Zadanie 3.2

Albert Kołodziejski

Problem:

Niech G będzie gramatyką

$$S \rightarrow aS|aSbS|\epsilon$$

Udowodnić że

$$L(G) = \{x : \textit{każdy przedrostek } x \textit{ ma co najmniej tyle symboli } a\textit{, co symboli } b\}$$

Rozwiązanie:

Niech

$$A = \{x : \textit{każdy przedrostek } x \textit{ ma co najmniej tyle symboli } a\textit{, co symboli } b\}$$

Pokażmy że $L(G) \subseteq A$

Produkcja aS dodaje nam z przodu jeden symbol a, Wystąpienie tej produkji nie zagraża wypadnięciem z języka A bo dodanie kolejnego symbolu a w dowolnym miejscu dowolnego przedrosta nie sprawi że ilośc symoli a spadnie.

Produkcja $aSbS$ dodaje nam jeden symbol a i jeden symbol b w tej kolejności, co oznacza że dla każdego symbolu b występującego w dowolnym przedrostku musi wystąpić symbol a przed nim w tym przedrostku.

Ostatnią produkcją jest epsilon który oznacza że nie dodajemy żadnej litery, co również nie jest zagrożeniem dla wypadnięcia z języka A.

Zaczynamy ze słowem które ma zero symboli a i zero sybmoli b, należymy więc do języka A, używając dowolnej z możliwych produkji nie jesteśmy w stanie wypaść z języka A więc $L(G) \subseteq A$.

Pokażmy że $A \subseteq L(G)$

Dla słów długości 0 jest to prawda, bo słowo puste można stworzyć za pomocą produkcji epsilon, należy więc do $L(G)$.

Załóżmy że dla słów długości n jest to prawda. Weźmy więc słowo x takie że $|x| = n + 1$ oraz $x \in A$.

Jeżeli słowo to składa się wyłącznie z samych symboli a, to możemy produkcji aS, n + 1 razy, a na koniec produkcji epsilon, co da nam słowo x. Słowo to więc należy do $L(G)$.

Jeżeli słowo to ma co namniej jeden symbol b, to weźmy pierwszy występujący w tym słowie symbol b i oznaczmy go przez b_s.

Wiemy że nasze słowo x musi zaczynać się symbolem a, bo w przeciwnym wypadku przedrostek o długości 1 posiadałby jeden symbol b i zero symboli a, co oznaczałoby że słowo x nie należy do A.

Przed b_s musi wystąpić symbol a, więc nasze słowo x możemy przedstawić w postaci

$$x = yab_sz$$

gdzie y jest słowem składającym się wyłącznie z symboli a, b_s jest pierwszym występującym symbolem b w słowie x a z jest resztą symboli.

Usunięcie ab_s ze słowa x nie sprawi że nasze słowo przestanie należeć do A, bo z każdego przedrostka x zawierającego ab_s usuwamy jednocześnie jeden symbol a i jeden symbol b, co nie sprawi że wypadamy z języka A. Pozostałe przedrostki zawierają jedynie symbole a, więc usunięcie z nich jednego symbolu a nie sprawi że wypadniemy z języka A.

To oznacza że słowo yz należy do A, co więcej $|yz| = n - 1$, więc na mocy założenia indukcyjnego słowo yz należy do $L(G)$, a co za tym idzie jest generowane przez gramatyką G. Popatrzmy na sposób w jaki generujemy ostatni symbol a w słowie y podczas generowania słowa yz.

Jeżeli użyliśmy do tego produkcji aS, to używając produkcji $aSbS$ gdzie pierwsze S zastąpimy przez epsilon, otrzymamy aab_sS, generując słowo dalej tak jak byśmy generowali kolejne symbole z, otrzymamy słowo x.

Jeżeli użyliśmy do tego produkcji $aSbS$, to używając produkcji $aSbS$ gdzie pierwsze S zastąpimy przez epsilon, otrzymamy aab_sSbS, generując słowo dalej jak byśmy generowali kolejne symbole z, otrzymamy słowo x.

Istnieje więc sposób na wygenerowanie x, więc $x \in L(G)$, $A \subseteq L(G)$.
$\boldsymbol{A \subseteq L(G)}$ **oraz** $\boldsymbol{L(G) \subseteq A}$**, więc** $\boldsymbol{A = L(G)}$**.**