tags: **機器學習/深度學習**

LSTM 結合 Black-Litterman Model 找出最佳投資組合

> 此報告為政治大學金融所金融科技概論的團體報告，
> 並且為Davide Vena在2018所發表的論文，原名為"Active Index Allocation with the Black-Litterman Model"。

LSTM code： [https://github.com/AntioTseng/LSTM2/blob/main/final project LSTM.ipynb](https://github.com/AntioTseng/LSTM2/blob/main/final%20project%20LSTM.ipynb) (https://github.com/AntioTseng/LSTM2/blob/main/final%20project%20LSTM.ipynb)
BL code： [https://github.com/AntioTseng/LSTM2/blob/main/BL model.ipynb](https://github.com/AntioTseng/LSTM2/blob/main/BL%20model.ipynb) (https://github.com/AntioTseng/LSTM2/blob/main/BL%20model.ipynb)

壹、研究摘要

在這篇報告中，探討 Black-Litterman Model 於 ETF 等資產管理的應 用。透過監督式學習去收斂投資的範圍並納入一些資產來形成一個投資 組合。為了建構一些以投資人觀點使用 Black-Litterman 的方法的向量， 我們使用一些機器學習的方法像是卷積神經網路(Recurrent Neural Networks,RNN)中的長短期記憶(Long Short Term Memory,LSTM)。

最後，對經過最佳化的資產配置組合做績效評估，與其他適當的指標組合作比較。

貳、研究介紹

在一個資產配置的決定中，投資人通常會期望在一個特定的風險水準下，能最大化期望投資報酬，在投資過程中量化模型就會扮演一個重要的決定因素。但事實上模型經常導出無法代表投資解決方案的結果，在沒有限制的情況，我們會冒險納入含有空頭部位和重押少數資產的資產配置組合。另一方面若在部分部位加上限制的話，將會有投資組合過度集中於低資本資產的風險，與多元投資的原則相悖。這些結果主要來自於兩個原因：
第一，當投資人只透過少數資產來預測時，預期報酬是很難被估計的。
第二，最佳化資產配置組合的權重對於輸入資料是很敏感的，尤其是對於預期報酬的假設。

而 Black Litterman 提出對於這些問題的解決方案，就是將現代兩種 投資組合理論作結合，包含 Markowitz's 提出的 mean-variance optimization 以及 Sharpe and Lintner 提出的 CAPM。Black-Litterman 模型 並非直接對各資產進行報酬預測，而是以市場均衡報酬為起點再應用貝 氏理論結合投資者觀點，得到在投資者觀點下的市場均衡報酬分佈，最 後再進行最佳化配置。資產配置組合，概括而論，就是一個從給定範圍 資產中選取少數資產並對各資產分配權數的過程，例如，現在有幾千個 ETF 在各國不同的市場上被交

易，但一位投資者只需要少數資產來組成 一個多元化的投資組合。這個案子整體的概念就是透過在上述所有 ETF 市場中來建構 Black Litterman 模型。首先，我們期望透過不同產業以及 投資範圍的資產鎖定投資資產，最終選出：

1. Shares Russell 2000 ETF：美國羅素 2000 指數基金
2. Vanguard Total World Stock ETF：全世界股票的 ETF
3. Health Care Select Sect SPDR ETF： 醫療保健精選 ETF
4. Financial Select Sector SPDR ETF： 金融業精選 ETF
5. Consumer Staples Select Sector SPDR ETF：消費必需品精選 ETF
6. iShares 7-10 Year Treasury Bond ETF：美國 7-10 年期公債 ETF (IEF)
7. The SPDR S&P 500 ETF Trust：SPDR 標普 500 指數 ETF

作為本次研究的投資組合。

接著，我們透過 RNN 及 LSTM 去預測市場觀點。最後，我們會解釋用 rolling window approach 去估計參數，並呈現出不同策略下的結果與回 測。在結論中，我們會討論此篇報告的結果。

叁、研究方法

一、計算隱藏均衡報酬

利用 LSTM 結合 Black-Litterman model 計算權重有以下 5 個步驟：

1. 計算隱藏均衡報酬
2. 利用 LSTM 預測下一期報酬設定觀點 Q
3. 結合觀點計算後驗期望報酬
4. 計算後驗變異數得到新的變異數矩陣
5. 利用 Mean-Variance Optimization 計算出最佳權重

先用總共 7 個資產的市值計算出市值權重：
Wmkt = [0.0948, 0.0321, 0.0281, 0.0687, 0.0603, 0.0578, 0.6583]
再用資產收益率計算協方差矩陣Σ：

```
sigma1=np.cov(A)#變異數矩陣
print(sigma1)
```

```
[[ 0.00088442 -0.00006345  0.00032689  0.00047912  0.00074034  0.00057752
   0.0005766 ]
 [-0.00006345  0.00006085 -0.00000243 -0.00002141 -0.00010428 -0.00004293
  -0.00004447]
 [ 0.00032689 -0.00000243  0.00035601  0.00030437  0.00033724  0.0003013
   0.00032463]
 [ 0.00047912 -0.00002141  0.00030437  0.00053421  0.00043824  0.00039725
   0.00042513]
 [ 0.00074034 -0.00010428  0.00033724  0.00043824  0.00088454  0.0005477
   0.00056211]
 [ 0.00057752 -0.00004293  0.0003013   0.00039725  0.0005477   0.00047703
   0.00046637]
 [ 0.0005766  -0.00004447  0.00032463  0.00042513  0.00056211  0.00046637
   0.00048953]]
```

再計算風險趨避參數，使用 sharpe ratio 計算:

rf = 0.00012(利用美國國債利率當作無風險利率再換算成單位週)

$E[rm]$使用歷史資料的平均週報酬率在乘上 Wmkt 計算

$\sigma m2$ =Wmkt′ Σ Wmkt ，綜合以上計算得 ⇒ δ = 4.5871。

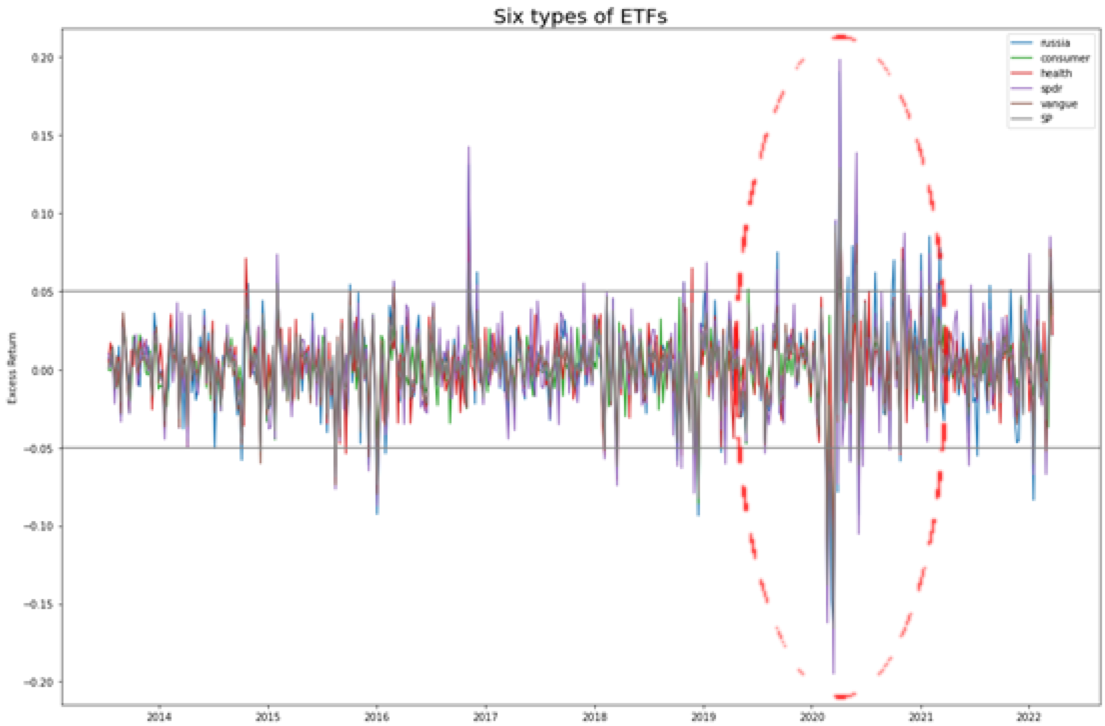
最後逆優化⇒ π = $\delta \Sigma Wmkt$= [0.0027 0.0002 0.0014 0.0019 0.0026 0.0021 0.0022]

二、利用 LSTM 預測下一期報酬設定觀點 Q

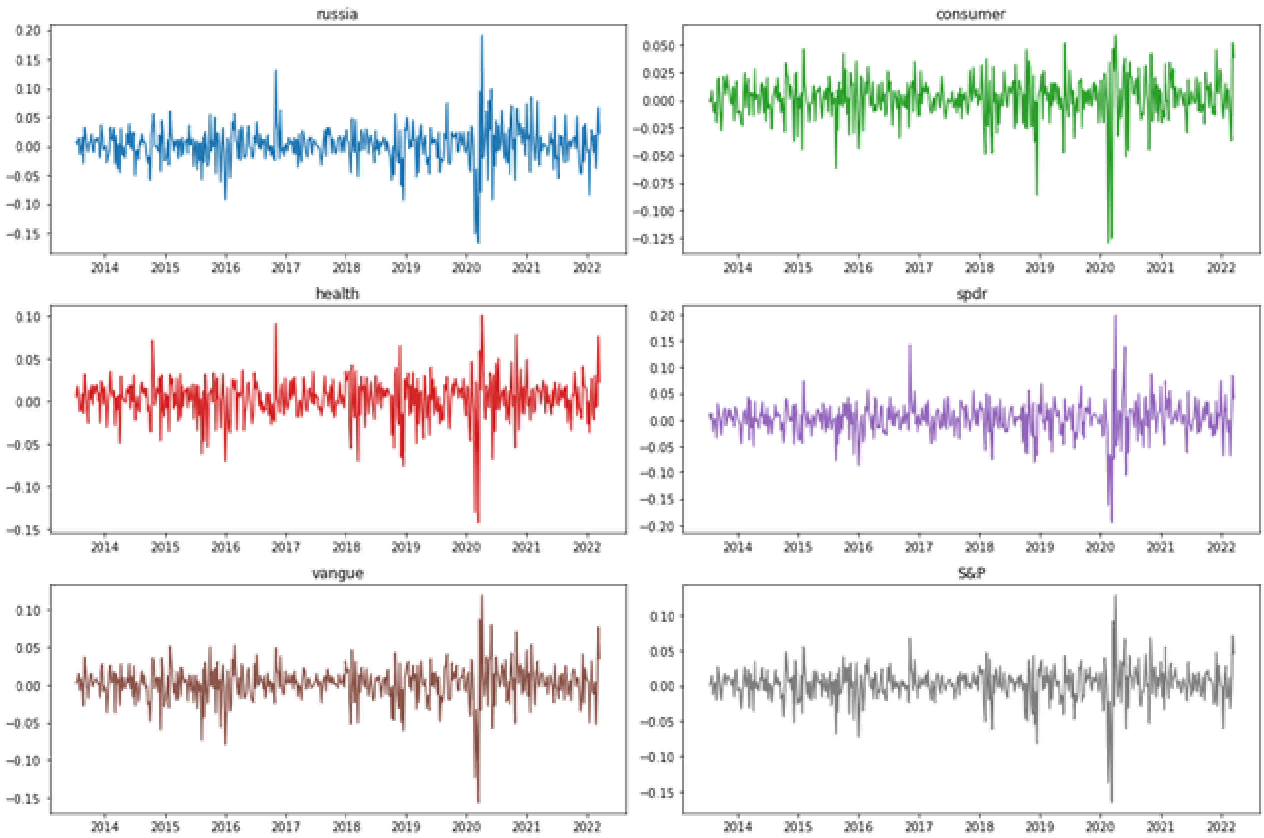
研究目的為以 LSTM 作為模型，預測七種不同資產在 2022 年 3 月 27 日當週的超額報酬，也就是 BL 模型當中的觀點 Q。資料為七種不同產業 下的 ETF 資產，由於美國十年國債為無風險利率，所以每週的超額報酬 都為 0，因此以下僅預測其餘六種資產。

- 六種資產：Russia、Consumer、Health、Spdr、Vangue 以及 SP。
- 由 2013 年 7 月 14 日至 2022 年 3 月 20 日，以週為單位。
- 總計 454 筆資料。
- y ：超額收益（Excess Return）。
- x ：開市（Open）、收市（Close）、高（High）、低（Low）、成交量（Volumn）以及其交互作用，總計 15 個變數。

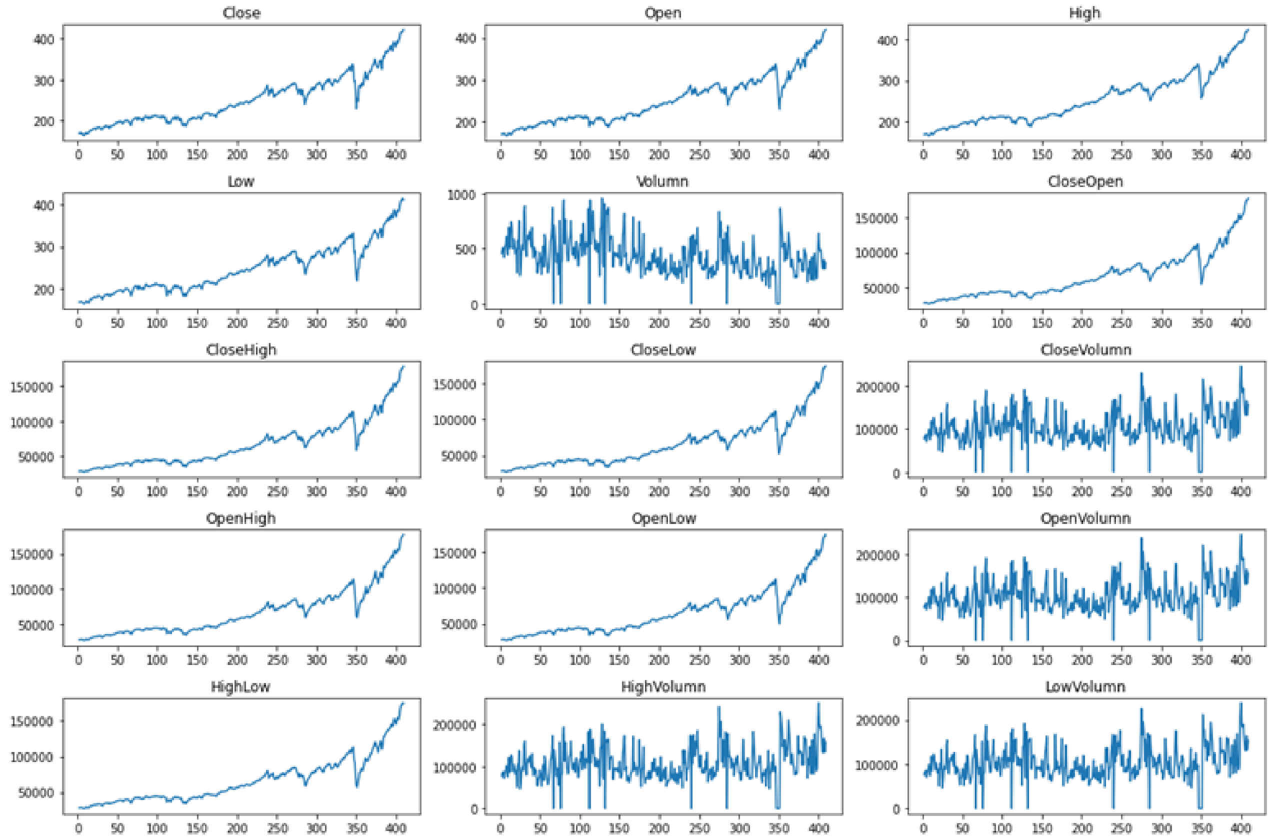
首先先將六個資產以時間為橫軸，超額報酬為縱軸畫出。如下圖觀察六種資產都會在 0.05 以及-0.05 的範圍震盪。並發現在 2020 年初有劇烈的震盪，其原因推測是當時全球爆發新型肺炎疫情，使得股市迅速下跌並反彈，直至年中才趨於穩定。



再來將分別將每個資產超額預期的時間序列圖畫出，可以細看出每個資產分別的趨勢大致相同。



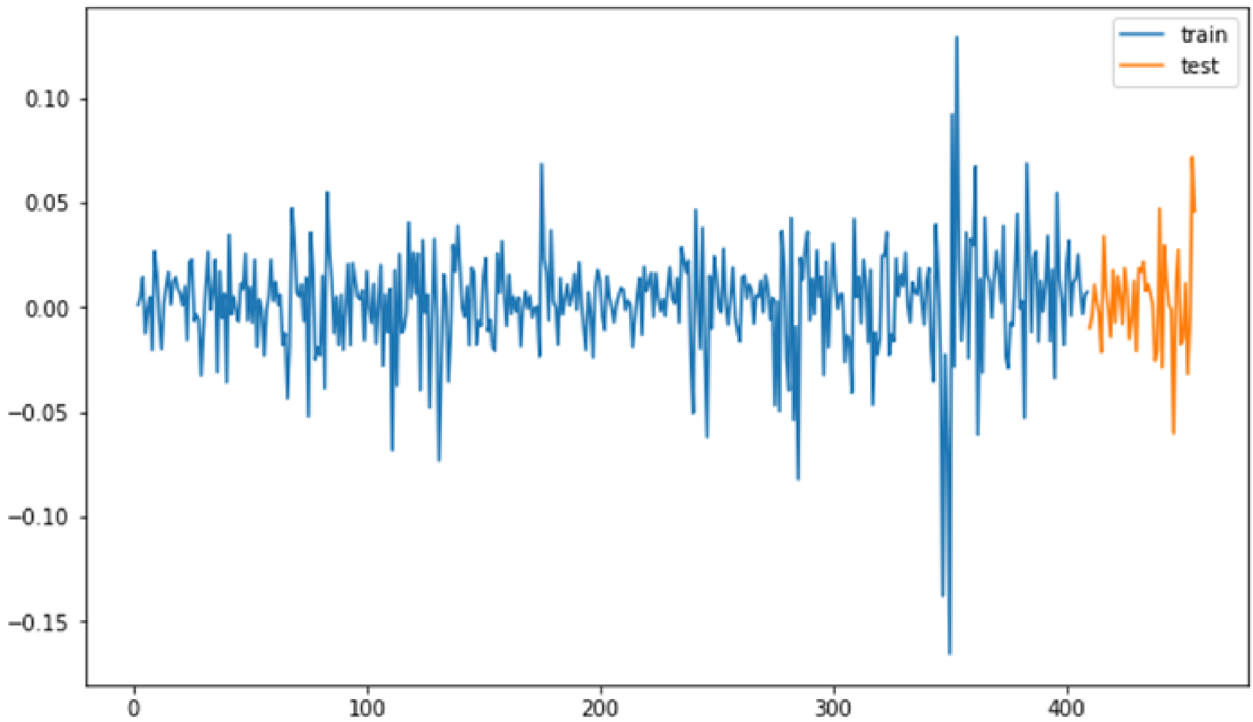
將其中一個資產的 15 個解釋變數畫出並觀察，如圖 10，可以發現開市、 收市、高、低以及其相關的交互作用的十張圖，都具有高度相關性，而 跟成交量相關的五張圖形也具備相似的特徵。



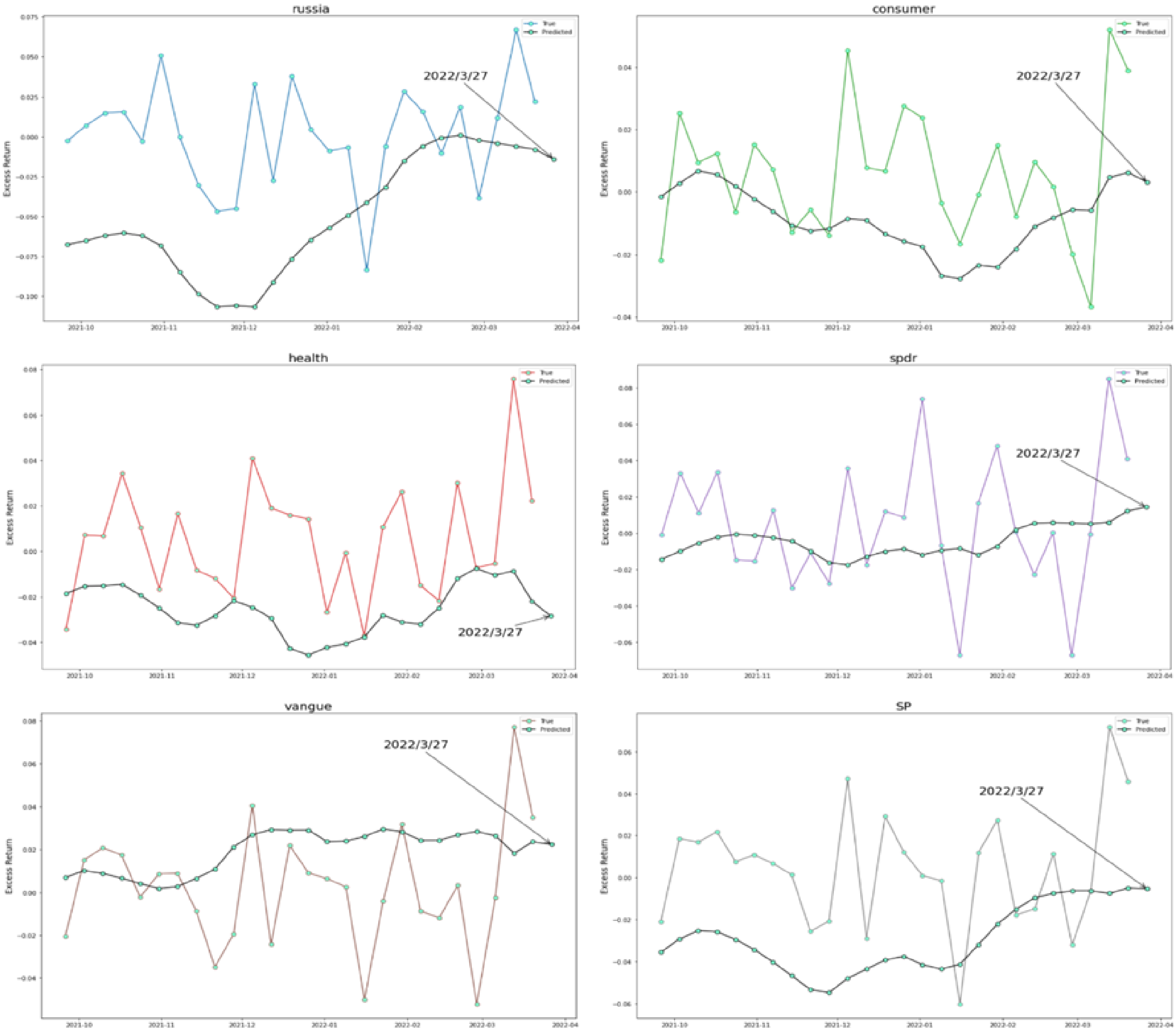
接著建立 LSTM 模型，共設置四層：

1. LSTM Layer (n1 = 32)
2. LSTM Layer (n2 = 16)
3. Dropout Layer (p=0.2)
4. Full connected Layer

- 考慮到資料僅有 454 筆，可能會訓練不足，所以依照 9:1 比例分成訓練集以及測試集。



最後可以得到結果如下圖



最後得到 Q=[-0.01402867, 0, 0.00318501, -0.02850218, 0.01435457, 0.02229591, -0.01486094]

由於 Q 為每個資產預期超額報酬的絕對觀點，所以 P 為一個 7*7 的單位矩陣。τ為調整因子參考 Donthireddy(2018)設定 1/T，T 為樣本數。
⇒ τ =1/454 (共 454 週)。

由於觀點都為投資人的主觀看法，帶有不確定性，所以有誤差項ε的存在，Ω為ε得變異數矩陣，由於每個觀點都互相獨立，所以Ω為一個對角矩陣。Ω由 diag($\tau P \Sigma P'$)計算：

```
omega=np.diag(tui*P@sigma1@P.T)
omega=np.diag(omega)
print(omega)
```

```
[[0.00000195 0.         0.         0.         0.         0.
  0.        ]
 [0.         0.00000013 0.         0.         0.         0.
  0.        ]
 [0.         0.         0.00000078 0.         0.         0.
  0.        ]
 [0.         0.         0.         0.00000118 0.         0.
  0.        ]
 [0.         0.         0.         0.         0.00000195 0.
  0.        ]
 [0.         0.         0.         0.         0.         0.00000105
  0.        ]
 [0.         0.         0.         0.         0.         0.
  0.00000108]]
```

三、結合觀點計算後驗期望報酬

E$[R]$ = $[(\tau\Sigma)-1\ +\ P'\Omega-1P]-1[(\tau\Sigma)-1\pi\ +\ P'\Omega-1Q]$
$\Rightarrow E[R] = [-0.0022, -0.0004, -0.0006, -0.0082, 0.002, -0.0002, -0.0018]$。

四、計算後驗變異數得到新的變異數矩陣

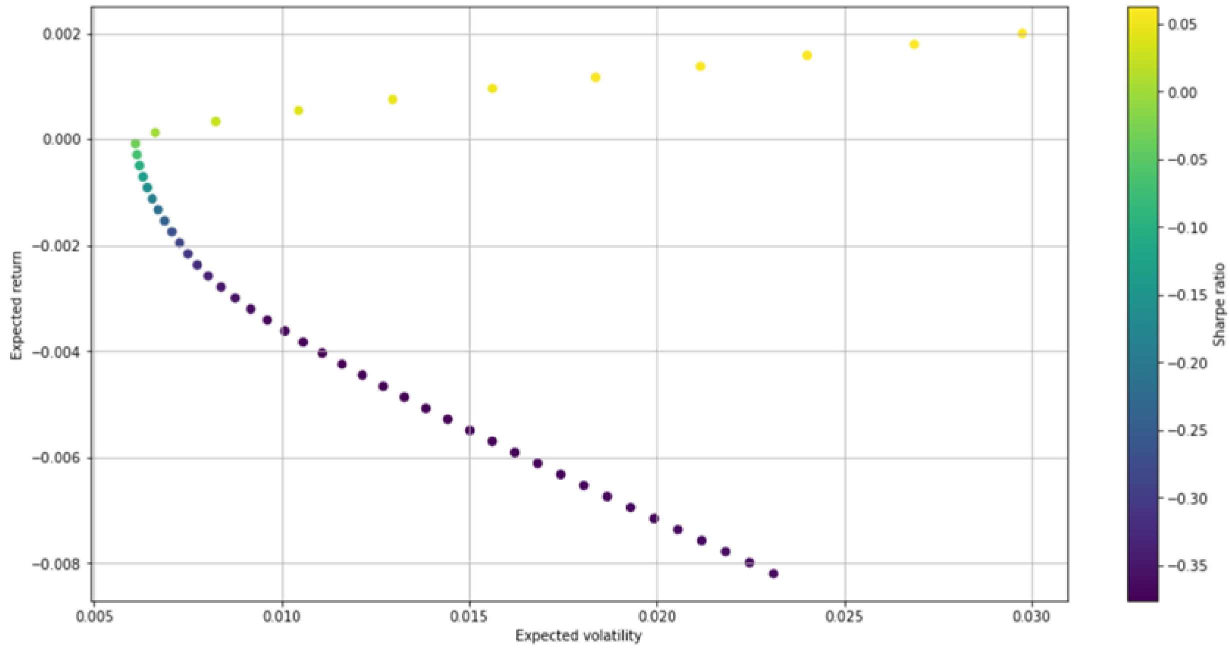
Σp=$[(\tau\Sigma)\ -1\ +\ P'\Omega\ -1P]\ -1\ +\ \Sigma$

```
#新的變異數矩陣
sigma_p=np.linalg.inv(np.linalg.inv(tui*sigma1)+P.T@np.linalg.inv(omega)@P)+sigma1
print(sigma_p)
```

```
[[ 0.00088496 -0.00006347  0.00032693  0.00047924  0.00074061  0.00057774
   0.00057679]
 [-0.00006347  0.00006091 -0.00000242 -0.00002141 -0.00010434 -0.00004294
  -0.00004448]
 [ 0.00032693 -0.00000242  0.00035629  0.00030448  0.00033732  0.0003014
   0.00032475]
 [ 0.00047924 -0.00002141  0.00030448  0.00053458  0.00043832  0.00039737
   0.00042528]
 [ 0.00074061 -0.00010434  0.00033732  0.00043832  0.00088508  0.00054788
   0.0005623 ]
 [ 0.00057774 -0.00004294  0.0003014   0.00039737  0.00054788  0.00047725
   0.00046655]
 [ 0.00057679 -0.00004448  0.00032475  0.00042528  0.0005623   0.00046655
   0.00048974]]
```

五、利用 Mean-Variance Optimization 計算出最佳權重

結合前面得到的 E[R]和Σp 畫出效率前緣曲線，如圖 15：



不同的顏色代表不同的 Sharpe Ratio，再將最小的風險投資組合找出
⇒ Wnew= [0. 0. 0. 0. 1. 0. 0.]為最小風險投資組合。

肆、結論與未來改善方向

本文對美國 ETF 運用 BL 模型結合 LSTM 進行投資組合配置。先利 用各個資產市值和報酬率，計算出市值權重和斜方差矩陣後，逆優化推 出風險厭惡係數和隱藏均衡報酬。

接著再運用 LSTM 以 20 天的解釋變數去預測未來一天的反應變數，進而得到 BL 模型當中的參數 Q。在預測結果上可以發現，預測的曲線不具真實值的強烈震盪性，但在高低漲幅時，預測曲線僅會有相對應的小漲跌，預測的成效不佳。推測的原因可能為：

1. 數據不足：訓練資料過少會使模型找不到泛化的特徵，導致模型過擬合。
2. 變數相關性過高：變數彼此之間過於相似，使得變數實際解釋比例只有少部分具有貢獻度。
3. 數據週期性不太明顯：在這次的數據當中，超額報酬沒有明顯的週期性，會使預測結果會像滑動平均。

計算出來的 Q 值有三個正值、三個負值以及一個零，代表在本文當 中的資產，僅預期三個資產的超額報酬會為正。最後計算 BL 模型所需要 參數計算出 E[R]預期報酬、新的斜方差矩陣，利用 E[R]和新的斜方差矩陣以 Mean-Variance Optimization 的方式計算出新的投資組合權重。 而本文我們計算出的新的投資組合權重 Wnew為[0. 0. 0. 0. 1. 0. 0.] 只有一 個資產有被分配到權重，沒有達到投資組合目的分散投資風險。 推測可能原因是：

1. LSTM 預測出的觀點對 E[R]的影響，除了一個資產報酬率為正，其餘為負，進而影響到後續的權重配置，

2. 在計算無風險報酬率、有風險報酬率、斜方差矩陣和 Sharpe Ratio 時，都是使用週為單位沒有進行年化換算，數據值都有點過小。

建議未來在挑選 ETF 時，應該先使用分群方法，例如: Hierarchical Clustering、Kmean 等方法，找出投資報酬率較高的ETF再套入BL模 型，比較不會出現預期資產報酬率過多負的報酬率，而失去計算投資組合的意義。在本文中，我們使用的資料是以一周為單位，應該換成日單位最後再進行年化，會使數據具有週期性並增加數據量。並且，每個資產的變數僅考慮五個以及其交互作用，建議擴增更多種變量，減少低貢獻度的變數。