ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ В ФИНАНСОВУЮ МАТЕМАТИКУ

1. ПРЕДМЕТ И МЕТОД ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ.

Финансовая математика (ФМ) – это наука, которая изучает основные методы и модели количественного финансового анализа.

Основным методом исследования в ФМ является **метод математического моделирования,** который позволяет решать задачи финансового анализа, отображая взаимосвязи между финансовыми объектами в виде математических моделей.

При этом используется принцип системности, который выражается в поэтапном моделировании ***финансовых операций*** с переходом от простейших к более сложным моделям.

Финансовая операция (ФО) – это действие, которое направлено на получение дохода, характеризуемого финансовыми показателями.

К основным **задачам ФМ** относятся: 1) анализ эффективности ФО; 2) оптимизация ФО; 3) планирование ФО; 4) сравнение ФО.

Виды ФО. В системе количественного финансового анализа ФО разделяют:

1. ***По числу источников дохода***:

- операции с одним источником дохода;
- операции с несколькими источниками дохода.

2. ***По характеру распределения денежных сумм во времени***:

- операции с одним интервалом времени между платежами – например, ссудная операция с возмещением одним платежом;
- операции с потоком платежей – когда долг погашается последовательностью выплат.

3. ***По форме получения дохода***:

- операции с долговыми обязательствами;
- амортизация основных фондов;
- осуществление инвестиционных проектов;
- страхование.

В основу финансового анализа положены модели ФО, связанных с предоставлением денег в долг.

Операции с долговыми обязательствами. Лицо, дающее деньги в долг, называют ***кредитором.*** Лицо, берущее деньги в долг, называют ***заемщиком.*** Предоставление денег в долг происходит в соответствии с ***кредитным договором*** и осуществляется в различных формах: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, получение векселя, приобретение облигаций и т.д. При заключении кредитного договора кредитор и заемщик договариваются о размере кредита, времени и способе его погашения, а также об уровне вознаграждения кредитора.

Среди **операций с долговыми обязательствами** обычно выделяют три группы операций:

1) ***депозитные операции*** – это операция банка или другой финансовой организации по привлечению денежных средств в форме ***вкладов*** от юридических и физических лиц (вкладчиков), а также размещению этих средств в других кредитных учреждениях;

2) ***кредитные операции*** – это операция по предоставлению кредита;

3) ***операции с ценными бумагами***, в том числе учетные операции.

К ***базовым операциям с ценными бумагами***, рассматриваемым в ФМ, относятся *операции с векселями и депозитными сертификатами*.

Учет векселя – покупка банком или специализированным кредитным учреждением векселей до наступления срока платежа по ним, осуществляемая по цене, равной их номинальной стоимости, за вычетом процента, размер которого определяется количеством времени, оставшимся до наступления срока платежа, и величиной ставки процента.

Учетная операция – операция банка по учету (дисконту) векселей и других долговых обязательств.

2. ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ФМ.

Финансовые вычисления ведут свое начало с момента появления товарно-денежных отношений. В отдельную отрасль знаний они выделились в XIX в. под названием «коммерческая арифметика». Выделяют три основных исторических **этапа развития методов финансовых вычислений**:

1 й этап (до начала XIX в.) – к основным методам в финансовых расчетах в данный период относились методы начисления процентов в кредитных операциях.

2 й этап (нач. XIX – первая пол. XX в.) – этот период характеризуется разработкой большого разнообразия схем погашения долгосрочной задолженности с использованием моделей аннуитетов.

3 й этап (вторая пол. XX в. – наст. время) – особенностью этапа является учет неопределенности в анализе ФО и применение инструментария теории вероятностей.

Классификация методов финансовых вычислений:

1. ***Классическая ФМ в условиях определенности***: 1) начисление процентов; 2) определение стоимости потоков платежей; 3) планирование погашения задолженности; 4) анализ эффективности инвестиционных проектов; 5) оценка стоимости простейших ценных бумаг.

2. ***Классическая ФМ в условиях неопределенности***: 1) оптимизация портфеля активов; 2) теория иммунизации; 3) анализ финансовых рисков; 4) ценообразование производных ценных бумаг; 5) модели эффективного рынка.

3. ***Современная стохастическая ФМ***: 1) теория арбитража; 2) мартингальный подход в теории страхования.

3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ В ФМ.

Необходимость учета **времени в финансовых расчетах** определяется принципом неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени, что обусловлено следующим:

- деньги могут принести доход при инвестировании на определенный срок;
- покупательная способность денег снижается со временем вследствие инфляции.

Универсальной единицей измерения длительности ФО является ***год***.

Датированная сумма. Неравноценность денег во времени выражается в том, что каждая денежная сумма в финансовом анализе представляет собой ***датированную сумму,*** т.е. сумму, отнесенную к определенной дате. Рассредоточение датированных сумм во времени приводит ***к неправомерности обычных действий*** с ними, например, сложения или вычитания.

Основные денежные суммы. Всякая ФО осуществляется в течение заданного промежутка времени, которому соответствуют две основные денежные суммы.

Текущая (***приведенная***) ***стоимость*** – это сумма денег, отнесенная на начало ФО.

Итоговая (будущая) стоимость – это сумма денег, отнесенная к концу ФО.

В депозитной операции текущая стоимость – это сумма денег, помещаемая сегодня на депозитный счет, итоговая стоимость – это сумма денег, которая накопится на депозитном счете за определенный промежуток времени. *В кредитной операции* текущая стоимость – это величина выдаваемой сегодня ссуды, итоговая стоимость – это сумма денег, которую следует вернуть через определенный промежуток времени.

<u>Наращение и дисконтирование</u>. В зависимости от того, какая из указанных сумм дана и какую нужно найти, выделяют два направления финансовых расчетов:

1) ***наращение*** – определение величины итоговой стоимости по заданной текущей стоимости;

2) ***дисконтирование*** – определение текущей стоимости по ожидаемой итоговой сумме в будущем (термин ***дисконтирование*** используется также для определения значения любой стоимостной величины на более ранний момент времени).

<u>Коэффициенты наращения и дисконтирования</u>.

Коэффициент наращения – отношение итоговой стоимости ***S*** к текущей стоимости ***P***. Характеризует темп роста денежных средств за определенный период:

$$B = \frac{S}{P}.$$

Коэффициент дисконтирования (дисконтный фактор) – отношение текущей стоимости к итоговой стоимости. Характеризует уровень снижения денежных средств при переходе от конца к нач $v = \frac{P}{S}.$):

Указанные коэффициенты могут выступать *в качестве оценок эффективности ФО,* например, в задачах их сравнения. Однако они неприменимы там, где требуется оптимизировать результаты по критерию времени или просто определить время операции, поскольку последнее в явном виде в выражениях для этих коэффициентов отсутствует.

<u>Процент и дисконт</u>. Результат ФО в ***абсолютном*** выражении определяется в виде ***процента*** или ***дисконта*** с учетом заданного промежутка времени.

Процент – это абсолютная величина дохода, получаемая в результате ФО за определенный период при ***наращении.***

Дисконт – это абсолютная величина убытка, получаемая в результате ФО за определенный период при ***дисконтировании***.

<u>Процентная ставка</u>. ***Процентная ставка*** (***ставка***) ***за определенный период времени*** – это величина, характеризующая относительное изменение денежной суммы ***F*** за этот период:

$$i = \frac{\Delta F}{F} \cdot 100,$$

где Δ***F*** – абсолютная величина изменения суммы ***F.***

Определенная таким образом процентная ставка измеряется в процентах (%). Если относительное изменение денежной суммы не умножать на 100, то ставка будет измеряться в долях единицы (дробях).

Размер процентной ставки зависит от следующих основных факторов – общее состояние экономики, прогноз динамики денежно-кредитного рынка, вид ФО, вид валюты, срок ФО.

Ставка применяется для решения следующих основных задач:

1. Вычисление процента (дисконта) при *начислении процентов* на заданную денежную сумму.

2. *Определение доходности ФО.*

<u>Начисление процентов</u>. ***Начисление процентов*** на данное значение величины ***F*** – это определение абсолютного изменения этой величины Δ***F*** по ее заданному относительному изменению, выраженному процентной ставкой ***i***:

$$\Delta F = \frac{Fi}{100}.$$

Исходная денежная сумма ***F*** при этом называется *базой начисления процентов*. Рассматриваемый промежуток времени называется *периодом начисления процентов*.

В зависимости от вида базы начисления процентов и выбора начала отсчета в периоде начисления процентов различают ***два метода начисления процентов***:

1) ***декурсивный*** (последующий) – проценты начисляются по ставке ***i*** в ***конце*** периода начисления, базой начисления процентов служит ***текущая стоимость Р.*** Процент ***I*** определяется выражен $I = \frac{Pi}{100}$.

2) ***антисипативный*** (предварительный) – проценты начисляются по ставке процента ***i*** в ***начале*** периода начисления, базой начисления служит ***итоговая стоимость S.*** Процент ***I*** определяетс $I = \frac{Si}{100}$. жением:

<u>Классификация ставок</u>. Многообразие схем начисления процентов определяется многообразием ставок:

1. ***В зависимости от способа начисления процентов*** различают:

- ставки наращения – при декурсивном способе начисления процентов;
- дисконтные ставки – при антисипативном способе начисления процентов.

Ставка наращения (***процентная ставка) i*** за период – это доля ***процента I*** за этот период в текущей стоимости ***P***: $i = \frac{I}{P} \cdot 100.$

Процент, начисленный с использованием ставки наращения, называется ***истинным процентом.***

Дисконтная ставка d за период – это доля дисконта за этот период в итоговой стоимости:

$$d = \frac{D}{S} \cdot 100.$$

Эту ставку иногда еще называют ***процент авансом,*** поскольку она позволяет начислить процент из суммы, возвращаемой в будущем, а также – ***учетной ставкой,*** поскольку она используется в операции учета векселя. В последнем случае текущая стоимость ***P*** называется ***выручкой.***

Дисконт, начисленный с использованием дисконтной ставки, называется ***истинным дисконтом***.

Ставки наращения и ставки дисконтирования используют как в операциях наращения, так и в операциях дисконтирования. При ***дисконтировании*** в зависимости от того, какая из этих ставок задана, различают два вида моделей:

1) модель математического дисконтирования – для ставки наращения;

2) модель банковского учета – для дисконтной ставки.

2. ***В зависимости от вариативности базы начисления*** различают:

- ***простая ставка*** – это ставка при последовательном начислении процентов за несколько периодов на одну и ту же текущую стоимость (при постоянной базе начисления);

- ***сложная ставка*** – это ставка при последовательном начислении процентов за несколько периодов, в каждом из которых – на итоговую стоимость предыдущего периода.

Простой процент (***дисконт***) – это процент (дисконт), полученный при использовании простой ставки за определенный период.

Сложный процент (дисконт) – это процент (дисконт), полученный при использовании сложной ставки за определенный период.

3. ***В зависимости от вариативности размера ставок*** различают:

- ***постоянная процентная ставка*** – ее размер постоянен в течение всего времени ФО;

- ***переменная процентная ставка*** – ее размер изменяется в течение времени ФО. Она может быть определена с помощью задания базовой ставки и

маржи (надбавки), а также последовательности ставок разного размера.

4. ***В зависимости от способа определения времени*** различают:

- ***дискретная процентная ставка*** – это процентная ставка, при которой начисление всякий раз осуществляется за ***определенный*** промежуток времени (день, месяц, квартал, год);

- ***непрерывная процентная ставка*** – это процентная ставка, при которой начисление процентов осуществляется непрерывно. Она используется в теоретических расчетах для моделирования ситуаций, в которых период начисления очень мал.

Непрерывный процент (дисконт) – процент (дисконт), полученный при начислении с использованием непрерывной процентной ставки.

При решении задач в ФМ обычно по умолчанию используется годовая постоянная дискретная ставка наращения.

Доходность ФО. Это количественный показатель эффективности ФО, характеризующий долю прибыли во вложенной денежной сумме. Мерой доходности ФО является, как правило, годовая процентная ставка. Определение доходности ФО зависит от вида операции. В частности, если доход обусловлен только начислением процентов по заданной ставке, то доходность такой операции измеряется именно этой ставкой. В финансовых операциях с несколькими видами дохода доходность определяется в виде эффективной ставки.

Эффективная ставка – это доля всех начисленных процентов за определенный период в исходной базе начисления.

Поскольку при начислении процентов ставка определяется не только количественным значением, но и способом начисления процентов, то ее однозначной характеристикой как меры доходности ФО является результативность применения. Эта характеристика положена в основу сопоставления различных ставок (например, ставки наращения и учетной ставки).

Две процентные ставки называются ***эквивалентными,*** если при начислении процентов с их использованием получается одинаковый финансовый результат.

Таким образом, различают ***два способа определения доходности ФО***:

- непосредственное вычисление ставки как относительной доли дохода в исходной денежной сумме с использованием моделей наращения;

- переход от ставки, заданной в операции, к эквивалентной ей искомой ставке.

ТЕМА 2. НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ ПО ПРОСТЫМ СТАВКАМ.

1. Определение периода начисления простых процентов

Простые ставки, как правило, являются годовыми. Поэтому возникает необходимость выражения данного промежутка времени в годах. Если время задано в днях, то при определении годового периода начисления выделяют два вида расчета:

1) определение годового периода по заданному числу дней;
2) определение числа дней по заданному промежутку между датами.

Определение годового периода по заданному числу дней

Если задано l – число дней периода начисления процентов, то число лет t данного периода вычисляется исходя из равенства:

$$t = \frac{l}{K}$$

где K – базовое число дней в году, которое может быть равно 360, 365 или 366.

В зависимости от значения K различают **два вида простых процентов**: обыкновенный простой процент и точный простой процент.

Обыкновенный простой процент – это простой процент при начислении процентов за один день, если базовое значение числа дней в году K равно 360 дней.

Точный простой процент – это простой процент при начислении процентов за один день, если базовое значение числа дней в году K равно 365 или 366 дней.

Определение числа дней по заданному промежутку между датами

Если заданы начальная и конечная даты финансовой операции, то **число дней** l, содержащихся **в** этом **периоде**, определяется двумя способами:

- способ определения точного времени;
- способ определения приближенного времени.

Точное время – это число *всех* дней финансовой операции, включая первый или последний день. При вычислении точного времени используется календарь порядковых дней года.

Приближенное время – это число дней, определенное в предположении, что каждый месяц года состоит из 30 дней.

Способы расчета простых процентов в зависимости от способа определения времени

В соответствии с делением процентов на обыкновенные и точные и времени на точное и приближенное возможны четыре варианта выражения простого процента. Вариант расчета с точными процентами и приближенным измерением времени на практике не применяется. Остальные три варианта приведены в табл. 2.1 с указанием принятых в мировой практике финансовых расчетов названий и обозначений.

Таблица 2.1 – Способы расчета простых процентов

Название	Обозначение	Содержание
Британский	365/365	Точный процент, точное число дней
Французский	365/360	Обыкновенный процент, точное число дней
Германский	360/360	Обыкновенный процент, приближенное число дней

Чаще всего используется вариант, который характеризуется *точным временем и обыкновенным простым процентом*. Этот вариант называют ***правилом банкиров***. В нашем курсе по умолчанию используется именно этот вариант.

2. Декурсивный метод начисления простых процентов

Рассмотрим модели наращения и дисконтирования с использованием простой ставки наращения.

Модели наращения по простой ставке наращения

Основные формулы, используемые для вычисления показателей наращения при начислении простых процентов по ставке наращения, сведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2 – Модели наращения при декурсивном способе начисления простых процентов

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Простой процент	$I_r = P \cdot r \cdot t$	P – текущая стоимость; r – простая ставка наращения; t – время (в годах)
Итоговая сумма	$S_r = P \cdot (1 + r \cdot t)$	
Множитель наращения	$B_r = 1 + r \cdot t$	

Модели дисконтирования по простой ставке наращения

Основные формулы, используемые для вычисления показателей дисконтирования при начислении простых процентов по ставке наращения, сведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3 – Модели дисконтирования при декурсивном способе начисления простых процентов

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Текущая стоимость	$P_r = \dfrac{S}{1 + r \cdot t}$	S – итоговая сумма; r – простая ставка наращения; t – время (в годах)
Дисконт	$D_r = S - P_r$	
Множитель дисконтирования	$v_r = \dfrac{1}{1 + r \cdot t}$	

3. Антисипативный метод начисления простых процентов

Рассмотрим модели дисконтирования и наращения с использованием простой дисконтной ставки.

Модели дисконтирования по простой дисконтной ставке

Основные формулы, используемые для вычисления показателей дисконтирования при начислении простых процентов по учетной ставке, сведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4 – Модели дисконтирования при антисипативном способе начисления простых процентов

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Текущая стоимость	$P_d = S \cdot (1 - d \cdot t)$	S – итоговая сумма; d – простая учетная ставка; t – время (в годах)
Дисконт	$D_d = S \cdot d \cdot t$	
Множитель дисконтирования	$v_d = 1 - d \cdot t$	

Модели наращения по простой дисконтной ставке

Основные формулы, используемые для вычисления показателей наращения при начислении простых процентов по учетной ставке, сведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5 – Модели наращения при антисипативном способе начисления простых процентов

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Итоговая сумма	$S_d = \dfrac{P}{1 - d \cdot t}$	P – текущая стоимость; d – простая учетная ставка; t – время (в годах)
Процент	$I_d = S_d - P$	
Множитель наращения	$B_d = \dfrac{1}{1 - d \cdot t}$	

4. Начисление процентов по простой переменной ставке

Основные формулы, используемые для вычисления показателей наращения при начислении простых процентов по переменной ставке наращения, сведены в табл. 2.6.

Таблица 2.6 – Модели наращения при декурсивном способе начисления процентов по переменной ставке

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Итоговая сумма	$S_{\sum r} = P \cdot \left(1 + \sum_{s=1}^{k} r_s \cdot t_s\right)$	P – текущая стоимость; r_1, r_2, ..., r_k – значения переменной ставки при начислении процентов за t_1, t_2, ..., t_k лет
Процент	$I_{\sum r} = P \cdot \sum_{s=1}^{k} r_s \cdot t_s$	
Множитель наращения	$B_{\sum r} = 1 + \sum_{s=1}^{k} r_s \cdot t_s$	

5. Доходность финансовой операции в виде простой ставки

В зависимости от постановки задачи доходность в виде простой ставки либо находят непосредственно, выражая ставку из подходящей модели начисления процентов, либо переходят от заданной ставки к искомой эквивалентной ставке. При начислении простых процентов обычно в качестве эквивалентных ставок сопоставляются ставка наращения и учетная ставка, а также постоянная и переменная ставки.

Формулы для вычисления простых ставок сведены в табл. 2.7

Таблица 2.7 – *Модели доходности операций при начислении простых процентов*

Показатель доходности	Формула	Исходные показатели
Ставка наращения	$r = \frac{S - P}{P \cdot t}$	P – текущая стоимость; S – итоговая стоимость; t – время (годы)
Учетная ставка	$d = \frac{S - P}{S \cdot t}$	

Определение простых эквивалентных ставок

Случай 1. Простая ставка наращения эквивалентна простой учетной ставке.

> > <u>*Постановка задачи*</u>

<u>Дано</u>: r *(или* d) *– простая ставка наращения (или учетная ставка).*

Требуется определить доходность операции в виде учетной ставки d_e (или ставки наращения r_e), эквивалентной данной ставке.

►► <u>*Решение задачи*</u>

Поскольку эквивалентные ставки при начислении процентов обеспечивают одинаковый финансовый результат, то при определении искомой эквивалентной ставки обычно сопоставляют две модели наращения, приравнивая итоговые суммы и решая полученное уравнение. В данном случае используются модели наращения при начислении простых процентов:

$$S_r = P \cdot (1 + r \cdot t), S_d = \frac{P}{1 - d \cdot t}.$$

Искомые ставки определяются из уравнения

$$1 + r \cdot t = \frac{1}{1 - d \cdot t}.$$

Таким образом, имеем

$$r_e = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{1}{1 - d \cdot t} - 1\right); \qquad d_e = \frac{1}{t} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + r \cdot t}\right).$$ ◄◄

Случай 2. Простая ставка эквивалентна простой переменной ставке.

> > <u>*Постановка задачи*</u>

<u>Дано</u>: $r_1, r_1, ..., r_k$ *– последовательность значений применяемой переменной ставки соответственно при начислении процентов за* $t_1, t_2, ..., t_k$ *лет,* $t = t_1 + t_2 + ... + t_k$.

Требуется определить постоянную ставку $\bar{r}$, эквивалентную данной переменной ставке.

►► <u>*Решение задачи*</u>

В данном случае достаточно приравнять величины процентов:

$$I_r = \mathrm{P \cdot r \cdot t}; \; I_{\sum r} = P \cdot \sum_{s=1}^{k} r_s \cdot t_s \qquad \mathrm{r \cdot t} = \sum_{\mathrm{s=1}}^{\mathrm{k}} r_s \cdot t_s\,; \; \bar{r} = \frac{\sum_{s=1}^{k} r_s \cdot t_s}{t}$$

Таким образом, искомая ставка равна среднему арифметическому из последовательных значений заданной ставки, взвешенному по соответствующим им промежуткам времени. Поэтому на практике при начислении процентов по переменной ставке обычно используют модели для постоянных ставок, вычислив предварительно среднюю ставку.

Формулы для определения простых эквивалентных ставок сведены в табл. 2.8.

Таблица 2.8 – Модели простых эквивалентных ставок

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Ставка наращения	$r_e = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{1}{1 - d \cdot t} - 1\right)$	*r* – ставка наращения; *d* – учетная ставка; *t* – время (в годах); $r_1, r_2, ..., r_k$ – значения переменной ставки при начислении процентов за $t_1, t_2, ..., t_k$ лет
Учетная ставка	$d_e = \frac{1}{t} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + r \cdot t}\right)$	
Переменная ставка наращения	$\bar{r} = \frac{\sum_{s=1}^{k} r_s \cdot t_s}{t}$	

ТЕМА 3. НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ ПО СЛОЖНЫМ СТАВКАМ

1. Декурсивный метод начисления сложных процентов

Основные формулы, используемые для вычисления показателей наращения при начислении сложных процентов по ставке наращения, сведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1 – Модели наращения при декурсивном способе начисления сложных процентов

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Итоговая сумма	$S_{i\,n} = P \cdot (1 + i)^n$	P – текущая стоимость; i – процентная ставка наращения за период начисления процентов; n – число периодов начисления процентов
Процент	$I_{i\,n} = S_{i\,n} - P$	
Множитель наращения	$B_{i\,n} = (1 + i)^n$	

Сравнение наращения по простой и сложной ставкам

Для сравнения эффективности операций начисления процентов с использованием простой и сложной процентных ставок сопоставляют соответствующие множители наращения $B_r = (1 + r \cdot t)$ и $B_{i\,n} = (1 + i)^n$, полагая r = i, t = n и рассматривая их как функции от числа периодов начисления процентов n. Имеем:

- если $n < 1$, то $B_r(n) > B_{in}(n)$, т.е. для срока меньше года простой процент больше сложного;
- если $n > 1$, то $B_r(n) < B_{in}(n)$, т.е. для срока больше года сложный процент больше простого;
- если $n = 1$, то $B_r(n) = B_{in}(n)$, т.е. для срока, равного году, сложный процент равен простому.

Определение итоговой стоимости для дробных периодов времени

Иногда рассматриваемый временной промежуток в финансовой операции п выражается в виде нецелого числа периодов начисления процентов, т.е. п = [п] + {п}, где [п], {п} – соответственно целая и дробная части п.

В этом случае выделяют два способа вычисления итоговой суммы.

Точный способ предполагает непосредственную подстановку данного дробного значения в основную модель наращения по сложной ставке:

$$S = P \cdot (1 + i)^n.$$

Приближенный способ заключается в последовательном применении основной модели наращения по сложной ставке для [п] и основной модели наращения по простой ставке для {п}:

$$S = P \cdot (1 + i)^{[п]} \cdot (1 + i \cdot \{п\}).$$

Модели дисконтирования по сложной ставке наращения

Основные формулы, используемые для вычисления показателей дисконтирования при начислении сложных процентов по ставке наращения, сведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2 – Модели дисконтирования при декурсивном способе начисления сложных процентов

Искомый показатель	Формула	Исходный показатель
Текущая стоимость	$P_{in} = \dfrac{S}{(1+i)^n}$	S – итоговая сумма; i – процентная ставка наращения за период начисления процентов; n – число периодов начисления процентов
Дисконт	$D_{in} = S - P_{in}$	
Множитель дисконтирования	$v_{in} = \dfrac{1}{(1+i)^n}$	

2. Антисипативный метод начисления сложных процентов

Модели дисконтирования по сложной дисконтной ставке

Основные формулы, используемые для вычисления показателей дисконтирования при начислении сложных процентов по ставке наращения, сведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3 – Модели дисконтирования при антисипативном способе начисления сложных процентов

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Текущая стоимость	$P_{dn} = S \cdot (1 - \mathrm{d})^{\mathrm{n}}$	S – итоговая сумма; d – процентная ставка наращения за период начисления процентов; n – число периодов начисления процентов
Дисконт	$D_{dn} = S - P_{dn}$	
Множитель дисконтирования	$v_{dn} = (1 - \mathrm{d})^{\mathrm{n}}$	

Модели наращения по сложной дисконтной ставке

Основные формулы, используемые для вычисления показателей наращения при начислении сложных процентов по учетной ставке, сведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4 – Модели наращения при антисипативном способе начисления сложных процентов

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Итоговая сумма	$S_{dn} = \dfrac{P}{(1-d)^n}$	P – текущая стоимость; d – сложная учетная ставка за период начисления процентов; n – число периодов начисления процентов
Процент	$I_{dn} = S_{dn} - P$	
Множитель наращения	$B_{dn} = \dfrac{1}{(1-d)^n}$	

3. Начисление процентов по сложной переменной ставке

Основные формулы, используемые для вычисления показателей наращения при начислении сложных процентов по переменной ставке наращения, сведены в табл. 3.5.

Таблица 3.5 – Модели наращения при декурсивном способе начисления сложных процентов по переменной ставке

Искомый показатель	Формула	Исходные показатели
Итоговая сумма	$S_{\Pi} = P \cdot \prod_{l=1}^{k} (1+i_l)^{n_l}$	P – текущая стоимость; $i_1, i_2, \ldots, i_k$ – последовательность применяемых ставок соответственно при начислении процентов за $n_1, n_2, \ldots, n_k$ периодов
Процент	$I_{\Pi} = S_{\Pi} - P$	
Множитель наращения	$B_{\Pi} = \prod_{l=1}^{k} (1+i_l)^{n_l}$	

Поскольку множитель наращения равен произведению множителей наращения, соответствующих последовательным значениям применяемой ставки, то обычно сначала рассчитывают B_{Π}, а затем применяют модель наращения для начисления сложных процентов по постоянной ставке.

4. Годовая номинальная процентная ставка

В реальных задачах, связанных с начислением сложных процентов, обычно задается не ставка за один период начисления процентов, а ставка, рассчитанная с учетом числа таких периодов в году. Она называется годовой номинальной ставкой.

Годовая номинальная ставка, конвертируемая т раз в год, – это процентная ставка, определяемая с учетом процентной ставки за один период начисления процентов и числа периодов начислений процентов в год т.

Годовая номинальная ставка **наращения**:

$$j_m = i \cdot m,$$

где i – ставка наращения за период начисления процентов.

Годовая номинальная **дисконтная** ставка:

$$d_m = d \cdot m,$$

где d – дисконтная ставка за период начисления процентов.

Начисление процентов по годовой номинальной ставке наращения и дисконтной ставке

Основные формулы, используемые при вычислении показателей финансовых операций с использованием годовой номинальной ставки, сведены в табл. 3.6.

Таблица 3.6 – Модели начисления процентов по годовой номинальной ставке

Искомый показатель	Формула	*Исход*ные показатели
Итоговая сумма	$S = P \cdot \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{m \cdot t}$	P – текущая стоимость; j_m – годовая номинальная ставка наращения; S – итоговая сумма; d_m – годовая номинальная учетная ставка; t – время (в годах); m – число начислений процентов в год
Текущая стоимость	$P = S \cdot \left(1 - \frac{d_m}{m}\right)^{m \cdot t}$	

5. Доходность финансовой операции в виде сложной ставки

Как и в случае начисления простых процентов, искомую доходность финансовой операции находят либо непосредственно по формулам наращения, либо переходя к эквивалентным ставкам.

Особенностью таких расчетов при начислении сложных процентов является тот факт, что годовая ставка определяется не только количественным значением, но и числом начислений процентов в год. Поэтому возникает необходимость сравнения различных годовых номинальных ставок, а также перехода к их общему эквиваленту – годовой эффективной ставке.

Определение ставок при начислении сложных процентов

Формулы для вычисления сложных ставок сведены в табл. 3.7.

Таблица 3.7 – Модели доходности операций при начислении сложных процентов

Показатель доходности	Формула	Исходные показатели
Ставка наращения	$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1$	P – текущая стоимость; S – итоговая стоимость; t – время (годы)
Учетная ставка	$d = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}}$	

Определение годовых номинальных эквивалентных ставок

Рассмотрим процедуру определения эквивалентных ставок на примере сравнения годовых номинальных ставок наращения.

Две годовые номинальные ставки наращения являются ***годовыми эквивалентными***, если при начислении процентов с их использованием на одну и ту же текущую стоимость за год получится одна и та же итоговая сумма.

Формулы, применяемые для всех этих случаев, сведены в табл. 3.8.

Таблица 3.8 – Эквивалентные сложные ставки

Эквивалентная ставка	Формула	Исходная ставка
Сложная ставка наращения j_{m_2}	$j_{m_2} = m_2 \cdot \left(\left(1 + \frac{j_{m_1}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1\right)$	Сложная ставка наращения j_{m_2}
Сложная учетная ставка d_{m_2}	$d_{m_2} = m_2 \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{d_{m_1}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}}\right)$	Сложная учетная ставка d_{m_1}
Сложная учетная ставка d_{m_2}	$d_{m_2} = m_2 \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{j_{m_1}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}}\right)$	Сложная ставка наращения j_{m_2}

Определение годовой эффективной ставки

Общим эквивалентом для всех годовых номинальных ставок выступает годовая эффективная ставка, включающая долю всех начисленных процентов за год в исходной базе начисления процентов.

Рассмотрим процедуру определения годовой эффективной ставки на примере ее сравнения с годовой номинальной ставкой наращения.

Формулы для определения годовых эффективных ставок сведены в табл. 3.9.

Таблица 3.9 – Эффективные ставки, эквивалентные номинальным ставкам

Формула	Исходная ставка
$r = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1$	Сложная ставка наращения j_m
$r = \left(1 - \frac{d_m}{m}\right)^{-m} - 1$	Сложная учетная ставка d_m

ТЕМА 4. ПРИНЦИП ФИНАНСОВОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И КОНВЕРСИЯ ПЛАТЕЖЕЙ

1. ПРИНЦИП ФИНАНСОВОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ.

В основу операций с платежами положен ***принцип финансовой эквивалентности***, гарантирующий равенство финансовых обязательств участников операции. Принцип финансовой эквивалентности позволяет без нарушения принятых обязательств варьировать условия проведения операций, в частности изменять процентные ставки и распределение платежей во времени.

Эквивалентные платежи и серии платежей

Эквивалентными платежами считаются такие платежи, которые обеспечивают равенство финансовых обязательств участников операции. Если два платежа эквивалентны, то они связаны с помощью определенной модели начисления процентов.

Переход от одного платежа к эквивалентному ему другому платежу с использованием модели начисления процентов называют ***приведением платежа к другой дате***.

Приведение платежей используется для сравнения результатов финансовых операций, относящихся к разным моментам времени. Такие платежи будут ***эквивалентны по определенной процентной ставке***, если их приведенные к одному и тому же моменту времени стоимости будут равны.

Потоки платежей сравниваются на основе их консолидированных (суммарных) платежей. Для того чтобы определить ***консолидированный платеж*** потока платежей на определенную дату, для каждого платежа находят эквивалентный ему платеж на эту дату, а затем все полученные платежи складывают.

Потоки платежей эквивалентны по данной процентной ставке, если консолидированные платежи этих потоков на любую общую дату равны.

Уравнение эквивалентности

Уравнением эквивалентности называется равенство, устанавливающее эквивалентность платежей или потоков платежей на определенную дату.

Дата, используемая при составлении уравнения эквивалентности, называется *датой сравнения*.

2. КОНВЕРСИЯ ПЛАТЕЖЕЙ.

Конверсия платежей – это замена одного потока платежей эквивалентным ему по данной ставке другим потоком платежей.

Виды конверсий платежей

При конверсии платежей возможны варианты замены: 1) одного платежа другим платежом; 2) потока платежей одним платежом (консолидация потока платежей); 3) одного потока платежей другим потоком платежей; 4) одного платежа потоком платежей (рассрочка платежа).

Замена одного платежа другим платежом

> > *Постановка задачи*

Дано: ***F*** *– размер платежа;*

date – момент платежа;

date$^{(-)}$ – более ранний по сравнению с ***date*** момент времени;

date$^{(+)}$ – более поздний по сравнению с ***date*** момент времени;

i – процентная ставка за период начисления процентов.

Требуется определить платеж $F^{(-)}$ и (или) $F^{(+)}$ определенный соответственно на ***date***$^{(-)}$ (или) ***date***$^{(+)}$ и эквивалентный платежу ***F*** с учетом начисления процентов по ставке ***i***.

►► *Решение задачи*

Строится временная диаграмма:

$date^{(-)}$	$date$	$date^{(+)}$
	F	
$F^{(-)}$		
		$F^{(+)}$

Определяется число периодов начисления процентов *n* в промежутке между исходным и искомым платежами: $n = date^{(+)} - date$ или $n = date - date^{(+)}$.

Вычисляются искомые платежи: $F^{(+)} = F \cdot (1 + i)^n$ или $F^{(-)} = F \cdot (1 + i)^{-n}$.

Консолидация потока платежей

Консолидация потока платежей – это замена данного потока платежей консолидированным платежом этого потока.

Дата выплаты консолидированного платежа называется ***средней*** **(*эквивалентной*)** ***датой***.

> > *Постановка задачи*

Дано: $F_1, F_2, \ldots, F_k$ *– размеры платежей;*

date$_1$, ***date***$_2$, ..., ***date***$_k$ – моменты платежей;

$\boldsymbol{i}$ – процентная ставка за период начисления процентов;

date – момент консолидированного платежа.

Требуется определить консолидированный платеж $\boldsymbol{F}$ данного потока платежей в момент времени ***date***.

►► *<u>Решение задачи</u>*

Строится временная диаграмма:

date$_1$	***date***$_2$	***date***	***date***$_k$
$\boldsymbol{n_1}$	$\boldsymbol{n_2}$		$\boldsymbol{n_k}$
$\boldsymbol{F_1}$	$\boldsymbol{F_2}$		$\boldsymbol{F_k}$
		$\boldsymbol{F}$	

В этой диаграмме удобно ввести вспомогательную строку, которая содержит

$\boldsymbol{n_i}$, $\boldsymbol{i = 1, ..., k}$, – число периодов начисления между моментами ***date***$_i$ и ***date***.

Для каждого платежа находится эквивалентный ему платеж на момент ***date***:

$$\boldsymbol{F_1 \cdot (1+i)^{n_1}, F_2 \cdot (1+i)^{n_2}, \dots, F_k \cdot (1+i)^{-n_k}}.$$

Искомый консолидированный платеж равен сумме этих платежей:

$$\boldsymbol{F = F_1 \cdot (1+i)^{n_1} + F_2 \cdot (1+i)^{n_2} + \ \dots + F_k \cdot (1+i)^{-n_k}}.$$

Замена данного потока платежей другим потоком платежей

> > *<u>Постановка задачи</u>*

<u>Дано</u>: $F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \dots, F_{k_1}^{(1)}$ – размеры платежей данного потока платежей;

$\mathbf{date}_1^{(1)}, \mathbf{date}_2^{(1)}, \dots, \mathbf{date}_{k_1}^{(1)}$ – моменты платежей данного потока платежей;

$\boldsymbol{i}$ – процентная ставка за период начисления процентов;

$\mathbf{date}_1^{(2)}, \mathbf{date}_2^{(2)}, \dots, \mathbf{date}_{k_1}^{(2)}$ – моменты платежей $\mathbf{F}_1^{(2)}, \mathbf{F}_2^{(2)}, \dots, \mathbf{F}_{k_2}^{(2)}$ потока, эквивалентного данному потоку платежей.

Требуется определить размеры платежей $\mathbf{F}_1^{(2)}, \mathbf{F}_2^{(2)}, \dots, \mathbf{F}_{k_2}^{(2)}$.

►► *<u>Решение задачи</u>*

Искомый поток платежей определяется на основе уравнения эквивалентности рассматриваемых платежей в следующей последовательности.

1. Строится совмещенная временная диаграмма, включающая все платежи обоих потоков.

date_1	date_2	date_3	date_4	…	date_{k-1}	date_k
$\boldsymbol{n_1}$	$\boldsymbol{n_2}$	$\boldsymbol{n_3}$	$\boldsymbol{n_4}$		$\boldsymbol{n_{k-1}}$	$\boldsymbol{n_k}$
$\mathrm{F}_1^{(1)}$		$\mathrm{F}_2^{(1)}$		**…**		$\mathrm{F}_{\mathrm{k}_1}^{(1)}$
	$\mathrm{F}_1^{(2)}$		$\mathrm{F}_2^{(2)}$	**…**	$\mathrm{F}_{\mathrm{k}_2}^{(2)}$	

На диаграмме отражены $\mathbf{date}_{\boldsymbol{1}}, \mathbf{date}_{\boldsymbol{2}}, \dots, \mathbf{date}_{\boldsymbol{k}}$ – даты всех платежей обоих потоков; $\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}, \dots, \boldsymbol{n_k}$ – число периодов начисления процентов до даты $\mathbf{date}_{\boldsymbol{k}}$.

2. Устанавливается дата сравнения потоков платежей.

Чаще всего выбирают общую начальную $\mathbf{date}_{\boldsymbol{1}}$ или конечную дату $\mathbf{date}_{\boldsymbol{k}}$.

3. Для каждого потока определяется консолидированный платеж на установленную дату сравнения.

4. Составляется уравнение эквивалентности в виде равенства консолидированных платежей.

В частности, для приведенной временной диаграммы уравнение эквивалентности с датой сравнения на момент последнего платежа имеет вид

$$\mathbf{F}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{1})} \cdot (\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n_1}} + \mathbf{F}_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{1})} \cdot (\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n_3}} + \ \dots + \mathbf{F}_{\mathbf{k_1}}^{(\mathbf{1})} =$$
$$= \mathbf{F}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{2})} \cdot (\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n_2}} + \mathbf{F}_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{2})} \cdot (\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n_4}} + \ \dots + \mathbf{F}_{\mathbf{k_2}}^{(\mathbf{2})} \cdot (\mathbf{1} + \boldsymbol{i}) \quad .$$

5. Искомые платежи определяются путем решения уравнения эквивалентности с учетом заданных дополнительных условий.

Рассрочка платежа

Рассрочка платежа – это замена одного платежа эквивалентным ему потоком платежей.

Этот вариант конверсии платежей можно рассматривать как частный случай предыдущего варианта при условии, что первый поток состоит из одного платежа.

> > *Постановка задачи*

Дано: ***F*** *– размер платежа;*

date – момент платежа;

i – процентная ставка за период начисления процентов;

$\boldsymbol{date_1}$, $\boldsymbol{date_2}$, ..., $\boldsymbol{date_k}$ – моменты платежей $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, ... , $\boldsymbol{F_k}$ потока, эквивалентного исходному платежу.

Требуется определить размеры платежей $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, ... , $\boldsymbol{F_k}$.

►► *Решение задачи*

1. Строится временная диаграмма:

$\text{date}_{\boldsymbol{1}}$	$\text{date}_{\boldsymbol{2}}$	date	$\text{date}_{\boldsymbol{k}}$
$\boldsymbol{n_1}$	$\boldsymbol{n_2}$		$\boldsymbol{n_k}$
		$\boldsymbol{F}$	
$\boldsymbol{F_1}$	$\boldsymbol{F_2}$		$\boldsymbol{F_k}$

2. Составляется уравнение эквивалентности на дату исходного платежа:

$$\boldsymbol{F = F_1 \cdot (1 + i)^{n_1} + F_2 \cdot (1 + i)^{n_2} + \ \ldots + F_k \cdot (1 + i)^{-n_k}}.$$

3. Искомые платежи потока определяются из этого уравнения с учетом доп. условий.

Эквивалентность платежей при применении простой ставки

> > *Постановка задачи*

Дано: $\boldsymbol{F}$ **–** платеж, определенный на момент времени ***date***;

$\boldsymbol{r}$ (или $\boldsymbol{d}$) – простая процентная (или учетная) ставка наращения.

Требуется определить платежи $\boldsymbol{F}^{(-)}$ и (или) $\boldsymbol{F}^{(+)}$, определенные соответственно на моменты времени $\mathbf{date}^{(-)}$ и $\mathbf{date}^{(+)}$ и эквивалентные платежу $\boldsymbol{F}$ с учетом начисления процентов.

►► *Решение задачи*

1. Строится временная диаграмма:

$\text{date}^{(-)}$	date	$\text{date}^{(+)}$
	$\boldsymbol{F}$	
$\boldsymbol{F}^{(-)}$		
		$\boldsymbol{F}^{(+)}$

2. Определяется число лет t в промежутке между исходным и искомым платежами.

3. Вычисляются искомые платежи:

$$\boldsymbol{F}^{(+)} = \boldsymbol{F \cdot (1 + r \cdot t)} \text{ и (или) } \boldsymbol{F}^{(-)} = \boldsymbol{F \cdot (1 + r \cdot t)^{-1}},$$

если задана ставка r, или

$$\boldsymbol{F}^{(+)} = \boldsymbol{F \cdot (1 - d \cdot t)^{-1}} \text{ и (или) } \boldsymbol{F}^{(-)} = \boldsymbol{F \cdot (1 - d \cdot t)},$$

если задана ставка $\boldsymbol{d}$.

Решение задачи эквивалентной замены серий платежей аналогично решению подобной задачи для случая сложной ставки и отличается только тем, что при приведении платежей к дате сравнения используются модели наращения по простым ставкам.

ТЕМА 5. АННУИТЕТЫ

1. Определение аннуитета

Аннуитет (рента) – это регулярный поток платежей. Примерами аннуитетов являются погашение задолженности в рассрочку, периодическое поступление доходов от инвестиций, выплаты пенсий.

Основные параметры аннуитета: **1)** размер платежа; **2)** число платежей; **3)** число платежей в год; **4)** интервал платежа – период времени между двумя последовательными платежами; **5)** срок аннуитета – период времени от начала первого до конца последнего интервала платежа; **6)** процентная ставка; **7)** число периодов начисления процентов в год; **8)** настоящая (приведенная) стоимость – консолидированный платеж аннуитета на начало его срока; **9)** итоговая сумма – консолидированный платеж аннуитета на конец его срока.

2. Классификация аннуитетов

В подпараграфе представлены классификации аннуитетов по различным признакам с примерами аннуитетов.

1. По определенности срока аннуитета.

- ***Определенный аннуитет*** (верная рента) – это аннуитет, срок которого фиксирован.
- ***Случайный аннуитет*** (условная рента) – это аннуитет, срок которого случаен.

2. По определению времени.

- ***Дискретный аннуитет*** – аннуитет, платежи которого производятся в фиксированные моменты времени.
- ***Непрерывный аннуитет*** – аннуитет, платежи которого производятся непрерывно.

3. По выбору моментов платежей

- ***Обыкновенный аннуитет*** (рента постнумерандо) аннуитет, платежи которого производятся в моменты окончания интервалов платежа.
- ***Полагающийся аннуитет*** (рента пренумерандо) – аннуитет, платежи которого производятся в начальные моменты интервалов платежа.

4. По соотношению интервала платежа и периода начисления процентов.

- ***Простой аннуитет*** – аннуитет, интервал платежа которого совпадает с периодом начисления процентов.

- ***Общий аннуитет*** – аннуитет, интервал платежа которого может не совпадать с периодом начисления процентов.

5. По величине платежей.

- ***Постоянный аннуитет*** – аннуитет, платежи которого имеют одинаковый размер.
- ***Переменный аннуитет*** – аннуитет, платежи которого имеют неодинаковый размер.

6. По числу платежей.

- ***Срочный аннуитет*** (ограниченная рента) – аннуитет, срок которого конечен.
- ***Бессрочный аннуитет*** (вечная рента) – аннуитет, срок которого бесконечен.

7. По соотношению начала срока аннуитета и даты заключения сделки.

- ***Немедленный аннуитет*** – аннуитет, начало которого совпадает с началом включающей его финансовой операции.

В случае немедленного аннуитета начало отсчета интервалов платежа совпадает с началом отсчета периодов начисления процентов.

- ***Отсроченный аннуитет*** – аннуитет, который начинается позднее по отношению к началу включающей его финансовой операции.

3. Основные модели аннуитетов

Задачи, связанные с аннуитетами, относятся к задачам конверсии платежей. В основе их решения лежит использование уравнений эквивалентности. При этом свойство регулярности платежей аннуитетов позволяет упростить вычисления.

Оценка параметров простейшего аннуитета

Простейший аннуитет – это определенный, дискретный, срочный, постоянный, немедленый, простой, обыкновенный аннуитет.

> > *Постановка задачи*

Дано:

R – размер платежа;

n – число платежей;

i – сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется найти итоговую сумму S и настоящую стоимость A простейшего аннуитета.

►► <u>*Решение задачи*</u>

Временная диаграмма платежей простейшего аннуитета имеет вид

0	1	2	...	$n-2$	$n-1$	n
	R	R	...	R	R	R
						S
A						

Для нахождения S составим уравнение эквивалентности, используя в качестве даты сравнения конец срока:

$$\mathbf{S = R + R \cdot (1 + i) + R \cdot (1 + i)^2 + \ldots + R \cdot (1 + i)^{n-2} + R \cdot (1 + i)^{n-1}}.$$

Используя формулу суммы членов геометрической прогрессии $\boldsymbol{S = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$, при $\mathbf{b_1 = R, q = 1 + i}$ получаем искомое выражение для S:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \qquad \text{или} \quad S = R \cdot s(n,i), \qquad \text{где} \quad s(n,i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Функция $\boldsymbol{s(n,i)}$ табулирована для целых значений $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{i}$ > 5 (см. приложение). Она называется ***функцией наращения***.

Величины A и S эквивалентны по ставке i. Они связаны соотношением

$$A = S \cdot (1 + i)^{-n}.$$

С использованием выражения для S получаем искомое выражение для A.

$$A = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}, \text{или } A = R \cdot a(n,i), \text{где } a(n,i) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$

Функция $\boldsymbol{a(n,i)}$ табулирована для целых значений $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{i}$ > 5 (см. приложение). Она называется ***функцией дисконтирования***.

Оценка параметров полагающегося аннуитета

Полагающийся аннуитет – это аннуитет, платежи которого относятся к начальным моментам интервалов платежа.

> > <u>*Постановка задачи*</u>

<u>Дано</u>: *R – размер платежа;*

n – число платежей;

i – сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется найти итоговую сумму S и настоящую стоимость A полагающегося аннуитета.

►► *Решение задачи*

Временная диаграмма платежей полагающегося аннуитета имеет вид

0	1	2	...	$n-2$	$n-1$	n
R	R	R	...	R	R	
						S
A						

Для определения итоговой суммы S данный аннуитет можно представить в виде обыкновенного аннуитета с итоговой суммой $S_{(-1)}$, который начинается на один период времени раньше исходного полагающегося аннуитета:

-1	0	1	2	...	$n-2$	$n-1$	n
	R	R	R	...	R	R	
						$S_{(-1)}$	
							S

Составим уравнение эквивалентности с датой сравнения на конец срока аннуитета с учетом вспомогательной суммы $\boldsymbol{S_{(-1)}}$:

$$S = S_{(-1)} \cdot (1+i), \qquad S_{(-1)} = R \cdot s(n,i).$$

Искомая сумма находится из этих соотношений:

$$S = R \cdot s(n,i) \cdot (1+i).$$

Для определения настоящей стоимости A данный аннуитет можно представить как совокупность первого платежа и обыкновенного аннуитета из остальных платежей с настоящей стоимостью $\boldsymbol{A^{(n-1)}}$:

0	1	2	...	$n-2$	$n-1$	n
R	R	R	...	R	R	
$R + A^{(n-1)}$						
A						

Поэтому уравнение эквивалентности на начало срока аннуитета представляет собой соотношение, в котором уравниваются искомая сумма A и сумма первого платежа R и вспомогательной настоящей стоимости $\boldsymbol{A^{(n-1)}}$:

$$\boldsymbol{A = R + A^{(n-1)}}, \quad \boldsymbol{A^{(n-1)} = R \cdot a(n-1, i)}.$$

Искомая сумма находится из этих соотношений:

$$\boldsymbol{A = R + R \cdot a(n-1, i)}.$$

Оценка параметров общего аннуитета

Общий аннуитет – это аннуитет, число интервалов платежа которого может не совпадать с числом периодов начисления процентов.

Параметры общего аннуитета находят путем перехода от заданного общего аннуитета к эквивалентному ему простому аннуитету по определенной процентной ставке.

> > *Постановка задачи*

Дано: R_p – размер платежа общего аннуитета;

$\mathbf{p}$ – число интервалов платежа в год;

$\mathbf{i_m}$ – процентная ставка за период начисления;

$\mathbf{m}$ – число периодов начисления процентов в год.

Требуется найти размер платежа $\mathbf{R_m}$ простого аннуитета, эквивалентного исходному общему аннуитету по ставке $\mathbf{i_m}$, если этот общий аннуитет является: 1) обыкновенным; 2) полагающимся.

►► *Решение задачи*

В основу вычисления параметров простого аннуитета по заданным параметрам общего аннуитета положены определения эквивалентности ставок и эквивалентности серий платежей.

Эквивалентность ставок $\mathbf{i_p}$ и $\mathbf{i_m}$ при начислении процентов за один год выражается равенством $\mathbf{(1 + i_p)^p = (1 + i_m)^m}$.

Эквивалентность серий платежей рассмотрим для двух случаев.

Случай 1. Общий аннуитет – обыкновенный.

Совмещенная временная диаграмма за год имеет вид

0	1		2	...	$\mathrm{p-1}$	p
	$\mathrm{R_p}$		$\mathrm{R_p}$	...	$\mathrm{R_p}$	$\mathrm{R_p}$ $\mathrm{S_p}$

0	*1*	*2*	...	$\mathrm{m-1}$	m
	$\mathrm{R_m}$	$\mathrm{R_m}$	...	$\mathrm{R_m}$	$\mathrm{R_m}$ $\mathrm{S_m}$

Эквивалентность простых аннуитетов с платежами $\mathrm{R_p}$ и $\mathrm{R_m}$, выплачиваемыми в течение этого года, определяется равенством их итоговых стоимостей: $\mathrm{S_m = S_p}$.

Имеем: $S_m = R_m \cdot \dfrac{(1 + i_m)^m - 1}{i_m}$, $\quad S_p = R_p \cdot \dfrac{\left(1 + i_p\right)^p - 1}{i_p}$

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными i_p и R_m:

$$\begin{cases} \left(1+i_p\right)^p = (1+i_m)^m, \\ R_m \cdot \dfrac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} = R_p \cdot \dfrac{\left(1+i_p\right)^p - 1}{i_p}. \end{cases}$$

Из первого уравнения выражается эквивалентная ставка:

$$i_p = (1+i_m)^{\frac{m}{p}} - 1.$$

С учетом этой ставки из второго уравнения определяется искомый платеж:

$$R_m = R_p \cdot \frac{\left(1+i_p\right)^p - 1}{i_p \cdot \dfrac{(1+i_m)^m - 1}{i_m}} = R_p \cdot \frac{i_m}{(1+i_m)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

Таким образом, ***модель перехода от общего обыкновенного аннуитета к эквивалентному ему простому обыкновенному аннуитету*** задается формулой

$$R_m = R_p \cdot \frac{i_m}{(1+i_m)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

или с учетом *функции наращения* $s(n,i)$

$$R_m = \frac{R_p}{s\left(\dfrac{m}{p}, i_m\right)} \qquad \text{где} \qquad s\left(\frac{m}{p}, i_m\right) = \frac{(1+i_m)^{\frac{m}{p}} - 1}{i_m}$$

Случай 2. Общий аннуитет – полагающийся.

Совмещенная временная диаграмма за год имеет вид

0		1	2	...	$p-1$	p	
R_p		R_p	R_p	...	R_p		
						S_p	
0	1		2	...	$m-1$		m
	R_m		R_m	...	R_m		R_m
							S_m

Система уравнений, выражающая эквивалентность ставок и платежей, имеет вид

$$\begin{cases} \left(1+i_p\right)^p = (1+i_m)^m, \\ R_m \cdot \dfrac{(1+i_m)^m - 1}{i_m} = R_p \cdot \dfrac{\left(1+i_p\right)^p - 1}{i_p} \cdot \left(1+i_p\right). \end{cases}$$

С учетом выражения для ставки i_p искомый платеж R_m определяется из этой системы:

$$R_m = R_p \cdot \frac{(1+i_p)^p - 1}{i_p \cdot \dfrac{(1+i_m)^m - 1}{i_m}} \cdot (1+i_p) = R_p \cdot \frac{i_m \cdot (1+i_m)^{\frac{m}{p}}}{(1+i_m)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$= R_p \cdot \frac{i_m}{1-(1+i_m)^{-\frac{m}{p}}}.$$

Таким образом, ***модель перехода от общего полагающегося аннуитета к эквивалентному ему простому обыкновенному аннуитету*** задается формулой

$$R_m = R_p \cdot \frac{i_m}{1-(1+i_m)^{-\frac{m}{p}}},$$

или с учетом функции дисконтирования $\mathrm{a(n,i)}$

$$R_m = \frac{R_p}{\mathrm{a}\left(\dfrac{m}{p}, i_m\right)} \quad \text{где} \quad \mathrm{a}\left(\frac{m}{p}, i_m\right) = \frac{1-(1+i_m)^{-\frac{m}{p}}}{i_m}$$

Оценка параметров отсроченного аннуитета

Отсроченный аннуитет – аннуитет, который начинается позднее по отношению к началу включающей его финансовой операции.

Число интервалов платежа от начала финансовой операции до начала аннуитета называется *периодом отсрочки.*

Приведенная стоимость отсроченного аннуитета – это платеж, отнесенный на начало финансовой операции и эквивалентный данному отсроченному аннуитету по определенной ставке.

Основной задачей при анализе отсроченного аннуитета является определение его приведенной стоимости.

> > Постановка задачи

Дано: *R – размер платежа;*

n – число платежей;

k – число интервалов платежа в периоде отсрочки;

i – сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить приведенную стоимость отсроченного аннуитета *A*.

►► Решение задачи

Временная диаграмма платежей отсроченного аннуитета имеет вид

0	1	2	...	k	$k+1$	$k+2$	...	$k+n-1$	$k+n$
					1	2	...	$n-1$	n
					R	R	...	R	R
				A_0					
A									

Величина A_0 является настоящей стоимостью простейшего аннуитета из данных n платежей, относится на момент конца периода отсрочки и определяется соотношением

$$A_0 = R \cdot a(n,i).$$

Составим уравнение эквивалентности A_0 и A с датой сравнения на конец периода отсрочки:

$$A \cdot (1+i)^k = A_0$$

С учетом выражения для A_0 получаем соотношение, связывающее платежи аннуитета и искомую стоимость A:

$$A \cdot (1+i)^k = R \cdot a(n,i) \text{ откуда } A = R \cdot a(n,i) \cdot (1+i)^{-k}$$

Оценка параметров бессрочного аннуитета

Бессрочный аннуитет – аннуитет, срок которого неограничен.

Итоговая сумма вечной ренты не имеет смысла, так как платежи продолжаются неограниченно долго.

> > *Постановка задачи*

Дано: R – *размер платежа;*

i – сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость бессрочного аннуитета A.

►► *Решение задачи*

Временная диаграмма платежей бессрочного аннуитета имеет вид

0	1	2	...	n	...
	R	R	...	R	...
A					

Настоящую стоимость A находят путем предельного перехода, неограниченно увеличивая число интервалов платежа n:

$$A = \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \text{ или } A = \frac{R}{i}$$

Таким образом, величина платежа является процентом от вложенной суммы: $\mathbf{R = A \cdot i}$.

Оценка параметров переменного аннуитета

Переменный аннуитет – аннуитет, платежи которого имеют неодинаковый размер.

Если нет явной закономерности при изменении размера платежей, вычисление искомых параметров переменного аннуитета производят с помощью уравнений эквивалентности.

Приведем формулы для вычислений в случаях, когда платежи образуют арифметическую и геометрическую прогрессии.

1. ***Случай арифметической прогрессии***.

> > *Постановка задачи*

Дано: R – *размер первого платежа;*

z – разность арифметической прогрессии;

i – сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость A и итоговую сумму S переменного аннуитета с платежами, изменяющимися по закону арифметической прогрессии.

►► *Решение задачи*

Временная диаграмма аннуитета имеет вид

0	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
	R	$R+z$	$R+2z$	...	$R+(n-3)z$	$R+(n-2)z$	$R+(n-1)z$
							S
A							

Уравнения эквивалентности на конец и начало аннуитета для определения соответственно S и A имеют вид

$$S = [\mathrm{R} + (\mathrm{n}-1)\cdot \mathrm{z}] + [\mathrm{R} + (\mathrm{n}-2)\cdot \mathrm{z}]\cdot(1+i) + [\mathrm{R} + (\mathrm{n}-3)\cdot \mathrm{z}] \cdot (1+i)^2 + \ldots +$$
$$+(\mathrm{R}+2\cdot \mathrm{z})\cdot(1+i)^{n-3} + (\mathrm{R}+\mathrm{z})\cdot(1+i)^{n-2} + \mathrm{R}\cdot(1+i)^{n-1};$$

$$A = R\cdot(1+i)^{-1} + (R+z)\cdot(1+i)^{-2} + (R+2\cdot z)\cdot(1+i)^{-3} + \ldots +$$
$$+[R+(n-3)\cdot z]\cdot(1+i)^{-(n-2)} + [R+(n-2)\cdot z]\cdot(1+i)^{-(n-1)} +$$
$$+[R+(n-1)\cdot z]\cdot(1+i)^{-n}$$

После преобразований получаем искомые выражения для S и A

$$S = \left(R + \frac{z}{i}\right) \cdot s(n,i) - \frac{z \cdot n}{i}; \qquad A = \left(R + \frac{z}{i}\right) \cdot a(n,i) - \frac{z \cdot n}{i \cdot (1+i)^n}$$

2. ***Случай геометрической прогрессии***.

> > <u>*Постановка задачи*</u>

<u>Дано</u>: R – размер первого платежа;

q – знаменатель геометрической прогрессии;

i – сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость A и итоговую сумму S переменного аннуитета с платежами, изменяющимися по закону геометрической прогрессии.

►► <u>*Решение задачи*</u>

Временная диаграмма аннуитета имеет вид

0	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
	R	$R \cdot q$	$R \cdot q^2$	...	$R \cdot q^{n-3}$	$R \cdot q^{n-2}$	$R \cdot q^{n-1}$
							S
A							

Уравнения эквивалентности на конец и начало аннуитета для определения соответственно S и A имеют следующий вид:

$$S = R \cdot q^{n-1} + R \cdot q^{n-2} \cdot (1+i) + R \cdot q^{n-3} \cdot (1+i)^2 + \ldots +$$
$$+ R \cdot q^2 \cdot (1+i)^{n-3} + R \cdot q \cdot (1+i)^{n-2} + \mathrm{R} \cdot (1+i)^{n-1};$$

$$A = R \cdot (1+i)^{-1} + R \cdot q \cdot (1+i)^{-2} + R \cdot q^2 \cdot (1+i)^{-3} + \ \ldots +$$
$$+ R \cdot q^{n-3} \cdot (1+i)^{-(n-2)} + R \cdot q^{n-2} \cdot (1+i)^{-(n-1)} + R \cdot q^{n-1} \cdot (1+i)^{-n}$$

После преобразований получаем искомые выражения для S и A**:**

$$S = R \cdot \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}; \qquad A = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}$$

В частности, для бессрочного переменного аннуитета, платежи которого изменяются по правилу геометрической прогрессии, настоящая стоимость определяется из последней полученной формулы путем предельного перехода при неограниченном увеличении числа интервалов платежа:

$$\boldsymbol{A = \lim_{n\to\infty} \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} = \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{\frac{q^n}{(1+i)^n} - 1}{q - (1+i)}}.$$

При $q < 1 + i$ искомая величина A определяется выражением

$$A = \frac{R}{(1+i) - q},$$

которое называется ***моделью постоянного роста*** и является обобщением модели настоящей стоимости постоянного бессрочного аннуитета (при $q = 1$).

Модель постоянного роста используется для определения истинной стоимости обыкновенной акции, когда дивиденды растут в геометрической прогрессии.

Сводка формул для вычисления основных параметров аннуитета

Формулы для вычисления итоговой суммы и настоящей стоимости аннуитетов различных видов сведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1 – Модели аннуитетов

Вид аннуитета	Итоговая сумма	Настоящая стоимость	Исходные показатели
Простейший аннуитет	$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	$A = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	R – размер платежа; i – ставка за интервал платежа; n – число интервалов платежа; k – число периодов отсрочки; δ – сила роста; W – суммарный платеж за год; z – разность арифметической прогрессии; q – знаменатель геометрической прогрессии
Полагающийся аннуитет	$S = R \cdot s(n,i) \cdot (1+i)$	$A = R + R \cdot a(n-1,i)$	
Отсроченный аннуитет	-	$A = R \cdot a(n,i) \cdot (1+i)^{-k}$	
Бессрочный постоянный аннуитет	-	$A = \frac{R}{i}$	
Переменный аннуитет, арифметическая прогрессия	$S = \left(R + \frac{z}{i}\right) \cdot s(n,i) - \frac{z \cdot n}{i}$	$A = \left(R + \frac{z}{i}\right) \cdot a(n,i) - \frac{z \cdot n}{i \cdot (1+i)^n}$	
Переменный аннуитет, геометрическая прогрессия	$S = R \cdot \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}$	$A = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}$	
Переменный бессрочный аннуитет, геометрическая прогрессия	-	$A = \frac{R}{(1+i) - q}$	