

Actividad 3

El péndulo simple: solución numérica (i)

El péndulo simple es una partícula puntual de masa m suspendida de un punto fijo mediante un hilo rígido de longitud l y masa nula. En esta tarea resolveremos numéricamente su ecuación diferencial, sin considerar por el momento fricción ni fuerza externa:

$$\ddot{\theta} = -\alpha \text{seno}(\theta), \quad (3.1)$$

donde α tiene dimensión de tiempo⁻² (observa que $\alpha = g/l$, donde g es la aceleración debida a la gravedad y l la longitud del péndulo).

La diferencia entre el péndulo y el oscilador armónico es que en la aceleración el término lineal $-\alpha x$ se sustituye por una función no lineal: el seno. En consecuencia, la ecuación diferencial es más difícil de resolver pero, a cambio, la dinámica resultante es más compleja e interesante. Ya sabemos que en el límite de pequeñas oscilaciones $\text{seno}(\theta) \approx \theta$, y reobtenemos la ecuación del oscilador. En esta tarea empezaremos a explorar cómo cambia la dinámica cuando no estamos en ese límite.

3.1. Introducción

3.1.1. Análisis de la dinámica del péndulo sin pérdida

La energía del péndulo viene dada por la expresión $E = 1/2 m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$. Según su valor, podemos distinguir tres situaciones:

- i) $E < 2mgl$ (equivalentemente, $\frac{\dot{\theta}_0^2}{2\alpha} - \cos \theta < 1$).

El péndulo no tiene energía suficiente para voltearse, y describe un movimiento periódico cuya amplitud máxima viene dada por la conservación de la energía:

$$\theta_M = \arccos \left(\cos(\theta_0) - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2\alpha} \right) \quad (3.2)$$

- ii) $E = 2mgl$ (equivalentemente, $\frac{\dot{\theta}_0^2}{2\alpha} - \cos \theta = 1$).

El péndulo tiene la energía justa necesaria para llegar a la posición vertical ($\theta = \pi$) con velocidad cero, y quedarse en ese estado. Ese estado de equilibrio inestable se alcanza en el límite $t \rightarrow \infty$.

iii) $E > 2mgl$ (equivalentemente, $\frac{\dot{\theta}^2}{2\alpha} - \cos \theta > 1$).

El péndulo tiene energía suficiente para voltearse. Si proyectamos el ángulo θ en el intervalo $[-\pi, \pi)$ (es decir, si sustituimos θ por θ' , donde $\theta' = \theta + 2n\pi$ y $\theta' \in [-\pi, \pi)$), debido a la conservación de la energía θ' es una función periódica.

En los casos de movimiento periódico (casos i, iii) el cálculo del periodo, T , es más complicado que en el caso del oscilador armónico. Requiere resolver integrales elípticas, que quedan fuera del alcance de este curso. Nos limitaremos a presentar sus soluciones en la sección 3.3.1.

3.1.2. El método de Runge-Kutta

En la tarea 2 resolvimos la ecuación diferencial de segundo grado 2.1 reescribiéndola como un sistema de dos ecuaciones de primer grado acopladas. Resolvimos cada una de estas por el método de Euler, que esencialmente consiste en discretizar el tiempo en intervalos de longitud Δt y truncar el desarrollo en serie de Taylor en el término en Δt .

En esta tarea, los valores con los que trabajábamos ($\Delta t = 10^{-4}T$) no van a dar resultados con la precisión deseada. Una posible solución es tomar valores aún menores de Δt , lo que ralentizaría notablemente la ejecución del programa.

Hay una alternativa más eficiente: tomar más términos en el desarrollo en serie de Taylor. Esta es la estrategia que seguiremos en esta tarea. Seguiremos el método de Runge-Kutta de orden 4, descrito en la sección 3.3.2 (ecuación 3.10), que equivale a truncar la serie de Taylor en el término en Δt^4 .

3.2. Descripción de la tarea

Diseña y programa en C/C++ los siguientes subalgoritmos:

validaAngulo

Dados un ángulo θ y un carácter, que especifica en qué unidades se da ('r' para radianes, 's' para grados sexagesimales) devuelve un booleano y un real. Si las unidades son correctas ('r' o 's'), el booleano vale **true**, y el real es el valor de θ en radianes. Si no, el booleano vale **false** y no se modifica el valor de θ .

fase

Dados dos reales, s y r , devuelve $\pi/2$ si $s \geq 1$, $-\pi/2$ si $s \leq -1$ y en cualquier otro caso un ángulo φ_0 tal que $\sin \varphi_0 = s$ y $\cos \varphi_0$ tenga el mismo signo que r .

Ten en cuenta que la función **asin** en C/C++ devuelve un ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$

normaliza

Dado un ángulo θ , lo transforma en otro θ' tal que $\theta - \theta' = 2n\pi$, $\theta' \in [-\pi, \pi)$:

$$\theta' = \theta - 2n\pi, \text{ donde } n = \left\lfloor \frac{\theta + \pi}{2\pi} \right\rfloor. \quad (3.3)$$

Para calcular $\lfloor x \rfloor$, el mayor entero menor o igual que x , se puede usar la función matemática `floor`.

análisis

Dados el valor de α , el ángulo y la velocidad iniciales (θ_0 y $\dot{\theta}_0$), y la precisión deseada (ϵ), devuelve dos reales, θ_M y τ , y un entero k que caracteriza el tipo de solución. θ_M es el ángulo límite (el ángulo máximo de oscilación en los casos periódicos, $\pm\pi$ si el péndulo acaba en el estado de equilibrio inestable) y τ un tiempo significativo del péndulo:

- En caso de movimiento periódico ($E \neq 2mgl$) (ver sección 3.1.1, casos i y iii), τ es el periodo de oscilación (ver ecuaciones 3.6 a 3.8).
- En el caso $E = 2mgl$, τ es el tiempo que le cuesta al péndulo llegar a $\theta = 0,999 \theta_M$ (ver ecuación 3.5).

Caso	θ_M	τ	k
$E < 2mgl$	θ_M (ecuación 3,2)	T (ecuaciones 3,6 a 3,8)	-1
$E = 2mgl, \dot{\theta}_0 \geq 0$	π	$t(\theta = 0,999 \pi)$ (ecuación 3,5)	0
$E = 2mgl, \dot{\theta}_0 < 0$	$-\pi$	$t(\theta = -0,999 \pi)$ (ecuación 3,5)	0
$E > 2mgl$	π	T (ecuaciones 3,6 a 3,8)	1

A continuación mostramos los valores devueltos en función de distintos juegos de argumentos, para $\alpha = 1$, $\epsilon = 10^{-7}$:

θ_0	$\dot{\theta}_0$	k	θ_M	τ
0,001	0	-1	0,001	6,28319
0,5	0	-1	0,5	6,38279
1	0	-1	1	6,69998
1,5	0	-1	1,5	7,30086
2	0	-1	2	8,34975
2,5	0	-1	2,5	10,3232
3	0	-1	3	16,1555
0	2	0	3,14159	7,14932
0	-2	0	-3,14159	7,14932
0,001	2	1	3,14159	17,9744
0,01	2	1	3,14159	13,3692
0,1	2	1	3,14159	8,76067
1	2	1	3,14159	4,12642

RungeKutta

Dados α , el ángulo y la velocidad del péndulo en un instante de tiempo t (θ y $\dot{\theta}$) y los valores t y δt , devuelve el estado del péndulo en el instante $t + \delta t$ usando las expresiones 3.10 (sección 3.3.2).

programa principal

Recibe del flujo de entrada los factores `factor Δ` , `factorcout` y `factortSimul` (cuyo significado es el mismo que en la tarea 2), el ángulo y velocidad iniciales (θ_0 , $\dot{\theta}_0$) y el parámetro del péndulo (α). El ángulo y la velocidad se leerán como un real y un carácter indicando sus unidades ('r' para radianes, 's' para grados sexagesimales). Para el resto de factores

no se indicarán unidades: los factores temporales son adimensionales y suponemos que α se mide en s^{-2} .

Si α , factor_{Δ} , $\text{factor}_{\text{cout}}$ y $\text{factor}_{\text{tSimul}}$ no son positivos, o si las unidades del ángulo o de la velocidad angular son incorrectas, el programa mostrará un mensaje de error y finalizará.

A continuación se calcularán el ángulo máximo y el tiempo característico del péndulo, τ (subalgoritmo **análisis**) y, a partir de ellos, Δt , t_{simul} y t_{cout} : $\Delta t = \text{factor}_{\Delta} \cdot \tau$, $t_{\text{cout}} = \text{factor}_{\text{cout}} \cdot \tau$, $t_{\text{simul}} = \text{factor}_{\text{tSimul}} \cdot \tau$. Sugerimos calcular τ con un error relativo máximo $\epsilon = 10^{-7}$.

El programa calculará la dinámica del péndulo hasta $t = t_{\text{simul}}$ siguiendo el método de Runge-Kutta. A intervalos regulares t_{cout} enviará al flujo de salida los valores de t , θ , $\dot{\theta}$.

Además, en el caso de que la energía del péndulo sea menor que $2mgl$, se mostrará el valor de la función

$$\theta_{\text{seno}} = \theta_M \text{seno} \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0 \right), \quad (3.4)$$

de modo que el valor de θ_{seno} en $t=0$ sea θ_0 , y su velocidad angular en $t=0$ tenga el mismo signo que $\dot{\theta}_0$ (utiliza el subalgoritmo **fase**); θ_M es el ángulo máximo del péndulo. De esta forma podemos visualizar cómo cambia de forma la solución θ respecto del comportamiento del oscilador armónico.

Los valores de todos los ángulos se indicarán en el intervalo $[-\pi, \pi)$.

3.3. Ayudas

3.3.1. El periodo del péndulo

En el caso $E = 2mgl$ (equivalentemente, $\frac{\dot{\theta}^2}{2\alpha} - \cos \theta = 1$), la solución de la ecuación 3.1 es

$$t(\theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \left[C \tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad \text{con } C = 1 / \tan \left(\frac{\theta_0}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.5)$$

El signo es el mismo que el de la velocidad inicial, $\dot{\theta}_0$.

En los demás casos el péndulo exhibe un comportamiento periódico, cuyo periodo T viene dado por la serie ¹:

$$T = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (3.6)$$

donde:

$$a_0 = 1, \quad a_n = \left(\frac{2n-1}{2n} r \right)^2 a_{n-1} \quad \forall n > 0 \quad (3.7)$$

Los valores de T_0 y r dependen del caso en que estemos:

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{\dot{\theta}^2}{2\alpha} - \cos \theta < 1 : \quad T_0 &= \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}, \quad r = \text{seno} \left(\frac{\theta_M}{2} \right), \quad \text{con } \theta_M = \arccos \left(\cos(\theta_0) - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2\alpha} \right) \\ \text{Si } \frac{\dot{\theta}^2}{2\alpha} - \cos \theta > 1 : \quad T_0 &= \frac{\pi}{A}, \quad r = \frac{\sqrt{\alpha}}{A}, \quad \text{con } A = \frac{\sqrt{\dot{\theta}_0^2 + 2\alpha(1 - \cos \theta_0)}}{2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para que el error relativo al calcular T sea menor que un cierto valor ϵ , podemos truncar la serie anterior en el término a_N , donde

$$N \geq \frac{\log(\epsilon(1-r^2))}{2 \log r} \quad (3.9)$$

Observa que para valores pequeños de la energía el periodo tiende a la expresión con que estamos familiarizados: $\lim_{E \rightarrow 0} T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

¹Este resultado se demuestra, por ejemplo, en *The pendulum: a case study in physics*, de G. Baker y J.A. Blackburn (editado por *Oxford University Press*)

3.3.2. El método de Runge-Kutta de orden 4

El método de Euler, que seguimos en la tarea 2, calcula el valor de una magnitud x en un tiempo $t + \Delta t$ conocidos su valor y su velocidad (su derivada respecto de t) en el instante t . Consiste en truncar en el término Δt el desarrollo en serie de Taylor en torno a $x(t)$. Si lo aplicáramos a la presente tarea, dados el ángulo y la velocidad angular en un instante de tiempo (θ_n, w_n) calcularíamos sus valores en el instante inmediatamente posterior así:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + w_n \Delta t \\ w_{n+1} &= w_n + a_n \Delta t\end{aligned}$$

donde la aceleración angular viene dada por $a_n = -\alpha \text{seno}(\theta_n t)$.

Sin embargo, en esta tarea seguiremos una aproximación más sofisticada y eficiente: los métodos de Runge-Kutta, que calculan el valor de x a partir de la media ponderada de las estimaciones de x y su velocidad en varios puntos del intervalo $[t, t + \Delta t]$. El método de orden n equivale a tomar los términos del desarrollo de Taylor hasta $(\Delta t)^n$.

En concreto, usaremos el método de Runge-Kutta de orden 4. Calcularemos $\theta(t + \Delta t)$ a partir de la media ponderada de su derivada (la velocidad angular, w) en t y de estimaciones de w en $t + \Delta t/2$ y $t + \Delta t$. Análogamente, el valor de $w(t + \Delta t)$ se calcula a partir de la media ponderada de su derivada (la aceleración angular, a) en t y de estimaciones de a en $t + \Delta t/2$ y $t + \Delta t$.

En esta sección nos limitaremos a presentar las expresiones que nos permiten implementar el método, sin justificar cómo se deducen. En particular, conocidos θ_n y $w_n = \dot{\theta}_n$, estimamos θ_{n+1} y $w_{n+1} = \dot{\theta}_{n+1}$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\delta\theta_A &= w_n \Delta t \\ \delta w_A &= -\alpha \text{seno}(\theta_n) \Delta t \\ \delta\theta_B &= \left(w_n + \frac{\delta w_A}{2}\right) \Delta t \\ \delta w_B &= -\alpha \text{seno}\left(\theta_n + \frac{\delta\theta_A}{2}\right) \Delta t \\ \delta\theta_C &= \left(w_n + \frac{\delta w_B}{2}\right) \Delta t \\ \delta w_C &= -\alpha \text{seno}\left(\theta_n + \frac{\delta\theta_B}{2}\right) \Delta t \\ \delta\theta_D &= (w_n + \delta w_C) \Delta t \\ \delta w_D &= -\alpha \text{seno}(\theta_n + \theta_C) \Delta t \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{\delta\theta_A}{6} + \frac{\delta\theta_B}{3} + \frac{\delta\theta_C}{3} + \frac{\delta\theta_D}{6} \\ w_{n+1} &= w_n + \frac{\delta w_A}{6} + \frac{\delta w_B}{3} + \frac{\delta w_C}{3} + \frac{\delta w_D}{6}\end{aligned}\tag{3.10}$$

El libro *Numerical recipes in C* de W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., y Flannery, B. P. (editado por Cambridge university press) presenta una introducción al método de Runge-Kutta y un análisis de sus ventajas e inconvenientes.

3.4. Ejemplos de ejecución

El fichero `datosTarea_03.txt`, descargable desde Moodle, contiene los datos de entrada de los ejemplos discutidos en esta sección.

Para los datos de entrada:

```
0.0001 0.02 1 90 s 0 r 1
```

las primeras filas devueltas por el programa son:

```
t angulo velocidad funcionSinusoidal
0 1.5708 0 1.5708
0.148326 1.5598 -0.148324 1.55841
0.296652 1.5268 -0.296595 1.52145
0.444978 1.47183 -0.444542 1.46049
0.593304 1.39497 -0.591471 1.3765
```

Los resultados se muestran en la Figura 3.1. La aproximación de pequeñas oscilaciones no es válida (90° no es un ángulo pequeño): el péndulo oscila con un periodo algo mayor que $T_0 = 2\pi$; aun así, θ todavía se puede aproximar razonablemente bien mediante una función sinusoidal, salvo en torno a sus extremos. La trayectoria descrita por el péndulo en el espacio de fases se puede aproximar mediante una elipse.

Para los datos de entrada:

```
0.0001 0.005 1 0 r 1.999999895801368 r 1
```

los resultados se muestran en la Figura 3.2. El comportamiento es totalmente distinto del observado en el caso de pequeñas oscilaciones. El periodo es ahora $6T_0 = 12\pi$. Además, θ ya no puede aproximarse como una función sinusoidal del tiempo: tiende a la forma de una onda cuadrada. La trayectoria descrita por el péndulo en el espacio de fases es claramente distinta de una elipse.

Consideremos ahora el caso:

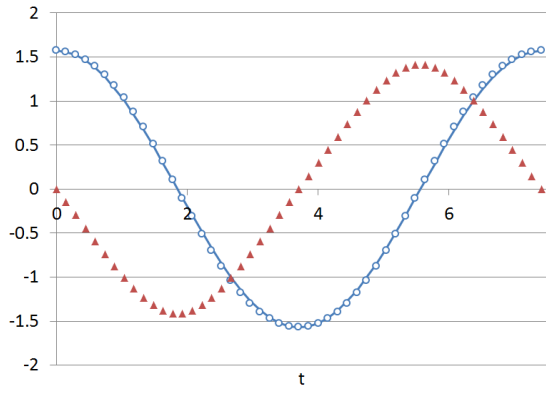
```
0.0001 0.02 1 0 r -2 r 1
```

El péndulo tiene la energía justa para llegar a la posición de equilibrio inestable $\theta = -\pi$ con velocidad 0, y permanecer allí indefinidamente. Los resultados se muestran en la Figura 3.3.

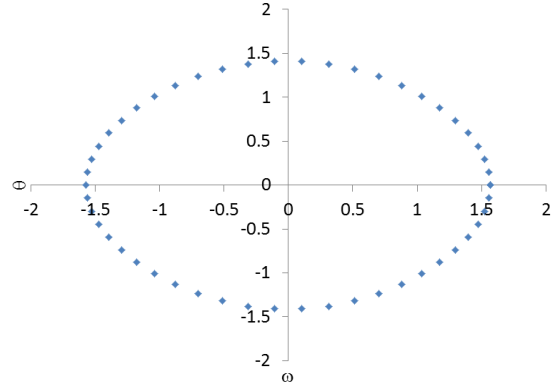
En el caso:

```
0.0001 0.02 1 0 r 2.01 r 1
```

el péndulo tiene energía suficiente para voltearse. Los resultados se muestran en la Figura 3.4.

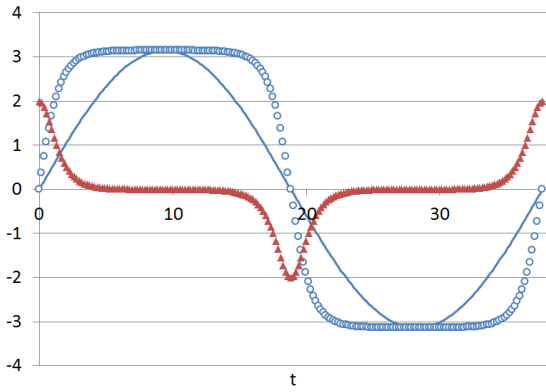


(a) θ (círculos) y $\dot{\theta}$ (triángulos) frente a la función $\theta = \theta_M \text{seno} \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0 \right)$ (línea continua)

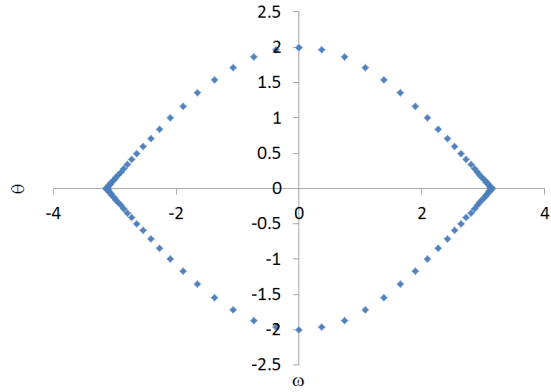


(b) Espacio de fases

Figura 3.1: $\theta_0 = 90^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad s}^{-1}$. θ y $\dot{\theta}$ frente a t (izquierda) y $\dot{\theta}$ vs. θ (derecha).



(a) θ (círculos) y $\dot{\theta}$ (triángulos) frente a la función $\theta = \theta_M \text{seno} \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0 \right)$ (línea continua)



(b) Espacio de fases

Figura 3.2: $\theta_0 = 0 \text{ rad}$, $\dot{\theta}_0 = 1.999999895801368 \text{ rad s}^{-1}$, $\theta_{\text{máx}} \sim 179,96^\circ$. θ y $\dot{\theta}$ frente a t (izquierda) y $\dot{\theta}$ vs. θ (derecha).

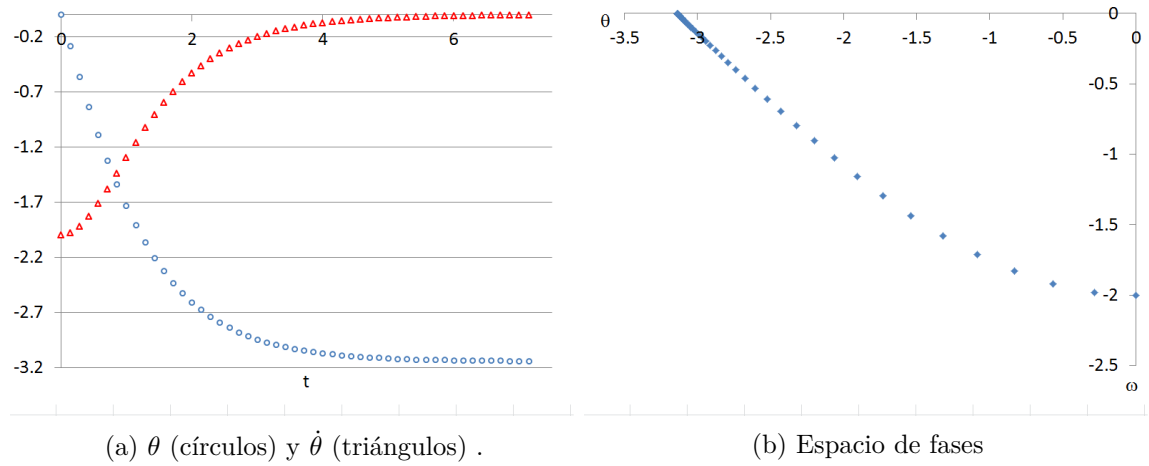


Figura 3.3: $\theta_0 = 0$ rad, $\dot{\theta}_0 = -2$ rad s $^{-1}$, $\theta_{\text{límite}} = -\pi$. θ y $\dot{\theta}$ frente a t (izquierda) y $\dot{\theta}$ vs. θ (derecha).

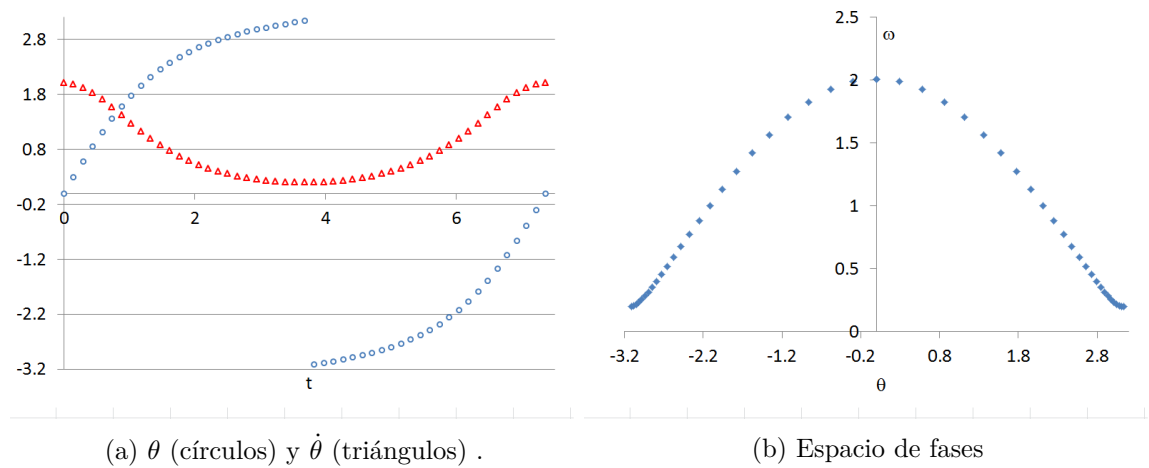


Figura 3.4: $\theta_0 = 0$ rad, $\dot{\theta}_0 = 2.01$ rad s $^{-1}$. θ y $\dot{\theta}$ frente a t (izquierda) y $\dot{\theta}$ vs. θ (derecha).