Actividad 2

El oscilador armónico: solución numérica

En esta tarea resolveremos numéricamente la ecuación diferencial del oscilador armónico, considerando el amortiguamiento y una fuerza externa periódica:

$$\ddot{x} = -\alpha\, x \;-\; \beta\, \dot{x} + \Gamma\, \cos(\omega_d\, t) \tag{2.1}$$

Las dimensiones de las distintas magnitudes son: $[\alpha] = \mathrm{T}^{-2}$, $[\beta] = \mathrm{T}^{-1}$, $[\Gamma] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$, $[\omega_d] = \mathrm{T}^{-1}$.

2.1. Introducción

2.1.1. Integración numérica: método de Euler

Reescribimos la ecuación 2.1 como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= a(x, v, t; \alpha, \beta, \Gamma, \omega_d) \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde a, la aceleración, es la expresión del segundo miembro de 2.1. Observamos que la aceleración es una función del tiempo, del estado del oscilador (x, $\dot{x}$) y de los parámetros del mismo ($\alpha, \beta, \Gamma, \omega_d$).

De la definición de derivada se tiene:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) \;+\; \int_t^{t+\Delta t} \dot{x}(t')\, dt' \\ \dot{x}(t + \Delta t) &= \dot{x}(t) \;+\; \int_t^{t+\Delta t} \ddot{x}(t')\, dt' \end{aligned} \tag{2.3}$$

El significado de las expresiones previas nos es de sobra conocido: la posición se obtiene integrando la velocidad, que a su vez se obtiene integrando la aceleración.

Si en las ecuaciones 2.3 se toma un valor de Δt muy pequeño, podemos hacer la aproximación de que la función integrada permanece prácticamente constante en el intervalo de integración, y por tanto $\int_t^{t+\Delta t} \dot{x}(t')\,dt' \approx \dot{x}(t)\,\Delta t$ y $\int_t^{t+\Delta t} \ddot{x}(t')\,dt' \approx \ddot{x}(t)\,\Delta t$. Dicho de otro modo: conocidas la posición y la velocidad en un instante t, si Δt es lo suficientemente pequeño podemos calcular $x(t+\Delta t)$ y $v(t+\Delta t)$ haciendo el desarrollo en serie de Taylor de x y v en t y truncando la serie en el término Δt.

Además, discretizaremos el tiempo: consideraremos sólo instantes $t_n = n\Delta t$. Denominaremos $x_n = x(t_n)$, $\dot{x_n} = \dot{x}(t_n)$ y $\ddot{x_n} = \ddot{x}(t_n)$. Las ecuaciones 2.3 quedan:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \dot{x}_n\,\Delta t \\ \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + a(x_n, \dot{x}_n, t; \alpha, \beta, \Gamma, \omega_d)\,\Delta t \end{aligned} \tag{2.4}$$

Con las consideraciones anteriores, describiremos la dinámica del oscilador mediante un proceso iterativo. Al inicio de la iteración n-ésima conocemos la posición y la velocidad en t_n, x_n y $\dot{x}_n$. Calculamos la aceleración mediante la expresión 2.1 y, siguiendo las expresiones 2.4, obtenemos la posición y la velocidad en el instante inmediatamente posterior, t_{n+1}.

2.1.2. Tiempos relevantes

En esta tarea existen tres magnitudes temporales relevantes:

- Δt. Su valor debe ser una solución de compromiso entre precisión y eficiencia: cuanto más pequeño sea, tanto mejor será la aproximación presentada en la subsección 2.1.1 (sustituir una integral por una suma finita), y más precisos serán los resultados. Por otro lado, a menor Δt más iteraciones deberemos realizar para cubrir el intervalo de tiempo en que deseamos estudiar la dinámica.
- Con qué frecuencia se mostrará al usuario el estado del oscilador, t_{cout}.
- Cuánto tiempo cubrirá la simulación, t_{simul}.

En el guión os propondremos valores adecuados para estas magnitudes.

En concreto, tomaremos como referencia un **tiempo característico del sistema** T:

- En ausencia de término forzante ($\Gamma = 0$), $T = 2\pi\alpha^{-1/2}$ (el periodo de oscilación natural).
- Si $\Gamma \neq 0$, $T = 2\pi/\omega_D$ (el periodo del término forzante).

Δt, t_{simul} y t_{cout} se calcularán a partir de sendos factores, que serán datos de entrada del programa:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \mathrm{factor}_{\Delta} \cdot T, \\ t_{cout} &= \mathrm{factor}_{\mathrm{cout}} \cdot T, , \\ t_{simul} &= \mathrm{factor}_{\mathrm{tSimul}} \cdot T. \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2. Descripción de la tarea

Diseña y escribe un programa que pida al usuario los factores factor_{Δ}, $\mathrm{factor}_{\mathrm{cout}}$ y $\mathrm{factor}_{\mathrm{tSimul}}$, la posición y velocidad iniciales (x_0, $\dot{x}_0$) y los parámetros de la ecuación 2.1 (α, β, Γ y ω_d).

Por simplicidad, suponemos que todas las magnitudes se dan en unidades del Sistema Internacional (la longitud, en metros; el tiempo, en segundos; la velocidad, en $m\,s^{-1}$).

Para que la simulación tenga sentido, α, factor_Δ, $\text{factor}_{\text{cout}}$ y $\text{factor}_{\text{tSimul}}$ deben ser positivos, y β no negativo. De no ser así, el programa mostrará un mensaje de error y finalizará.

A continuación, se calcularán los valores de T, Δt, t_{simul} y t_{cout} tal como se indica en la subsección 2.1.2.

El programa calculará la dinámica del oscilador hasta $t = t_{simul}$ siguiendo el método de Euler, tal como se ha explicado en la subsección 2.1.1 (ecuaciones 2.4). A intervalos regulares t_{cout} mostrará por pantalla los valores de t, x, $\dot{x}$, así como $\dot{x}^2 + \alpha x^2$ (la energía dividida por $m/2$).

Se mostrarán también:

- En el caso de oscilador sin pérdidas ($\beta = \Gamma = 0$), la solución exacta (ecuación 2.7).
- En el caso del oscilador amortiguado ($\beta \neq 0, \Gamma = 0$), $e^{-\beta \cdot t/2}\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\alpha}}$ (la envolvente de la solución en el límite $\beta \to 0$) y $x\,e^{\beta \cdot t/2}$ (el producto de la solución numérica por el factor $e^{\beta \cdot t/2}$); el análisis de esta última curva hace patente la diferencia entre los amortiguamientos débil, crítico y fuerte.
- En el caso del oscilador forzado ($\Gamma \neq 0$), la solución estacionaria (ecuación 2.12).

2.3. Ayuda

Con la suposición de que t_{cout} es un múltiplo de Δt, el programa escribirá una línea en pantalla cada `round (`$t_{cout}/\Delta t$`)` iteraciones.

2.4. Ejemplos de ejecución

El fichero `datosTarea_02.txt`, descargable desde Moodle, contiene los datos de entrada de los ejemplos discutidos en esta sección.

Al ejecutar nuestro programa reproducimos resultados ya estudiados en Física:

2.4.1. Oscilador armónico sin pérdidas ($\beta = \Gamma = 0$)

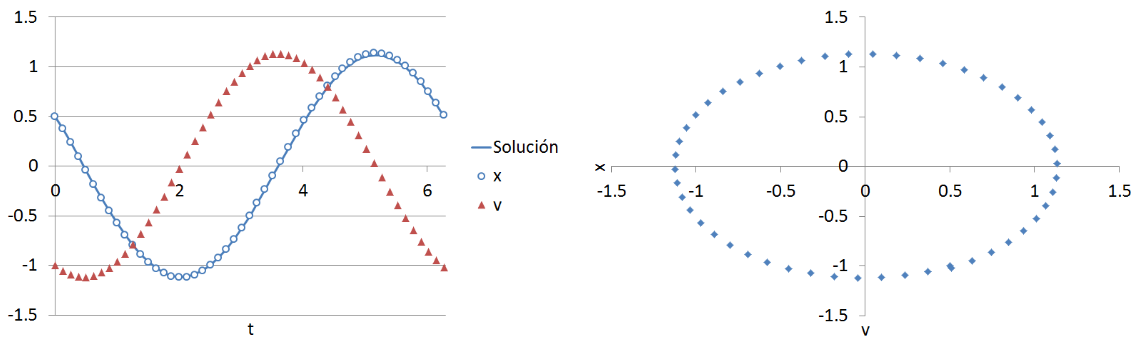
Para los datos de entrada:

```
0.001 0.02 2          0.5 -1          1  0 0 0
```

las primeras líneas devueltas por el programa son:

```
t x v E solucionSinusoidal
0 0.5 -1 1.25 0.5
0.125664 0.370872 -1.0552 1.25099 0.370724
0.251327 0.235791 -1.09379 1.25198 0.235602
0.376991 0.0968839 -1.11516 1.25296 0.0967637
0.502655 -0.0436618 -1.11895 1.25395 -0.0436003
```

El resultado se puede ver en la Figura 2.1, donde se muestra la dinámica del oscilador mediante desde dos perspectivas: la evolución de x y $\dot{x}$ en función de t, y la trayectoria en el espacio de fases (cuyas coordenadas son $x, \dot{x}$). Como la energía es constante, en el espacio de fases el oscilador describe una eclipse de semiejes $\sqrt{2E/m}$ y $\sqrt{2E/k}$, donde E, m y k son la energía, la masa y la constante de recuperación.



(a) x (círculos), $\dot{x}$ (rombos) frente a la solución $x = x_M$ seno $(\omega_0\, t + \varphi_0)$ (línea continua)

(b) Trayectoria del oscilador en el espacio de fases

Figura 2.1: x y $\dot{x}$ frente a t (izquierda) y $\dot{x}$ vs. x (derecha). Los datos de la simulación son: t_Δ = 0.0001 T, t_{tSimul}= 2 T, t_{cout}= 0.02 T, x_0= 0.5 , $\dot{x}_0$ = -1 , α = 1 , β = 0 , Γ= 0 , ω_D= 0.

2.4.2. Oscilador amortiguado ($\beta \neq 0$, $\Gamma = 0$)

El término $-\beta\dot{x}$, opuesto a la velocidad, modeliza la fricción y frena al oscilador. Éste va perdiendo energía hasta llegar finalmente al reposo.

Más concretamente, $x(t) = e^{-\beta \cdot t/2} g(t)$: el factor dominante es una exponencial que decrece con el tiempo. La forma de $g(t)$ depende de la relación entre los parámetros α y β:

- Si $\beta < 2\sqrt{\alpha}$ (amortiguamiento débil), $g(t)$ es una función sinusoidal.
- Si $\beta = 2\sqrt{\alpha}$ (amortiguamiento crítico), $g(t)$ es una función lineal.
- Si $\beta > 2\sqrt{\alpha}$ (oscilador sobreamortiguado), $g(t)$ es una combinación de funciones exponenciales de t.

Esos casos se ilustran en las figuras 2.2a a 2.2f.

2.4.3. Oscilaciones forzadas ($\Gamma \neq 0$)

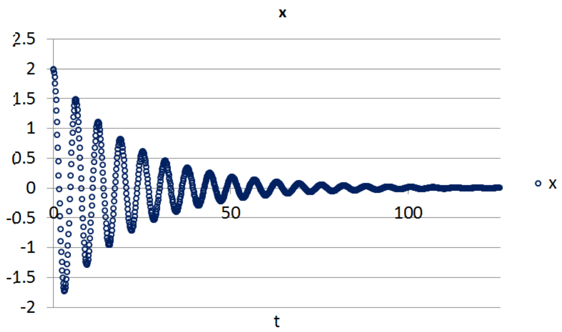
Si $\Gamma \neq 0$ el sistema, tras un tiempo transitorio, acaba oscilando a la frecuencia que le impone el término forzante, ω_D, con una amplitud

$$x_M = \frac{\Gamma}{\sqrt{\beta^2\, \omega_D^2 + (\alpha - \omega_D^2)^2}} \tag{2.6}$$

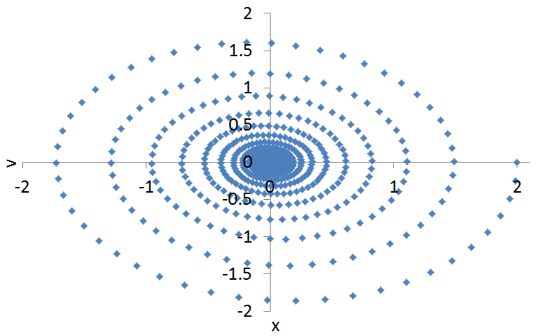
Si la frecuencia del término forzante es igual a la propia del oscilador ($\omega_0 \equiv \sqrt{\alpha} = \omega_D$), tiene lugar el fenómeno llamado *resonancia*. En todo momento, la fuerza *empuja* al oscilador en el sentido adecuado, y la transferencia de potencia es máxima. De no ser por el amortiguamiento, la amplitud de oscilación crecería indefinidamente. La resonancia se ilustra en las simulaciones mostradas en la figura 2.3: tras un tiempo transitorio (en torno a 80 s en 2.3a y 120 s en 2.3b), el sistema oscila con un periodo $T = 2\pi/\sqrt{\alpha} = 2\pi$ y la amplitud dada por 2.6.

Si $\omega_0 \neq \omega_D$, el péndulo inicialmente tiende a oscilar a su frecuencia propia; con el tiempo, acaba oscilando a la que le impone el término forzante. La figura 2.4 muestra esta situación, con $T_0 = 2\pi\alpha^{-1/2} = 2\pi$ y $T_D = 2\pi/\omega_D = \pi$. Inicialmente, la dinámica tiene un periodo T_0: en $t \in [0, 6\pi]$ se producen tres oscilaciones (tal como tiende a hacer espontáneamente el oscilador). Pero en cada periodo x tiene una estructura fina con un mínimo local y dos máximos.

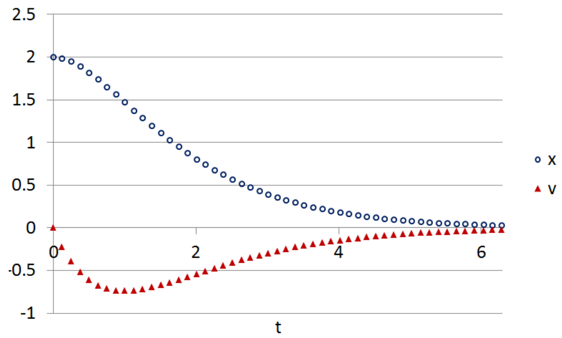
Conforme avanza el tiempo, los mínimos locales y los absolutos tienden a hacerse más próximos, hasta igualarse. En ese momento ya nos encontramos en el régimen estacionario, con un periodo T_D (entre 900 s y 900 + 6π s tienen lugar 6 oscilaciones completas).



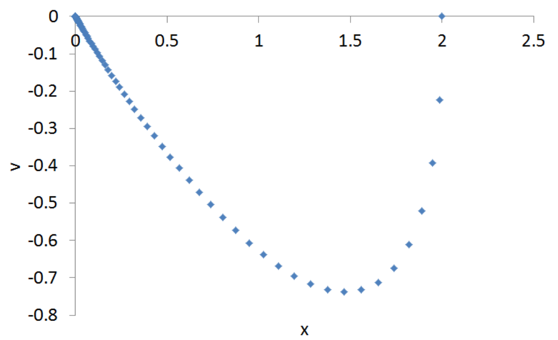
(a) Oscilador débilmente amortiguado ($\beta = 0{,}1$)



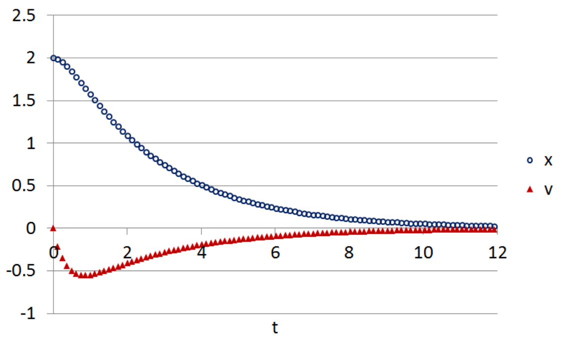
(b) Oscilador débilmente amortiguado ($\beta = 0{,}1$), espacio de fases



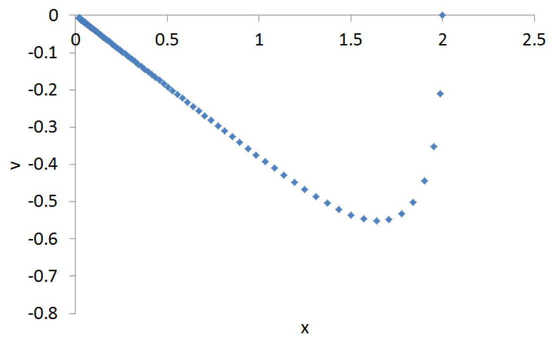
(c) Amortiguamiento crítico($\beta = 2$)



(d) Amortiguamiento crítico($\beta = 2$), espacio de fases

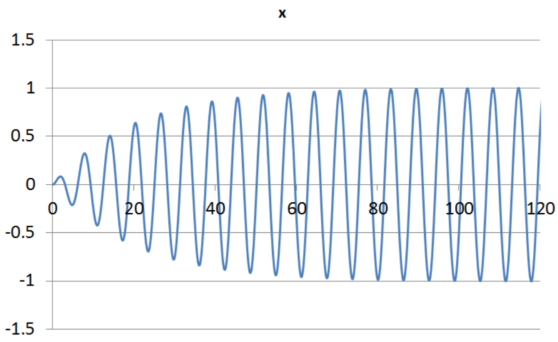


(e) Oscilador sobreamortiguado ($\beta = 3$)

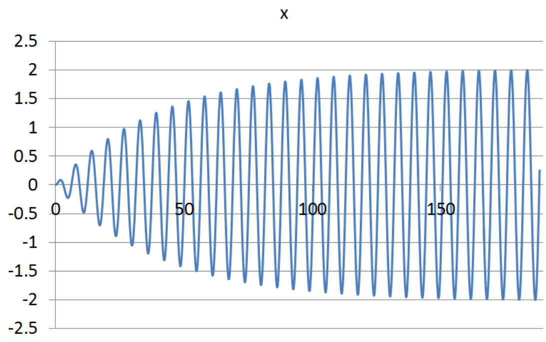


(f) Oscilador sobreamortiguado ($\beta = 3$), espacio de fases

Figura 2.2: Oscilador amortiguado sin término forzante($\Gamma = 0$). En ambos casos, $t_{\Delta} = 0.0001$ T, $t_{cout} = 0.02$ T, $x_0 = 2$, $\dot{x}_0 = 0$, $\alpha = 1$, $\Gamma = 0$

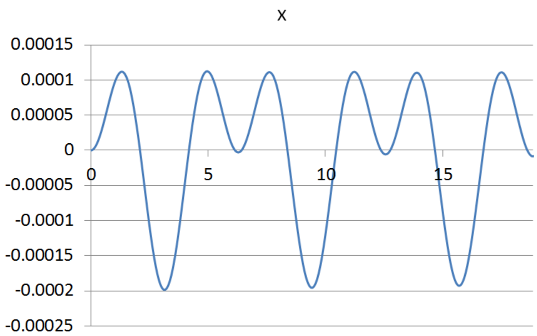


(a) $\beta = 0.1$

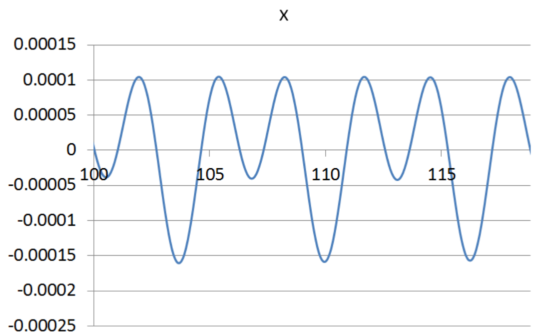


(b) $\beta = 0.05$

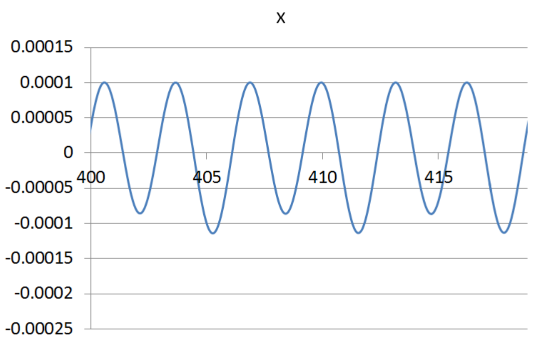
Figura 2.3: Resonancia. Se muestra el valor de x (línea continua) en función del tiempo. En todos los casos, $t_\Delta = 0.0001$ T, t_{tSimul}= 30 T, t_{cout}= 0.02 T , x_0= 0 , $\dot{x}_0 = 0$, $\alpha = 1$, Γ= 0.1 , ω_D= 1.



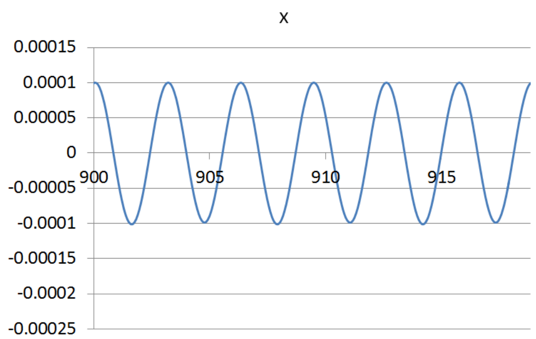
(a) $t \in [0, 6\pi]$



(b) $t \in [100, 100 + 6\pi]$



(c) $t \in [400, 400 + 6\pi]$



(d) $t \in [900, 900 + 6\pi]$, ya en el régimen estacionario

Figura 2.4: Influencia del término forzante. Se muestra el valor de x (línea continua) en función del tiempo. Los datos de la simulación son: $t_\Delta = 0.0001$ T, t_{tSimul}= 500 T, t_{cout}= 0.02 T , x_0= 0 , $\dot{x}_0 = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.01$, Γ= 0.0003 , ω_D= 2

2.5. Solución del oscilador armónico

Podemos distinguir distintos casos, caracterizados por los valores de los coeficientes α, β, Γ.

2.5.1. Oscilador armónico sin pérdidas ($\beta = \Gamma = 0$)

La energía del oscilador E es constante, ya que no hay disipación ($\beta = 0$) ni aporte ($\Gamma = 0$). Independientemente del estado inicial $(x_0, \dot{x}_0)$, pasado un tiempo el oscilador vuelve a encontrarse en la misma posición y con la misma velocidad: el movimiento es periódico.

Más concretamente, x es una función sinusoidal, cuya frecuencia es la raíz cuadrada de α y cuyos coeficientes vienen determinados por las condiciones iniciales:

$$x = x_M \,\mathrm{seno}\left(\omega_0\, t + \varphi_0\right), \quad \mathrm{con} \tag{2.7}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\alpha}\ ,\ \tan(\varphi_0) = \frac{\sqrt{\alpha}\, x_0}{\dot{x}_0}\ ,\ x_M = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\alpha}}$$

Hacemos notar que si $x_M = 0$, el ángulo de fase está indefinido; en ese caso, le podemos asignar un valor arbitrario $\varphi_0 = 0$. En general, φ_0 se calcula como el arco tangente de $\frac{\sqrt{\alpha}\, x_0}{\dot{x}_0}$.

Dado que la función `atan` en C/C++ devuelve un ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, si $\dot{x}_0 < 0$ es necesario añadir π al valor devuelto: $\varphi_0 = \mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{\alpha}\, x_0}{\dot{x}_0}\right) + \pi$.

2.5.2. Oscilador armónico amortiguado ($\beta \neq 0, \Gamma = 0$)

Debido a la fricción, modelizada por el término $-\beta\dot{x}$, el oscilador va perdiendo energía hasta llegar finalmente al reposo.

Más concretamente,

$$x(t) = e^{-\beta \cdot t/2} g(t) \tag{2.8}$$

En función de la relación entre los parámetros α y β se identifican dos regímenes (subamortiguado y sobreamortiguado), separados por una transición (amortiguamiento crítico):

- Si $\beta < 2\sqrt{\alpha}$ (amortiguamiento débil), $g(t)$ es una función sinusoidal:

  $$g(t) = x_M \,\mathrm{seno}\left(\omega\, t + \varphi_0\right), \quad \mathrm{con} \tag{2.9}$$
  $$\omega = \sqrt{\alpha - \beta^2/4}\ ,\ \tan(\varphi_0) = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0 + \beta x_0/2}\ ,\ x_M = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0 + \beta\, x_0/2}{\omega}\right)^2 + x_0^2}$$

  Hacemos notar que si $x_M = 0$, el ángulo de fase está indefinido; en ese caso, le podemos asignar un valor arbitrario $\varphi_0 = 0$. En general, φ_0 se calcula como el arco tangente de $\frac{\omega x_0}{\dot{x}_0 + \beta x_0/2}$.

  Dado que la función `atan` en C/C++ devuelve un ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, para calcular φ_0 es necesario añadir π al valor devuelto si $\dot{x}_0 + \beta\, x_0/2 < 0$.

- Si $\beta = 2\sqrt{\alpha}$ (amortiguamiento crítico), $g(t)$ es una función lineal.

$$g(t) = A + Bt, \quad \text{con} \qquad (2.10)$$
$$A = x_0 \ , \ B = \dot{x}_0 + \beta\, x_0/2$$

- Si $\beta > 2\sqrt{\alpha}$ (socilador sobreamortiguado), $g(t)$ es una combinación de funciones exponenciales de t.

$$g(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}, \quad \text{con} \qquad (2.11)$$
$$\Omega = \sqrt{\beta^2/4 - \alpha} \ , \quad A = 0{,}5\left(x_0 + \frac{\dot{x}_0 + \beta x_0/2}{\Omega}\right) \ , \ B = 0{,}5\left(x_0 - \frac{\dot{x}_0 + \beta x_0/2}{\Omega}\right)$$

2.5.3. Oscilaciones forzadas ($\Gamma \neq 0$)

El oscilador, tras un tiempo transitorio, acaba oscilando a la frecuencia que le impone el término forzante, ω_D. La amplitud depende de la relación entre la frecuencia natural de oscilación ($\sqrt{\alpha}$) y ω_D.

Si la frecuencia del término forzante es igual a la propia del oscilador ($\omega_0 \equiv \sqrt{\alpha} = \omega_D$), tiene lugar el fenómeno llamado *resonancia*: en todo momento, la fuerza *empuja* al oscilador en el sentido adecuado, y la transferencia de potencia es máxima. De no ser por el amortiguamiento, la amplitud de oscilación crecería indefinidamente.

La solución es la suma de dos términos:

- El término estacionario, dado por las ecuaciones siguientes:

$$x = x_M \,\text{seno}\,(\omega_D\, t + \varphi_0) \,, \quad \text{con} \qquad (2.12)$$
$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{\alpha - \omega_D^2}{\beta\omega_D}\right) \ , \quad x_M = \frac{\Gamma}{\sqrt{\beta^2\, \omega_D^2 + \left(\alpha - \omega_D^2\right)^2}}$$

- La solución a la ecuación del oscilador amortiguado ($\Gamma = 0$), con los mismos valores de α y β, para las condiciones iniciales ($x_0 - x_M \,\text{seno}\,\varphi_0$, $\dot{x}_0 - x_M\, \omega_d \cos\varphi_0$).

Para tiempos suficientemente largos, el segundo término tiende a cero y sólo queda el estacionario.