

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

**«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

## Расчётно-графическая работа

Вариант № 7

Выполнили:  
Караганов Павел  
Шукаев Олег  
Абрамов Егор  
Евграфов Артём  
Гузалов Тимур

Проверила:  
Возианова А. В.

## Задача 1. Пределы функции двух переменных

**Условие:** Вычислить повторные пределы и двойной предел функции  $f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$  в точке  $M(0, 0)$ .

**Решение:** 1) Повторные пределы:

$$L_{12} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{0}{x^2} \right) = 0$$

$$L_{21} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{0}{y^2} \right) = 0$$

Повторные пределы существуют и равны 0.

2) Двойной предел: перейдем к полярным координатам  $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$ . При  $M \rightarrow (0, 0)$  имеем  $r \rightarrow 0$ .

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \phi \cdot r^3 \sin^3 \phi}{r^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^6 \cos^3 \phi \sin^3 \phi}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^4 \cos^3 \phi \sin^3 \phi$$

Так как  $|\cos^3 \phi \sin^3 \phi| \leq 1$ , а  $r^4 \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ , то предел равен 0. Двойной предел существует и равен 0.

## Задача 2. Линии уровня и поле градиента

**Условие:** Найдите и изобразите графически линии уровня и поле градиента функции:

$$z = |x| + y$$

### 1. Исследование линий уровня

Линия уровня функции двух переменных — это геометрическое место точек  $(x, y)$ , в которых функция принимает постоянное значение  $z = C$  (где  $C = \text{const}$ ). Для данной функции уравнение линии уровня имеет вид:

$$|x| + y = C \implies y = C - |x|$$

Это семейство функций представляет собой графики модуля, отраженные относительно оси  $Ox$  и смещенные вдоль оси  $Oy$  на величину  $C$ .

- При  $x \geq 0$ :  $y = C - x$  (отрезок прямой с угловым коэффициентом  $k = -1$ );
- При  $x < 0$ :  $y = C + x$  (отрезок прямой с угловым коэффициентом  $k = 1$ ).

Геометрически линии уровня выглядят как «уголки» с вершинами в точках  $(0, C)$ , стороны которых направлены вниз под углом  $45^\circ$  к осям координат.

### 2. Построение поля градиента

Градиент функции  $z(x, y)$  — это векторное поле, компонентами которого являются частные производные функции по соответствующим переменным:

$$\vec{\nabla} z = \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Вычислим частные производные:

1. По переменной  $y$ :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(|x| + y) = 1$$

2. По переменной  $x$ : функция  $f(x) = |x|$  дифференцируема везде, кроме точки  $x = 0$ . Её производная выражается через функцию знака числа  $\text{sgn}(x)$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(|x| + y) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Таким образом, векторное поле градиента имеет вид:

$$\vec{\nabla} z = (\text{sgn}(x), 1)$$

### 3. Графическое представление

На рисунке ниже представлены линии уровня и векторы градиента, иллюстрирующие их ортогональность.

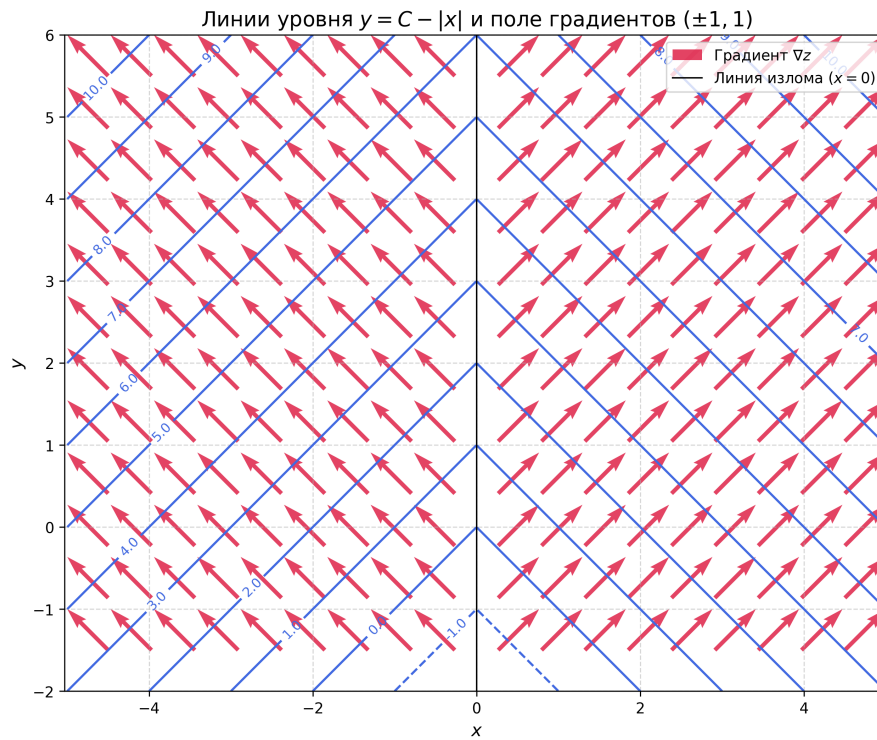


Рис. 1: Линии уровня  $z = C - |x|$  и соответствующее поле градиентов.

### Задача 3. Экстремумы функции

**Условие:** Дана функция двух переменных  $z(x, y) = x^2 + 6x + y^2$ . Требуется найти: а) локальные экстремумы; б) условные экстремумы на окружности  $x^2 + y^2 = 1$  методом Лагранжа; в) глобальный максимум и минимум в замкнутой области  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

#### а) Поиск локальных экстремумов

Для поиска стационарных точек вычислим частные производные первого порядка:

$$\begin{cases} z'_x = 2x + 6 = 0 \\ z'_y = 2y = 0 \end{cases} \implies M_0(-3, 0).$$

Проверим достаточное условие с помощью матрицы Гессе  $H$ :

$$H = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Определитель  $\det(H) = 4 > 0$ , а  $z''_{xx} = 2 > 0$ . Следовательно,  $M_0(-3, 0)$  — точка **локального минимума**.

$$z_{min} = z(-3, 0) = (-3)^2 + 6(-3) + 0 = -9.$$

#### б) Условный экстремум

Найдем экстремумы функции  $z = x^2 + 6x + y^2$  при условии  $x^2 + y^2 = 1$ . Составим функцию Лагранжа, введя множитель  $\lambda$ :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + 6x + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Составим систему уравнений для поиска критических точек ( $\mathcal{L}'_x = 0, \mathcal{L}'_y = 0, \mathcal{L}'_\lambda = 0$ ):

$$\begin{cases} 2x + 6 + 2\lambda x = 0 & (1) \\ 2y + 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Преобразуем уравнение (2):  $2y(1 + \lambda) = 0$ . Отсюда возможны два случая:

1. **Случай**  $y = 0$ : Подставим в (3):  $x^2 + 0^2 = 1 \implies x = \pm 1$ .

- При  $x = 1$  из (1):  $2 + 6 + 2\lambda = 0 \implies \lambda = -4$ . Точка  $P_1(1, 0)$ .
- При  $x = -1$  из (1):  $-2 + 6 - 2\lambda = 0 \implies \lambda = 2$ . Точка  $P_2(-1, 0)$ .

2. **Случай**  $1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -1$ : Подставим  $\lambda = -1$  в (1):  $2x + 6 - 2x = 0 \implies 6 = 0$ . Противоречие. Данный случай невозможен.

Вычислим значения функции в найденных точках:

- $z(P_1) = z(1, 0) = 1^2 + 6(1) + 0^2 = 7$  (**условный максимум**)
- $z(P_2) = z(-1, 0) = (-1)^2 + 6(-1) + 0^2 = -5$  (**условный минимум**)

### в) Глобальные экстремумы в области $x^2 + y^2 \leq 1$

Согласно **второй теореме Вейерштрасса**, непрерывная функция на компактном множестве обязательно достигает своего глобального максимума и минимума. Область  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  является замкнутым кругом (компактом). Глобальные экстремумы могут находиться либо в критических точках внутри области, либо на её границе.

1. **Внутри области:** Единственная стационарная точка  $M_0(-3, 0)$  лежит вне круга, так как  $x^2 + y^2 = (-3)^2 + 0^2 = 9 > 1$ . Значит, внутри области стационарных точек нет.
2. **На границе:** Граница области — это окружность  $x^2 + y^2 = 1$ . Исследование, проведенное в пункте (б) методом Лагранжа, показало, что экстремальные значения на этой границе равны 7 и  $-5$ .

**Ответ:** Так как внутри области критических точек нет, по теореме Вейерштрасса глобальные значения достигаются на границе.

$$\max_D z = 7, \quad \min_D z = -5.$$

## Задача 4. Двойной интеграл по определению

**Условие:** Вычислить  $\iint_D (x^3 + y^3) dx dy$ ,  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ .

**Решение:** Разбиение на квадраты со стороной  $1/n$ . Точки  $(x_i, y_j) = (i/n, j/n)$ .  $\Delta S = 1/n^2$ . Интегральная сумма:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \left( \frac{i}{n} \right)^3 + \left( \frac{j}{n} \right)^3 \right) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^5} \left[ n \sum_{i=1}^n i^3 + n \sum_{j=1}^n j^3 \right] = \frac{2}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3$$

Используем формулу  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ :

$$S_n = \frac{2}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

Переходя к пределу:  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \frac{1}{2}$ .

## Задача 5. Векторное поле

**Условие:** Дано векторное поле  $\vec{H} = (x \cos(x^2 + y^2); y \cos(x^2 + y^2))$ .

### а) Проверка потенциальности поля

Пусть  $P(x, y) = x \cos(x^2 + y^2)$  и  $Q(x, y) = y \cos(x^2 + y^2)$ . Поле потенциально, если выполняется условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \cdot (-\sin(x^2 + y^2)) \cdot 2y = -2xy \sin(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y \cdot (-\sin(x^2 + y^2)) \cdot 2x = -2xy \sin(x^2 + y^2)$$

Условие выполнено, следовательно, поле **потенциально**.

### б) Уравнения векторных линий

Дифференциальное уравнение векторных линий:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} \implies \frac{dx}{x \cos(x^2 + y^2)} = \frac{dy}{y \cos(x^2 + y^2)}$$

Сокращая на  $\cos(x^2 + y^2)$  (при условии  $\neq 0$ ), получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \implies \ln |y| = \ln |x| + \ln |C| \implies y = Cx$$

Векторные линии представляют собой семейство **прямых, проходящих через начало координат**.

### в) Нахождение потенциала поля

Поскольку в пункте (а) было доказано, что поле потенциально, криволинейный интеграл  $\int \vec{H} d\vec{r}$  не зависит от формы пути, а зависит только от начальной и конечной точек. Это позволяет нам вычислить потенциал  $U(x, y)$  по формуле:

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$$

Для удобства расчетов выберем в качестве начальной точки начало координат  $(0, 0)$  и будем двигаться к точке  $(x, y)$  по ломаной: сначала вдоль оси  $Ox$  до точки  $(x, 0)$ , а затем вертикально вдоль оси  $Oy$  до точки  $(x, y)$ .

1. **Первый участок: от  $(0, 0)$  до  $(x, 0)$ .** Здесь  $y = 0$ , следовательно, дифференциал  $dy = 0$ . Переменная  $x$  меняется от 0 до  $x$ . Подставляем эти значения в  $P(x, y)$ :

$$I_1 = \int_0^x P(t, 0) dt = \int_0^x t \cos(t^2 + 0^2) dt = \int_0^x t \cos(t^2) dt$$

Для вычисления используем метод подстановки. Пусть  $u = t^2$ , тогда  $du = 2tdt$ , откуда  $tdt = \frac{1}{2}du$ :

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \cos(u) du = \frac{1}{2} \sin(u) = \left[ \frac{1}{2} \sin(t^2) \right]_0^x = \frac{1}{2} \sin(x^2)$$

**2. Второй участок: от  $(x, 0)$  до  $(x, y)$ .** Здесь координата  $x$  фиксирована, следовательно, дифференциал  $dx = 0$ . Переменная  $y$  меняется от 0 до  $y$ . Подставляем это в  $Q(x, y)$ :

$$I_2 = \int_0^y Q(x, t) dt = \int_0^y t \cos(x^2 + t^2) dt$$

Здесь также используем подстановку. Пусть  $v = x^2 + t^2$ . Поскольку на этом этапе  $x$  — константа, то  $dv = 2tdt$ , откуда  $tdt = \frac{1}{2}dv$ :

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \cos(v) dv = \frac{1}{2} \sin(v) = \left[ \frac{1}{2} \sin(x^2 + t^2) \right]_0^y = \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \sin(x^2)$$

**3. Итоговый потенциал:** Складываем результаты интегрирования по двум участкам:

$$U(x, y) = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \sin(x^2) + \left( \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \sin(x^2) \right) = \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2)$$

С учетом произвольной константы интегрирования получаем общий вид потенциала:

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2) + C$$

## г) Линии уровня и ортогональность

Линии уровня потенциала (экипотенциальные линии):

$$U(x, y) = \text{const} \implies \frac{1}{2} \sin(x^2 + y^2) = C_1 \implies x^2 + y^2 = R^2$$

Это семейство **концентрических окружностей**. Поскольку векторные линии — это радиусы ( $y = Cx$ ), они всегда перпендикулярны окружностям в точках пересечения.

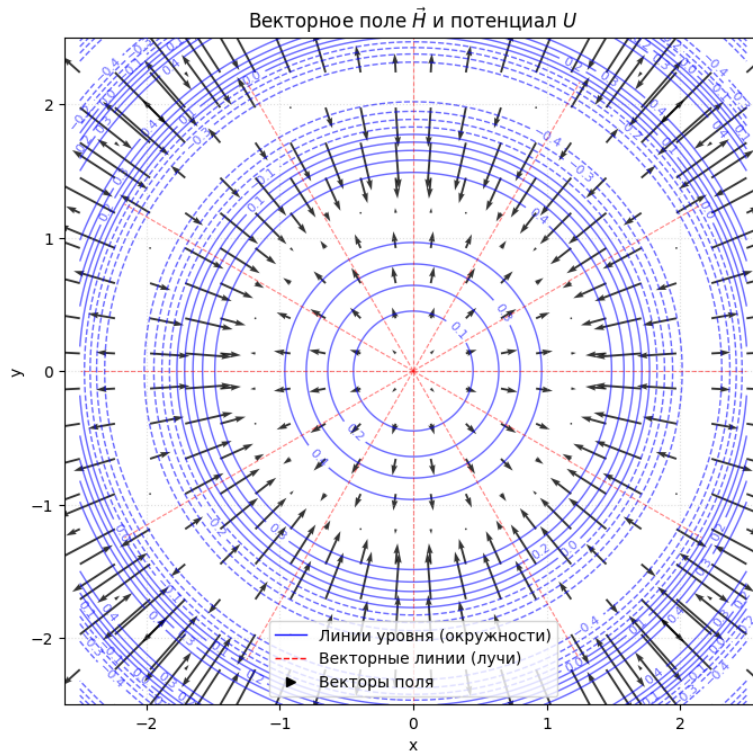


Рис. 2: Ортогональность векторных линий (лучи) и линий уровня потенциала (окружности).

#### д) Работа поля

Зафиксируем точки на векторной линии  $y = 0$  (ось  $Ox$ ):  $A(0, 0)$  и  $B(\sqrt{\pi/2}, 0)$ . Работа поля равна разности потенциалов:

$$W = U(B) - U(A) = \frac{1}{2} \sin \left( \left( \sqrt{\pi/2} \right)^2 + 0 \right) - \frac{1}{2} \sin(0) = \frac{1}{2} \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

## Задача 6. Поток векторного поля

**Условие:** Дано тело  $T$ , ограниченное поверхностями:

- Плоскостью  $z - y = 1$ ;
- Цилиндром  $x^2 + y^2 = 1$ ;
- Поверхностью, полученной вращением дуги  $CED$  вокруг оси  $Oz$  (согласно уравнению  $x^2 + y^2 - z = 2$ ).

Вычислить поток поля  $\vec{a} = \left( \frac{1}{1+y^2+z^2}; e^{x+z}; -4z \right)$  через боковую поверхность, образованную вращением дуги  $CED$ , в направлении внешней нормали.

### 1. Анализ геометрии и изображение тела

На основании представленного сечения  $Oyz$ :

1. **Верхняя граница:** Прямая  $BF$  проходит через точки  $B(-1, 0)$  и  $F(1, 2)$ , что соответствует уравнению плоскости  $z = y + 1$ .
2. **Боковые стенки:** Отрезки  $BC$  и  $EF$  лежат на линиях  $y = \pm 1$ , что соответствует цилиндру  $x^2 + y^2 = 1$ .
3. **Нижняя поверхность:** Дуга  $CED$  в плоскости  $Oyz$  ( $x = 0$ ) задается уравнением  $z = y^2 - 2$ . При вращении вокруг оси  $Oz$  (замена  $y^2$  на  $x^2 + y^2$ ) получаем чашу параболоида:

$$S : z = x^2 + y^2 - 2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

Тело  $T$

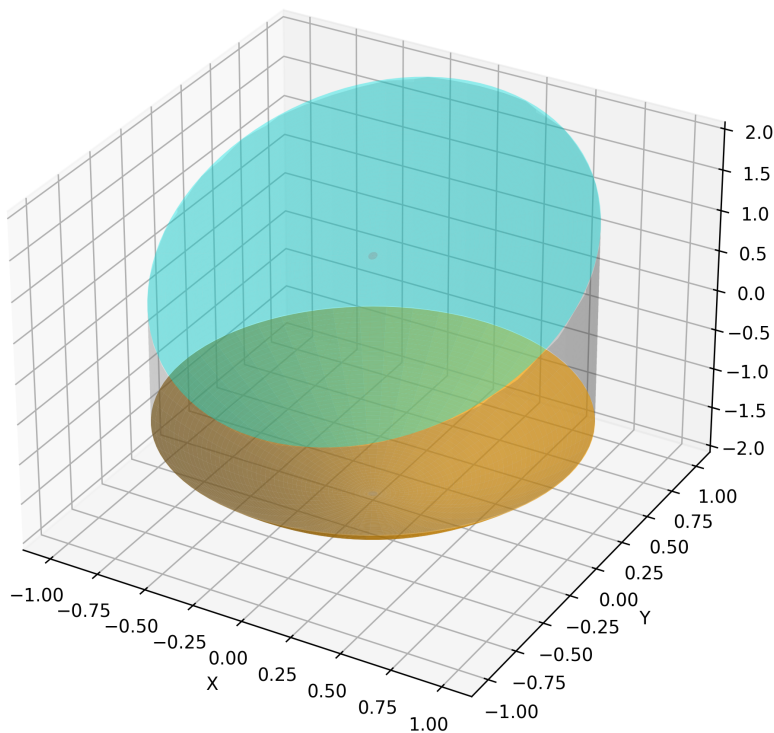


Рис. 3: Визуализация тела  $T$ : цилиндр со срезанным верхом и параболическим дном.

## 2. Вычисление потока

Поверхность  $S$  задана явно:  $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ . Вектор внешней нормали к телу  $T$  на этой нижней границе направлен «вниз»:

$$\vec{n}dS = \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right) dxdy = (2x, 2y, -1)dxdy$$

Поток  $\Phi$  вычисляется как поверхностный интеграл второго рода по проекции  $D$  (единичный круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ ):

$$\Phi = \iint_D \vec{a} \cdot \vec{n}dS = \iint_D \left[ \frac{2x}{1+y^2+z^2} + 2ye^{x+z} + (-4z)(-1) \right] dxdy$$

Воспользуемся свойствами симметрии области  $D$  (круг симметричен относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ ):

1. **Первая компонента:** Функция  $f_1(x, y) = \frac{2x}{1+y^2+(x^2+y^2-2)^2}$  является нечётной по  $x$ . Интеграл по симметричному кругу равен 0.
2. **Вторая компонента:** Функция  $f_2(x, y) = 2ye^{x+(x^2+y^2-2)}$  является нечётной по  $y$ . Интеграл по симметричному кругу равен 0.
3. **Третья компонента:** Остается вычислить  $\iint_D 4z dxdy$ , где  $z = x^2 + y^2 - 2$ .

Перейдем к полярным координатам ( $x^2 + y^2 = r^2, dxdy = r dr d\phi$ ):

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 4(r^2 - 2)r dr = 8\pi \int_0^1 (r^3 - 2r) dr = 8\pi \left[ \frac{r^4}{4} - r^2 \right]_0^1$$

$$\Phi = 8\pi \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = 8\pi \left( -\frac{3}{4} \right) = -6\pi$$

**Ответ:** Поток поля через нижнюю поверхность параболоида равен  $-6\pi$ .

## Задача 7. Сила притяжения

**Условие задачи:** Найти силу притяжения однородным шаровым сектором плотности  $\rho$  материальной точки с массой  $m_0 = 1$ , помещённой на его вершине, если радиус шаровой поверхности равен  $R$ , а угол осевого сечения равен  $2\alpha$ .

### 1. Математическая модель

Для решения задачи используется следующая модель:

1. **Закон всемирного тяготения.** Сила взаимодействия между двумя точечными массами определяется формулой:

$$dF = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где  $G$  — гравитационная постоянная. В нашем случае  $m_1 = m_0 = 1$  (материальная точка), а  $m_2 = dm$  (элемент массы сектора).

2. **Интегрирование по объему.** Шаровой сектор рассматривается как сплошное тело, состоящее из множества элементарных масс  $dm$ . Полная сила притяжения вычисляется как интеграл от элементарных сил, действующих со стороны каждого элемента объема  $dV$ , по всему объему тела  $V$ .
3. **Симметрия.** Тело обладает осевой симметрией относительно оси  $OZ$ . Это означает, что компоненты сил, перпендикулярные оси симметрии, взаимно компенсируются. Результирующий вектор силы будет направлен вдоль оси симметрии сектора.

### 2. Схема задачи

На рисунке ниже представлена схема задачи: шаровой сектор, система координат, элементарный объем и действующие силы.

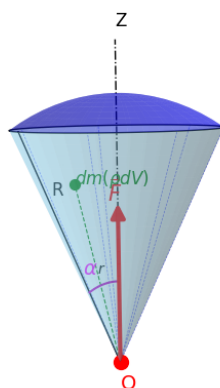


Схема: Шаровой сектор и сила притяжения  $F$  в вершине  $O$

### 3. Решение задачи

#### 1. Выбор системы координат.

Введем сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$ , где начало координат  $O$  совпадает с вершиной сектора (местоположением точки  $m_0$ ). Ось  $Z$  (от которой отсчитывается угол  $\theta$ ) направим вдоль оси симметрии сектора.

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

#### 2. Определение элемента массы.

Элемент объема равен:

$$dV = dx dy dz$$

При переходе в сферические координаты:

$$dV = |J| dr d\theta d\varphi$$

Якобиан перехода равен:

$$|J| = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$|J| = \cos \theta \cdot \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} - (-r \sin \theta) \cdot \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

Элемент объема в сферических координатах равен:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Так как тело однородно, элементарная масса  $dm$ :

$$dm = \rho dV = \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

#### 3. Элементарная сила.

Сила притяжения, создаваемая элементом  $dm$ , действующая на массу  $m_0 = 1$ , по модулю равна:

$$|d\mathbf{F}| = G \frac{1 \cdot dm}{r^2} = G \frac{\rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}{r^2} = G \rho \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

#### 4. Проекция на ось симметрии.

Вектор силы  $d\mathbf{F}$  направлен от начала координат к элементу  $dm$ . Нас интересует проекция силы на ось  $Z$ , так как результирующая сила направлена вдоль неё:

$$dF_z = |d\mathbf{F}| \cos \theta = G \rho \sin \theta \cos \theta dr d\theta d\varphi$$

#### 5. Интегрирование.

Пределы интегрирования для шарового сектора:

- По радиусу  $r$ : от 0 до  $R$ .
- По углу  $\varphi$ : от 0 до  $2\pi$ .

- По углу  $\theta$ : от 0 до  $\alpha$  (так как угол осевого сечения равен  $2\alpha$ , то угол между осью и образующей равен  $\alpha$ ).

Полная сила  $F$  равна:

$$F = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_0^\alpha G\rho \sin \theta \cos \theta d\theta$$

Вычислим интегралы последовательно. Интеграл по  $\varphi$ :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

Интеграл по  $r$ :

$$\int_0^R dr = R$$

Интеграл по  $\theta$ . Воспользуемся формулой  $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \sin \theta \cos \theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^\alpha \sin(2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^\alpha \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos(2\alpha)) \end{aligned}$$

Используя формулу  $1 - \cos(2\alpha) = 2 \sin^2 \alpha$ , получаем:

$$\frac{1}{4} \cdot 2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$

## 6. Итоговый результат.

Перемножая полученные значения, находим величину силы:

$$F = 2\pi \cdot R \cdot G\rho \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$

$$F = \pi G\rho R \sin^2 \alpha$$

**Ответ:** Сила притяжения равна  $F = \pi G\rho R \sin^2 \alpha$ . Вектор силы направлен вдоль оси симметрии сектора.

## Задача 8. Атлас многообразия

Любое гладкое многообразие  $M$  размерности  $n$  имеет атлас, у которого каждая карта диффеоморфна всему евклидову пространству  $\mathbb{R}^n$ .

### Доказательство

Пусть  $M$  — гладкое многообразие. Обозначим через  $\mathcal{A}$  его максимальный гладкий атлас. Наша цель — построить новый атлас  $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ , такой что  $\psi_\beta(V_\beta) = \mathbb{R}^n$ , и все  $\psi_\beta$  являются гладкими относительно структуры  $M$ .

#### Шаг 1. Локализация и сужение карт

Рассмотрим произвольную точку  $p \in M$ . Так как  $M$  — многообразие, существует карта  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ , содержащая  $p$ , где  $\varphi : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$  — гомеоморфизм на открытое множество  $W$ .

Пусть  $x_0 = \varphi(p)$ . В силу открытости  $W$ , существует  $\varepsilon > 0$ , такое что открытый шар  $B_\varepsilon(x_0) \subset W$ . Определим окрестность  $V_p$  как полный прообраз этого шара:

$$V_p := \varphi^{-1}(B_\varepsilon(x_0)).$$

Так как  $\varphi$  непрерывно,  $V_p$  открыто в  $M$ . Определим отображение  $\tilde{\varphi} = \varphi|_{V_p}$ . Пара  $(V_p, \tilde{\varphi})$  является картой, гладко согласованной с исходным атласом  $\mathcal{A}$  (так как это просто ограничение существующей гладкой карты на открытое подмножество). Следовательно,  $\tilde{\varphi} : V_p \rightarrow B_\varepsilon(x_0)$  является диффеоморфизмом.

#### Шаг 2. Диффеоморфизм шара на $\mathbb{R}^n$

Построим отображение, растягивающее шар  $B_\varepsilon(x_0)$  на всё пространство. Рассмотрим композицию  $F_p = H \circ T$ , где:

1. **Сдвиг.**  $T(y) = y - x_0$  переводит  $B_\varepsilon(x_0)$  в  $B_\varepsilon(0)$ . Это диффеоморфизм.
2. **Растяжение.** Функция  $H : B_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  задана формулой:

$$H(z) = \frac{\varepsilon z}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|z\|^2}}.$$

Это гладкое отображение, так как знаменатель не обращается в ноль внутри шара.

**Построение обратного отображения.** Выразим  $z$  через  $w = H(z)$ . Возьмем нормы:

$$\|w\| = \frac{\varepsilon \|z\|}{\sqrt{\varepsilon^2 - \|z\|^2}} \implies \varepsilon^2 \|w\|^2 = \|z\|^2 (\varepsilon^2 + \|w\|^2).$$

Отсюда выражаем норму прообраза:

$$\|z\| = \frac{\varepsilon \|w\|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \|w\|^2}}.$$

Подставляя это в исходное соотношение коллинеарности векторов, получаем обратное отображение  $G(w)$ :

$$z = G(w) = \frac{\varepsilon w}{\sqrt{\varepsilon^2 + \|w\|^2}}.$$

Очевидно,  $G$  — гладкое отображение на всём  $\mathbb{R}^n$ . Следовательно,  $H$  (и композиция  $F_p$ ) является диффеоморфизмом.

### Шаг 3. Построение искомого атласа

Для каждой точки  $p \in M$  определим новую карту  $(V_p, \psi_p)$  по формуле:

$$\psi_p = F_p \circ \tilde{\varphi}.$$

Проанализируем свойства этого отображения:

1. **Образ:**  $\psi_p(V_p) = F_p(B_\varepsilon(x_0)) = \mathbb{R}^n$ .
2. **Гладкость:** Отображение  $\psi_p$  является композицией двух диффеоморфизмов:

$$V_p \xrightarrow{\tilde{\varphi}} B_\varepsilon(x_0) \xrightarrow{F_p} \mathbb{R}^n.$$

Композиция диффеоморфизмов есть диффеоморфизм.

Таким образом, отображение  $\psi_p$  является диффеоморфизмом открытого множества  $V_p \subset M$  на  $\mathbb{R}^n$  (относительно гладкой структуры  $M$ ). Это автоматически означает, что карта  $(V_p, \psi_p)$  гладко согласована с максимальным атласом  $\mathcal{A}$ .

Сформируем искомый атлас как семейство всех таких карт:

$$\mathcal{B} = \{(V_p, \psi_p) \mid p \in M\}.$$

Так как  $p \in V_p$  для любой точки,  $\mathcal{B}$  покрывает  $M$ . Функции перехода между картами этого атласа являются композициями диффеоморфизмов, а значит, гладкими ( $C^\infty$ ).

### Заключение

Атлас  $\mathcal{B}$  удовлетворяет всем условиям задачи: он гладкий, и каждая карта в нём диффеоморфна евклидову пространству  $\mathbb{R}^n$ .

□

## Задача 9. Минимум суммы квадратов расстояний

**Условие:** Определить положение точки относительно вершин треугольника так, чтобы сумма квадратов расстояний от этой точки до вершин треугольника была наименьшей.

### 1. Математическая постановка задачи

Пусть вершины треугольника заданы своими координатами в декартовой системе координат:  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  и  $C(x_3, y_3)$ . Обозначим искомую точку как  $M(x, y)$ .

Расстояние от точки  $M$  до каждой из вершин определяется по формуле расстояния между двумя точками. Квадраты этих расстояний равны:

$$d_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

$$d_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

$$d_3^2 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2$$

Функция  $S(x, y)$ , которую необходимо минимизировать, представляет собой сумму этих квадратов:

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^3 [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]$$

### 2. Поиск критических точек

Для нахождения экстремума функции двух переменных вычислим её частные производные первого порядка по  $x$  и по  $y$ :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + 2(x - x_3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 2(y - y_1) + 2(y - y_2) + 2(y - y_3)$$

Приравняем частные производные к нулю для поиска стационарных точек:

$$\begin{cases} 2(3x - (x_1 + x_2 + x_3)) = 0 \\ 2(3y - (y_1 + y_2 + y_3)) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases}$$

Мы получили единственную стационарную точку  $M_0(\bar{x}, \bar{y})$ .

### 3. Проверка на минимум

Для подтверждения того, что найденная точка является точкой минимума, вычислим вторые частные производные:

$$A = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 6, \quad B = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 6$$

Проверим достаточное условие экстремума:

$$AC - B^2 = 6 \cdot 6 - 0^2 = 36$$

Так как  $AC - B^2 > 0$  и  $A > 0$ , в точке  $M_0$  действительно достигается **локальный минимум**. Поскольку функция  $S(x, y)$  является квадратичной и стремится к бесконечности при удалении точки  $M$  от начала координат, этот минимум является глобальным.

**Ответ:** Сумма квадратов расстояний до вершин треугольника минимальна, когда точка совпадает с точкой пересечения медиан этого треугольника.