

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Расчётно-графическая работа

Вариант № 7

Выполнили:

Караганов Павел
Шукаев Олег
Абрамов Егор
Евграфов Артём
Гузалов Тимур

Проверила:
Возианова А. В.

Задача 1. Пределы функции двух переменных

Условие: Вычислить повторные пределы и двойной предел функции $f(x, y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ в точке $M(0, 0)$.

Решение: 1) Повторные пределы:

$$L_{12} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{0}{x^2} \right) = 0$$

$$L_{21} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{0}{y^2} \right) = 0$$

Повторные пределы существуют и равны 0.

2) Двойной предел: перейдем к полярным координатам $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$. При $M \rightarrow (0, 0)$ имеем $r \rightarrow 0$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \phi \cdot r^3 \sin^3 \phi}{r^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^6 \cos^3 \phi \sin^3 \phi}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^4 \cos^3 \phi \sin^3 \phi$$

Так как $|\cos^3 \phi \sin^3 \phi| \leq 1$, а $r^4 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, то предел равен 0. Двойной предел существует и равен 0.

Задача 2. Линии уровня и поле градиента

Условие: Найдите и изобразите графически линии уровня и поле градиента функции:

$$z = |x| + y$$

1. Исследование линий уровня

Линия уровня функции двух переменных — это геометрическое место точек (x, y) , в которых функция принимает постоянное значение $z = C$ (где $C = \text{const}$). Для данной функции уравнение линии уровня имеет вид:

$$|x| + y = C \implies y = C - |x|$$

Это семейство функций представляет собой графики модуля, отраженные относительно оси Ox и смещенные вдоль оси Oy на величину C .

- При $x \geq 0$: $y = C - x$ (отрезок прямой с угловым коэффициентом $k = -1$);
- При $x < 0$: $y = C + x$ (отрезок прямой с угловым коэффициентом $k = 1$).

Геометрически линии уровня выглядят как «уголки» с вершинами в точках $(0, C)$, стороны которых направлены вниз под углом 45° к осям координат.

2. Построение поля градиента

Градиент функции $z(x, y)$ — это векторное поле, компонентами которого являются частные производные функции по соответствующим переменным:

$$\vec{\nabla} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Вычислим частные производные:

1. По переменной y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(|x| + y) = 1$$

2. По переменной x : функция $f(x) = |x|$ дифференцируема везде, кроме точки $x = 0$. Её производная выражается через функцию знака числа $\text{sgn}(x)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(|x| + y) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Таким образом, векторное поле градиента имеет вид:

$$\vec{\nabla} z = (\text{sgn}(x), 1)$$

3. Графическое представление

На рисунке ниже представлены линии уровня и векторы градиента, иллюстрирующие их ортогональность.

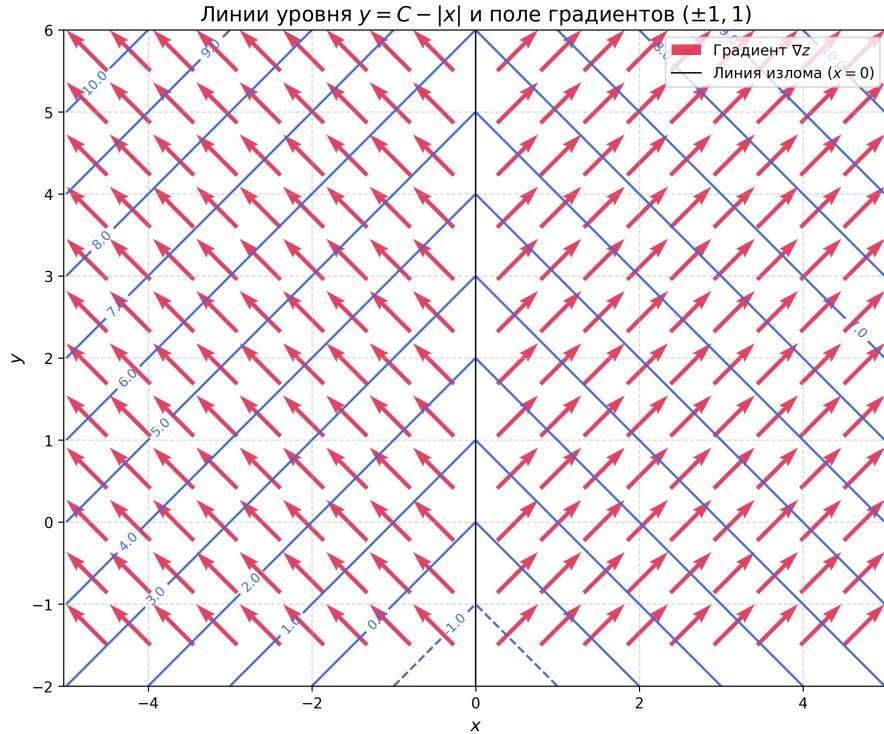


Рис. 1: Линии уровня $z = C - |x|$ и соответствующее поле градиентов.

Задача 3. Экстремумы функции

Условие: Данна функция двух переменных $z(x, y) = x^2 + 6x + y^2$. Требуется найти: а) локальные экстремумы; б) условные экстремумы на окружности $x^2 + y^2 = 1$ методом Лагранжа; в) глобальный максимум и минимум в замкнутой области $x^2 + y^2 \leq 1$.

а) Поиск локальных экстремумов

Для поиска стационарных точек вычислим частные производные первого порядка:

$$\begin{cases} z'_x = 2x + 6 = 0 \\ z'_y = 2y = 0 \end{cases} \implies M_0(-3, 0).$$

Проверим достаточное условие с помощью матрицы Гессе H :

$$H = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Определитель $\det(H) = 4 > 0$, а $z''_{xx} = 2 > 0$. Следовательно, $M_0(-3, 0)$ — точка **локального минимума**.

$$z_{\min} = z(-3, 0) = (-3)^2 + 6(-3) + 0 = -9.$$

б) Условный экстремум

Найдем экстремумы функции $z = x^2 + 6x + y^2$ при условии $x^2 + y^2 = 1$. Составим функцию Лагранжа, введя множитель λ :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + 6x + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Составим систему уравнений для поиска критических точек ($\mathcal{L}'_x = 0, \mathcal{L}'_y = 0, \mathcal{L}'_\lambda = 0$):

$$\begin{cases} 2x + 6 + 2\lambda x = 0 & (1) \\ 2y + 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Преобразуем уравнение (2): $2y(1 + \lambda) = 0$. Отсюда возможны два случая:

1. **Случай** $y = 0$: Подставим в (3): $x^2 + 0^2 = 1 \implies x = \pm 1$.

- При $x = 1$ из (1): $2 + 6 + 2\lambda = 0 \implies \lambda = -4$. Точка $P_1(1, 0)$.
- При $x = -1$ из (1): $-2 + 6 - 2\lambda = 0 \implies \lambda = 2$. Точка $P_2(-1, 0)$.

2. **Случай** $1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -1$: Подставим $\lambda = -1$ в (1): $2x + 6 - 2x = 0 \implies 6 = 0$. Противоречие. Данный случай невозможен.

Вычислим значения функции в найденных точках:

- $z(P_1) = z(1, 0) = 1^2 + 6(1) + 0^2 = 7$ (**условный максимум**)
- $z(P_2) = z(-1, 0) = (-1)^2 + 6(-1) + 0^2 = -5$ (**условный минимум**)

в) Глобальные экстремумы в области $x^2 + y^2 \leq 1$

Согласно **второй теореме Вейерштрасса**, непрерывная функция на компактном множестве обязательно достигает своего глобального максимума и минимума. Область $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ является замкнутым кругом (компактом). Глобальные экстремумы могут находиться либо в критических точках внутри области, либо на её границе.

1. **Внутри области:** Единственная стационарная точка $M_0(-3, 0)$ лежит вне круга, так как $x^2 + y^2 = (-3)^2 + 0^2 = 9 > 1$. Значит, внутри области стационарных точек нет.
2. **На границе:** Граница области — это окружность $x^2 + y^2 = 1$. Исследование, проведенное в пункте (б) методом Лагранжа, показало, что экстремальные значения на этой границе равны 7 и -5.

Ответ: Так как внутри области критических точек нет, по теореме Вейерштрасса глобальные значения достигаются на границе.

$$\max_D z = 7, \quad \min_D z = -5.$$

Задача 4. Двойной интеграл по определению

Условие: Вычислить $\iint_D (x^3 + y^3) dx dy$, $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

Решение: Разбиение на квадраты со стороной $1/n$. Точки $(x_i, y_j) = (i/n, j/n)$. $\Delta S = 1/n^2$. Интегральная сумма:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{i}{n} \right)^3 + \left(\frac{j}{n} \right)^3 \right) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^5} \left[n \sum_{i=1}^n i^3 + n \sum_{j=1}^n j^3 \right] = \frac{2}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3$$

Используем формулу $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$:

$$S_n = \frac{2}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

Переходя к пределу: $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \frac{1}{2}$.

Задача 5. Векторное поле

Условие: Дано векторное поле $\vec{H} = (x \cos(x^2 + y^2); y \cos(x^2 + y^2))$.

а) Проверка потенциальности поля

Пусть $P(x, y) = x \cos(x^2 + y^2)$ и $Q(x, y) = y \cos(x^2 + y^2)$. Поле потенциально, если выполняется условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \cdot (-\sin(x^2 + y^2)) \cdot 2y = -2xy \sin(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y \cdot (-\sin(x^2 + y^2)) \cdot 2x = -2xy \sin(x^2 + y^2)$$

Условие выполнено, следовательно, поле **потенциально**.

б) Уравнения векторных линий

Дифференциальное уравнение векторных линий:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} \implies \frac{dx}{x \cos(x^2 + y^2)} = \frac{dy}{y \cos(x^2 + y^2)}$$

Сокращая на $\cos(x^2 + y^2)$ (при условии $\neq 0$), получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \implies \ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \implies y = Cx$$

Векторные линии представляют собой семейство **прямых, проходящих через начало координат**.

в) Нахождение потенциала поля

Поскольку в пункте (а) было доказано, что поле потенциально, криволинейный интеграл $\int \vec{H} d\vec{r}$ не зависит от формы пути, а зависит только от начальной и конечной точек. Это позволяет нам вычислить потенциал $U(x, y)$ по формуле:

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$$

Для удобства расчетов выберем в качестве начальной точки начало координат $(0, 0)$ и будем двигаться к точке (x, y) по ломаной: сначала вдоль оси Ox до точки $(x, 0)$, а затем вертикально вдоль оси Oy до точки (x, y) .

1. **Первый участок: от $(0, 0)$ до $(x, 0)$.** Здесь $y = 0$, следовательно, дифференциал $dy = 0$. Переменная x меняется от 0 до x . Подставляем эти значения в $P(x, y)$:

$$I_1 = \int_0^x P(t, 0) dt = \int_0^x t \cos(t^2 + 0^2) dt = \int_0^x t \cos(t^2) dt$$

Для вычисления используем метод подстановки. Пусть $u = t^2$, тогда $du = 2tdt$, откуда $tdt = \frac{1}{2}du$:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \cos(u)du = \frac{1}{2} \sin(u) = \left[\frac{1}{2} \sin(t^2) \right]_0^x = \frac{1}{2} \sin(x^2)$$

2. Второй участок: от $(x, 0)$ до (x, y) . Здесь координата x фиксирована, следовательно, дифференциал $dx = 0$. Переменная y меняется от 0 до y . Подставляем это в $Q(x, y)$:

$$I_2 = \int_0^y Q(x, t)dt = \int_0^y t \cos(x^2 + t^2)dt$$

Здесь также используем подстановку. Пусть $v = x^2 + t^2$. Поскольку на этом этапе x — константа, то $dv = 2tdt$, откуда $tdt = \frac{1}{2}dv$:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \cos(v)dv = \frac{1}{2} \sin(v) = \left[\frac{1}{2} \sin(x^2 + t^2) \right]_0^y = \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \sin(x^2)$$

3. Итоговый потенциал: Складываем результаты интегрирования по двум участкам:

$$U(x, y) = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \sin(x^2) + \left(\frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \sin(x^2) \right) = \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2)$$

С учетом произвольной константы интегрирования получаем общий вид потенциала:

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2) + C$$

г) Линии уровня и ортогональность

Линии уровня потенциала (эквипотенциальные линии):

$$U(x, y) = \text{const} \implies \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2) = C_1 \implies x^2 + y^2 = R^2$$

Это семейство **концентрических окружностей**. Поскольку векторные линии — это радиусы ($y = Cx$), они всегда перпендикулярны окружностям в точках пересечения.

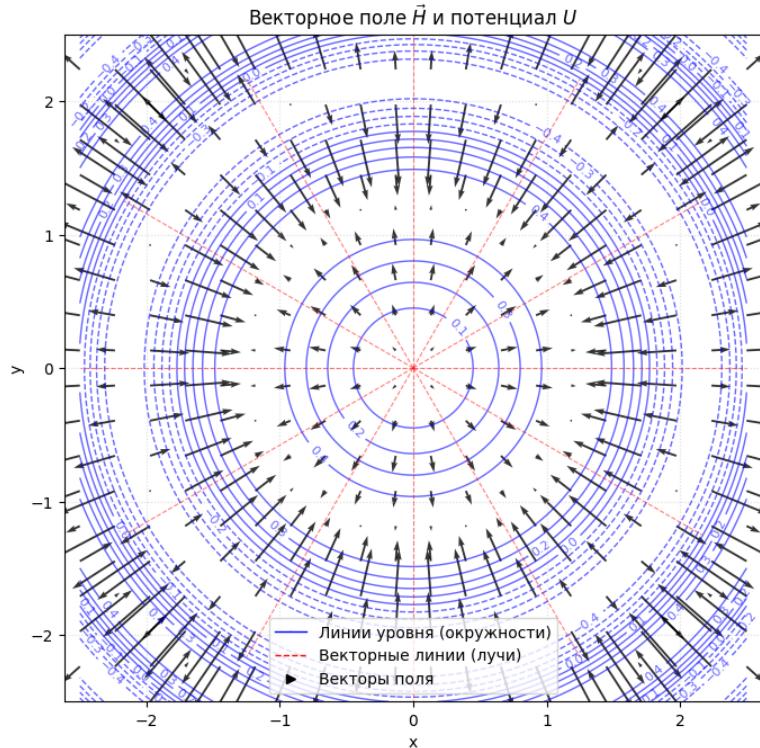


Рис. 2: Ортогональность векторных линий (лучи) и линий уровня потенциала (окружности).

д) Работа поля

Зафиксируем точки на векторной линии $y = 0$ (ось Ox): $A(0, 0)$ и $B(\sqrt{\pi}/2, 0)$. Работа поля равна разности потенциалов:

$$W = U(B) - U(A) = \frac{1}{2} \sin \left(\left(\sqrt{\pi/2} \right)^2 + 0 \right) - \frac{1}{2} \sin(0) = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Задача 6. Поток векторного поля

Условие: Дано тело T , ограниченное поверхностями:

- Плоскостью $z - y = 1$;
- Цилиндром $x^2 + y^2 = 1$;
- Поверхностью, полученной вращением дуги CED вокруг оси Oz (согласно уравнению $x^2 + y^2 - z = 2$).

Вычислить поток поля $\vec{a} = \left(\frac{1}{1+y^2+z^2}; e^{x+z}; -4z \right)$ через боковую поверхность, образованную вращением дуги CED , в направлении внешней нормали.

1. Анализ геометрии и изображение тела

На основании представленного сечения Oyz :

1. **Верхняя граница:** Прямая BF проходит через точки $B(-1, 0)$ и $F(1, 2)$, что соответствует уравнению плоскости $z = y + 1$.
2. **Боковые стенки:** Отрезки BC и EF лежат на линиях $y = \pm 1$, что соответствует цилиндру $x^2 + y^2 = 1$.
3. **Нижняя поверхность:** Дуга CED в плоскости Oyz ($x = 0$) задается уравнением $z = y^2 - 2$. При вращении вокруг оси Oz (замена y^2 на $x^2 + y^2$) получаем чашу параболоида:

$$S : z = x^2 + y^2 - 2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

Тело T

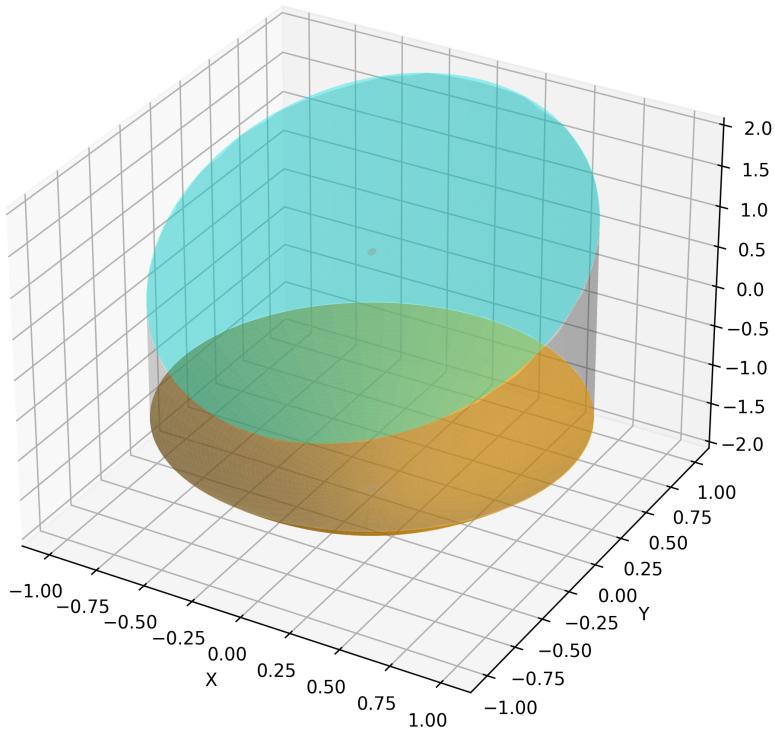


Рис. 3: Визуализация тела T : цилиндр со срезанным верхом и параболическим дном.

2. Вычисление потока

Поверхность S задана явно: $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2$. Вектор внешней нормали к телу T на этой нижней границе направлен «вниз»:

$$\vec{n}dS = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right) dxdy = (2x, 2y, -1) dxdy$$

Поток Φ вычисляется как поверхностный интеграл второго рода по проекции D (единичный круг $x^2 + y^2 \leq 1$):

$$\Phi = \iint_D \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \left[\frac{2x}{1+y^2+z^2} + 2ye^{x+z} + (-4z)(-1) \right] dxdy$$

Воспользуемся свойствами симметрии области D (круг симметричен относительно осей Ox и Oy):

1. **Первая компонента:** Функция $f_1(x, y) = \frac{2x}{1+y^2+(x^2+y^2-2)^2}$ является нечётной по x . Интеграл по симметричному кругу равен 0.
2. **Вторая компонента:** Функция $f_2(x, y) = 2ye^{x+(x^2+y^2-2)}$ является нечётной по y . Интеграл по симметричному кругу равен 0.
3. **Третья компонента:** Остается вычислить $\iint_D 4z dxdy$, где $z = x^2 + y^2 - 2$.

Перейдем к полярным координатам ($x^2 + y^2 = r^2$, $dxdy = rdrd\phi$):

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 4(r^2 - 2)r dr = 8\pi \int_0^1 (r^3 - 2r) dr = 8\pi \left[\frac{r^4}{4} - r^2 \right]_0^1$$

$$\Phi = 8\pi \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = 8\pi \left(-\frac{3}{4} \right) = -6\pi$$

Ответ: Поток поля через нижнюю поверхность параболоида равен -6π .

Задача 7. Сила притяжения

Условие задачи: Найти силу притяжения однородным шаровым сектором плотности ρ материальной точки с массой $m_0 = 1$, помещённой на его вершине, если радиус шаровой поверхности равен R , а угол осевого сечения равен 2α .

1. Математическая модель

Для решения задачи используется следующая модель:

1. **Закон всемирного тяготения.** Сила взаимодействия между двумя точечными массами определяется формулой:

$$dF = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G — гравитационная постоянная. В нашем случае $m_1 = m_0 = 1$ (материальная точка), а $m_2 = dm$ (элемент массы сектора).

2. **Интегрирование по объему.** Шаровой сектор рассматривается как сплошное тело, состоящее из множества элементарных масс dm . Полная сила притяжения вычисляется как интеграл от элементарных сил, действующих со стороны каждого элемента объема dV , по всему объему тела V .
3. **Симметрия.** Тело обладает осевой симметрией относительно оси OZ . Это означает, что компоненты сил, перпендикулярные оси симметрии, взаимно компенсируются. Результирующий вектор силы будет направлен вдоль оси симметрии сектора.

2. Схема задачи

На рисунке ниже представлена схема задачи: шаровой сектор, система координат, элементарный объем и действующие силы.

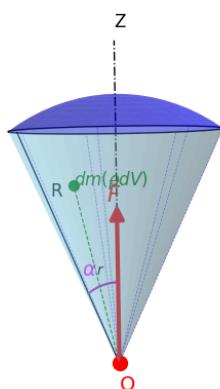


Схема: Шаровой сектор и сила притяжения F в вершине O

3. Решение задачи

1. Выбор системы координат.

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) , где начало координат O совпадает с вершиной сектора (местоположением точки m_0). Ось Z (от которой отсчитывается угол θ) направим вдоль оси симметрии сектора.

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

2. Определение элемента массы.

Элемент объема равен:

$$dV = dx dy dz$$

При переходе в сферические координаты:

$$dV = |J| dr d\theta d\varphi$$

Якобиан перехода равен:

$$|J| = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$|J| = \cos \theta \cdot \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} - (-r \sin \theta) \cdot \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

Элемент объема в сферических координатах равен:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Так как тело однородно, элементарная масса dm :

$$dm = \rho dV = \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

3. Элементарная сила.

Сила притяжения, создаваемая элементом dm , действующая на массу $m_0 = 1$, по модулю равна:

$$|d\mathbf{F}| = G \frac{1 \cdot dm}{r^2} = G \frac{\rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}{r^2} = G \rho \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

4. Проекция на ось симметрии.

Вектор силы $d\mathbf{F}$ направлен от начала координат к элементу dm . Нас интересует проекция силы на ось Z , так как результирующая сила направлена вдоль неё:

$$dF_z = |d\mathbf{F}| \cos \theta = G \rho \sin \theta \cos \theta dr d\theta d\varphi$$

5. Интегрирование.

Пределы интегрирования для шарового сектора:

- По радиусу r : от 0 до R .
- По углу φ : от 0 до 2π .

- По углу θ : от 0 до α (так как угол осевого сечения равен 2α , то угол между осью и образующей равен α).

Полная сила F равна:

$$F = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_0^\alpha G\rho \sin \theta \cos \theta d\theta$$

Вычислим интегралы последовательно. Интеграл по φ :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

Интеграл по r :

$$\int_0^R dr = R$$

Интеграл по θ . Воспользуемся формулой $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \sin \theta \cos \theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^\alpha \sin(2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^\alpha \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos(2\alpha)) \end{aligned}$$

Используя формулу $1 - \cos(2\alpha) = 2 \sin^2 \alpha$, получаем:

$$\frac{1}{4} \cdot 2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$

6. Итоговый результат.

Перемножая полученные значения, находим величину силы:

$$F = 2\pi \cdot R \cdot G\rho \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$

$$F = \pi G\rho R \sin^2 \alpha$$

Ответ: Сила притяжения равна $F = \pi G\rho R \sin^2 \alpha$. Вектор силы направлен вдоль оси симметрии сектора.

Задача 8. Атлас многообразия

Любое гладкое многообразие M размерности n имеет атлас, у которого каждая карта диффеоморфна всему евклидову пространству \mathbb{R}^n .

Доказательство

Пусть M — гладкое многообразие. Обозначим через \mathcal{A} его максимальный гладкий атлас. Наша цель — построить новый атлас $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$, такой что $\psi_\beta(V_\beta) = \mathbb{R}^n$, и все ψ_β являются гладкими относительно структуры M .

Шаг 1. Локализация и сужение карт

Рассмотрим произвольную точку $p \in M$. Так как M — многообразие, существует карта $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, содержащая p , где $\varphi : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм на открытое множество W .

Пусть $x_0 = \varphi(p)$. В силу открытости W , существует $\varepsilon > 0$, такое что открытый шар $B_\varepsilon(x_0) \subset W$. Определим окрестность V_p как полный прообраз этого шара:

$$V_p := \varphi^{-1}(B_\varepsilon(x_0)).$$

Так как φ непрерывно, V_p открыто в M . Определим отображение $\tilde{\varphi} = \varphi|_{V_p}$. Пара $(V_p, \tilde{\varphi})$ является картой, гладко согласованной с исходным атласом \mathcal{A} (так как это просто ограничение существующей гладкой карты на открытое подмножество). Следовательно, $\tilde{\varphi} : V_p \rightarrow B_\varepsilon(x_0)$ является **диффеоморфизмом**.

Шаг 2. Диффеоморфизм шара на \mathbb{R}^n

Построим отображение, растягивающее шар $B_\varepsilon(x_0)$ на всё пространство. Рассмотрим композицию $F_p = H \circ T$, где:

1. Сдвиг. $T(y) = y - x_0$ переводит $B_\varepsilon(x_0)$ в $B_\varepsilon(0)$. Это диффеоморфизм.

2. Растижение. Функция $H : B_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ задана формулой:

$$H(z) = \frac{\varepsilon z}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|z\|^2}}.$$

Это гладкое отображение, так как знаменатель не обращается в ноль внутри шара.

Построение обратного отображения. Выразим z через $w = H(z)$. Возьмем нормы:

$$\|w\| = \frac{\varepsilon \|z\|}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|z\|^2}} \implies \varepsilon^2 \|w\|^2 = \|z\|^2 (\varepsilon^2 + \|w\|^2).$$

Отсюда выражаем норму прообраза:

$$\|z\| = \frac{\varepsilon \|w\|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \|w\|^2}}.$$

Подставляя это в исходное соотношение коллинеарности векторов, получаем обратное отображение $G(w)$:

$$z = G(w) = \frac{\varepsilon w}{\sqrt{\varepsilon^2 + \|w\|^2}}.$$

Очевидно, G — гладкое отображение на всём \mathbb{R}^n . Следовательно, H (и композиция F_p) является **диффеоморфизмом**.

Шаг 3. Построение искомого атласа

Для каждой точки $p \in M$ определим новую карту (V_p, ψ_p) по формуле:

$$\psi_p = F_p \circ \tilde{\varphi}.$$

Проанализируем свойства этого отображения:

1. **Образ:** $\psi_p(V_p) = F_p(B_\varepsilon(x_0)) = \mathbb{R}^n$.

2. **Гладкость:** Отображение ψ_p является композицией двух диффеоморфизмов:

$$V_p \xrightarrow{\tilde{\varphi}} B_\varepsilon(x_0) \xrightarrow{F_p} \mathbb{R}^n.$$

Композиция диффеоморфизмов есть диффеоморфизм.

Таким образом, отображение ψ_p является диффеоморфизмом открытого множества $V_p \subset M$ на \mathbb{R}^n (относительно гладкой структуры M). Это автоматически означает, что карта (V_p, ψ_p) гладко согласована с максимальным атласом \mathcal{A} .

Сформируем искомый атлас как семейство всех таких карт:

$$\mathcal{B} = \{(V_p, \psi_p) \mid p \in M\}.$$

Так как $p \in V_p$ для любой точки, \mathcal{B} покрывает M . Функции перехода между картами этого атласа являются композициями диффеоморфизмов, а значит, гладкими (C^∞).

Заключение

Атлас \mathcal{B} удовлетворяет всем условиям задачи: он гладкий, и каждая карта в нём диффеоморфна евклидову пространству \mathbb{R}^n .

□

Задача 9. Минимум суммы квадратов расстояний

Условие: Определить положение точки относительно вершин треугольника так, чтобы сумма квадратов расстояний от этой точки до вершин треугольника была наименьшей.

1. Математическая постановка задачи

Пусть вершины треугольника заданы своими координатами в декартовой системе координат: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Обозначим искомую точку как $M(x, y)$.

Расстояние от точки M до каждой из вершин определяется по формуле расстояния между двумя точками. Квадраты этих расстояний равны:

$$\begin{aligned}d_1^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \\d_2^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \\d_3^2 &= (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2\end{aligned}$$

Функция $S(x, y)$, которую необходимо минимизировать, представляет собой сумму этих квадратов:

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^3 [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]$$

2. Поиск критических точек

Для нахождения экстремума функции двух переменных вычислим её частные производные первого порядка по x и по y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial x} &= 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + 2(x - x_3) \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= 2(y - y_1) + 2(y - y_2) + 2(y - y_3)\end{aligned}$$

Приравняем частные производные к нулю для поиска стационарных точек:

$$\begin{cases} 2(3x - (x_1 + x_2 + x_3)) = 0 \\ 2(3y - (y_1 + y_2 + y_3)) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases}$$

Мы получили единственную стационарную точку $M_0(\bar{x}, \bar{y})$.

3. Проверка на минимум

Для подтверждения того, что найденная точка является точкой минимума, вычислим вторые частные производные:

$$A = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 6, \quad B = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 6$$

Проверим достаточное условие экстремума:

$$AC - B^2 = 6 \cdot 6 - 0^2 = 36$$

Так как $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, в точке M_0 действительно достигается **локальный минимум**. Поскольку функция $S(x, y)$ является квадратичной и стремится к бесконечности при удалении точки M от начала координат, этот минимум является глобальным.

Ответ: Сумма квадратов расстояний до вершин треугольника минимальна, когда точка совпадает с точкой пересечения медиан этого треугольника.