# Праеры для одномерного нормального распределения

$$p(\underline{X} \mid \mu, \lambda) = \prod_n \mathcal{N}(x_n \mid \mu, \lambda)$$

этот не сопряжен

$$p(\underline{X}, \mu, \lambda) = \prod_n \mathcal{N}(x_n \mid \mu, \lambda) \cdot \mathcal{N}(\mu \mid m_0, \beta_0^{-1}) \cdot \mathcal{G}(\lambda \mid a_0, b_0)$$

$$\underline{\exp\left(-\frac{\lambda}{2}(x_n-\mu)^2\right)}$$

$$\mathcal{N}(\mu \mid m_0, (\beta_0 \lambda)^{-1}) \, \mathcal{G}(\lambda \mid a_0, b_0)$$

этот сопряжен

Байесовская смесь одномерных нормальных распределений: выбираем праеры и обучаем вариационным выводом

$$p(X, Z, \pi, \mu, \lambda) = \underbrace{\prod_n \prod_k \left[\pi_k N(x_n \mid \mu_k, \lambda_k^{-1})\right]^{z_{nk}}} \cdot \prod_k N(\mu_k \mid m_0, (\beta_0 \lambda_k)^{-1}) G(\lambda_k \mid a_0, b_0) \cdot \mathrm{Dir}(\pi \mid \alpha_0)$$

$$\prod_n \underbrace{p(x_n \mid z_n, \mu, \lambda)}_{N} \underbrace{p(z_n \mid \pi)}_{\prod_k \pi_k^{z_{nk}}}$$

$$z \leftrightarrow \pi \qquad z \leftrightarrow \mu, \lambda$$

$$q(z) \cdot q(\pi, \mu, \lambda) = q(z) q(\pi) q(\mu, \lambda)$$

$$p(X \mid Z, \pi, \mu, \lambda) = \prod_n \prod_k \left[C \cdot \lambda_k^{C} \exp(C \lambda_k \mu_k^2 + C \lambda_k \mu_k + C \lambda_k)\right]^{z_{nk}}$$

$$p(Z, \pi, \mu, \lambda) = \left[\prod_n \prod_k \pi_k^{z_{nk}}\right] \cdot \left[\prod_k C \underbrace{\lambda_k^{C}} \exp(C \lambda_k \mu_k^2 + C \lambda_k \mu_k + \underbrace{C \lambda_k}) \cdot \lambda_k^{C} \exp(\lambda_k C)\right] \cdot \prod_k \pi_k^{C}$$

Байесовская смесь одномерных нормальных распределений: выбираем праеры и обучаем вариационным выводом

$$q(\pi)$$

$$\log q(\pi) \propto \mathbb{E}_{q(z,\mu,\lambda)} \log p(z,\pi,\mu,\lambda,x) \propto$$

$$\propto \mathbb{E}_{q(z)} \left[ \sum_n \sum_k z_{nk} \log \pi_k + \sum_k (\alpha_0 - 1) \log \pi_k \right] =$$

$$= \sum_n \sum_k \underbrace{\mathbb{E}_{q(z)} z_{nk}} \log \pi_k + \sum_k (\alpha_0 - 1) \log \pi_k$$

$$q(\pi) = \mathrm{Dir}\left(\pi \,\middle|\, \alpha_0 + \sum_n \mathbb{E}_{q(z)} z_{nk}\right)$$

Байесовская смесь одномерных нормальных распределений: выбираем праеры и обучаем вариационным выводом

$$\log q(z) \propto \mathbb{E}_{q(\pi,\mu,\lambda)} \log p(x, z, \pi, \mu, \lambda) \propto$$

$$\propto \mathbb{E}_{q(\pi,\mu,\lambda)} \sum_n \sum_k z_{nk} \left( \underbrace{\log \pi_k} + \underbrace{\log N(x_n \mid \mu_k, \lambda_k^{-1})} \right) =$$

$$= \sum_n \sum_k z_{nk} \underbrace{\left( \mathbb{E}_{q(\pi)} \log \pi_k + \mathbb{E}_{q(\mu,\lambda)} \log N(x_n \mid \mu_k, \lambda_k^{-1}) \right)}_{\rho_{nk}}$$

$$q(z_{nk} = 1) = \frac{\rho_{nk}}{\sum_k \rho_{nk}}$$

# Модель LDA - обучается вариационным выводом

$$p(w, z, \theta, \varphi \mid \alpha, \beta) = \underbrace{\prod_d \prod_n \prod_t \left[\underbrace{\theta_{dt}} \underbrace{\varphi_{tw_{dn}}}\right]^{[z_{dn}=t]}}.$$

$$\cdot \prod_t \mathrm{Dir}(\varphi_t \mid \beta) \cdot \prod_d \mathrm{Dir}(\theta_d \mid \alpha)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\theta: d \times t \\ \varphi: t \times w\end{array}}$$

$$p(w \mid z, \theta, \varphi) = \prod_d \prod_n \prod_t \varphi_{tw_{dn}}^{[z_{dn}=t]}$$

$$p(z, \theta, \varphi) = \prod_d \prod_n \prod_t \theta_{dt}^{[z_{dn}=t]} \cdot \prod_t \prod_v C \varphi_{tv}^{c} \cdot \prod_d \prod_t C \theta_d^{c}$$

$$z \longleftrightarrow \varphi, \theta$$

$$\underbrace{q(z) q(\varphi) q(\theta)}$$