

Модуль 1 «Математические модели геометрических объектов»

Лекция 9 «Полигоны кривых и поверхностей»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,
ауд.: 930а(УЛК)
моб.: 8-910-461-70-04,
email: azaharov@bmstu.ru



МГТУ им. Н.Э. Баумана

28 апреля 2015 г.

Для каждой кривой построим набор точек, принадлежащих кривой и следующих в порядке возрастания параметра. Если соединить эти точки отрезками, то получим ломанную линию, аппроксимирующую заданную кривую.

Определение 1. Последовательность точек, по которым проходит аппроксимирующая кривую ломаная линия, называется *полигоном* кривой. Полигоны с минимальными вычислительными затратами перемещаются, трансформируются и проецируются. Проекция на плоскость пространственной ломанной линии также является ломанной линией. Рассмотрим вычисление шага аппроксимации кривой полигоном. Шаг должен быть таким, чтобы полигон казался плавным. Пусть задана кривая $r(t)$ и начало отсчёта находится в некоторой её точке t_0 , являющейся точкой полигона. Требуется найти параметр t_1 следующей точки полигона, так чтобы отклонение кривой от её полигона не превышало заданную величину δ .

Предположим, что в ближайшей окрестности кривая близка к своей соприкасающейся в этой точке окружности. Радиус ρ соприкасающейся окружности равен радиусу кривизны кривой и определяется по формуле

$$\rho = \frac{|\mathbf{r}'|^3}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}.$$

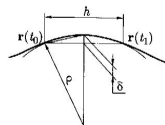
По теореме Пифагора квадрат половины длины хорды равен $\rho^2 - (\rho - \delta)^2 = \delta(2\rho - \delta)$.

Длина всей хорды будет равна $h = 2\sqrt{\delta(2\rho - \delta)}$.

Если угол дуги достаточно мал, то можно считать, что длина хорды примерно равна длине дуги кривой, и приращение параметра t на длине дуги кривой можно принять равным

$$\Delta t \approx \frac{h}{|\mathbf{r}'|} = 2 \frac{\sqrt{\delta(2\rho - \delta)}}{|\mathbf{r}'|}. \quad (1)$$

Таким образом, параметр следующей точки полигона может быть принят равным $t_1 = t_0 + \Delta t$. При резком изменении направления или длины второй производной в точке t_1 по сравнению с предыдущей, прогиб может оказаться значительно больше δ . В этом случае шаг должен быть уточнен путём определения среднего радиуса кривизны кривой на рассматриваемом участке.



Формула вычисления параметрического шага между точками полигона (1) позволяет построить полигон кривой, отстоящий от самой кривой на величину, не превышающую δ . Проекция этого полигона будет отстоять от проекции кривой также на величину, не превышающую δ , при масштабе отображения $1 : 1$. Величину δ будем называть *точностью отображения*. Для произвольного масштаба отображения $m : 1$ проекция полигона кривой будет отстоять от проекции кривой на величину, не превышающую $m\delta$. Таким образом, если необходимо получить проекцию кривой в масштабе $m : 1$ с точностью отображения δ , надо построить полигон, точки которого находятся на параметрическом расстоянии, не превышающем

$$\Delta t \approx 2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left(2\rho - \frac{\delta}{m} \right)}}{|\mathbf{r}'|}. \quad (2)$$

Шаг по параметру кривой при выполнении построений определяется углом отклонения касательной кривой и не зависит от её размеров и масштаба отображения. Шаг (2) определяется точностью отображения и зависит от размеров кривой и масштаба отображения.

Шаг для полигона кривой на поверхности вычислим аналогично вычислению шага полигона кривой. Пусть точка некоторого полигона поверхности $\mathbf{r}(t_0, \tau_0)$ определяется параметрами t_0 и τ_0 . Найдем параметры t_1 и τ_1 следующей точки поверхности так, чтобы пространственный отрезок из точки $\mathbf{r}(t_0, \tau_0)$ в точку $\mathbf{r}(t_1, \tau_1)$ отстоял от поверхности на расстоянии, не превышающем заданную величину δ . Для этого вычислим радиус кривизны линии на поверхности, имеющей направление $(dt, d\tau)$. Радиус кривизны линии на поверхности определяется равенством

$$\rho = \frac{g_{11}dt^2 + 2g_{12}dtd\tau + g_{22}d\tau^2}{b_{11}dt^2 + 2b_{12}dtd\tau + b_{22}d\tau^2}, \quad (3)$$

где g_{11} , g_{12} и g_{22} — коэффициенты первой основной квадратичной формы поверхности; b_{11} , b_{12} и b_{22} — коэффициенты второй основной квадратичной формы поверхности. Подставим (3) в (2) и получим приращения для параметров соседней точки полигона

$$\Delta t \approx 2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left(2\rho - \frac{\delta}{m} \right)}}{|\mathbf{r}_1|}; \quad \Delta \tau \approx 2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left(2\rho - \frac{\delta}{m} \right)}}{|\mathbf{r}_2|},$$

где $\mathbf{r}_1 = \partial \mathbf{r} / \partial t$; $\mathbf{r}_2 = \partial \mathbf{r} / \partial \tau$.

С помощью полигонов можно строить изображения кривых, поверхностей, тел и других более сложных моделей.

Определение 2. Совокупность полигонов геометрической модели называется *сеткой полигонов* или просто *сеткой*.

Сетка кривой состоит

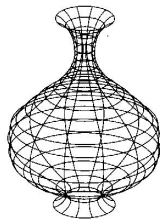
из одного полигона, сетка поверхности — из полигонов

её границ и нескольких полигонов её t - и τ -линий. В частных

случаях для полигонов t -линий получим $\rho_t = g_{11}/b_{11}$, а для

полигонов τ -линий — $\rho_\tau = g_{22}/b_{22}$. Шаги вдоль координатных t - и τ -линий поверхности будем вычислять по формулам

$$\Delta t \approx 2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left(2 \frac{g_{11}}{b_{11}} - \frac{\delta}{m} \right)}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|}; \quad \Delta \tau \approx 2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left(2 \frac{g_{22}}{b_{22}} - \frac{\delta}{m} \right)}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}. \quad (4)$$



Сетка тела состоит из полигонов поверхностей его граней. Отображение геометрических моделей полигонами обладает универсальностью и простотой.

Для получения параллельной или центральной проекции полигона достаточно вычислить проекции его точек и соединить их отрезками.

При решении некоторых задач сложные криволинейные поверхности приходится заменять набором элементов простой формы. Этот прием используется при численном интегрировании, при определении соударений элементов конструкции, при расчёте прочности, а также при визуализации. Треугольные элементы с минимальными вычислительными затратами перемещаются, трансформируются в пространстве. Задача разбиения поверхности на треугольные элементы решается в плоскости параметров поверхности и является двумерной.

Определение 3. *Триангуляцией* плоскости называется построение на плоскости конечного числа треугольников, не перекрывающих друг друга и стыкующихся между собой по общим сторонам и вершинам. В простейшем случае даётся совокупность точек на плоскости и предлагается построить максимально возможное число треугольников с вершинами в этих точках. Отрезки, соединяющие вершины треугольников, называют *ребрами*. В общем случае задача построения триангуляции заключается в соединении заданных вершин непересекающимися ребрами. Поставленная задача может иметь несколько решений, поэтому существуют различные типы триангуляции, обладающие характерными свойствами.

Определение 4. Триангуляция называется *оптимальной*, если сумма длин всех ребер минимальна среди всех возможных триангуляций, построенных при одних тех же исходных данных.

Оптимальная триангуляция используется довольно редко ввиду большой трудоемкости её построения. На практике чаще применяются другие триангуляции, не являющиеся оптимальными. К ним относится жадная триангуляция и триангуляция Делоне.

Определение 5. Триангуляция называется *жадной*, если она построена с помощью жадного алгоритма. «Жадными» называют алгоритмы, которые никогда не отменяют то, что было сделано ранее.

Жадный алгоритм триангуляции выполняет следующие действия: вычисляет расстояния между всеми парами заданных вершин будущей триангуляции, сортирует их по возрастанию и, начиная с минимального расстояния, по сортированным парам вершин строит ребра треугольников, проверяя их на пересечение с уже имеющимися. Если новое ребро пересекает хотя бы одно уже построенное ребро, то новое ребро отбрасывается. Если все расстояния между вершинами различные, то жадная триангуляция однозначна, в противном случае она зависит от последовательности вставки ребер одинаковой длины.

Определение 7. Триангуляция называется *триангуляцией Делоне*, если внутри описанной вокруг любого треугольника окружности отсутствуют вершины других треугольников.

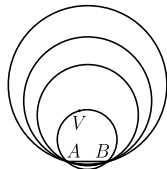
Триангуляция Делоне не

допускает построение неоправданно вытянутых треугольников и поэтому наиболее часто применяется на практике.

Пусть на плоскости задан набор двумерных точек. Требуется разбить указанную область на треугольники, вершинами которых являются заданные точки. Треугольники не должны накладываться друг друга, а их стороны могут пересекаться только в вершинах.

Найдем пару точек, расстояние между которыми меньше расстояния между любой другой парой точек, и построим между этими точками ребро AB .

Через вершины A , B и любую, не лежащую с ними на одной прямой, вершину V можно провести окружность. Центр окружности, проходящей через точки A , B , и V , лежит на пересечении перпендикуляров к серединам отрезков AB , VB и AV .



Триангуляция Делоне

Пусть вершины A , B и V описываются двумерными радиусами-векторами $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$, $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$, $\mathbf{v} = (x_v, y_v)$ соответственно. Построим прямую

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} y_a - y_b \\ x_b - x_a \end{pmatrix}, \quad (5)$$

перпендикулярную отрезку AB , проходящую через его середину и прямую

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_v + x_b \\ y_v + y_b \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} y_v - y_b \\ x_b - x_v \end{pmatrix}, \quad (6)$$

перпендикулярную отрезку VB и проходящую через его середину.

Пересечение прямой (5) с прямой (6) найдем, решив систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x_a + x_b) + t(y_a - y_b) = \frac{1}{2}(x_v + x_b) + w(y_v - y_b); \\ \frac{1}{2}(y_a + y_b) + t(x_b - x_a) = \frac{1}{2}(y_v + y_b) + w(x_b - x_v) \end{cases} \quad (7)$$

относительно параметров прямых t и w , определяющих положение точки пересечения на прямых. Из системы (7) параметр t равен

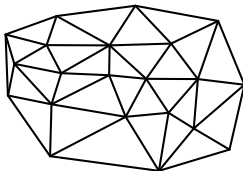
$$t = \frac{1}{2} \frac{(x_v - x_b)(x_v - x_a) + (y_v - y_b)(y_v - y_a)}{(y_v - y_b)(x_b - x_a) + (x_v - x_b)(y_b - y_a)}. \quad (8)$$

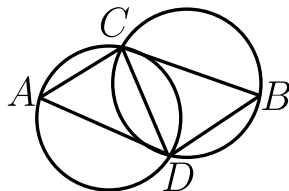
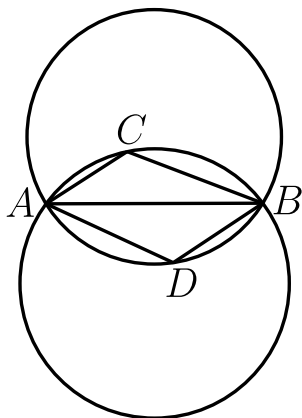
Если центр окружности лежит на середине отрезка AB , то $t = 0$, если слева от отрезка AB , то $t > 0$, если справа от отрезка AB , то $t < 0$.

Триангуляция Делоне

В качестве третьей вершины треугольника Делоне выберем вершину V , соответствующая которой окружность не содержит других вершин. Для ближайшей слева к отрезку AB вершины параметр t имеет минимальное значение, а для ближайшей справа к отрезку AB вершины — максимальное.

В общем случае для ребра можно найти две ближайшие вершины: одну слева от ребра, другую справа от ребра, и, таким образом, построить два смежных треугольника Делоне. Для ребра, относительно которого все заданные точки лежат только с одной стороны, можно найти только одну ближайшую вершину. Ребро последнего типа будем называть *граничным*. Алгоритм построения триангуляции Делоне работает до тех пор, пока для каждого уже имеющегося внутреннего ребра не будут построены два смежных треугольника, а для каждого граничного ребра не будет построен один треугольник. В результате получим триангуляцию внутренней области выпуклого многоугольника, содержащего все заданные вершины.



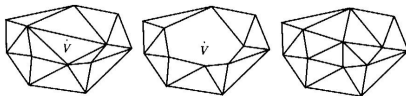


Триангуляцию Делоне можно получить из любой другой триангуляции, последовательно перестраивая смежные пары треугольников ABC и ADB , не удовлетворяющие условию Делоне, в пары треугольников ADC и BCD , удовлетворяющие условию Делоне.

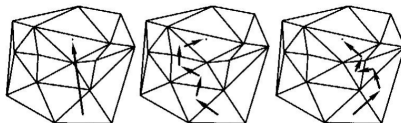
Определение 7. Построение триангуляции путём последовательного добавления точек в частично построенную триангуляцию называется *итеративной триангуляцией*.

В данном подходе сначала определяется положение новой вершины относительно имеющейся триангуляции, и в зависимости от результата выполняются те или иные действия. Если она совпадает с имеющейся вершиной, никаких действий не проводят. Если новая вершина попадает на некоторое ребро, то оно разбивается два ребра, и смежные с ребром треугольники также делятся на два меньших. Если новая вершина попала внутрь какого-либо треугольника, то он удаляется и внутри образовавшегося многоугольника выполняется построение новых треугольников с участием новой вершины.

Если новая вершина не попадает внутрь триангуляции, то находят граничные ребра, с которыми она может образовывать новые треугольники. Во всех случаях, когда появляются новые треугольники, проводят проверку на выполнение условия Делоне для новых треугольников и соседних с ними. При нарушении условия Делоне производится локальное перестроение триангуляции.



Итеративная триангуляция Делоне



Наиболее трудоемкой частью выполняемых действий в итеративной триангуляции является поиск треугольника, в который попадает новая вершина. Если нет никакой закономерности между вставляемыми вершинами, то поиск начинают с произвольного треугольника. На рис. приведены три простейших способа локализации новой вершины в частично построенной триангуляции.

В первом случае строится отрезок прямой из некоторой точки начального треугольника во вставляемую вершину и поиск осуществляется вдоль этого отрезка. Во втором случае движение осуществляется от треугольника к смежному треугольнику через ребро, пересекаемое прямой, проходящей через центр текущего треугольника и вставляемую вершину. В третьем случае движение осуществляется от треугольника к смежному треугольнику через любое ребро, относительно которого вставляемая вершина и противоположная ребру вершина текущего треугольника лежат по разные стороны.

Триангуляция Делоне ограниченной области

В практических задачах триангуляции кроме заданных вершин присутствуют дополнительные условия, которые, как правило, осложняют задачу. Такие задачи называют триангуляцией с ограничениями. Чаще всего дополнительными условиями являются некоторые кривые, которые должны тем или иным образом соотноситься с триангуляцией. В одних случаях кривые должны быть вписаны в триангуляцию, в других — триангуляция должна вписаться в заданные кривые.

Рассмотрим двумерную область параметров поверхности, ограниченной замкнутой ломанной линией, содержащей набор точек внутри этой области. Для решения подобных задач алгоритм триангуляции Делоне можно модифицировать следующим образом. Сориентируем ограничивающую область ломаную линию так, чтобы область лежала слева от неё. На каждом участке ломанной линии построим ребро. Каждую заданную точку и вершину ломаной будем называть вершиной триангуляции. Ребра и вершины, участвующие в алгоритме триангуляции, будем называть *активными*. Вначале активными являются все ребра и вершины. Построение треугольников начнём с произвольного граничного ребра. Для каждого ребра будем искать ближайшую активную вершину, которая лежит слева от него и соответствующая окружность которой не содержит других вершин.

Триангуляция Делоне ограниченной области

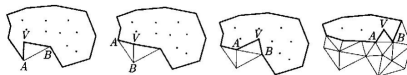


Рис.: Процесс триангуляции: активные ребра показаны толстыми линиями, а неактивные ребра — тонкими

Пусть для граничного ребра AB найдена ближайшая вершина V . Для этой вершины правая часть (8) принимает наименьшее значение. Проверим не пересекают ли отрезки AV и BV активные ребра, т.е. можно ли построить треугольник ABV . Если построение возможно, то построим треугольник ABV и переведем ребро AB в разряд неактивных. Неактивными будем называть ребра и вершины, которые не участвуют в алгоритме триангуляции. Если среди граничных ребер отсутствует ребро BV , то на отрезке VB построим новое граничное ребро. Если же среди граничных ребер есть ребро BV , то переведем его и вершину B в разряд неактивных. Если среди граничных ребер отсутствует ребро VA , то на отрезке AV построим новое граничное ребро. Если же среди граничных ребер есть ребро VA , то переведем его и вершину A в разряд неактивных. В процессе триангуляции происходит изменение ломанной линии, образованной активными граничными ребрами. При этом область, подлежащая триангуляции, уменьшается.

Триангуляция Делоне ограниченной области

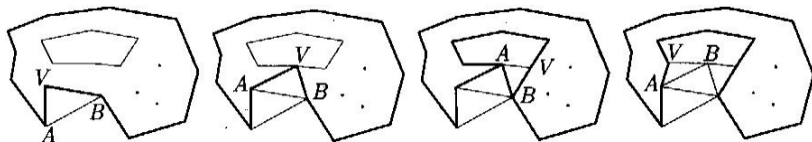


Рис.: Процесс триангуляции области с одним внутренним вырезом

Описанный алгоритм можно использовать и для областей, внутри которых есть не принадлежащие им «вырезы», описываемые ломанными линиями. В этом случае по границе вырезов также построим ребра на участках ломанных линий, сориентировав их так, чтобы область лежала слева от ребер. Эти ребра участвуют в триангуляции наравне с ребрами внешней границы. В процессе триангуляции рано или поздно произойдет слияние внешних и внутренних граничных линий, образованных активными ребрами. Триангуляцию закончим, когда будет построен последний треугольник и все вершины и ребра станут неактивными.

Триангуляция поверхностей

Триангуляция поверхности представляет собой аппроксимацию поверхности треугольными элементами (треугольниками). Эту аппроксимацию называют *триангуляционной сеткой*. Несмотря на то, что аппроксимирующие элементы являются пространственными объектами, задача триангуляции поверхности является двумерной, так как она выполняется в плоскости параметров поверхности.

Триангуляция для визуализации имеет своей целью аппроксимацию поверхности моделируемого объекта треугольными элементами, отстоящими от неё на расстоянии, не превышающем некоторой заданной величины δ . Все треугольные элементы должны стыковаться между собой по краям. Их вершины лежат на поверхности. С треугольными элементами легче работать, чем с породившей их поверхностью. Для треугольных пластин достаточно быстро вычисляются расстояние до заданной точки и точка пересечения с заданной прямой в пространстве.

В результате триангуляции поверхности получим массив вершин треугольников, массив нормалей поверхности в вершинах. Нормали требуются для определения поведения световых лучей, взаимодействующих с поверхностью модели. Построение триангуляции выполняется на двумерных точках $\mathbf{p}_i = (t_i, \tau_i)$ области параметров поверхности, каждая из которых соответствует вершине треугольника, поэтому далее, говоря о вершинах, будем иметь ввиду соответствующую ей двумерную точку.

Триангуляция поверхностей

Если область определения параметров поверхности $\mathbf{r}(t, \tau)$ представляет собой прямоугольник $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$, $\tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max}$, то выполним триангуляцию поверхности следующим образом. Разобьем область определения параметров поверхности на прямоугольные ячейки линиями $t_i = \text{const}$ и $\tau_j = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Эти линии образуют прямоугольную сетку.

Параметрические расстояния $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ между соседними линиями $t_i = \text{const}$ в соответствии с первой формулой (4) возьмём равными

$$\Delta t_i = \min \left(2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left(2 \frac{g_{11}(t_i, \tau)}{b_{11}(t_i, \tau)} - \frac{\delta}{m} \right)}}{\sqrt{g_{11}(t_i, \tau)}} \right) \quad \text{для всех } \tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max}, \quad (9)$$

Параметрические расстояния $\Delta \tau_j = \tau_{j+1} - \tau_j$ между соседними линиями $\tau_j = \text{const}$ в соответствии со второй формулой (4) примем равными

$$\Delta \tau_j = \min \left(2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left(2 \frac{g_{22}(t, \tau_j)}{b_{22}(t, \tau_j)} - \frac{\delta}{m} \right)}}{\sqrt{g_{22}(t, \tau_j)}} \right) \quad \text{для всех } t_{\min} \leq t \leq t_{\max}.$$

Триангуляция поверхностей

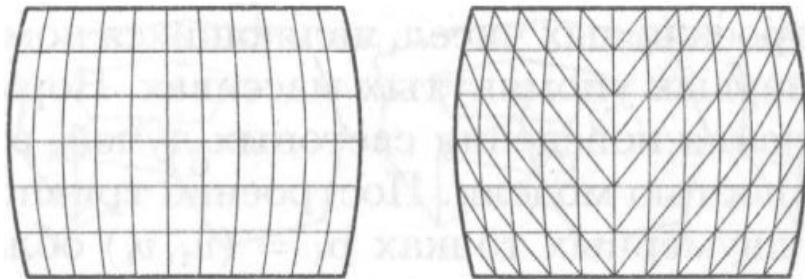


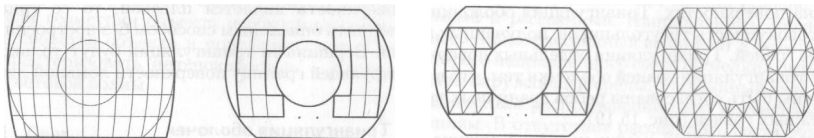
Рис.: Триангуляция поверхности вращения

Построив диагонали во всех прямоугольных ячейках, получим триангуляцию поверхности, удовлетворяющую предъявленным требованиям.

В общем случае область определения параметров поверхности $\mathbf{r}(t, \tau)$ описывается несколькими непересекающимися замкнутыми составными кривыми. Одна из кривых описывает внешнюю границу, а остальные кривые — внутренние вырезы, которые содержатся «внутри» внешней границы. Каждая граничная кривая является пространственной кривой, но описывается двумерной кривой $\mathbf{c}(w) = (t(w), \tau(w))$ в области определения параметров. Двумерные граничные кривые являются контурами — замкнутыми составными кривыми. Сведем задачу триангуляции поверхности со сложной границей к задаче триангуляции ограниченной области с заданными точками внутри.

Аппроксимируем граничные кривые замкнутыми ломанными линиями, а внутри области зададим точки, которые должны стать вершинами треугольников. За положительное направление для каждого граничного контура примем направление, при движении вдоль которого область определения поверхности находится слева от контура, если смотреть навстречу нормали поверхности. Пройдем по граничным контурам поверхности с некоторым вычисляемым шагом и получим точки, которые будут вершинами ломанных линий. Шаг при переходе от одной вершины к другой будем определять из условия, чтобы прогиб в пространстве участка граничной кривой между соседними точками не превосходил бы заданную величину δ . Параметрические расстояния Δw между вычисляемыми точками для кривой $\mathbf{r}(w) = \mathbf{r}(t(w), \tau(w))$ граничных контуров поверхности вычислим по формуле (2). Каждая ломанная состоит из упорядоченного набора двумерных точек $\mathbf{p}_i(t_i, \tau_i)$. Участки ломанной будем использовать в качестве активных ребер триангуляции Делоне.

Триангуляция поверхностей



Внутри области определения поверхности зададим точки, которые должны стать вершинами треугольников. Для этого построим прямоугольную сетку для области $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$, $\tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max}$, где t_{\min} , t_{\max} , τ_{\min} , τ_{\max} определяют габаритный прямоугольник внешнего граничного контура. Параметрические расстояния $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ между соседними линиями $u_i = \text{const}$ вычислим по формуле (9), а параметрические расстояния $\Delta \tau_j = \tau_{j+1} - \tau_j$ между соседними линиями $\tau_j = \text{const}$ — по формуле (10). В качестве внутренних вершин триангуляции возьмём узлы сетки, которые лежат внутри граничных ломанных. Тем самым сведем задачу триангуляции поверхности к рассмотренной ранее задаче. Для ускорения построений внутри ячеек сетки, целиком лежащих в области определения параметров поверхности, можно построить треугольники.