Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Расчётно-графическая работа

по Теории функций комплексного переменного

Вариант № 10

Выполнил:
Караганов П. Э.
Группа: P3210

Проверила:
Поздняков С. С.

г. Санкт-Петербург
2025

Задание 1. Изобразить множество $\mathcal{D} = \{z : |z| < 6 - \Re z,\ |\Im z| \le 4\}$ на комплексной плоскости

Аналитическое решение

Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$\sqrt{x^2+y^2} < 6 - x, \qquad |y| \le 4.$$

Условие $6 - x > 0$ требует $x < 6$ (оно выполняется автоматически). Возведём первое неравенство в квадрат:

$$x^2 + y^2 < (6-x)^2 = 36 - 12x + x^2 \implies y^2 < 36 - 12x.$$

Отсюда

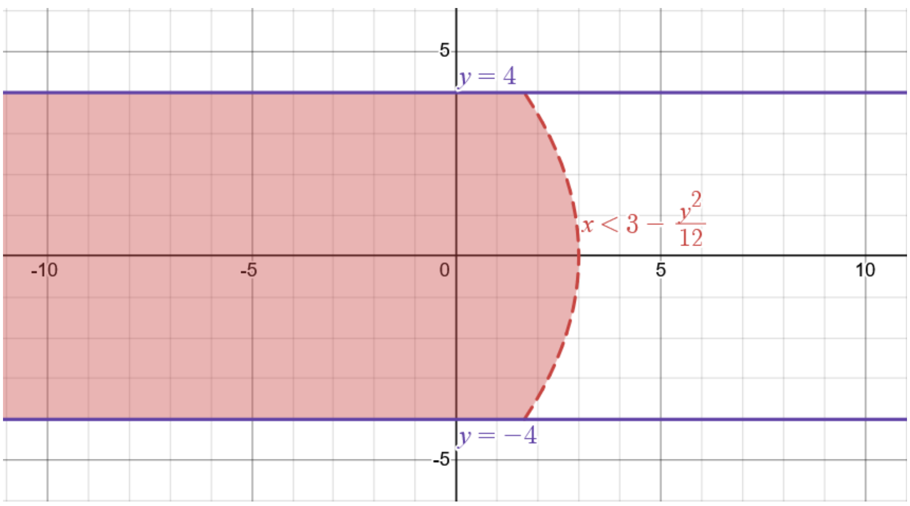
$$x < 3 - \frac{y^2}{12}.$$

Итоговая форма множества:

$$\boxed{\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -4 \le y \le 4, \quad x < 3 - \frac{y^2}{12}\right\}}.$$

Геометрически это область слева от параболы $x = 3 - \frac{y^2}{12}$ при $|y| \le 4$, причём парабола не включена, а горизонтальные границы — включены.

Графическое изображение



Задание 2. Вычисление всех значений функции $\operatorname{Ln}(-2-3i)$

Рассмотрим комплексное число:

$$z = -2 - 3i.$$

Функция комплексного логарифма определяется как:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z,$$

где множество всех значений имеет вид:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1. Нахождение модуля

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Поэтому

$$\ln|z| = \ln(\sqrt{13}) = \frac{1}{2}\ln 13.$$

2. Нахождение аргумента

Точка $(-2, -3)$ лежит в III квадранте.

Угол с учётом квадранта:

$$\arg z = -\pi + \arctan\left(\frac{3}{2}\right).$$

Тогда множество всех аргументов:

$$\operatorname{Arg} z = -\pi + \arctan\left(\frac{3}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Все значения логарифма

$$\operatorname{Ln}(-2-3i) = \frac{1}{2}\ln 13 + i\left(-\pi + \arctan\frac{3}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ

$$\boxed{\operatorname{Ln}(-2-3i) = \frac{1}{2}\ln 13 + i\left(-\pi + \arctan\frac{3}{2} + 2\pi k\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Задание 3. Найти аналитическую функцию по заданной мнимой части

Пусть мнимая часть аналитической функции задана равенством

$$v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \neq (0, 0).$$

Требуется найти все аналитические функции f (в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$), у которых мнимая часть равна $v(x, y)$.

Решение

Положим $z = x + iy$ и обозначим $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Так как f аналитична в области $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, её действительная и мнимая части связаны уравнениями Коши—Римана:

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Найдём частные производные v:

$$v_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$v_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

По первому уравнению Коши-Римана имеем

$$u_x = v_y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Интегрируя по x, получаем

$$u(x, y) = \int -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = \frac{y}{x^2 + y^2} + C(y),$$

где $C(y)$ — некоторая функция от y. Теперь проверим второе уравнение Коши-Римана:

$$u_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + C(y)\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + C'(y).$$

По второму уравнению Коши-Римана должно быть $u_y = -v_x = -\dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Отсюда следует $C'(y) = 0$, значит $C(y)$ — константа $C \in \mathbb{R}$.

Таким образом
$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + C.$$
Перепишем найденную функцию в комплексной форме:
$$f(z) = u + iv = \frac{y}{x^2 + y^2} + i\frac{x}{x^2 + y^2} + C = \frac{y + ix}{x^2 + y^2} + C.$$
Заметим, что
$$\frac{y + ix}{x^2 + y^2} = \frac{i(x - iy)}{(x - iy)(x + iy)} = \frac{i}{z}.$$
Поэтому общее выражение для всех аналитических функций с заданной мнимой частью:
$$\boxed{f(z) = \frac{i}{z} + C, \qquad C \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.}$$

Задание 4. Вычислить $\int_C \Im z\, dz$, где C — ломаная с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(2, 0)$.

Найдем интеграл
$$\int_C \Im z\, dz,$$
где $z = x + iy$, поэтому $\Im z = y$ и $dz = dx + i\, dy$. Значит
$$\int_C \Im z\, dz = \int_C y\, (dx + i\, dy) = \int_C y\, dx + i \int_C y\, dy.$$
Разобьём ломаную C на два отрезка: C_1 — от $O(0, 0)$ до $A(1, 1)$ и C_2 — от $A(1, 1)$ до $B(2, 0)$. Интеграл по всему контуру равен сумме интегралов по отрезкам:
$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}.$$

Интеграл по C_1 (отрезок $O \to A$)

Параметризуем C_1 параметром $t \in [0, 1]$:
$$x(t) = t, \quad y(t) = t, \qquad dx = dt,\ dy = dt.$$

Тогда

$$\int_{C_1} y\,dx = \int_0^1 t \cdot 1\,dt = \frac{1}{2}, \qquad \int_{C_1} y\,dy = \int_0^1 t \cdot 1\,dt = \frac{1}{2}.$$

Отсюда вклад C_1:

$$\int_{C_1} y\,(dx + i\,dy) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = \frac{1+i}{2}.$$

Интеграл по C_2 (отрезок $A \to B$)

Параметризуем C_2 параметром $t \in [0,1]$:

$$x(t) = 1 + t, \quad y(t) = 1 - t, \qquad dx = dt,\ dy = -dt.$$

Тогда

$$\int_{C_2} y\,dx = \int_0^1 (1-t)\,dt = \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\int_{C_2} y\,dy = \int_0^1 (1-t)(-dt) = -\int_0^1 (1-t)\,dt = -\frac{1}{2}.$$

Вклад C_2:

$$\int_{C_2} y\,(dx + i\,dy) = \frac{1}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1-i}{2}.$$

Сумма вкладов и итог

Складываем результаты:

$$\int_C \Im z\,dz = \left(\frac{1+i}{2}\right) + \left(\frac{1-i}{2}\right) = 1.$$

$$\boxed{\int_C \Im z\,dz = 1}$$

Задание 5. Разложение в ряд Тейлора в окрестности точки с указанием области, в которой ряд представляет данную функцию

Рассмотрим функцию.

$$f(z) = ze^z, \qquad z_0 = 1.$$

Разложим её в ряд Тейлора около точки $z_0 = 1$. Представим функцию как

$$f(z) = ze^z = (1 + (z-1))e^{1+(z-1)} = e\,(1 + (z-1))e^{(z-1)}.$$

Используем разложение экспоненты:

$$e^{(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}.$$

Тогда получаем

$$f(z) = e(1 + (z-1)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}.$$

Перемножим:

$$f(z) = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} + e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n+1}}{n!}.$$

Переобозначим вторую сумму:

$$e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n+1}}{n!} = e\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{(k-1)!}.$$

Объединим обе серии:

$$f(z) = e\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!}\right)(z-1)^k\right).$$

Следовательно, получаем разложение Тейлора:

$$\boxed{f(z) = e + e\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!}\right)(z-1)^k}$$

Область сходимости

Исходная функция $f(z) = ze^z$ — целая (аналитическая во всей комплексной плоскости), поэтому её ряд Тейлора сходится всюду:

$$\boxed{\text{Область сходимости: } \mathbb{C}}$$

Задание 6. Разложение в ряд Лорана в указаной области.

Найдём разложение функции

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 6z + 8} = \frac{2}{(z-2)(z-4)}$$

в ряд Лорана в кольце $2 < |z| < 4$.

1. Частичные дроби

Разложим в простые дроби:

$$\frac{2}{(z-2)(z-4)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-4}.$$

Умножая на $(z-2)(z-4)$ и подставляя $z = 2$ и $z = 4$, получаем

$$2 = A(2-4) + B(2-2) = -2A \quad \Rightarrow \quad A = -1,$$

$$2 = A(4-4) + B(4-2) = 2B \quad \Rightarrow \quad B = 1.$$

Следовательно

$$f(z) = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-4}.$$

2. Разложение членов в ряды в кольце $2 < |z| < 4$

Разложим каждое слагаемое в степенные ряды по центру 0 (т.е. в степени по z) так, чтобы получившийся ряд сходился в интересующем нас кольце.

Первое слагаемое. Для $|z| > 2$ используем представление

$$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n-1},$$

серия сходится при $|2/z| < 1$, т.е. при $|z| > 2$.

Второе слагаемое. Для $|z| < 4$ применим геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-z/4} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}},$$

серия сходится при $|z/4| < 1$, т.е. при $|z| < 4$.

3. Сложение и запись ряда Лорана

Складывая обе разложения, получаем представление функции в виде ряда Лорана, действительного в пересечении областей сходимости обеих сумм, то есть в кольце $2 < |z| < 4$:

$$\boxed{f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n-1} \; - \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}, \qquad 2 < |z| < 4.}$$

Задание 7. Вычислить интеграл по кривой с помощью вычетов

Найти

$$\int_L (z+2)\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) dz, \qquad L = \{z : \ |z-1| = 2\},$$

ориентация контура против часовой стрелки.

Решение

Функция

$$f(z) = (z+2)\exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

аналитична всюду, кроме точки $z = 1$, где показатель содержит выражение $\dfrac{1}{1-z}$. Точка $z = 1$ лежит внутри контура L, а особенностей вне $z = 1$ в замкнутой области, ограниченной L, нет. Следовательно, по формуле Коши (методу вычетов)

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=1} f(z).$$

Осталось найти вычет $\operatorname{Res}_{z=1} f(z)$. Для удобства сделаем замену

$$w = z - 1 \quad \Longrightarrow \quad z = 1 + w, \qquad dz = dw,$$

и вычисляем вычет в точке $w = 0$:

$$f(z) = (z+2)\exp\Bigl(\frac{1}{1-z}\Bigr) = (1+w+2)\exp\Bigl(\frac{1}{-w}\Bigr) = (3+w)\,e^{-1/w}.$$

Нам требуется коэффициент при w^{-1} в разложении в ряд Лорана выражения $(3+w)e^{-1/w}$ около $w = 0$.

Разложение экспоненты в степени с обратной степенью даёт

$$e^{-1/w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,w^{-n}.$$

Умножая на $3 + w$, получаем

$$(3+w)e^{-1/w} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} w^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} w^{1-n}.$$

Теперь находим коэффициент при w^{-1}:

- В первом суммарном члене $3\sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n}{n!} w^{-n}$ вклад в w^{-1} даётся при $n = 1$:
$$3 \cdot \frac{(-1)^1}{1!} = 3 \cdot (-1) = -3.$$

- Во втором суммарном члене $\sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n}{n!} w^{1-n}$ вклад в w^{-1} даётся при $1 - n = -1$, т.е. $n = 2$:
$$\frac{(-1)^2}{2!} = \frac{1}{2}.$$

Суммируя, получаем вычет

$$\operatorname{Res}_{w=0}(3+w)e^{-1/w} = -3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Поскольку $w = z - 1$, это и есть $\operatorname{Res}_{z=1} f(z)$.

Наконец,

$$\boxed{\int_L (z+2)\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -5\pi i}$$

Задание 8. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+2}\, dx, \qquad a < 0.$$

Решение

Рассмотрим вспомогательный интеграл комплексной функции

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+2}\, dx.$$

Тогда искомый интеграл равен вещественной части этого комплексного интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+2}\, dx = \Re I(a).$$

Функция

$$F(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+2}$$

имеет простые полюса в точках решения $z^2 + 2 = 0$, т.е. в

$$z = \pm i\sqrt{2}.$$

Поскольку $a < 0$, при $z = x + iy$ имеем

$$e^{iaz} = e^{iax}e^{-ay},$$

и при $y \to -\infty$ показатель даёт экспоненциальное затухание (так как $-a > 0$), поэтому для применения леммы Джордана замыкаем контур по большой полуокружности в *нижней* полуплоскости. Тогда внутри контура окажется только полюс

$$z_0 = -i\sqrt{2}.$$

По теореме о вычетах (учитывая, что при замыкании в нижней полуплоскости ориентация круга противоположна положительной), имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+2}\,dx = -2\pi i\ \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{e^{iaz}}{z^2+2}.$$

Найдём вычет в $z_0 = -i\sqrt{2}$. Поскольку полюс простой, можно воспользоваться формулой

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{e^{iaz}}{(z-z_0)(z-z_1)} = \frac{e^{iaz_0}}{z_0 - z_1},$$

где $z_1 = i\sqrt{2}$. Подставляя, получаем

$$\operatorname{Res}_{z=-i\sqrt{2}} \frac{e^{iaz}}{z^2+2} = \frac{e^{ia(-i\sqrt{2})}}{-i\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \frac{e^{a\sqrt{2}}}{-2i\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+2}\,dx = -2\pi i \cdot \frac{e^{a\sqrt{2}}}{-2i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,e^{a\sqrt{2}}.$$

Поскольку правая часть — действительное число, вещественная часть равна самой правой части. Искомый интеграл:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,e^{a\sqrt{2}}, \qquad a < 0.}$$