

## IV. ИНТЕГРАЛЫ

### Теоретические вопросы

1. Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.
2. Неопределенный интеграл, его свойства.
3. Таблица неопределенных интегралов.
4. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
5. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.
6. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.
7. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.
8. Интегрирование иррациональных выражений.
9. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.
10. Основные свойства определенного интеграла.
11. Теорема о среднем.
12. Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница.
13. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
14. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
15. Вычисление площадей плоских фигур.
16. Определение и вычисление длины кривой, дифференциал длины дуги кривой.

### Теоретические упражнения

1. Считая, что функция  $\frac{\sin x}{x}$  равна 1 при  $x = 0$ , доказать, что она интегрируема на отрезке  $[0, 1]$ .
2. Какой из. интегралов больше:
$$\int_0^1 \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \text{ или } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx?$$
3. Пусть  $f(t)$  – непрерывная функция, а функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  дифференцируемые. Доказать, что

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = f[\psi(x)]\psi'(x) - f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

4. Найти  $\frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt.$

5. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)e^{-t^2} dt.$$

6. Пусть  $f(x)$  – непрерывная периодическая функция с периодом  $T$ . Доказать, что

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad \forall a.$$

7. Доказать, что если  $f(x)$  – четная функция, то

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^{+a} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} f(x) dx.$$

8. Доказать, что для нечетной функции  $f(x)$  справедливы равенства

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^{+a} f(x) dx \text{ и } \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Чему равен интеграл  $\int_{-1}^{+1} \sin^2 x \ln \frac{2+x}{2-x} dx$ ?

9. При каком условии, связывающем коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  интеграл  $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$  является рациональной функцией?

10. При каких целых значениях  $n$  интеграл  $\int \sqrt{1+x^4} dx$  выражается элементарными функциями.

## Расчётные задания

**Задача 1.** Вычислить неопределённые интегралы.

1.1.  $\int (4 - 3x)e^{-3x} dx.$

1.2.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} dx.$

1.3.  $\int (3x + 4)e^{3x} dx.$

1.4.  $\int (4x - 2)\cos 2x dx.$

1.5.  $\int (4 - 16x)\sin 4x dx.$

1.6.  $\int (5x - 2)e^{3x} dx.$

1.7.  $\int (1 - 6x)e^{2x} dx.$

1.8.  $\int \ln(x^2 + 4) dx.$

1.9.  $\int \ln(4x^2 + 1) dx.$

1.10.  $\int (2 - 4x)\sin 2x dx.$

1.11.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1} dx.$

1.12.  $\int e^{-2x}(4x - 3) dx.$

1.13.  $\int e^{-3x}(2 - 9x) dx.$

1.14.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx.$

1.15.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} dx.$

1.16.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx.$

1.17.  $\int (5x + 6)\cos 2x dx.$

1.18.  $\int (3x - 2)\cos 5x dx.$

1.19.  $\int (x\sqrt{2} - 3)\cos 2x dx.$

1.20.  $\int (4x + 7)\cos 3x dx.$

1.21.  $\int (2x - 5)\cos 4x dx.$

1.22.  $\int (8 - 3x)\cos 5x dx.$

1.23.  $\int (x + 5)\sin 3x dx.$

1.24.  $\int (2 - 3x)\sin 2x dx.$

1.25.  $\int (4x + 3)\sin 5x dx.$

1.26.  $\int (7x - 10)\sin 4x dx.$

1.27.  $\int (\sqrt{2} - 8x)\sin 3x dx.$

1.28.  $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$

1.29.  $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

1.30.  $\int x \sin^2 x dx.$

1.31.  $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}.$

**Задача 2.** Вычислить определённые интегралы.

$$2.1. \int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$$

$$2.2. \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$$

$$2.3. \int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx.$$

$$2.4. \int_{-2}^0 (x + 2)^2 \cos 3x dx.$$

$$2.5. \int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx.$$

$$2.6. \int_0^\pi (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx.$$

$$2.7. \int_0^\pi (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx.$$

$$2.8. \int_0^\pi (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx.$$

$$2.9. \int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx.$$

$$2.10. \int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx.$$

$$2.11. \int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx.$$

$$2.12. \int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx.$$

$$2.13. \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx.$$

$$2.14. \int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx.$$

$$2.15. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx.$$

$$2.16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$$

$$2.17. \int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx.$$

$$2.18. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx.$$

$$2.19. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 5x^2) \sin x dx.$$

$$2.20. \int_{\frac{\pi}{4}}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx.$$

$$2.21. \int_1^2 x \ln^2 x dx.$$

$$2.22. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$$

$$2.23. \int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$2.24. \int_0^1 (x + 1) \ln^2 (x + 1) dx.$$

$$2.25. \int_2^3 (x-1)^3 \ln^2(x-1) dx.$$

$$2.26. \int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^2(x+2) dx.$$

$$2.27. \int_0^2 (x+1)^2 \ln^2(x+1) dx.$$

$$2.28. \int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

$$2.29. \int_{-1}^1 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

$$2.30. \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

$$2.31. \int_{-2}^0 (x^2 + 2) e^{\frac{x}{2}} dx.$$

**Задача 3.** Найти неопределенные интегралы.

$$3.1. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$3.2. \int \frac{1+\ln x}{x} dx.$$

$$3.3. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$3.4. \int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$3.5. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

$$3.6. \int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$3.7. \int \tg x \ln \cos x dx.$$

$$3.8. \int \frac{\tg(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$3.9. \int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx.$$

$$3.10. \int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx.$$

$$3.11. \int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$3.12. \int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$3.13. \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$$

$$3.14. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}.$$

$$3.15. \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$3.16. \int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$3.17. \int \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^5}.$$

$$3.18. \int \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx.$$

$$3.19. \int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx.$$

$$3.20. \int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2\sin x} dx.$$

$$3.21. \int \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx.$$

$$3.22. \int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$3.23. \int \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$3.24. \int \frac{x}{x^4 + 1} dx.$$

$$3.25. \int \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$3.26. \int \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$3.27. \int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx.$$

$$3.28. \int \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1 + x^2} dx.$$

$$3.29. \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$3.30. \int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$3.31. \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

**Задача 4.** Вычислить определённые интегралы.

$$4.1. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$4.2. \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}.$$

$$4.3. \int_0^1 \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$$

$$4.4. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}.$$

$$4.5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2\sin x} dx.$$

$$4.6. \int_0^{\pi/4} \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx.$$

$$4.7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$4.8. \int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$4.9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

$$4.10. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$4.11. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$4.13. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\arctg x)^4}{1 + x^2} dx.$$

$$4.15. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$4.17. \int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$4.19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$4.21. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

$$4.23. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$4.25. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$4.27. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$4.29. \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$$

$$4.31. \int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$4.12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctg x + x}{1 + x^2} dx.$$

$$4.14. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$4.16. \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

$$4.18. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$4.20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$4.22. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$4.24. \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$4.26. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$$

$$4.28. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$4.30. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}.$$

**Задача 5.** Найти неопределённые интегралы.

$$5.1. \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

$$5.3. \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

$$5.5. \int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6} dx.$$

$$5.7. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$$

$$5.9. \int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx.$$

$$5.11. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} dx.$$

$$5.13. \int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx.$$

$$5.15. \int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

$$5.17. \int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx.$$

$$5.19. \int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} dx.$$

$$5.21. \int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx.$$

$$5.23. \int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx.$$

$$5.25. \int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)} dx.$$

$$5.27. \int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} dx.$$

$$5.29. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx.$$

$$5.31. \int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx.$$

$$5.2. \int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx.$$

$$5.4. \int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx.$$

$$5.6. \int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx.$$

$$5.8. \int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx.$$

$$5.10. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$$

$$5.12. \int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} dx.$$

$$5.14. \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x} dx.$$

$$5.16. \int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x} dx.$$

$$5.18. \int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx.$$

$$5.20. \int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx.$$

$$5.22. \int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{(x+3)(x-1)x} dx.$$

$$5.24. \int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx.$$

$$5.26. \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)} dx.$$

$$5.28. \int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx.$$

$$5.30. \int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx.$$

**Задача 6.** Найти неопределённые интегралы.

$$6.1. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$6.3. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$6.5. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$6.7. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

$$6.9. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 2}{x(x+1)^3} dx.$$

$$6.11. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 7}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$6.13. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$6.15. \int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

$$6.17. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

$$6.19. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

$$6.21. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.23. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 18x - 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.25. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 4}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

$$6.27. \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x-2)(x-1)^3} dx.$$

$$6.29. \int \frac{x^3 + 6x^2 - 10x + 52}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.31. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.2. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx.$$

$$6.4. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$6.6. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$6.8. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 10}{(x-1)(x+2)^3} dx.$$

$$6.10. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{x(x-2)^3} dx.$$

$$6.12. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

$$6.14. \int \frac{x^3 + x + 2}{(x+2)x^3} dx.$$

$$6.16. \int \frac{2x^3 + x + 1}{(x+1)x^3} dx.$$

$$6.18. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

$$6.20. \int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x + 4}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

$$6.22. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.24. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 12}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.26. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 2}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

$$6.28. \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3} dx.$$

$$6.30. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

**Задача 7.** Найти неопределённые интегралы.

$$7.1. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx.$$

$$7.2. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2+1)} dx.$$

$$7.3. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x+2)^2(x^2+x+1)} dx.$$

$$7.4. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)} dx.$$

$$7.5. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)} dx.$$

$$7.6. \int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)} dx.$$

$$7.7. \int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(x+1)^2(x^2+2)} dx.$$

$$7.8. \int \frac{x^3 + 9x^2 + 21x + 21}{(x+3)^2(x^2+3)} dx.$$

$$7.9. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(x+2)^2(x^2+4)} dx.$$

$$7.10. \int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx.$$

$$7.11. \int \frac{2x^3 - 4x^2 - 16x - 12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} dx.$$

$$7.12. \int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x-2)^2(x^2-x+1)} dx.$$

$$7.13. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)} dx.$$

$$7.14. \int \frac{3x^3 + x + 46}{(x-1)^2(x^2+9)} dx.$$

$$7.15. \int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)} dx.$$

$$7.16. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.17. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.18. \int \frac{x^2 + x + 3}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.19. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)} dx.$$

$$7.20. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)} dx.$$

$$7.21. \int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2+1)(x^2+x+1)} dx.$$

$$7.22. \int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)} dx.$$

$$7.23. \int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.24. \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$7.25. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.27. \int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.29. \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.31. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.26. \int \frac{2x^3 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$7.28. \int \frac{x + 4}{(x^2 + x + 2)(x^2 + 2)} dx.$$

$$7.30. \int \frac{3x^3 + 7x^2 + 12x + 6}{(x^2 + x + 3)(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

**Задача 8.** Вычислить определённые интегралы.

$$8.1. \int_{\pi/2}^{2\arctg 2} \frac{dx}{\sin^2 x(1 - \cos x)}.$$

$$8.3. \int_{\pi/2}^{2\arctg 2} \frac{dx}{\sin^2 x(1 + \cos x)}.$$

$$8.5. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx.$$

$$8.7. \int_{2\arctg(1/3)}^{2\arctg(1/2)} \frac{dx}{\sin x(1 - \sin x)}.$$

$$8.9. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5 + 4 \cos x}.$$

$$8.11. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x}.$$

$$8.13. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$8.15. \int_0^2 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x + \sin x}.$$

$$8.2. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}.$$

$$8.4. \int_{2\arctg(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^3}.$$

$$8.6. \int_{2\arctg 2}^{2\arctg 3} \frac{dx}{\cos x(1 - \cos x)}.$$

$$8.8. \int_{2\arctg(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2}.$$

$$8.10. \int_0^{2\pi/3} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$$

$$8.12. \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \cos x) dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$8.14. \int_0^{2\arctg(1/2)} \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)^2} dx.$$

$$8.16. \int_0^{2\arctg(1/3)} \frac{\cos x dx}{(1 - \sin x)(1 + \cos x)}.$$

$$8.17. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos x dx}{1 + \cos x - \sin x}.$$

$$8.19. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.21. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}.$$

$$8.23. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$8.25. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.27. \int_{\pi/2}^{2\arctg 2} \frac{dx}{\sin x(1 + \sin x)}.$$

$$8.29. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}.$$

$$8.31. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}.$$

$$8.18. \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$8.20. \int_0^{2\arctg(1/2)} \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x(1 + \cos x)}.$$

$$8.22. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.24. \int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}.$$

$$8.26. \int_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.28. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$8.30. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(1 + \cos x)}.$$

**Задача 9.** Вычислить определённые интегралы.

$$9.1. \int_{\pi/4}^{\arctg 3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}.$$

$$9.3. \int_0^{\arccos(4/\sqrt{17})} \frac{3 + 2 \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 1} dx.$$

$$9.5. \int_0^{\arctg(1/3)} \frac{(8 + \operatorname{tg} x)}{18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

$$9.7. \int_{\arcsin(1/\sqrt{37})}^{\pi/4} \frac{6 \operatorname{tg} x dx}{3 \sin 2x + 5 \cos^2 x}.$$

$$9.2. \int_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx.$$

$$9.4. \int_{\pi/4}^{\arctg 3} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$9.6. \int_0^{\arccos(\sqrt{2}/3)} \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 3} dx.$$

$$9.8. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 11 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx.$$

$$9.9. \int_{-\arctg(1/3)}^0 \frac{3\tg x + 1}{2\sin 2x - 5\cos 2x + 1} dx.$$

$$9.11. \int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})} \frac{\tg x}{\sin^2 x - 5\cos^2 x + 4} dx.$$

$$9.13. \int_0^{\arctg 3} \frac{4 + \tg x}{2\sin^2 x + 18\cos^2 x} dx.$$

$$9.15. \int_0^{\arctg(2/3)} \frac{6 + \tg x}{9\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx.$$

$$9.17. \int_0^{\pi/4} \frac{7 + 3\tg x}{(\sin x + 2\cos x)^2} dx.$$

$$9.19. \int_{-\arccos(1/\sqrt{10})}^0 \frac{3\tg^2 x - 50}{2\tg x + 7} dx.$$

$$9.21. \int_{\pi/4}^{\arcsin(2/\sqrt{5})} \frac{4\tg x - 5}{4\cos^2 x - \sin 2x + 1} dx.$$

$$9.23. \int_{-\arccos(1/\sqrt{5})}^0 \frac{11 - 3\tg x}{\tg x + 3} dx.$$

$$9.25. \int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{dx}{(6 - \tg x)\sin 2x}.$$

$$9.27. \int_{-\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\pi/4} \frac{2 - \tg x}{(\sin x + 3\cos x)^2} dx.$$

$$9.29. \int_{\arccos(1/\sqrt{10})}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{12dx}{(6 + 5\tg x)\sin 2x}.$$

$$9.31. \int_0^{\arccos(1/\sqrt{6})} \frac{3\tg^2 x - 1}{\tg^2 x + 5} dx.$$

$$9.10. \int_{\pi/4}^{\arctg 3} \frac{1 + \ctg x}{(\sin x + 2\cos x)^2} dx.$$

$$9.12. \int_0^{\pi/4} \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x - 4} dx.$$

$$9.14. \int_0^{\arctg 2} \frac{12 + \tg x}{3\sin^2 x + 12\cos^2 x} dx.$$

$$9.16. \int_0^{\arcsin(\sqrt{3}/7)} \frac{\tg^2 x dx}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x - 7}.$$

$$9.18. \int_{\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2\tg x + 5}{(5 - \tg x)\sin 2x} dx.$$

$$9.20. \int_0^{\pi/4} \frac{5\tg x + 2}{2\sin 2x + 5} dx.$$

$$9.22. \int_0^{\arcsin(\sqrt{7}/8)} \frac{6\sin^2 x}{4 + 3\cos 2x} dx.$$

$$9.24. \int_0^{\arcsin(3\sqrt{10})} \frac{2\tg x - 5}{(4\cos x - \sin x)^2} dx.$$

$$9.26. \int_0^{\pi/4} \frac{4 - 7\tg x}{2 + 3\tg x} dx.$$

$$9.28. \int_{\pi/4}^{\arcsin(\sqrt{2}/3)} \frac{8\tg x dx}{3\cos^2 x + 8\sin^2 x - 7}.$$

$$9.30. \int_0^{\pi/3} \frac{\tg^2 x}{4 + 3\cos 2x} dx.$$

**Задача 10.** Вычислить определённые интегралы.

$$10.1. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x \, dx.$$

$$10.2. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x \, dx.$$

$$10.3. \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x \, dx.$$

$$10.4. \int_0^{2\pi} \sin^2(x/4) \cos^6(x/4) \, dx.$$

$$10.5. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8(x/2) \, dx.$$

$$10.6. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^8 x \, dx.$$

$$10.7. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x \, dx.$$

$$10.8. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x \, dx.$$

$$10.9. \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x \, dx.$$

$$10.10. \int_0^{2\pi} \cos^8(x/4) \, dx.$$

$$10.11. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8(x/2) \, dx.$$

$$10.12. \int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x \, dx.$$

$$10.13. \int_{\pi/2}^{2\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x \, dx.$$

$$10.14. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x \, dx.$$

$$10.15. \int_0^{2\pi} \cos^8 x \, dx.$$

$$10.16. \int_0^{2\pi} \sin^8(x/4) \, dx.$$

$$10.17. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6(x/2) \cos^2(x/2) \, dx.$$

$$10.18. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^4 x \cos^4 x \, dx.$$

$$10.19. \int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x \, dx.$$

$$10.20. \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x \, dx.$$

$$10.21. \int_0^{2\pi} \sin^8 x \, dx.$$

$$10.22. \int_0^{2\pi} \sin^6(x/4) \cos^2(x/4) \, dx.$$

$$10.23. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4(x/2) \cos^4(x/2) \, dx.$$

$$10.24. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x \, dx.$$

$$10.25. \int_{\pi/2}^{2\pi} 2^8 \cos^8 x \, dx.$$

$$10.26. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 x \, dx.$$

$$10.27. \int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x \, dx.$$

$$10.28. \int_0^{2\pi} \sin^4(x/4) \cos^4(x/4) \, dx.$$

$$10.29. \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2(x/2) \cos^6(x/2) \, dx.$$

$$10.30. \int_{-\pi/2}^0 2^8 \cos^8 x \, dx.$$

$$10.31. \int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x \, dx.$$

**Задача 11.** Вычислить определённые интегралы.

$$11.1. \int_0^1 \frac{4\sqrt{1-x} - \sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{1-x})(3x+1)^2} \, dx.$$

$$11.2. \int_1^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} \, dx.$$

$$11.3. \int_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2 \sqrt{x+1}} \, dx.$$

$$11.4. \int_6^9 \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}} \, dx.$$

$$11.5. \int_0^5 e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}.$$

$$11.6. \int_8^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}} \, dx.$$

$$11.7. \int_0^1 e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11.8. \int_{5/2}^{10/3} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(x-2)^2} \, dx.$$

$$11.9. \int_1^8 \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2 \sqrt{x}} \, dx.$$

$$11.10. \int_1^2 \frac{x + \sqrt{3x-2} - 10}{\sqrt{3x-2} + 7} \, dx.$$

$$11.11. \int_6^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}} \, dx.$$

$$11.12. \int_0^2 \frac{(4\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2})dx}{(\sqrt{2x+2} + 4\sqrt{2-x})(2x+2)^2}.$$

$$11.13. \int_{-1/2}^0 \frac{x \, dx}{2 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$11.14. \int_0^4 e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}.$$

$$11.15. \int_{1/8}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2 \sqrt{x}} \, dx.$$

$$11.16. \int_{-5/3}^1 \frac{\sqrt[3]{3x+5} + 2}{1 + \sqrt[3]{3x+5}} \, dx.$$

$$11.17. \int_2^3 \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}} \, dx.$$

$$11.18. \int_0^7 \frac{\sqrt{x+25}}{(x+25)^2 \sqrt{x+1}} \, dx.$$

$$11.19. \int_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x} - \sqrt{3x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{3x+2} + 4\sqrt{2-x}\right)\left(3x+2\right)^2}.$$

$$11.21. \int_3^5 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}} dx.$$

$$11.23. \int_9^{15} \sqrt{\frac{6-x}{x-18}} dx.$$

$$11.25. \int_1^{64} \frac{\left(2 + \sqrt[3]{x}\right)dx}{\left(\sqrt[6]{x} + 2\sqrt{x^3} + \sqrt{x}\right)\sqrt{x}}.$$

$$11.27. \int_0^6 \frac{e^{\sqrt{(6-x)/(6+x)}} dx}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}.$$

$$11.29. \int_0^1 \frac{\left(4\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}\right)dx}{\left(\sqrt{x+1} + 4\sqrt{1-x}\right)(x+1)^2}.$$

$$11.31. \int_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x} - \sqrt{x+2}\right)dx}{\left(\sqrt{x+2} + 4\sqrt{2-x}\right)(x+2)^2}.$$

$$11.20. \int_0^2 e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}.$$

$$11.22. \int_{1/24}^{1/3} \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$11.24. \int_0^1 \frac{(4\sqrt{1-x} - \sqrt{2x+1})dx}{(\sqrt{2x+1} + 4\sqrt{1-x})(2x+1)^2}.$$

$$11.26. \int_{16/15}^{4/3} \frac{4\sqrt{x}}{x^2 \sqrt{x-1}} dx.$$

$$11.28. \int_1^{64} \frac{6 - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3} - 7x - 6\sqrt[4]{x^3}} dx.$$

$$11.30. \int_0^3 \frac{e^{\sqrt{(3-x)/(3+x)}} dx}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}.$$

**Задача 12.** Вычислить определённые интегралы.

$$12.1. \int_0^{16} \sqrt{256-x^2} dx.$$

$$12.2. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$12.3. \int_0^5 \frac{dx}{\left(25+x^2\right)\sqrt{25+x^2}}.$$

$$12.4. \int_0^3 \frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}.$$

$$12.5. \int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}.$$

$$12.6. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx.$$

$$12.7. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$$

$$12.8. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}.$$

$$12.9. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{3/2}}.$$

$$12.11. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$12.13. \int_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$12.15. \int_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} dx.$$

$$12.17. \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}.$$

$$12.19. \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}.$$

$$12.21. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$12.23. \int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}.$$

$$12.25. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$12.27. \int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$$

$$12.29. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12.31. \int_0^{3/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

$$12.10. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

$$12.12. \int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}.$$

$$12.14. \int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

$$12.16. \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$12.18. \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$$

$$12.20. \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$12.22. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$$

$$12.24. \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$$

$$12.26. \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$$

$$12.28. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

$$12.30. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

**Задача 13.** Найти неопределённые интегралы.

$$13.1. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}} dx.$$

$$13.2. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$13.3. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$13.4. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}} dx.$$

$$13.5. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[9]{x^8}} dx.$$

$$13.6. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\sqrt[9]{x^5}} dx.$$

$$13.7. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2\sqrt[9]{x}} dx.$$

$$13.8. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x^6\sqrt{x^5}} dx.$$

$$13.9. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx.$$

$$13.10. \int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}} dx.$$

$$13.11. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x^8\sqrt{x^7}} dx.$$

$$13.12. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x^{12}\sqrt{x^7}} dx.$$

$$13.13. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2\sqrt[6]{x}} dx.$$

$$13.14. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[8]{x}} dx.$$

$$13.15. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx.$$

$$13.16. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2\sqrt[4]{x}} dx.$$

$$13.17. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x^{10}\sqrt{x^9}} dx.$$

$$13.18. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x^5\sqrt{x^3}} dx.$$

$$13.19. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2\sqrt[5]{x}} dx.$$

$$13.20. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2\sqrt[20]{x^7}} dx.$$

$$13.21. \int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[25]{x^{11}}} dx.$$

$$13.22. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[5]{x}} dx.$$

$$13.23. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[15]{x}} dx.$$

$$13.25. \int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2 \sqrt[5]{x^2}} dx.$$

$$13.27. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^2}}{x \sqrt[12]{x^5}} dx.$$

$$13.29. \int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x \sqrt[6]{x^5}} dx.$$

$$13.31. \int \frac{\sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x \sqrt[5]{x^2}} dx.$$

$$13.24. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2 \sqrt[3]{x}} dx.$$

$$13.26. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{x \sqrt[3]{x}} dx.$$

$$13.28. \int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x \sqrt[12]{x^5}} dx.$$

$$13.30. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x}}}{x \sqrt[15]{x^4}} dx.$$

**Задача 14.** Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

$$14.1. \begin{aligned} y &= (x - 2)^3, \\ y &= 4x - 8. \end{aligned}$$

$$14.3. \begin{aligned} y &= 4 - x^2, \\ y &= x^2 - 2x. \end{aligned}$$

$$14.5. \begin{aligned} y &= \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \\ x &= 0, \quad x = 1. \end{aligned}$$

$$14.7. \begin{aligned} y &= \cos x \sin^2 x, \quad y = 0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2). \end{aligned}$$

$$14.9. \begin{aligned} y &= \frac{1}{x \sqrt{1 + \ln x}}, \quad y = 0, \\ x &= 1, \quad x = e^3. \end{aligned}$$

$$14.11. \begin{aligned} y &= (x + 1)^2, \\ y^2 &= x + 1. \end{aligned}$$

$$14.2. \begin{aligned} y &= x \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0, \\ (0 \leq x \leq 3). \end{aligned}$$

$$14.4. \begin{aligned} y &= \sin x \cos^2 x, \quad y = 0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2). \end{aligned}$$

$$14.6. \begin{aligned} y &= x^2 \sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \\ (0 \leq x \leq 2). \end{aligned}$$

$$14.8. \begin{aligned} y &= \sqrt{e^x - 1}, \quad y = 0, \\ x &= \ln 2. \end{aligned}$$

$$14.10. \begin{aligned} y &= \arccos x, \quad y = 0, \\ x &= 0. \end{aligned}$$

$$14.12. \begin{aligned} y &= 2x - x^2 + 3, \\ y &= x^2 - 4x + 3. \end{aligned}$$

14.13.  $y = x\sqrt{36 - x^2}$ ,  $y = 0$ ,  
 $(0 \leq x \leq 6)$ .

14.15.  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = 0$ ,  
 $x = \sqrt{3}$ .

14.17.  $x = \sqrt{e^y - 1}$ ,  $x = 0$ ,  
 $y = \ln 2$ .

14.19.  $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$ ,  $y = 0$ ,  
 $x = 1$ .

14.21.  $x = (y - 2)^3$ ,  
 $x = 4y - 8$ .

14.23.  $y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ ,  $y = 0$ ,  
 $x = 1$ .

14.25.  $x = \frac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}$ ,  $x = 0$ ,  
 $y = 1$ ,  $y = e^3$ .

14.27.  $y = x^2\sqrt{16 - x^2}$ ,  $y = 0$ ,  
 $(0 \leq x \leq 4)$ .

14.29.  $y = (x - 1)^2$ ,  
 $y^2 = x - 1$ .

14.31.  $x = 4 - (y - 1)^2$ ,  
 $x = y^2 - 4y + 3$ .

14.14.  $x = \arccos y$ ,  $x = 0$ ,  
 $y = 0$ .

14.16.  $y = x^2\sqrt{8 - x^2}$ ,  $y = 0$ ,  
 $(0 \leq x \leq 2\sqrt{2})$ .

14.18.  $y = x\sqrt{4 - x^2}$ ,  $y = 0$ ,  
 $(0 \leq x \leq 2)$ .

14.20.  $y = \frac{1}{1 + \cos x}$ ,  $y = 0$ ,  
 $x = \pi/2$ ,  $x = -\pi/2$ .

14.22.  $y = \cos^5 x \sin 2x$ ,  $y = 0$ ,  
 $(0 \leq x \leq \pi/2)$ .

14.24.  $x = 4 - y^2$ ,  
 $x = y^2 - 2y$ .

14.26.  $y = \frac{e^{1/x}}{x^2}$ ,  $y = 0$ ,  
 $x = 2$ ,  $x = 1$ .

14.28.  $x = \sqrt{4 - y^2}$ ,  $x = 0$ ,  
 $y = 0$ ,  $y = 1$ .

14.30.  $y = x^2 \cos x$ ,  $y = 0$ ,  
 $(0 \leq x \leq \pi/2)$ .

**Задача 15.** Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$15.1. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.3. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, \quad y \geq 4). \end{cases}$$

$$15.5. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.7. \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 6\sqrt{3} \quad (x \geq 6\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.9. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 6\pi, \quad y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.11. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.13. \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$$

$$15.15. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, \quad y \geq 6). \end{cases}$$

$$15.2. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$$

$$15.4. \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$15.6. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 4\pi, \quad y \geq 3). \end{cases}$$

$$15.8. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3}). \end{cases}$$

$$15.10. \begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$$

$$15.12. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 9 \quad (0 < x < 12\pi, \quad y \geq 9). \end{cases}$$

$$15.14. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$$

$$15.16. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$$

15.17.  $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2\sqrt{3} \quad (y \geq 2\sqrt{3}). \end{cases}$

15.19.  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$

15.21.  $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, \ y \geq 1). \end{cases}$

15.23.  $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$

15.25.  $\begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 9\sqrt{3} \quad (x \geq 9\sqrt{3}). \end{cases}$

15.27.  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, \ y \geq 2). \end{cases}$

15.29.  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \\ y = 5 \quad (y \geq 5). \end{cases}$

15.31.  $\begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \\ x = 12\sqrt{3} \quad (x \geq 12\sqrt{3}). \end{cases}$

15.18.  $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 15 \quad (0 < x < 20\pi, \ y \geq 15). \end{cases}$

15.20.  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$

15.22.  $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$

15.24.  $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \\ y = 12 \quad (0 < x < 16\pi, \ y \geq 12). \end{cases}$

15.26.  $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \\ y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3}). \end{cases}$

15.28.  $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$

15.30.  $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, \ y \geq 6). \end{cases}$

**Задача 16.** Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярных координатах.

16.1.  $r = 4\cos 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$

16.2.  $r = \cos 2\varphi.$

16.3.  $r = \sqrt{3}\cos\varphi, \quad r = \sin\varphi,$   
 $(0 \leq \varphi \leq \pi/2).$

16.4.  $r = 4\sin 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$

16.5.  $r = 2\cos\varphi, \quad r = 2\sqrt{3}\sin\varphi,$   
 $(0 \leq \varphi \leq \pi/2).$

16.6.  $r = \sin 3\varphi.$

16.7.  $r = 6\sin 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$

16.8.  $r = \cos 3\varphi.$

16.9.  $r = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4),$   
 $(-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2).$

16.10.  $r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4),$   
 $(0 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$

16.11.  $r = 6\cos 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$

16.12.  $r = 1/2 + \sin\varphi.$

16.13.  $r = \cos\varphi, \quad r = \sin\varphi,$   
 $(0 \leq \varphi \leq \pi/2).$

16.14.  $r = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4),$   
 $(\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$

16.15.  $r = \cos\varphi, \quad r = 2\cos\varphi.$

16.16.  $r = \sin\varphi, \quad r = 2\sin\varphi.$

16.17.  $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi.$

16.18.  $r = 1/2 + \cos\varphi.$

16.19.  $r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi.$

16.20.  $r = (5/2)\sin\varphi, \quad r = (3/2)\sin\varphi.$

16.21.  $r = (3/2)\cos\varphi, \quad r = (5/2)\cos\varphi.$

16.22.  $r = 4\cos 4\varphi.$

16.23.  $r = \sin 6\varphi.$

16.24.  $r = 2\cos\varphi, \quad r = 3\cos\varphi.$

16.25.  $r = \cos\varphi + \sin\varphi.$

16.26.  $r = 2\sin 4\varphi.$

16.27.  $r = 2\cos 6\varphi.$

16.28.  $r = \cos\varphi - \sin\varphi.$

16.29.  $r = 3\sin\varphi, \quad r = 5\sin\varphi.$

16.30.  $r = 2\sin\varphi, \quad r = 4\sin\varphi.$

16.31.  $r = 6\sin\varphi, \quad r = 4\sin\varphi.$

**Задача 17.** Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

$$17.1. \quad y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$$

$$17.2. \quad y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

$$17.3. \quad y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 7/9. \quad 17.4. \quad y = \ln \frac{5}{2x}, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

$$17.5. \quad y = -\ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$$

$$17.6. \quad y = e^x + 6, \quad \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$$

$$17.7. \quad y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, \quad 1/4 \leq x \leq 1. \quad 17.8. \quad y = \ln(x^2-1), \quad 2 \leq x \leq 3.$$

$$17.9. \quad y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, \quad 0 \leq x \leq 8/9. \quad 17.10. \quad y = \ln(1-x^2), \quad 0 \leq x \leq 1/4.$$

$$17.11. \quad y = 2 + \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$17.12. \quad y = 1 - \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$$

$$17.13. \quad y = e^x + 13, \quad \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$$

$$17.14. \quad y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1/4.$$

$$17.15. \quad y = 2 - e^x, \quad \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}. \quad 17.16. \quad y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 15/16.$$

$$17.17. \quad y = 1 - \ln \sin x, \quad \pi/3 \leq x \leq \pi/2. \quad 17.18. \quad y = 1 - \ln(x^2-1), \quad 3 \leq x \leq 4.$$

$$17.19. \quad y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5, \quad 1/9 \leq x \leq 1.$$

$$17.20. \quad y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1, \quad 0 \leq x \leq 9/16.$$

$$17.21. \quad y = \ln \sin x, \quad \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$$

$$17.22. \quad y = \ln 7 - \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

$$17.23. \quad y = \operatorname{ch} x + 3, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$17.24. \quad y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 3/4.$$

$$17.25. \quad y = \ln \cos x + 2, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$$

$$17.26. \quad y = e^x + 26, \quad \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$$

$$17.27. \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

$$17.28. \quad y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + 4, \quad 0 \leq x \leq 1/2.$$

$$17.29. \quad y = \frac{(e^{2x} + e^{-2x} + 3)}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

$$17.30. \quad y = e^x + e, \quad \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$$

$$17.31. \quad y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2}, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

**Задача 18.** Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

$$18.1. \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$18.3. \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

$$18.5. \begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$18.7. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(t - \cos t), \end{cases} \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$$

$$18.9. \begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$18.11. \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$18.13. \begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi/2 \leq t \leq \pi.$$

$$18.2. \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$18.4. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$18.6. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$18.8. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \end{cases} \quad \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$$

$$18.10. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$18.12. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \pi/2 \leq t \leq \pi.$$

$$18.14. \begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$18.15. \begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$18.16. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$18.17. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/6. \end{cases}$$

$$18.18. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$18.19. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3. \end{cases}$$

$$18.20. \begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq \pi/3. \end{cases}$$

$$18.21. \begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$$

$$18.22. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$18.23. \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$$

$$18.24. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq 3\pi/2. \end{cases}$$

$$18.25. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$18.26. \begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$18.27. \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

$$18.28. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq 3\pi. \end{cases}$$

$$18.29. \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$$

$$18.30. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$$

$$18.31. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

**Задача 19.** Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

$$19.1. \rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.2. \rho = 2e^{4\varphi/3}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.3. \rho = \sqrt{2} e^\varphi, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.4. \rho = 5e^{5\varphi/12}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.5. \rho = 6e^{12\varphi/5}, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$19.6. \rho = 3e^{3\varphi/4}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.7. \rho = 4e^{4\varphi/3}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.8. \rho = \sqrt{2} e^\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.9. \rho = 5e^{5\varphi/12}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.10. \rho = 12e^{12\varphi/5}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.11. \rho = 1 - \sin \varphi, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/6.$$

$$19.12. \rho = 2(1 - \cos \varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2.$$

$$19.13. \rho = 3(1 + \sin \varphi), \quad -\pi/6 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.14. \rho = 4(1 - \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.15. \rho = 5(1 - \cos \varphi), \quad -\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.16. \rho = 6(1 + \sin \varphi), \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.17. \rho = 7(1 - \sin \varphi), \quad -\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.18. \rho = 8(1 - \cos \varphi), \quad -2\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$$

$$19.19. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 3/4.$$

$$19.20. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 4/3.$$

$$19.21. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 5/12.$$

$$19.22. \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 12/5.$$

$$19.23. \rho = 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 3/4.$$

$$19.24. \rho = 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 4/3.$$

$$19.25. \rho = 5\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 12/5.$$

$$19.26. \rho = 2\cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.27. \rho = 8\cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/4.$$

$$19.28. \rho = 6\cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$19.29. \rho = 2\sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$19.30. \rho = 8\sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/4.$$

$$19.31. \rho = 6\sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

**Задача 20.** Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

- |   |   |
|---|---|
| 20.1. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \quad z = y, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$                               | 20.2. $z = x^2 + 4y^2, \quad z = 2.$  |
| 20.3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$                                | 20.4. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, \quad z = 12.$                      |
| 20.5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z = 1, \quad z = 0.$                     | 20.6. $x^2 + y^2 = 9, \quad z = y, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$                               |
| 20.7. $z = x^2 + 9y^2, \quad z = 3.$  | 20.8. $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$                                |
| 20.9. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1, \quad z = 16.$                               | 20.10. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad z = 2, \quad z = 0.$         |
| 20.11. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y\sqrt{3}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$            | 20.12. $z = 2x^2 + 8y^2, \quad z = 4.$  |
| 20.13. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 2.$                             | 20.14. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, \quad z = 12.$                     |
| 20.15. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, \quad z = 3, \quad z = 0.$                   | 20.16. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad z = y\sqrt{3}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$ |
| 20.17. $z = x^2 + 5y^2, \quad z = 5.$   | 20.18. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 4.$                     |
| 20.19. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, \quad z = 20.$                             | 20.20. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, \quad z = 4, \quad z = 0.$         |
| 20.21. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad z = \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$ | 20.22. $z = 4x^2 + 9y^2, \quad z = 6.$  |
| 20.23. $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$   | 20.24. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1, \quad z = 20.$                   |
| 20.25. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, \quad z = 5, \quad z = 0.$                  |   |
| 20.26. $\frac{x^2}{27} + y^2 = 1, \quad z = \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$            |   |
| 20.27. $z = 2x^2 + 18y^2, \quad z = 6.$   | 20.28. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 2.$                    |
| 20.29. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1, \quad z = 16.$                              | 20.30. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1, \quad z = 6, \quad z = 0.$        |
| 20.31. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1, \quad z = 7, \quad z = 0.$                  |   |

**Задача 21.** Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1–16 ось вращения  $Ox$ , в вариантах 17–31 ось вращения  $Oy$ .

21.1.  $y = -x^2 + 5x - 6, \quad y = 0.$

21.2.  $2x - x^2 - y = 0, \quad 2x^2 - 4x + y = 0.$

21.3.  $y = 3\sin x, \quad y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

21.4.  $y = 5\cos x, \quad y = \cos x, \quad x = 0, \quad x \geq 0.$

21.5.  $y = \sin^2 x, \quad x = \pi/2, \quad y = 0.$

21.6.  $x = \sqrt[3]{y-2}, \quad x = 1, \quad y = 1.$

21.7.  $y = xe^x, \quad y = 0, \quad x = 1.$

21.8.  $y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2, \quad x = 0.$

21.9.  $y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2.$

21.10.  $y = e^{1-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1.$

21.11.  $y = x^2, \quad y^2 - x = 0.$

21.12.  $x^2 + (y - 2)^2 = 1.$

21.13.  $y = 1 - x^2, \quad x = 0, \quad x = \sqrt{y-1}, \quad x = 1. \quad 21.14. \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad x = 2.$

21.15.  $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$

21.16.  $y = \sin(\pi x/2), \quad y = x^2.$

21.17.  $y = \arccos(x/3), \quad y = \arccos x, \quad y = 0.$

21.18.  $y = \arcsin(x/5), \quad y = \arcsin x, \quad y = \pi/2.$

21.19.  $y = x^2, \quad x = 2, \quad y = 0.$

21.20.  $y = x^2 + 1, \quad y = x, \quad x = 0, \quad x = 1.$

21.21.  $y = \sqrt{x-1}, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad x = 0, 5. \quad 21.22. \quad y = \ln x, \quad x = 2, \quad y = 0.$

21.23.  $y = (x-1)^2, \quad y = 1.$

21.24.  $y^2 = x - 2, \quad y = 0, \quad y = x^3, \quad y = 1.$

21.25.  $y = x^3, \quad y = x^2.$

21.26.  $y = \arccos(x/5), \quad y = \arccos(x/3), \quad y = 0.$

21.27.  $y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = 0.$

21.28.  $y = x^2 - 2x + 1, \quad x = 2, \quad y = 0.$

21.29.  $y = x^3, \quad y = x.$

21.30.  $y = \arccos x, \quad y = \arcsin x, \quad x = 0.$

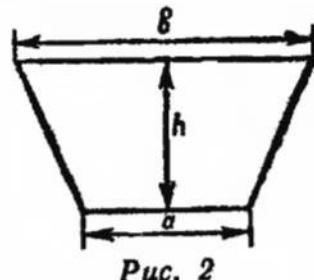
21.31.  $y = (x-1)^2, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0.$

## Задача 22

Варианты 1–10

Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочного трапеции (рис. 2). Плотность воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ , ускорение свободного падения  $g$  положить равным  $10 \text{ м/с}^2$ .

Указание. Давление на глубине  $x$  равно  $\rho gx$ .



- |   |   |
|---|---|
| 22.1. $a = 4,5 \text{ м}$ , $b = 6,6 \text{ м}$ , $h = 3,0 \text{ м}$ .   | 22.2. $a = 4,8 \text{ м}$ , $b = 7,2 \text{ м}$ , $h = 3,0 \text{ м}$ . |
| 22.3. $a = 5,1 \text{ м}$ , $b = 7,8 \text{ м}$ , $h = 3,0 \text{ м}$ .   | 22.4. $a = 5,4 \text{ м}$ , $b = 8,4 \text{ м}$ , $h = 3,0 \text{ м}$ . |
| 22.5. $a = 5,7 \text{ м}$ , $b = 9,0 \text{ м}$ , $h = 4,0 \text{ м}$ .   | 22.6. $a = 6,0 \text{ м}$ , $b = 9,6 \text{ м}$ , $h = 4,0 \text{ м}$ . |
| 22.7. $a = 6,3 \text{ м}$ , $b = 10,2 \text{ м}$ , $h = 4,0 \text{ м}$ .  |   |
| 22.8. $a = 6,6 \text{ м}$ , $b = 10,8 \text{ м}$ , $h = 4,0 \text{ м}$ .  |   |
| 22.9. $a = 6,9 \text{ м}$ , $b = 11,4 \text{ м}$ , $h = 5,0 \text{ м}$ .  |   |
| 22.10. $a = 7,2 \text{ м}$ , $b = 12,0 \text{ м}$ , $h = 5,0 \text{ м}$ . |   |

Варианты 11–20

Определить работу (в джоулях), совершающую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту  $H$  км. Масса спутника равна  $m$  т, радиус Земли  $R_3 = 6380$  км. Ускорение свободного падения  $g$  у поверхности Земли положить равным  $10 \text{ м/с}^2$ .

- |   |   |
|---|---|
| 22.11. $m = 7,0 \text{ т}$ , $H = 200 \text{ км}$ . | 22.12. $m = 7,0 \text{ т}$ , $H = 250 \text{ км}$ . |
| 22.13. $m = 6,0 \text{ т}$ , $H = 300 \text{ км}$ . | 22.14. $m = 6,0 \text{ т}$ , $H = 350 \text{ км}$ . |
| 22.15. $m = 5,0 \text{ т}$ , $H = 400 \text{ км}$ . | 22.16. $m = 5,0 \text{ т}$ , $H = 450 \text{ км}$ . |
| 22.17. $m = 4,0 \text{ т}$ , $H = 500 \text{ км}$ . | 22.18. $m = 4,0 \text{ т}$ , $H = 550 \text{ км}$ . |
| 22.19. $m = 3,0 \text{ т}$ , $H = 600 \text{ км}$ . | 22.20. $m = 3,0 \text{ т}$ , $H = 650 \text{ км}$ . |

## Варианты 21–31

Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением (103,3 кПа). Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на  $h$  м (рис. 3).

**Указание.** Уравнение состояния газа  $pV = \text{const}$ , где  $p$  – давление,  $V$  – объем.

- 22.21.  $H = 0,4$  м,  $h = 0,35$  м,  $R = 0,1$  м.
- 22.22.  $H = 0,4$  м,  $h = 0,3$  м,  $R = 0,1$  м.
- 22.23.  $H = 0,4$  м,  $h = 0,2$  м,  $R = 0,1$  м.
- 22.24.  $H = 0,8$  м,  $h = 0,7$  м,  $R = 0,2$  м.
- 22.25.  $H = 0,8$  м,  $h = 0,6$  м,  $R = 0,2$  м.
- 22.26.  $H = 0,8$  м,  $h = 0,4$  м,  $R = 0,2$  м.
- 22.27.  $H = 1,6$  м,  $h = 1,4$  м,  $R = 0,3$  м.
- 22.28.  $H = 1,6$  м,  $h = 1,2$  м,  $R = 0,3$  м.
- 22.29.  $H = 1,6$  м,  $h = 0,8$  м,  $R = 0,3$  м.
- 22.30.  $H = 2,0$  м,  $h = 1,5$  м,  $R = 0,4$  м.
- 22.31.  $H = 2,0$  м,  $h = 1,0$  м,  $R = 0,4$  м.

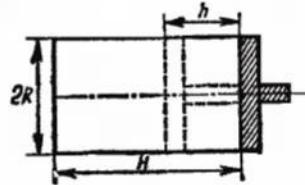


Рис. 3