Двумерное нормальное распределение.

Лекция 8

Двумерное нормальное распределение

Случайный вектор (ξ, η) непрерывного типа распределён по нормальному закону, если плотность совместного распределения равна

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}Q(x,y)\right\},$$

где

$$Q(x,y) = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\,\frac{x-m_1}{\sigma_1}\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right].$$

Обозначим

$$u = \frac{x-m_1}{\sigma_1}, \quad v = \frac{y-m_2}{\sigma_2}.$$

Тогда

$$Q(x,y) = \frac{1}{1-\rho^2}(u^2+v^2-2\rho uv).$$

Двумерное нормальное распределение

Найдём одномерные плотности распределений случайных величин ξ и η. Сначала ищем p_ξ:

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-Q(x,y)/2\}\,dy.$$

Перейдём к переменной интегрирования v. Так как $dy = \sigma_2 dv$ и

$$Q = \frac{u^2+v^2-2\rho uv}{1-\rho^2} = \frac{u^2+(v-\rho u)^2-\rho^2u^2}{1-\rho^2} = u^2 + \frac{(v-\rho u)^2}{1-\rho^2},$$

то

$$p_\xi(x) = \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dv.$$

Двумерное нормальное распределение

Делаем в этом интеграле замену:

$$v = \rho u + z\sqrt{1-\rho^2}, \quad dv = \sqrt{1-\rho^2}dz.$$

Получаем

$$p_\xi(x) = \frac{e^{-u^2/2}}{2\pi\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz = \frac{e^{-u^2/2}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}.$$

Аналогичная формула справедлива и для $p_\eta(y)$.

Мы видим, что случайные величины ξ и η имеют нормальные распределения с параметрами (m_1, σ_1) и (m_2, σ_2).

Двумерное нормальное распределение

Найдём ковариацию cov(ξ, η). Имеем

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_1)(y-m_2)\,p(x,y)\,dx\,dy=$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_1)(y-m_2)\,\exp\left\{-Q(x,y)/2\right\}\,dx\,dy.$$

Перейдём к переменным интегрирования u и v.

$$u=\frac{x-m_1}{\sigma_1},\quad v=\frac{y-m_2}{\sigma_2}.$$

Получим

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-Q/2}v\,dv\right\}u\,du.$$

Двумерное нормальное распределение

Рассмотрим внутренний интеграл: $$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-Q/2} v\, dv.$$

Используя

$$Q = \frac{u^2 + v^2 - 2\rho uv}{1-\rho^2} = \frac{u^2 + (v-\rho u)^2 - \rho^2 u^2}{1-\rho^2} = u^2 + \frac{(v-\rho u)^2}{1-\rho^2},$$

получим

$$g(u) = \mathrm{e}^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} v \exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dv.$$

Сделаем замену: $$z = \frac{v-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad dv = \sqrt{1-\rho^2}\, dz.$$

Следовательно, $$g(u) = \sqrt{1-\rho^2}\, \mathrm{e}^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} (z\sqrt{1-\rho^2} + \rho u) \mathrm{e}^{-z^2/2} dz.$$

Двумерное нормальное распределение

Так как интеграл по нечётной функции $z\mathrm{e}^{-z^2/2}$ равен нулю, то получаем

$$g(u) = \sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho u\,\mathrm{e}^{-u^2/2}.$$

Таким образом

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u^2\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,du = \rho\sigma_1\sigma_2.$$

Итак

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m_1)^2/2\sigma_1^2}, \quad p_\eta(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-(y-m_2)^2/2\sigma_1^2},$$

$$m_1 = \mathsf{M}\xi, \quad m_2 = \mathsf{M}\eta, \quad \sigma_1^2 = \mathsf{D}\xi, \quad \sigma_2^2 = \mathsf{D}\eta, \quad \rho = \rho(\xi,\eta).$$

Заметим, что если случайные величины ξ и η некоррелированы, т. е. ρ = 0, то $p(x,y) = p_\xi(x)p_\eta(y)$. Следовательно, ξ и η независимы.

Двумерное нормальное распределение

Используя формулы плотности условного распределения вероятностей случайной величины η при условии ξ = x

$$p_{\eta|\xi}(y\,|\,\xi = x) = p_{\eta|\xi}(y\,|\,x) = \frac{p(x, y)}{p_\xi(x)}, \quad p_\xi(x) > 0$$

и плотности нормального двумерного распределения

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}Q(x, y)\right\},$$

где

$$Q(x, y) = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{x-m_1}{\sigma_1}\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right]$$

найдём условную плотность $p_{\eta\,|\,\xi}(y\,|\,x)$.

Двумерное нормальное распределение

Имеем плотность условного распределения вероятностей случайной величины η при условии ξ = x

$$p_{\eta\,|\,\xi}(y\,|\,x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}.$$

В силу симметрии

$$p_{\xi\,|\,\eta}(x\,|\,y) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}.$$

Двумерное нормальное распределение

Найдём регрессию случайной величины η на случайную величину ξ. Имеем

$$\mathsf{M}(\eta\,|\,\xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, p_{\eta\,|\,\xi}(y\,|\,x)\, dy.$$

Перейдём к переменной интегрирования v. Получим

$$\mathsf{M}(\eta\,|\,\xi = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_2 v + m_2) \exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dv.$$

В результате

$$\mathsf{M}(\eta\,|\,\xi = x) = \sigma_2 \rho u + m_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x - m_1) + m_2.$$

Аналогичная формула справедлива и для регрессии величины ξ на η.

Двумерное нормальное распределение

Итак, в результате

$$\mathsf{M}(\eta \mid x) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho (x - m_1) + m_2$$

$$\mathsf{M}(\xi \mid y) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \rho (y - m_2) + m_1.$$

Таким образом, из этих формул следует, что регрессия нормально распределённой системы случайных величин (ξ, η) всегда линейна.