ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор АДИ ГОУВПО «ДОННТУ»
М.Н. Чальцев

Кафедра «Менеджмент организаций»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА» (ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЯ ПОГОТОВКИ 38.03.02 «МЕНЕДЖМЕНТ»)

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Учебно-методическая комиссия факультета «Экономика и управление»
Протокол № 8 от 19.04.2017 г.

«РЕКОМЕНДОВАНО»
кафедра «Менеджмент организаций»
Протокол № 15 от 15.04.2017 г.

Горловка – 2021

УДК 336.7(075) + 658.8

Методические указания к выполнению практических работ по дисциплине «Финансовая математика» (для студентов направления подготовки 38.03.02 «Менеджмент») [Электронный ресурс] / составитель Р.Ю. Заглада. – Электрон. данные. – Горловка: ГОУВПО «ДОННТУ» АДИ, 2021.

Методические указания направлены на последовательное изучение и получение комплекса знаний по основным направлениям финансовой математики.

Составитель: Заглада Р.Ю.

Ответственный за выпуск: Мельникова Е.П.,
д-р техн. наук, проф.

Рецензент: Вовк Л.П., д-р техн. наук, проф.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Объектом дисциплины «Финансовая математика» являются финансовые показатели реализации отдельных проектов, включая капиталовложения в строящиеся, реконструируемые или расширяемые предприятия, здания, сооружения (основные фонды); нематериальных активов; земельных участков и оборотных активов; различные организационно-правовые и финансовые аспекты инвестирования в ценные бумаги (корпоративные акции и облигации, государственные обязательства, векселя Центрального банка).

Предметом дисциплины «Финансовая математика» является комплекс проблем, связанных с выполнением финансовых расчетов в современных экономических системах.

Цель дисциплины – формирование у будущих специалистов теоретических знаний и практических навыков финансово-экономических расчетов, позволяющих эффективно осуществлять инвестиционную деятельность и управлять финансами. Получение базовых знаний и формирование основных навыков по финансовой математике, формирование у будущих специалистов твердых теоретических знаний и практических навыков по использованию современных экономико-математических методов и моделей при анализе, расчете и прогнозировании финансово-экономических показателей.

Задачи изучения дисциплины:

– измерение конечных результатов финансовой операции;

– выявление зависимости конечных результатов от основных параметров операции, измерение взаимосвязи этих параметров, определение их допустимых граничных значений

– разработка планов выполнения финансовых операций;

– нахождение параметров эквивалентного изменения условий операции;

– анализ инвестиционных проектов и их сравнение.

Практическая работа №1.
ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ. ДИСКОНТИРОВАНИЕ

Теоретический материал и задачи

Простые проценты

Задача 1. Банк начисляет на вклад 10000 рублей 20% годовых по ставке простых процентов. Требуется найти сумму на счете через 1 год, 2 года, 3года, …, n лет.

Задача 2. Кредит 20000 рублей выдан на 6 месяцев под 24% годовых, начисляемых по простой процентной ставке. Требуется вычислить возвращаемую сумму.

Задача 3. Кредит 20000 рублей выдан 17 февраля 2017 г. под 30% годовых, начисляемых по простой процентной ставке. Требуется найти возвращаемую сумму, при условии, что день погашения кредита 20 декабря 2017 г.

Задача 4. Составить условие задачи самостоятельно. В зависимости от условия задачи, оговорить методику расчета и обосновать выбор методики. Предложить решить составленную задачу студенту по парте.

Дисконтирование

Задача 5. Первого января размещены 100000000 рублей на месячном депозите под 20% годовых. Требуется определить наращенную сумму, если операция повторяется 3 раза.

Задача 6. Переводной вексель выдан на сумму 1000000 рублей с уплатой 17.11.2017 г. Владелец векселя учел его в банке 23.09.2017 г. по учетной ставке 20% (ACT/360). Требуется определить полученную при учете сумму и дисконт.

Задача 7. Изменим условие задачи 5. Пусть на всю сумму долга начисляют проценты по ставке простых процентов годовых. Требуется решить две задачи: определить наращенную сумму долга и сумму, полученную при учете.

Задача 8. Владелец векселя номинальной стоимостью 20000 рублей со сроком погашения 27 декабря 2017 г. имеет желание реализовать его в банке 20 октября 2017 г. Банк согласен учесть вексель с дисконтом 30%. Требуется вычислить сумму, которую получит в банке владелец векселя.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические вопросы:

1. Дать определения процента.
2. Определите два способа начисления процентов.
3. Укажите на три основных практических варианта расчета простых процентов.
4. Какую величину называют процентным делителем?
5. Ввести понятие дисконтирование.
6. Что понимают под математическим дисконтированием?
7. В каких случаях применяют банковский учет?

Задачи:

1. Составить задачу на простые проценты и решить ее.
2. Магазин 14 сентября оптом получает от предпринимателя партию товара общей стоимостью 200000 рублей на следующих условиях: 40% стоимости оплачивается при получении товара, оставшаяся сумма оплачивается после реализации товара 5 декабря того же года. Требуется определить, на какую сумму должен магазин выписать вексель, чтобы предприниматель не потерпел убытки. Банк учитывает векселя по простой процентной ставке 30% годовых.

Практическая работа №2.

СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ. НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ ПРИ ДРОБНОМ КОЛИЧЕСТВЕ ЛЕТ. НОМИНАЛЬНАЯ ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА. НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ НЕСКОЛЬКО РАЗ В ГОДУ

Теоретический материал и задачи

Наращение по сложным процентам

Задача 1. Банк начисляет на вклад 10000 рублей 20% годовых по ставке сложных процентов. Требуется найти сумму на счете через 1 год, 2 года, 3 года.

Используют формулу начисления ставки сложных процентов, которая имеет вид:

$$S = P(1 + i)^n,$$

где S – наращенная сумма или сумма на счете;

P – первоначальная сумма;

n – срок пользования кредитом, в годах;

i – ставка сложных процентов.

Начисление сложных процентов при дробном количестве лет

Задача 2. Банк начисляет на вклад 10000 рублей под 20% годовых по ставке сложных процентов. Требуется найти сумму на счете через 2,5 года.

Номинальная процентная ставка. Начисление процентов несколько раз в году

Задача 3. Вклад в банк 10000 рублей под 20% годовых при ежеквартальном начислении процентов. Требуется найти сумму на счете через 2 года.

Формула расчета имеет вид:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn},$$

где P – первоначальная сумма;

j – номинальная процентная ставка;

m – число периодов начисления процентов в год;

n – срок в годах.

Начисление процентов несколько раз в году при дробном количестве периодов начисления

На практике срок пользования кредитом не всегда представлен целым числом – периодом начисления процентов. В случае дробного количества периодов начисления используют формулу:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{n_0} \cdot \left(1 + l \cdot \frac{j}{m}\right),$$

где n_o – целая часть;

l – дробная часть цикла периодов начисления.

Задача 4. Кредит в размере 50000 рублей выдан под 20% годовых, проценты начисляют ежеквартально. Требуется определить, какую сумму должен заплатить заемщик через 2 года и 7 месяцев?

Непрерывное начисление процентов

В формуле

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n},$$

где m = 2 – начисление процентов по полугодиям;

m = 4 – начисление по кварталам;

m = 12 – начисление по месяцам.

Указанные случаи – дискретное начисление процентов. В мировой практике используют и непрерывное начисление процентов, т.е. $m \to \infty$.

В случае непрерывного начисления процентов, наращенную сумму находят по формуле:

$$S = \lim_{m \to \infty} P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} = P \cdot e^{j \cdot n},$$

где e ≈ 2,718... – основание натуральных логарифмов.

Задача 5. Кредит 30000 рублей был выдан на 2 года под 20% годовых при непрерывном начислении процентов. Требуется найти возвращаемую сумму. Используя формулу:

$$S = P \cdot e^{j \cdot n},$$

проводят вычисления.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические вопросы:

1. Дать определение сложной процентной ставке.
2. В каких случаях используют формулу наращения для сложных процентов?
3. Записать формулу наращения сложных процентов для случая начисления процентов на проценты по той же ставке, что и при

начислении на основную сумму долга.

4. Записать формулу наращения сложных процентов для случая, когда проценты на основной долг начисляют по одной ставке, а проценты на проценты начисляют по другой ставке.

5. Дать определение сложной процентной ставки.

6. Записать формулу наращения для сложных процентов.

7. В каком случае используют формулу наращения для сложных процентов?

8. Какую формулу применяют при использовании номинальной процентной ставки наращения?

Задачи:

1. Вклад в банк 10000 рублей под 20% годовых по ставке сложных процентов. Требуется найти сумму на счете через 3 года 5 месяцев.

2. Требуется определить, какой величины достигнет долг, равный 1000000 рублей, через 5 лет при росте по сложной процентной ставке 15,5% годовых, если проценты начисляют поквартально.

Практическая работа №3.

СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ. ЭФФЕКТИВНАЯ УЧЕТНАЯ СТАВКА. ЭФФЕКТИВНАЯ ГОДОВАЯ ПРОЦЕНТНАЯ СТАВКА

Теоретический материал и задачи

Эффективная учетная ставка

Эффективная учетная ставка характеризует степень дисконтирования за год. Эффективную учетную ставку можно определить, исходя из равенства дисконтных множителей:

$$(1-d)^n = \left(1-\frac{f}{m}\right)^{m\cdot n},$$

тогда

$$d = 1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{m},$$

$$f = m\cdot\left(1-\sqrt[m]{1-d}\right).$$

Эффективная учетная ставка во всех случаях при $m > 1$, меньше номинальной ставки.

Задача 1. Вексель на сумму 20000 рублей, срок платежа по которому наступает через 1,8 года, учтен по сложной ставке 18% годовых. Требуется определить сумму, полученную владельцем векселя при учете, и дисконт при ежегодном и ежемесячном дисконтировании.

Эффективная годовая процентная ставка

Эффективная процентная ставка $i_{эф}$ – это простая процентная ставка, которую начисляют за 1 год и дает $i_{эф}$ такой же результат, что и ставка сложных процентов j, начисляемая m раз в коду. Формула расчета эффективной годовой процентной ставки^

$$i_{эф} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1.$$

Эффективную годовую процентную ставку используют для выявления наиболее благоприятных условий для вкладов в банки и получения кредитов.

Задача 2. Банки предлагают следующие условия для вкладов: первый банк предлагает 36% годовых начисляемых по полугодиям j = 0,36; m = 2, второй банк предлагает 35% годовых начисляемых по кварталам j = 0,35; m = 4, третий банк предлагает 34% годовых начисляемых ежемесячно j = 0,34; m = 12. Требуется определить, какой банк предлагает наилучшие условия для вкладов.

Задача 3. Первый банк дает кредит под 30% годовых при ежеквартальном начислении процентов. Второй банк дает кредит под 29% годовых при ежемесячном начислении процентов. Требуется определить в каком банке выгоднее взять кредит.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические вопросы:

1. На что указывает эффективная ставка?
2. Записать соотношение, указывающее на связь между эффективной и номинальной ставками.
3. Что характеризует эффективная учетная ставка?
4. Какое начисление процентов называют непрерывным?

Задачи:

Составить и решить задачу на определение, в каком из трех банков выгоднее взять кредит, условия банков задать самостоятельно.

Практическая работа №4.
РАСЧЕТ СРОКА КРЕДИТА И ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРОКА КРЕДИТА

Теоретический материал и задачи

Определение срока кредита при начислении процентов по простой процентной ставке

Задача 1. Требуется определить за какой срок первоначальный капитал в 50000 рублей увеличится до 70000 рублей, если на капитал начисляют 25% годовых. Рассчитать для варианта начисления процентов по простой ставке.

Задача 2. Требуется определить, какова должна быть процентная ставка, чтобы первоначальный капитал 40000 рублей вырос до 55000 рублей за 2 года. Рассчитать для варианта начисления процентов по простой ставке.

Определение срока кредита по ставке сложных процентов

Задача 3. Требуется определить за какой срок первоначальный капитал в 50000 рублей увеличится до 70000 рублей, если на капитал начисляют 25% годовых. Рассчитать для начисления процентов по ставке сложных процентов.

а) для сложных процентов:

$$S = P \cdot (1 + i)^n,$$

б) для сложных процентов при начислении процентов раз в год:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n},$$

Задача 4. Требуется определить, какова должна быть процентная ставка, чтобы первоначальный капитал 40000 рублей вырос до 55000 рублей за 2 года. Рассчитать для начисления процентов по ставке сложных процентов.

Определение срока кредита при ежемесячном начислении процентов

Задача 5. Требуется определить за какой срок первоначальный капитал в 50000 рублей увеличится до 70000 рублей, если на капитал начисляют 25% годовых. Рассчитать для случая начисления процентов ежемесячно.

Задача 5. Требуется определить, какова должна быть процентная ставка, чтобы первоначальный капитал 40000 рублей вырос до 55000 рублей за 2 года. Рассчитать для случая начисления процентов ежемесячно.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические вопросы:

1. Какое начисление процентов называют непрерывным?
2. Чем определяется доходность финансовой операции?
3. В каком виде определяют доходность финансовой операции?

Задачи:

1. Составить и решить задачу на определение процентной ставки при заданном наращении капитала за определенный срок.
2. Составить и решить задачу на определение процентной ставки при заданном наращении капитала. Рассчитать начисление процентов ежемесячно.

Практическая работа №5.

ИНФЛЯЦИЯ

Теоретический материал и задачи

Индекс инфляции

Инфляция – процесс обесценивания национальной валюты, т.е. снижение ее покупательной способности и общего повышения цен в стране. Влияние инфляции на доход кредитора – обесценивание денежных средств. Влияние инфляции на доход заемщика – погашение задолжности денежными средствами сниженной покупательной способности.

Один из параметров, характеризующих инфляцию – это уровень инфляции за один год α. Уровень инфляции за один год показывает, на сколько процентов за год вырастают цены.

Индекс инфляции показывает, во сколько раз выросли цены на товары за рассматриваемый промежуток времени:

$$I_a = (1 + \alpha)^n.$$

В случае, если рассматриваемый период не является целым числом, т.е. $n = n_0 + l$, где n_0 – число целых лет, l – дробное часть периода, то:

$$I_a = (1 + \alpha)^{n_0} \cdot (1 + l\alpha).$$

Задача 1. Уровень инфляции 23%. Требуется найти индекс инфляции за 7 месяцев.

Простая процентная ставка с учетом инфляции

Задача 2. Кредит 50000 рублей выдан на 6 месяцев. Требуется определить, какова должна быть простая процентная ставка, если кредитор желает получить 12% реальной доходности, начисляемых по простой процентной ставке при уровне инфляции 20% в год. Вычислить наращенную сумму.

Задача 3. Кредит выдан на 2 года под 30% годовых, начисляемых по простой процентной ставке. Требуется оценить реальную доходность финансовой операции с точки зрения кредитора, при уровне инфляции 25% в год.

Простая учетная ставка с учетом инфляции

Формула для простой учетной ставки P = S (1 – nd).

Учет инфляции

$$S_\alpha = \frac{P}{1 - n \cdot d_\alpha}; \; S_\alpha = \frac{P}{1 - n \cdot d} \cdot I_\alpha;$$

$$d_\alpha = \frac{n \cdot d + I_\alpha - 1}{n \cdot I_\alpha}.$$

Сложная процентная ставка с учетом инфляции

Инфляцию учитывают двумя способами:

$$S_\alpha = P \cdot \left(1 + \frac{j_\alpha}{m}\right)^{m \cdot n}; \quad S_\alpha = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} \cdot I_\alpha.$$

Задача 1. Кредит в размере 40000 рублей выдан на два года. Реальная доходность должна составлять 10% годовых, начисляемых ежеквартально. Ожидаемый уровень инфляции 20% в год. Требуется определить сложную ставку процентов кредита, компенсирующую инфляционные потери. Вычислить наращенную сумму.

Задача 2. Определить реальную доходность финансовой операции, если при уровне инфляции 20% в год кредит выдают на 2 года по номинальной ставке сложных процентов в размере 30% годовых при ежеквартальном начислении процентов.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические вопросы:

1. Дать определение инфляции.
2. Дать определение индекса инфляции.
3. Что понимают под уровнем инфляции?
4. Записать две формулу учета инфляции.
5. Записать формулу для вычисления индекса инфляции.

Задачи:

1. Под какую простую учетную ставку нужно выдать кредит на 6 месяцев, чтобы реальная доходность операции составила 10% при уровне инфляции 20% в год?

2. Ссуда дана по учетной ставке 30% годовых на 6 месяцев. Требуется определить, какова реальная доходность операции с точки зрения кредитора при уровне инфляции 25%.

3. Определить, какой реальной доходностью обладает финансовая операция, если при уровне инфляции 20% в год деньги вкладывают на 2 года под 15% годовых при ежемесячном начислении процентов.

Используют формулы:

$$j = \frac{m + j_\alpha}{\sqrt[mn]{I_\alpha}} - m; \;\; I_\alpha = (1 + \alpha)^2.$$

Практическая работа №6.
ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

Теоретический материал и задачи

Формулы наращенной суммы

В кредитном соглашении предусматривают не одноразовое погашение всей суммы долга, а определенное количество выплат, распределенных во времени.

Поток платежей – ряд последовательных выплат и поступлений.

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны, называют финансовой рентой или аннуитетом.

Параметры финансовой ренты:

- член ренты – величина каждого отдельного платежа;
- период ренты – временной интервал между двумя соседними платежами;
- срок ренты – время от начала финансовой ренты до конца последнего периода ренты;
- процентная ставка – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей;
- число платежей в году;
- моменты платежа внутри периода ренты.

Задача 1. Клиент может вносить в банк в конце каждого года 1000 условных денежных единиц. Какая сумма будет им накоплена на счете через 3 года, если банк платит 4% по депозиту?

Задача 2. Один раз в квартал делают взнос в банк по схеме пренумерандо в размере 400 условных денежных единиц. Какая сумма будет на счете через 5 лет, если ставка сложных процентов 8% годовых при ежемесячном начислении процентов?

На практике встречаются случаи, когда количество периодов начисления процентов и число платежей в году совпадают, т.е. m = p.

Тогда формула по схеме постнумерандо принимает вид:

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\frac{j}{m}}.$$

Формула расчета по схеме пренумерандо:

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\frac{j}{m}} \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right).$$

Формулы используют при решении задач, связанных с регулярными выплатами: формирование инвестиционного фонда, пенсионного фонда, страхового фонда, накопительного фонда.

Задача 3. Руководство фирмы считает, что через 5 лет используемое оборудование морально устареет и его нужно будет обновить. Для этой цели фирме необходимо накопить 10000 условных денежных единиц. Каковы должны быть ежемесячные платежи, если процентная ставка 6% годовых при ежемесячном начислении процентов?

Формулы современной величины

Задача 4. Требуется определить, какую сумму следует внести в банк, выплачивающий 5% годовых, чтобы иметь возможность в течение последующих 6 лет ежегодно получать по 1000 условных денежных единиц. Предполагается, что после последней выплаты на счете средств не останется.

В общем виде формула имеет вид:

$$A = R \cdot \frac{(1+i)^n}{i},$$

где R – годовой платеж;

i – процентная ставка.

В случае, когда платежи производят p раз в году, а начисление процентов j производят m раз в году, то формула примет вид:

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}.$$

В случае равенства m = p количества платежей и количества периодов начисления процентов:

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\frac{j}{m}}.$$

План погашения кредита

Одним из пунктов кредитного соглашения является план погашения кредита.

Задача 5. Кредит 100000 рублей взят на 4 года под 20% годовых, начисляемых на непогашенный остаток по схеме сложных процентов.

Возврат производят равными суммами в конце каждого года. Требуется составить план погашения кредита.

Задача 6. Кредит 100000 рублей взят на 4 года под 20% годовых, начисляемых на непогашенный остаток ежемесячно. Возврат рекомендуют осуществлять равными суммами в конце каждого года. Требуется составить план погашения кредита.

Годовая рента постнуменранд

В случае p-срочной ренты постнумерандо, при начислении процентов m раз в году равным числу начислений процентов p, наращенная сумма ренты имеет вид:

$$S = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{n} - 1}{j}.$$

Современную величину ренты вычисляют по формуле:

$$A = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}}{j}.$$

Задача 7. Пусть рассматривают обыкновенную ренту постнумерандо с платежами по 300 рублей на срок 5 лет. Требуется найти наращенную сумму и современную стоимость ренты, если годовая процентная ставка равна 10%, проценты начисляют ежемесячно, выплаты осуществляют поквартально.

Самостоятельно рассчитать для срока ренты 6 лет, при начислении процентов ежеквартально.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические вопросы:

1. Дать определение потока платежей.
2. Перечислить параметры финансовой ренты и пояснить их значение.
3. Записать формулу нахождения современной стоимости потока платежей А.
4. Записать формулу наращенной на ренту суммы S.

Задачи:

1. Взят кредит 120000 рублей для приобретения жилья. Срок погашения кредита – 2 года, процентная ставка – 25% годовых при ежемесячном начислении процентов. Требуется определить, каковы должны быть ежемесячные платежи, если по условию кредитного соглашения платежи должны быть равными.
2. Составить и решить задачу на составление плана погашения кредита.
3. Составить таблицу наращенной суммы и современной стоимости для рент постнумерандо при различном сочетании p и m.

Практическая работа №7.
ЛИЗИНГ. ПЕРЕМЕННАЯ РЕНТА

Теоретический материал и задачи

Лизинг

Лизинг – один из способов ускоренного обновления основных средств, который позволяет предприятию получить в распоряжение средства производства, не покупая средства производства и не становясь собственником средств.

Пусть n – срок реализации проекта, K_n – ставка налога на прибыль, E_0 – предоплата, r – процентная ставка по кредиту, Q – остаточная стоимость объекта, I_t – периодический лизинговый платеж, S_t – периодический платеж по погашению кредита, P_i – проценты по кредиту в соответствующем периоде, A_i – амортизационные начисления в соответствующем периоде i = 1,2, ... , n.

Чистая приведенная стоимость после налоговых платежей в случае лизинга:

$$L = E_0 + (1 - K_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{I_i}{(1+r)^i}.$$

В случае периодических лизинговых платежей постоянных $I_i = I_0 = \text{const}$, получают простую ренту постнумерандо. Тогда чистая приведенная стоимость после налоговых лизинговых платежей:

$$L = E_0 + (1 - K_n)I_0\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r}.$$

В случае покупки за счет кредита чистая приведенная стоимость после налоговых платежей:

$$S = E_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{(1+r)^i} + (1 - K_n) \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{(1+r)^i} - K_n \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(1+r)^i} - \frac{Q}{(1+r)^n}.$$

Если периодические платежи по погашению кредита постоянны $S_i = S_0$ = const, амортизационные начисления постоянны $A_i = A_0$ = const, то чистая приведенная стоимость после налоговых платежей в случае покупки за счет кредита:

$$S = E_0 + (S_0 - K_n A_0) \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) + (1 - K_n) \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{(1+r)^i} - \frac{Q}{(1+r)^n}.$$

Если $L < S$, то выгодней лизинг, если $L > S$, то выгоднее покупка за счет кредита.

Задача 1. Предприятие рассматривает вопрос о приобретении оборудования. Первый вариант – лизинг за 600000 рублей с рассрочкой платежа в течение четырех лет. Второй вариант – покупка на заводе-изготовителе за 480000 рублей необходимого оборудования. Ставка налога на прибыль K_n = 20%, предоплата E_0 и остаточная стоимость оборудования Q равны нулю. Имеется возможность получить кредит в банке под r = 12% годовых. Используют равномерное начисление износа. Сравнить два варианта.

Переменная рента с постоянным абсолютным изменением членов ренты во времени

Современную сумму годовой ренты постнумерандо определяют по формуле:

$$A = \left(R + \frac{a}{i}\right) \cdot a_{n,i} - \frac{nav^n}{i},$$

где

$$v = \frac{1}{1 + i}$$

- дисконтный множитель по ставке i.

Наращенную сумму ренты получают, умножая современную сумму годовой ренты на $(1 + i)^n$:

$$S = \left[\left(R + \frac{a}{i}\right) \cdot a_{n,i} - \frac{nav^n}{i}\right] \cdot (1 + i)^n,$$

где R – член ренты;

α – сумма, на которую увеличивают платежи;

i – годовая ставка;

n - срок выплат;

$\alpha_{n,i}$ – табличное значение коэффициента.

Задача 2. Платежи постнумерандо образуют регулярный во времени поток, первый член которого равен 15000000 рублей. Последующие платежи увеличивают каждый раз на 2000000 рублей. Начисление процентов производят по 20% годовых. Срок выплат 10 лет. Требуется определить современную и наращенную суммы ренты.

Переменная p - срочная рента с постоянным абсолютным приростом

Пусть R – базовая величина разовой выплаты, α – годовой прирост выплат.

По определению ренты постнумерандо при начислении процентов p раз в году, современная сумма годовой ренты:

$$A = \sum_{t=1}^{pn} \left(R + \frac{at}{p}\right) \cdot v^{\frac{t}{p}}.$$

Наращенная сумма ренты:

$$S = \sum_{t=1}^{pn} \left[R + \frac{a}{p}(t-1)\right] (1+i)^{n-\frac{t}{p}}.$$

Ряд дисконтных платежей есть геометрическая прогрессия с первым членом R_v и знаменателем q_v. Сумма членов прогрессии или современная сумма годовой ренты постнумерандо:

$$A = Rv\frac{q^n v^n - 1}{qv - 1} = R\frac{(qv)^n - 1}{q - (1+i)}.$$

В формуле q = 1 + k, k – темп прироста платежей, который может быть как положительным, так и отрицательным.

Наращенную сумму ренты определяют по формуле:

$$S = A(1+i)^n.$$

Задача 3. Ожидают, что сбыт продукции, увеличится в течение двух лет. Увеличение происходит ежеквартально на 25000 рублей. Первоначальный объем сбыта за квартал 500000 рублей. Требуется определить наращенную сумму к концу срока при условии, что денежные средства за продукцию поступают постнумерандо по 20% ставке.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические вопросы:

1. Дать определение лизинга.
2. Записать и пояснить формулу современной суммы переменной ренты с постоянным абсолютным изменением членов во времени.
3. Записать и пояснить формулу наращенной суммы переменной ренты с постоянным абсолютным изменением членов во времени.
4. Записать и пояснить формулу современной суммы p - срочной ренты с постоянным абсолютным приростом.

Задачи:

1. Составить задачу на приобретение оборудования предприятием. Сравнить вариант кредита и лизинга.
2. Составить задачу на использование формулы современной суммы переменной ренты с постоянным абсолютным изменением членов во времени.

Практическая работа №8.
НЕПРЕРЫВНЫЙ ПОТОК ПЛАТЕЖЕЙ. РОСТ ПЛАТЕЖЕЙ

Теоретический материал и задачи

Изменение размера членов ренты постнумерандо согласно геометрической прогрессии

Ряд дисконтированных платежей:

$$Rv, Rqv^2, \dots, Rq^{n-1}v^n.$$

Современная сумма ренты - сумма членов этой прогрессии:

$$A = Rv \cdot \frac{q^n v^n - 1}{qv - 1}.$$

Пусть q = 1 + k, где k – темп прироста платежей, тогда:

$$A = R \cdot \frac{1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i - k}$$

Наращенная сумма ренты:

$$S = A \cdot (1 + i)^n.$$

Задача 1. Платежи постнумерандо образуют регулярный во времени поток, первый член которого равен 15000 рублей. Последующие платежи увеличивают ежегодно на 12% (k = 0,12). Начисление процентов производят по 20% годовых. Срок выплат 10 лет. Требуется определить современную сумму ренты и наращенную сумму ренты.

Рента p - срочная с постоянными относительными изменениями членов

Рента p - срочная с постоянными относительными изменениями членов – это рента, когда платежи производят p раз в году постнумерандо, с начислением процентов 1 раз в году по ставке i.

Последовательность платежей есть геометрическая прогрессия R, Rq, Rq^2, ..., Rq^{np-1}, где q – темп роста за период.

Начисление процентов и суммирование результата приводит к результату в виде наращенной суммы ренты:

$$S = R\frac{q^{np} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{\frac{1}{p}}}.$$

Современная стоимость ренты:

$$A = R\frac{q^{np}v^n - 1}{q - (1+i)^{\frac{1}{p}}}.$$

Задача 2. Пусть R = 15000 рублей, n = 10, i = 20%, платежи увеличивают с каждым полугодием на 6%, рента постнумерандо. Требуется определить наращенную стоимость и современную стоимость ренты.

Рост платежей. Линейно изменяющийся непрерывный поток платежей

Функция потока платежей $R_t = R_0 + at$, где R_0 – начальный размер платежа, выплачиваемого в единицу времени, в котором измеряется срок ренты.

Современную стоимость получают с помощью интегрирования функции потока платежей:

$$A = \int_0^n (R_0 at)e^{\delta t}dt = R_0 \int_0^n e^{\delta t}dt + a\int_0^n te^{\delta t}\,dt = \left(R_0 + \frac{a}{\delta}\right)\tilde{a}_{n,\delta} - \frac{a}{\delta}ne^{\delta n},$$

где $\tilde{a}_{n,\delta}$ – коэффициент приведения постоянной непрерывной ренты.

Задача 3. Предполагают в течение трех лет увеличивать выпуск продукции на 1000000 рублей ежегодно. Базовый уровень выпуска 10000000 рублей. Требуется определить суммарный объем выпуска начисленными процентами. Сила роста 8%.

Экспоненциальный рост платежей

Функции потока платежей: $R_t = Re^{qt}$, где q – непрерывный темп роста платежей.

Современную величину ренты определяют по формуле:

$$A = R\int_0^n e^{qt}e^{-\delta t}\,dt = R\int_0^n e^{(q-\delta)t}\,dt = R\frac{e^{(q-\delta)n} - 1}{q - \delta},$$

где

$$q - \delta = ln\frac{1+k}{1+i},$$

k – дискретный темп прироста.

Задача 4. Предполагают, что прирост доходов составит 5% в год. Требуется определить современную стоимость и наращенную сумму потока доходов, если R = 100; n = 3 года.

Рассрочка платежей

В случае, когда на этапе разработки условий контракта или в ходе выполнения контракта в силу каких-либо причин требуется изменить условия выплаты ренты, т.е. сконвертировать условия, предусматриваемые при выплате финансовой ренты, то говорят о конверсии.

Примеры конверсий: выкуп ренты, рассрочка платежей, консолидация рент.

Выкуп ренты – это замена ренты единовременным платежом.

Задача 5. Рента постнумерандо с параметрами: величина годового платежа 10 000 рублей, срок 5 лет, процентная ставка 8%. Требуется определить размер платежа в случае выкупа ренты.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические вопросы:

1. Записать и пояснить формулу современной суммы ренты в случае изменения размера членов ренты постнумерандо согласно геометрической прогрессии.

2. Записать и пояснить формулу наращенной суммы ренты в случае изменения размера членов ренты постнумерандо согласно геометрической прогрессии.

3. Записать и пояснить формулу современной суммы ренты в случае p - срочной ренты с постоянными относительными изменениями членов.

4. Записать формулу современной стоимости в случае линейно изменяющегося непрерывного потока платежей.

5. Записать современную величину ренты в случае экспоненциального роста платежей.

6. Определить понятие – выкуп ренты.

Задачи:

1. Платежи постнумерандо образуют регулярный во времени поток, первый член которого равен 23 000 рублей. Последующие платежи уменьшаются во времени с темпом прироста 10%, k = -0,1. Начисление процентов производят по 20% годовых. Срок выплат 10 лет. Требуется определить современную сумму ренты и наращенную сумму ренты.

2. Составить и решить задачу для случая конверсии в виде выкупа ренты.

Практическая работа №9.

РЕНТЫ

Теоретический материал и задачи

Объединение рент

Объединение или консолидация рент есть замена несколько рент одной, параметры которой необходимо определить.

Из принципа финансовой эквивалентности следует равенство современных стоимостей заменяющей и заменяемых рент, что соответствует равенству:

$$A = \sum_q A_q,$$

где A – современная стоимость заменяющей ренты;

A_q – современная стоимость q-й заменяемой ренты.

В качестве неизвестного параметра принимают член ренты или срок ренты.

В случае, если заменяющая рента постнумерандо немедленная и задан срок ренты, то член ренты:

$$R = \frac{\sum A_q}{a_{n;i}}.$$

Срок для немедленной ренты постнумерандо определяют формуле:

$$n = \frac{-ln\left(1 - \frac{\sum A_q}{R} \cdot i\right)}{ln(1+i)}.$$

Задача имеет решение в случае выполнения условия:

$$\frac{i\sum_q A_q}{R} < 1.$$

Задача 1. Три ренты постнумерандо - немедленные, годовые заменяют одной отложенной на три года рентой постнумерандо. Согласно договоренности, заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент: R_q = 100000; 120000; 300000 рублей, сроки рент: 6 лет, 11 лет и 8 лет, сложная ставка 20%.

Замена немедленной ренты на отсроченную ренту

Пусть имеется немедленная рента постнумерандо с параметрами R_1, n_1 и процентной ставкой i, требуется отсрочить выплаты на t лет, т.е. немедленную ренту заменяют на отсроченную. Если задан срок, то определяют R_2, если задан R_2, то определяют срок.

В общем случае при условии, когда $n_1 \neq n_2$, $A_1 = A_2$, т.е.

$$R_1 \cdot a_{n_1;i} = R_2 \cdot a_{n_2;i} v^t;$$

$$R_2 = R_1 \cdot \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} \cdot (1+i)^t,$$

где t – продолжительность отсрочки.

Задача 2. Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями R_1 = 2000 и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока самой ренты. Процентная ставка – 20% годовых. Требуется определить R_2.

Задача 3. Годовую ренту постнумерандо с параметрами: членом ренты – R1 = 2000, сроком – n = 3 заменяют на квартальную со сроком

n_2 = 4 года. Процентная ставка 20%. Требуется определить размер выплаты второй ренты.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические вопросы:

1. В чем заключается консолидация или объединение рент?
2. Как определяют срок для немедленной ренты постнумерандо?
3. Что означает замена одной ренты другой?

Задачи:

Составить и решить задачу для случая замены годовой ренты на квартальную.

Практическая работа №10.
МЕТОДЫ ПОГАШЕНИЯ ДОЛГОВ

Теоретический материал и задачи

Актуарный метод погашения долгов

Задача 1. Обязательство 1500000 рублей, датированное 10.08.2016 г., должно быть погашено 10.06.2017 г. Ссуда выдана под 20% годовых. В счет погашения долга 10.12.2016 г. поступило 800000 рублей. Требуется определить остаток долга на конец срока.

Банковский кредит

Задача 2. Долг в сумме 600000 рублей выдан на 4 года под 6% годовых. Для погашения кредита создан погасительный фонд, на инвестируемые средства которого начисляются проценты по ставке 8%. Требуется разработать план погашения кредита.

Задача 3. Кредит размером 750000 рублей выдан на 5 лет под 13% годовых. По условиям контракта погашение основного долга производят равными платежами с начислением процентов в конце года. Требуется составить план погашения кредита.

Погашение долга равными срочными уплатами

Задача 4. Кредит размером 300000 рублей выдан на 5 лет под 10% годовых. Погашение основного долга производят равными срочными уплатами, т.е. рентой с параметрами.

Задания для самостоятельной работы

Теоретические вопросы:

1. Как определяют остаток долга на конец срока в случае актуарного метода?
2. По какой формуле определяют срочную уплату по банковскому кредиту?
3. По какой формуле определяют срочную уплату при погашении долга равными срочными уплатами?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башарина А.В. Финансовые вычисления: учебное пособие. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. – 71 с.
2. Боди Э., Мертон Р.К. Финансы / Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2010. – 592 с.
3. Бригхэм Ю.Ф., Эрхардт М.С. Финансовый менеджмент / Пер. с англ. 10-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – 960 с.
4. Ковалев В.В., Уланов В.А. Курс финансовых вычислений. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 328 с.
5. Кочович Е. Финансовая математика с задачами и решениями. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 384 с.
6. Мелкумов Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика: Учебно-справочное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 383 с.
7. Недосекин А.О., Абдулаева З.И. Финансовая математика / А.О. Недосекин, З.И. Абдулаева. - СПб: Изд-во Политехн. университета, 2013. – 220 с.
8. Уланов В.А. Сборник задач по курсу финансовых вычислений. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 400 с.
9. Финансовый менеджмент: Учебник / Под ред. А.М. Ковалевой. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2009. – 336 с.
10. Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учеб. — М.: Дело, 2000. – 400 с.
11. Шарп, У.Ф. Инвестиции: учеб.: пер. с англ../ У.Ф. Шарп, Г. Дж. Александер, Дж.В. Бэйли - М:ИНФРА-М, 2001. – 1028 с.

ЭЛЕКТРОННОЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ

Заглада Роман Юрьевич

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА» (ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЯ ПОГОТОВКИ 38.03.02 «МЕНЕДЖМЕНТ»)

Подписано к выпуску г. Гарнитура Times New.
Усл. печ. Зак. № .

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донецкий национальный технический университет»
Автомобильно-дорожный институт
84646, г. Горловка, ул. Кирова, 51
E-mail: druknf@rambler.ru
Редакционно-издательский отдел
Свидетельство о внесении в Государственный реестр издателей, изготовителей и
распростанителей издательской продукции ДК № 2982 от 21.09.2007г.