^x \\ \text{Сходимость равномерная}\end{array}}$$

Для E = (-∞, ∞):

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Предел: } f_n(x) \to e^x \text{ поточечно} \\ \text{Сходимость неравномерная}\end{array}}$$

Задание 4

а)

Рассмотрим функциональный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin nx}{n + x + n^2 x}, \quad x \in E = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

Шаг 1: Оценка общего члена

Обозначим:

$$a_n(x) = \frac{x \sin nx}{n + x + n^2 x}$$

Оценим сверху:

1. $|\sin nx| \leq 1$ ⇒ числитель $|x \sin nx| \leq x$
2. Знаменатель: $n + x + n^2 x \geq n^2 x$ (при $x > 0$)

Таким образом:

$$|a_n(x)| \leq \frac{x}{n^2 x} = \frac{1}{n^2} \quad \text{при } x > 0$$

Для $x = 0$: $a_n(0) = 0$

Шаг 2: Применение признака Вейерштрасса

Значит мы нашли числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

который сходиться (так как $p = 2$ и $p \geq 1$).

Шаг 3: Проверка равномерной сходимости

Так как:

$$\sup_{x \in E} |a_n(x)| \leq \frac{1}{n^2} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

и $\sum \frac{1}{n^2}$ ряд сходится, то исходный ряд **сходится равномерно** на E.

Итог

$$\boxed{\text{Ряд сходиться равномерно на E}}$$

b)

Рассмотрим функциональный ряд:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{1/4} n^2}{x + n^2} \arctan\left(\sqrt{\frac{x}{n^3}}\right)$$

Исследуем равномерную сходимость на множествах:

- $E_1 = (0, 1)$
- $E_2 = (1, +\infty)$

1. Анализ на $E_1 = (0, 1)$

Шаг 1: Оценка общего члена

Для $x \in (0, 1)$ и любого $n \in \mathbb{N}$:

1. Используем приближение $\arctan t \approx t$ для малых t:

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{n^3}}\right) \leq \sqrt{\frac{x}{n^3}}$$

2. Оценим знаменатель:

$$x + n^2 \geq n^2$$

Получаем оценку:

$$|a_n(x)| \le \frac{x^{1/4}n^2}{n^2} \cdot \sqrt{\frac{x}{n^3}} = \frac{x^{3/4}}{n^{3/2}}$$

Шаг 2: Супремум на E_1

Так как $x^{3/4} < 1$ при $x \in (0,1)$:

$$\sup_{x \in E_1} |a_n(x)| \le \frac{1}{n^{3/2}}$$

Шаг 3: Применение признака Вейерштрасса

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится (p-ряд с $p = 3/2 > 1$), следовательно:

- Исходный ряд сходится равномерно на E_1

2. Анализ на $E_2 = (1, +\infty)$

Шаг 1: Оценка общего члена
Для $x > 1$:

1. $\arctan$ ограничен:

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{n^3}}\right) \le \frac{\pi}{2}$$

2. Знаменатель:

$$x + n^2 \ge x$$

Получаем:

$$|a_n(x)| \le \frac{x^{1/4}n^2}{x} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\frac{n^2}{x^{3/4}}$$

Шаг 2: Супремум на E_2

Функция $x^{-3/4}$ убывает, поэтому максимум достигается при $x \to 1^+$:

$$\sup_{x \in E_2} |a_n(x)| \ge \frac{\pi}{2}n^2$$

Шаг 3: Проверка сходимости

Так как $\sum n^2$ расходится, признак Вейерштрасса не подтверждает равномерную сходимость.

Шаг 4: Контрпример при $x_n = n^3$

Вычислим $a_n(x_n)$:

$$a_n(n^3) = \frac{n^{3/4}n^2}{n^3 + n^2} \cdot \arctan(1) \sim \frac{\pi}{4}n^{-1/4}$$

Ряд $\sum n^{-1/4}$ расходится ⇒ нет равномерной сходимости на E_2.

Выводы

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{1. На } E_1 = (0,1): \text{ ряд сходится равномерно} \\ \text{2. На } E_2 = (1,+\infty): \text{ ряд не сходится равномерно} \end{array}}$$

Задание 5

Рассмотрим ряд:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$$

1. Множество сходимости

Применим **признак Даламбера**:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 \cdot n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} = x^2$$

Условие сходимости:

$$x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$$

Проверка на границах:

- При $x = 1$: ряд сходится по признаку Лейбница
- При $x = -1$: аналогично сходится

Множество сходимости:

$$\boxed{x \in [-1, 1]}$$

2. Нахождение суммы ряда

Шаг 1: Первое дифференцирование

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$$

Шаг 2: Второе дифференцирование

$$S''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2} = \frac{2}{1+x^2}$$

Шаг 3: Интегрирование

1. Интегрируем $S''(x)$:

$$S'(x) = 2\arctan x + C_1$$

   Из $S'(0) = 0$ следует $C_1 = 0$.

2. Интегрируем $S'(x)$:

$$S(x) = 2\int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\left(x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) + C_2$$

   Из $S(0) = 0$ следует $C_2 = 0$.

3. Итоговый результат

Сумма ряда:

$$\boxed{S(x) = 2x\arctan x - \ln(1+x^2), \quad x \in [-1,1]}$$