Actividad 4

El péndulo simple: solución numérica (ii)

En esta tarea estudiaremos la dinámica del péndulo, incluyendo términos que modelizan la fricción y una fuerza externa periódica:

$$\ddot{\theta} = -\alpha \,\text{seno}(\theta) \;-\; \beta\,\dot{\theta} \;+\; \Gamma\cos(\omega_D t), \tag{4.1}$$

Nos interesa el comportamiento estacionario del péndulo, una vez terminada la fase transitoria. En particular, prestaremos especial atención a la periodicidad de las soluciones. Vimos que el oscilador armónico, en el caso forzado, acababa oscilando a la misma frecuencia que la fuerza externa; en esta tarea compararemos el periodo del péndulo con el de dicha fuerza.

4.1. Introducción

4.1.1. Sección de Poincaré

En esta tarea entenderemos la sección de Poincaré como el conjunto de puntos de la órbita del péndulo en el espacio de fases tomados a intervalos regulares T:

$$\left\{\;\Big(\,\theta(t_{stat}+nT),\dot{\theta}(t_{stat}+nT)\,\Big)\;\right\}$$

donde n es un entero, T un tiempo característico y t_{stat} un tiempo lo suficientemente grande como para garantizar que el péndulo ha alcanzado el régimen estacionario (si $\Gamma \neq 0$ o $\beta = 0$) o ha llegado al reposo (si $\Gamma = 0$ y $\beta \neq 0$). Es como si observáramos el péndulo con una luz estroboscópica que lanza un destello cada T segundos.

Si la órbita es periódica y T es su periodo, la sección de Poincaré consta de un único punto (cada vez que miramos vemos al péndulo en la misma posición, y con la misma velocidad). En general, para una órbita de periodo nT la sección de Poincaré consta de n puntos. Si la órbita no es periódica, o si el cociente entre su periodo y T no es un número racional, la sección de Poincaré consta de infinitos puntos.

En esta tarea, en ausencia de término forzante ($\Gamma = 0$) tomaremos como T el periodo natural de oscilación del péndulo sin fricción, ya calculado en la tarea 3. La sección de Poincaré consta de un único punto. En efecto, si $\beta = 0$, el péndulo oscila con periodo T: si lo observamos cada T segundos lo vemos siempre en el mismo estado; si $\beta \neq 0$, el péndulo ha alcanzado el reposo, y permanece para siempre en ese estado.

Si $\Gamma \neq 0$, T será el periodo de la fuerza externa. Es posible demostrar que si la sección de Poincaré consta de n puntos, el periodo del péndulo es nT [1].

4.1.2. El fichero `04_ficheros2019.cpp`

Descarga el fichero 04_ficheros2019.cpp, que contiene las declaraciones de los siguientes tipos de datos:

```
struct parametros{
    double alpha, beta, Gamma, omega;
};
typedef struct parametros Parametros;
//Parámetros del péndulo

struct estado {
    double theta, w;
};
typedef struct estado Estado;
//El estado del péndulo queda definido
//por los valores del ángulo y la velocidad angular.
//Suponemos que vienen expresados,respectivamente, en radianes y radianes/segundo

struct datosSimulacion{
    double factorDeltaT, factorTCout, factorTStat, factorTSimul;
    Estado estadoInicial;
    Parametros param;
};
typedef struct datosSimulacion DatosSimulacion;
//Una simulación se define por su estado inicial (ángulo y velocidad),
//sus parámetros y los factores temporales.
```

El fichero contiene igualmente tres subalgoritmos ya desarrollados (los dos primeros quedaron resueltos en la tarea 3):

- `double normaliza (double theta);` que, dado un ángulo, devuelve otro equivalente módulo 2π en el intervalo $[-\pi, \pi)$.
- `int analisis (double alpha, double theta, double w, double epsilon, double & thetaM, double &T);` que, dados el coeficiente alpha, un ángulo, una velocidad angular y un valor para la precisión (epsilon), devuelve:
  - Un entero que caracteriza el tipo de solución.
  - Por referencia: el ángulo límite y un T característico (en caso de movimiento periódico, el periodo).

[1] Estrictamente hablando, el periodo del péndulo es $\frac{n}{m}T$, donde m es un entero coprimo con n. Comprobaremos visualmente que $m = 1$.

- `Estado Runge_Kutta (Parametros param, Estado e, double t, double DeltaT);` que, dados un conjunto de parámetros, el estado del péndulo en el instante t, dos reales(el propio t y DeltaT), devuelve el estado del péndulo en el instante t + DeltaT.

4.2. Descripción de la tarea

Completa el fichero `04_ficheros2019.cpp` añadiendo los subalgoritmos y el programa principal descritos a continuación:

distancia

Dados dos estados, $e_A = (\theta_A, w_A)$ y $e_B = (\theta_B, w_B)$, devuelve la distancia euclídea entre ellos medida en el espacio de fases:

$$\sqrt{(\theta_A - \theta_B)^2 + (w_A - w_B)^2} \tag{4.2}$$

donde la diferencia de ángulos $(\theta_A - \theta_B)$ debe estar normalizada en el intervalo $[-\pi, \pi)$.

aceleracion

Dados los parámetros del péndulo, su estado en un instante t, $(\theta(t), w(t))$, y el tiempo t, devuelve la aceleración angular (miembro derecho de 4.1).

Para que pueda ser invocado por la función `Runge_Kutta`, el algoritmo debe tener la siguiente cabecera:

```
double aceleracion (Parametros param,Estado e, double t)
```

evolucion

Dados dos reales t_0 y Δt, un entero n, los parámetros del péndulo y el estado del mismo en el instante t_0, devuelve un real, $t = t_0 + n\Delta t$, y el estado del péndulo en t.

Idea: itera el método de Runge-Kutta entre t_0 y $t_0 + n\Delta t$ con intervalos Δt.

Programa principal

Escribe un programa que empiece creando un fichero de texto, `resumen.txt`.

A continuación, pedirá al usuario el nombre de un fichero binario donde están almacenados una serie de ejemplares de `DatosSimulacion`. Los valores guardados en este fichero han sido procesadas de modo que las relaciones entre ellas vienen dadas por números enteros:

- $factor_{simul} - factor_{stat}$ es un número entero, n_T.
- Existen enteros n_{stat}, n_{out}, n_Δ tales que:
  - $n_{stat} = factor_{stat}/factor_\Delta$,
  - $n_{cout} = 1/factor_{cout}$ y
  - $n_\Delta = factor_{cout}/factor_\Delta$

No es necesario que compruebes que las relaciones anteriores se cumplen: puedes darlo por supuesto.

Para cada uno de los ejemplares de `DatosSimulacion` almacenados en el fichero binario, el algoritmo deberá seguir los pasos que se indican a continuación.

Al leer cada ejemplar se le asignará como identificador un número entero correlativo (empezando en 0), `id`, y se calculará T del siguiente modo:

- En ausencia de término forzante ($\Gamma = 0$), T es el periodo del péndulo sin fricción (calculado por lafunción **analisis**, desarrollado en la tarea 3 y **ya incluida** en el fichero `04_ficheros2019.cpp`; sugerimos tomar una precisión $\epsilon = 10^{-7}$).

- Si $\Gamma \neq 0$, T es el periodo del término forzante ($T = 2\pi/\omega_D$).

A partir de T se calcularán: $\Delta t = factor_{deltaT} * T$, $t_{stat} = factor_{stat} * T$, $t_{cOut} = factor_{cout} * T$ y $t_{simul} = factor_{simul} * T$.

Se mostrarán por pantalla: el identificador, los factores temporales: (factor_Δ, $\text{factor}_{\text{cout}}$, $\text{factor}_{\text{stat}}$, $\text{factor}_{\text{tSimul}}$), los parámetros $(\alpha, \beta, \Gamma, w_D)$, el estado inicial (θ_0, w_0) y el valor de T.

Se crearán los ficheros `outEstados_<id>.txt` y `outPoincare_<id>.txt` donde `<id>` es el identificador de los datos de la simulación, expresado con dos dígitos (ver la Sección **Ayudas**).

Se simulará la dinámica del péndulo desde $t = 0$ hasta $t = t_{stat}$. Denominaremos e_{stat} al estado del péndulo en $t = t_{stat}$.

A partir de t_{stat}, a intervalos regulares se añadirá a los dos ficheros una línea con los valores del tiempo t y el estado $(\theta, \dot{\theta})$. Se añadirá una línea a `outEstados_<id>.txt` cada t_{cout} segundos, y a `outPoincare_<id>.txt` cada T segundos. En ambos ficheros el valor del ángulo θ se dará en el intervalo $[-\pi, \pi)$. Observa que las filas de `outPoincare_<id>.txt` son un subconjunto de las de `outEstados_<id>.txt`: en el primero se escribe una por cada n_{cout} del segundo.

Cada T segundos se comparará el estado del péndulo con el que tenía en t_{stat}. El proceso finalizará cuando el programa detecte que el péndulo ha vuelto al estado e_{stat} ($e_t = e_{stat}$, con $t = t_{stat} + nT$ siendo n un entero positivo), o bien al llegar a t_{simul}. Supondremos que $e_t = e_{stat}$ si la distancia entre ambos estados en el espacio de fases es menor que 10^{-5} (usa el subalgoritmo **distancia**).

Entonces se añade al fichero `resumen.txt` una línea, mostrando:

- el identificador `<id>`.

- los siguientes datos de la simulación: los parámetros $(\alpha, \beta, \Gamma, w_D)$ y el estado inicial (θ_0, w_0).

- el número de puntos distintos de la sección de Poincaré para esos datos: el número de intervalos de T segundos transcurridos desde t_{stat} hasta el final de la simulación (equivalentemente, el número de filas del fichero `outPoincare_<id>.txt`).

- la distancia entre e_t y e_{stat}

A continuación se repite el proceso para el siguiente ejemplar de `DatosSimulacion`.

Si no se consiguen abrir el fichero `resumen.txt` o el que contiene los ejemplares de `DatosSimulacion`, el programa mostrará un mensaje de error por pantalla y finalizará.

Si para algún ejemplar de DatosSimulacion no se consigue abrir alguno de los ficheros outEstados_<id>.txt o outPoincare_<id>.txt, el programa pasará a analizar el siguiente ejemplar. Todos los ficheros que se abran deben cerrarse antes de finalizar el programa.

4.3. Ayudas

Para construir los nombres de los ficheros outEstados_<id>.txt puedes usar la función sprintf, declarada en el fichero de cabecera string.h. Por ejemplo, dado un array de caracteres nombre al ejecutar

```
sprintf(nombre, "outEstados_ %02d.txt", 3)
```

a nombre se le asigna el valor "outEstados_03.txt".

4.4. Ejemplos de ejecución

Para el fichero `datosEntradaTarea04.dat`, el programa muestra por pantalla:

```
Introduzca el fichero de entrada: datosTarea04.dat

Simulacion 00:
        Estado inicial: (0.0001, 0.003)          Parametros: (39.4784, 0, 0, 0)
        Factores temporales (0.0001 0.02 0 10)   T = 1 s
        Abriendo ficheros outEstados_00.txt y outPoincare_00.txt

Simulacion 01:
        Estado inicial: (2, 6.77457)     Parametros: (39.4784, 0, 0, 0)
        Factores temporales (0.0001 0.02 0 10)   T = 3 s
        Abriendo ficheros outEstados_01.txt y outPoincare_01.txt

Simulacion 02:
        Estado inicial: (0, 0)   Parametros: (1, 0.5, 0.9, 0.666667)
        Factores temporales (0.0001 0.002 5000 25000)    T = 9.42478 s
        Abriendo ficheros outEstados_02.txt y outPoincare_02.txt

Simulacion 03:
        Estado inicial: (0, 0)   Parametros: (1, 0.5, 1.07, 0.666667)
        Factores temporales (0.0001 0.002 5000 25000)    T = 9.42478 s
        Abriendo ficheros outEstados_03.txt y outPoincare_03.txt

Simulacion 04:
        Estado inicial: (0, 0)   Parametros: (1, 0.5, 1.19, 0.666667)
        Factores temporales (0.0001 0.1 5000 10000)      T = 9.42478 s
        Abriendo ficheros outEstados_04.txt y outPoincare_04.txt

Simulacion 05:
        Estado inicial: (0, 0)   Parametros: (1, 0.5, 1.3, 0.666667)
        Factores temporales (0.0001 0.002 5000 25000)    T = 9.42478 s
        Abriendo ficheros outEstados_05.txt y outPoincare_05.txt

Simulacion 06:
        Estado inicial: (0, 0)   Parametros: (1, 0.5, 1.46, 0.666667)
        Factores temporales (0.0001 0.002 5000 25000)    T = 9.42478 s
        Abriendo ficheros outEstados_06.txt y outPoincare_06.txt
```

El contenido del fichero `resumen.txt`, es:

id	*alpha*	*beta*	*Gamma*	*omega*	*theta*0	*w*0	*n*	*Distancia*
0	39,4784	0	0	0	0,0001	0,003	1	$1{,}91166e-017$
1	39,4784	0	0	0	2	6,77457	1	$4{,}04769e-010$
2	1	0,5	0,9	0,666667	0	0	1	$5{,}29407e-009$
3	1	0,5	1,07	0,666667	0	0	2	$1{,}03359e-008$
4	1	0,5	1,19	0,666667	0	0	5000	0,253048
5	1	0,5	1,3	0,666667	0	0	1	$1{,}64305e-009$
6	1	0,5	1,46	0,666667	0	0	4	$1{,}13972e-008$

Los contenidos de los ficheros `outPoincare_00.txt` y `outPoincare_01.txt` son, respectivamente

```
t   theta   w
1   0.0001   0.003
```

y

```
t   theta   w
3   2   6.77457
```

Los contenidos de los ficheros `outEstados_00.txt` y `outEstados_01.txt` son, respectivamente:

```
t   theta   w
0   0.0001   0.003
0.02   0.000159054   0.00289759
0.04   0.000215599   0.00274949
0.06   0.000268744   0.00255803
0.08   0.000317651   0.00232623
0.1   0.000361548   0.00205773
 . . .
1   0.0001   0.003
```

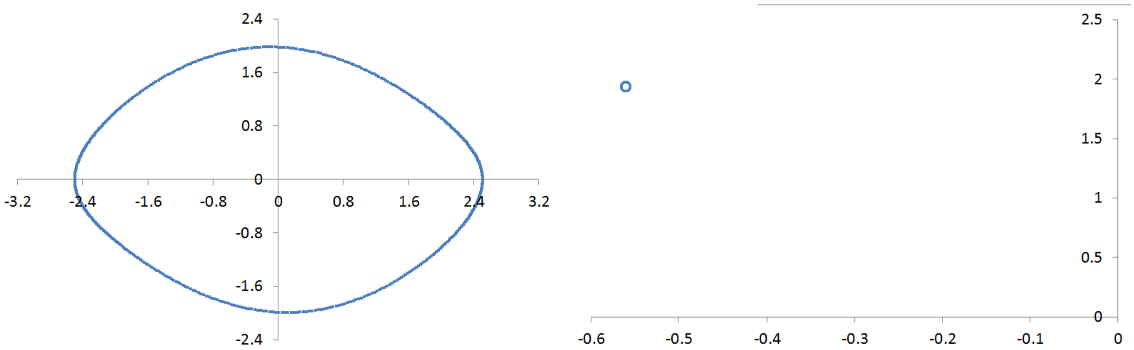
```
t   theta   w
0   2   6.77457
0.06   2.34627   4.84546
0.12   2.59095   3.38619
0.18   2.76079   2.33487
0.24   2.87731   1.59278
0.3   2.95631   1.07097
 . . .
3   2   6.77457
```

Los dos primeros ejemplares corresponden al caso, ya estudiado, de un péndulo sin fricción ni aporte de energía, con $\alpha = 4\pi^2$. Tal como era de esperar, $n = 1$: la dinámica es periódica con periodo T.

Analicemos los casos 2 al 6, estos ya con fricción y fuerza externa periódica.

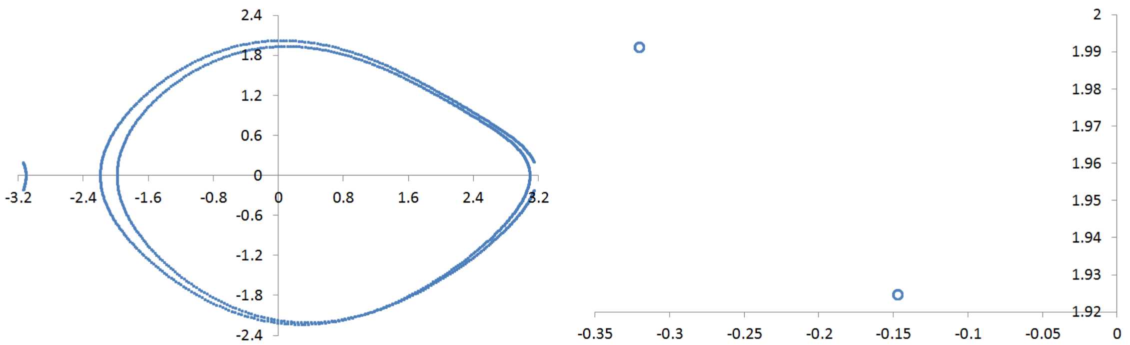
En todos ellos, $\theta_0 = 0$ rad , $\dot{\theta}_0 = 0$ rad/s, $\alpha = 1s^{-2}$, $\beta = 0{,}5s^{-1}$, $\omega_D = 2/3s^{-1}$: sólo cambia el valor de Γ. El contenido de los ficheros de salida se muestra gráficamente en las Figuras 4.1 a 4.5. Para los valores $\Gamma = 0.9$, 1.07, 1.3, 1.46 (expresado en s^{-2}) observamos dinámicas periódicas, con periodos iguales a T, $2T$, T (de nuevo) y $4T$, donde $T = 2\pi/\omega_D$ es el periodo del término forzante. La periodicidad se aprecia claramente en las secciones de Poincaré (con uno, dos, uno y cuatro puntos, respectivamente). Los atractores (las órbitas a las que acaba convergiendo la dinámica del péndulo) son ciclos límite.

Para $\Gamma = 1{,}19s^{-2}$ la dinámica es caótica, con un atractor extraño.



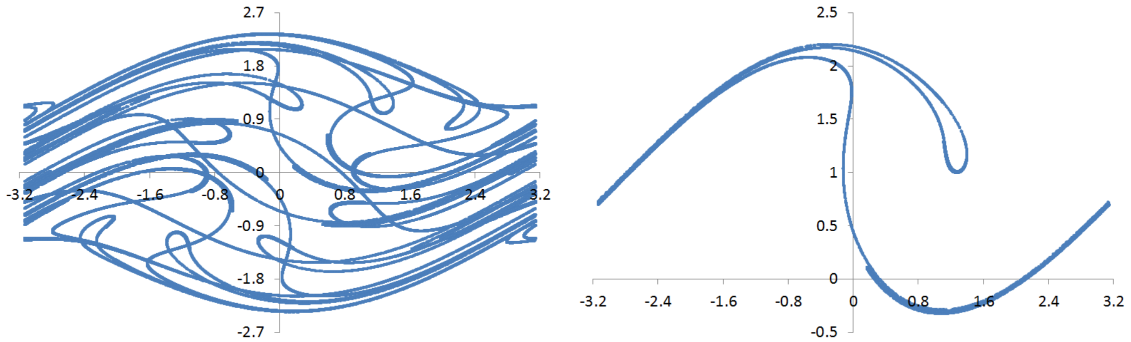
(a) $\Gamma = 0{,}9s^{-2}$, órbita en el espacio de fases (b) $\Gamma = 0{,}9s^{-2}$, sección de Poincaré

Figura 4.1: Dinámica en el espacio de fases (izquierda) y sección de Poincaré (derecha). $\Gamma = 0{,}9s^{-2}$, $\alpha = 1s^{-2}$, $\beta = 0{,}5s^{-1}$, $\omega = 2/3s^{-2}$. El péndulo describe una órbita periódica en el espacio de fases cuyo periodo es $T = 2\pi/\omega$; por tanto, la sección de Poincaré muestra un único punto.



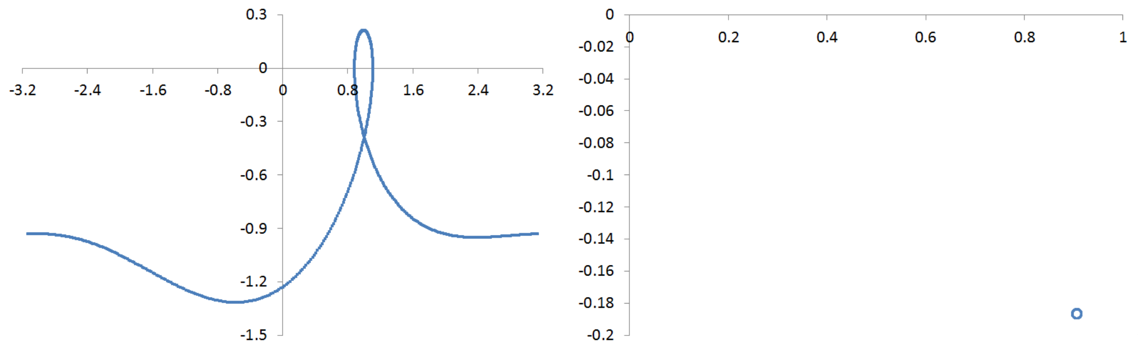
(a) $\Gamma = 1{,}07s^{-2}$, órbita en el espacio de fases (b) $\Gamma = 1{,}07s^{-2}$, sección de Poincaré

Figura 4.2: Dinámica en el espacio de fases (izquierda) y sección de Poincaré (derecha). $\Gamma = 1{,}07s^{-2}$, $\alpha = 1s^{-2}$, $\beta = 0{,}5s^{-1}$, $\omega = 2/3s^{-2}$. El péndulo describe una órbita periódica en el espacio de fases cuyo periodo es el doble del del término forzante; por tanto, la sección de Poincaré muestra dos puntos.



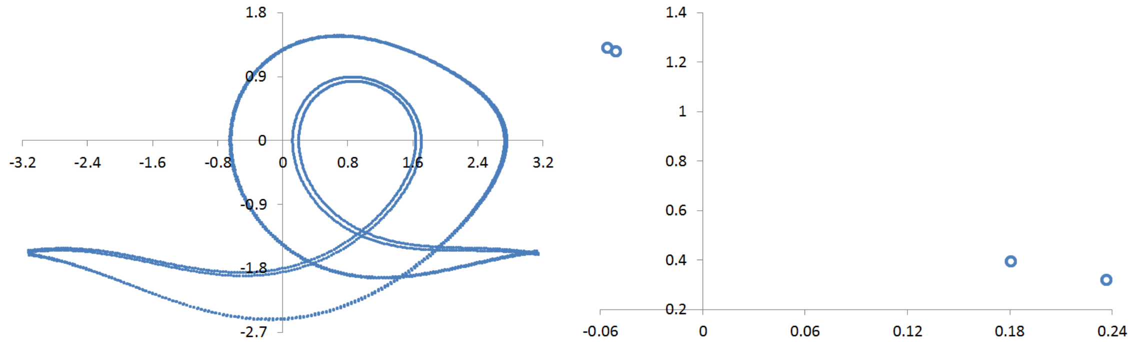
(a) $\Gamma = 1{,}19 s^{-2}$, órbita en el espacio de fases (b) $\Gamma = 1{,}19 s^{-2}$, sección de Poincaré

Figura 4.3: Dinámica en el espacio de fases (izquierda) y sección de Poincaré (derecha). $\Gamma = 1{,}19 s^{-2}$, $\alpha = 1 s^{-2}$, $\beta = 0{,}5 s^{-1}$, $\omega = 2/3 s^{-2}$. El péndulo describe una órbita caótica, con un atractor extraño.



(a) $\Gamma = 1{,}3 s^{-2}$, órbita en el espacio de fases (b) $\Gamma = 1{,}3 s^{-2}$, sección de Poincaré

Figura 4.4: Dinámica en el espacio de fases (izquierda) y sección de Poincaré (derecha). $\Gamma = 1{,}3 s^{-2}$, $\alpha = 1 s^{-2}$, $\beta = 0{,}5 s^{-1}$, $\omega = 2/3 s^{-2}$. El péndulo describe una órbita periódica en el espacio de fases cuyo periodo vuelve a ser el del término forzante; por tanto, la sección de Poincaré muestra un único punto.



(a) $\Gamma = 1{,}46 s^{-2}$, órbita en el espacio de fases (b) $\Gamma = 1{,}46 s^{-2}$, sección de Poincaré

Figura 4.5: Dinámica en el espacio de fases (izquierda) y sección de Poincaré (derecha). $\Gamma = 1{,}46 s^{-2}$, $\alpha = 1 s^{-2}$, $\beta = 0{,}5 s^{-1}$, $\omega = 2/3 s^{-2}$. El péndulo describe una órbita periódica en el espacio de fases cuyo periodo es cuatro veces el del término forzante; por tanto, la sección de Poincaré muestra cuatro puntos.