Zadanie 2.4

Albert Kołodziejski

Problem:

Czy język $\{0^{n!} : n \in N\}$ jest regularny?

Lemat o pompowaniu:

Niech L będzie językiem regularnym. Wtedy istnieje stała n taka że jeśli z jest dowolnym słowem z L oraz $|z| \geq n$, to z możemy przedstawić w postaci $z = uvw$, gdzie $|uv| \leq n$ i $|v| \geq 1$ oraz uv^iw należy do L dla każdego $i \geq 0$.

Rozwiązanie:

Zakładamy, że język ten jest regularny, oznacza to, że lemat o pompowaniu powinien zachodzić. Weźmy więc słowo $z = 0^{n!}$, gdzie n jest z lematu o pompowaniu.

Zgodnie z lematem o pompowaniu istnieją $k \geq 0$, $j \geq 1$, $k + j \leq n$, dla których słowo postaci:

$$0^k(0^j)^i0^{n!-k-j}$$

należy do języka dla każdego $i \geq 0$. Natomiast już dla $i = 0$ mamy:

$$|0^k(0^j)^0 0^{n!-k-j}| = k + n! - k - j = n! - j < n!$$

bo $j \geq 1$

$$k + n! - k - j = n! - j \geq n! - n = (n-1)!(n-1) > (n-1)!$$

Więc długość naszego słowa musi być mniejsza niż $n!$ oraz większa niż $(n-1)!$ a to oznacza, że nasze słowo nie należy do języka.

Otrzymaliśmy sprzeczność, więc dany język nie jest regularny.