Отчет по лабораторной работе № 5

Математическое моделирование

Амуничников Антон, НПИбд-01-22

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Исследовать математическую модель Лотки-Вольерры.

2 Теоретическое введение

Модель "Хищник-жертва" основывается на следующих предположениях [**Volterra:bash?**]:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса (экспоненциальный рост с постоянным темпом), при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает

3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается

5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$
\begin{cases}
\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\
\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t)
\end{cases}
$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников. Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Найдём стационарное состояние системы. Для этого приравняем её правые части к нулю.

$$\begin{cases} ax(t) - bx(t)y(t) = 0 \\ -cy(t) + dx(t)y(t) = 0 \end{cases}$$

Из полученной системы получаем, что стационарное состояние системы будет в точке $x_0 = c/d$, $y_0 = a/b$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки.

3 Задание

3.1 Определение варианта

Использую формулу для определения варианта задания (рис. 3.1).

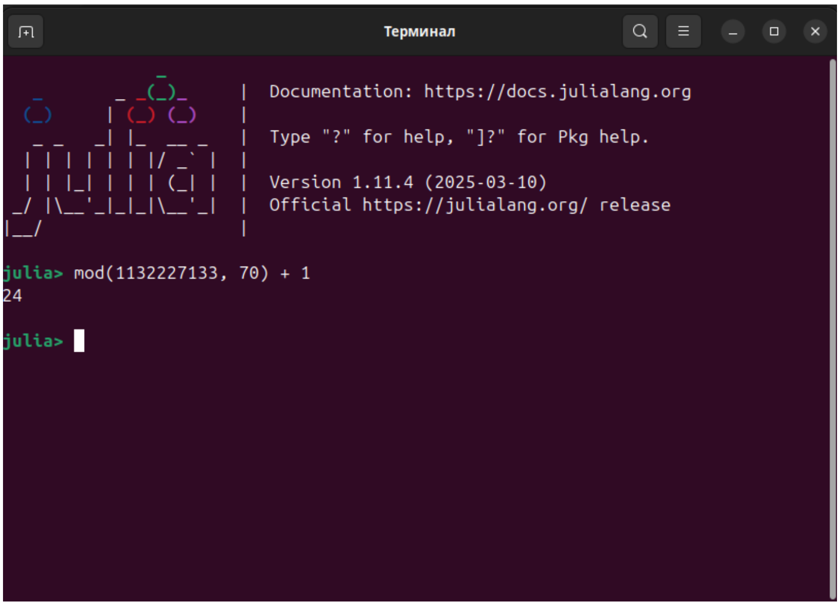

Рис. 3.1: Определение варианта

3.2 Задание

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.29x(t) + 0.039x(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.49y(t) - 0.059x(t)y(t) \end{cases}$$

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8, y_0 = 17$. Найти стационарное состояние системы.

4 Выполнение лабораторной работы

Необходимо решить систему дифференциальных уравнений для построения графиков и нахождения стационарного состояния на Julia и OpenModelica.

4.1 Julia

Напишем код программы для решения системы ДУ:

```
# используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots

# создание системы ДУ, описывающей модель Лотки-Вольтерры
function LV(u, p, t)
        x, y = u
        a, b, c, d = p
        dx = -a*x + b*x*y
        dy = c*y - d*x*y
        return [dx, dy]
end

# начальные условия
u0 = [8, 17]
p = [0.29, 0.039, 0.49, 0.059]
tspan = (0.0, 50.0)
```

```
# постановка задачи и ее решение
prob = ODEProblem(LV, u0, tspan, p)
sol = solve(prob)
```

Построим график изменения численности хищников и численности жертв, а также график зависимости численности хищников от численности жертв:

```
plot(sol, title = "Модель Лотки-Вольтерры", xaxis = "Время",
    yaxis = "Численность популяции", label = ["жертвы" "хищники"],
    c = ["green" "red"], box =:on)

plot(sol, idxs=(1, 2),  xaxis = "Жертвы", yaxis = "Хищники",
    c = "orange", box =:on, legend = false)
```

Просмотрим график изменения численности хищников и жертв (рис. 4.1), а также график зависимости численности хищников от численности жертв (рис. 4.2).

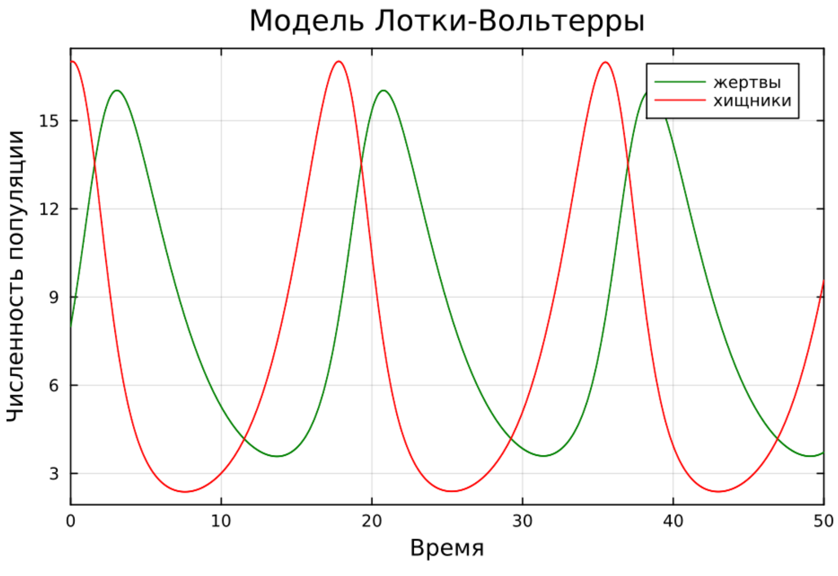

Рис. 4.1: График изменения численности хищников и численности жертв на Julia

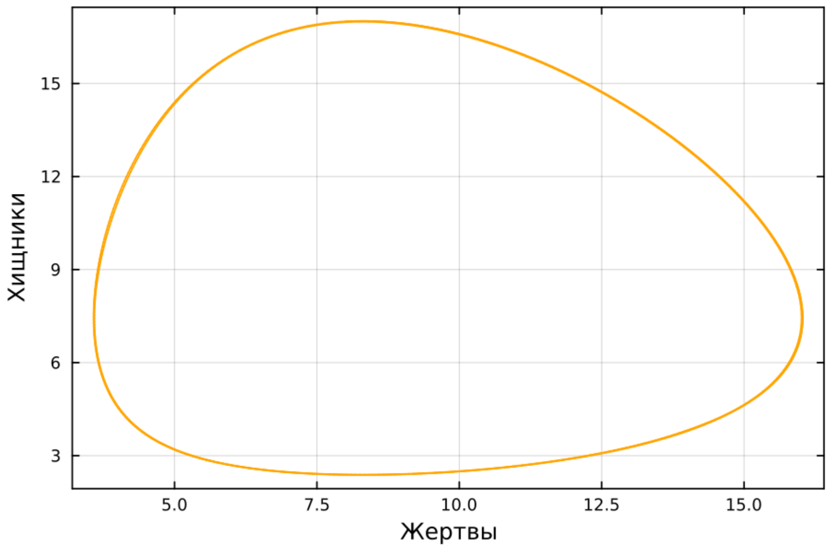

Рис. 4.2: График зависимости численности хищников от численности жертв на Julia

Графики периодичны, фазовый портрет замкнут, как и должно быть в жесткой модели Лотки-Вольтерры.

Для нахождения стационарного состояния системы найдем стационарную точку в соответствии с формулами:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\gamma}{\delta} \\ y_0 = \dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

В результате, $x_0 = \dfrac{0.49}{0.059} = 8.305084745762713$, а $y_0 = \dfrac{0.29}{0.039} = 7.435897435897435$

Проверим, что точка действительно является стационарная, подставив ее в начальные условия:

```
xs = p[3]/p[4]
ys = p[1]/p[2]
u0_s = [xs, ys]
prob2 = ODEProblem(LV, u0_s, tspan, p)
sol2 = solve(prob2)
```

Построим график изменения численности хищников и жертв (рис. 4.3):

```
plot(sol2, title = "Модель Лотки-Вольтерры", xaxis = "Время",
    yaxis = "Численность популяции", label = ["жертвы" "хищники"],
    c = ["green" "red"], box =:on)
```

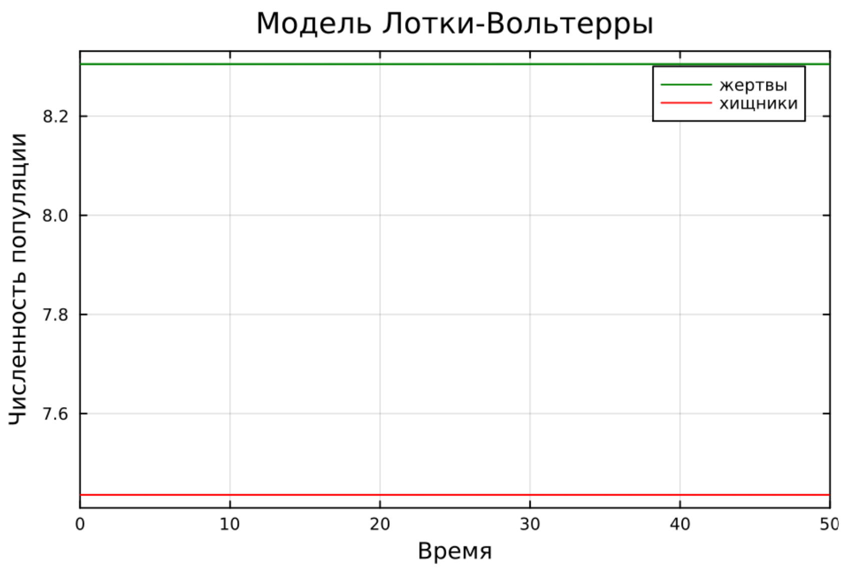

Рис. 4.3: График изменения численности хищников и численности жертв в стационарном состоянии на Julia

На получившемся графике видим две прямые, параллельных оси абсцисс. Это означает, что с течением времени численность хищников и жертв не изменяется, что соответствует стационарному состоянию. Следовательно, стационарная точка найдена верно.

Фазовый портрет в стационарном состоянии будет выглядеть следующим образом:

```
plot((xs, ys), seriestype=:scatter, xlims=(3, 15), ylims=(3, 15),
    box=:on, c="orange", markersize=5, label="Стационарная точка")
```

Получаем график, на котором отмечена найденная стационарная точка (рис. 4.4).

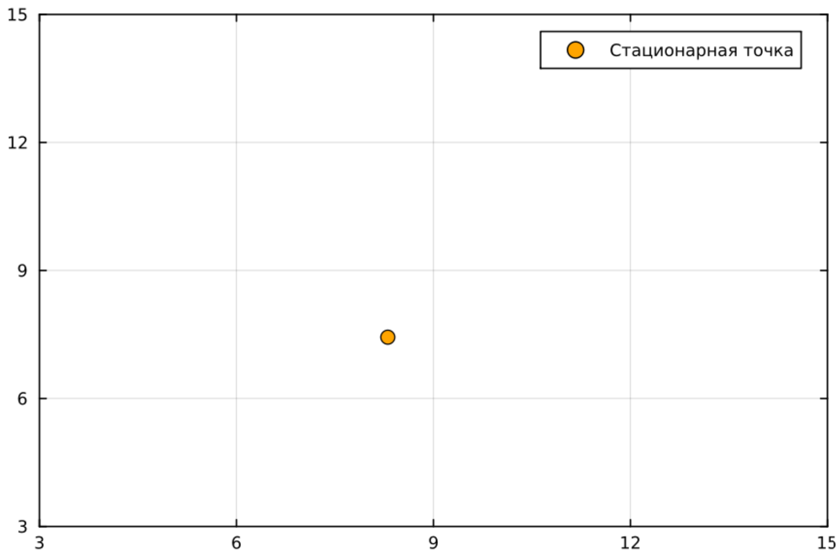

Рис. 4.4: График зависимости численности хищников от численности жертв в стационарном состоянии на Julia

4.2 OpenModelica

Реализуем то же самое на OpenModelica. Зададим параметры и систему ДУ:

```
model lab5_1
  parameter Real a = 0.29;
  parameter Real b = 0.039;
  parameter Real c = 0.49;
  parameter Real d = 0.059;
  parameter Real x0 = 8;
  parameter Real y0 = 17;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
```

```
equation
    der(x) = -a*x + b*x*y;
    der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5_1;
```

Просмотрим график изменения численности хищников и жертв (рис. 4.5), а также график зависимости численности хищников от численности жертв (рис. 4.6).

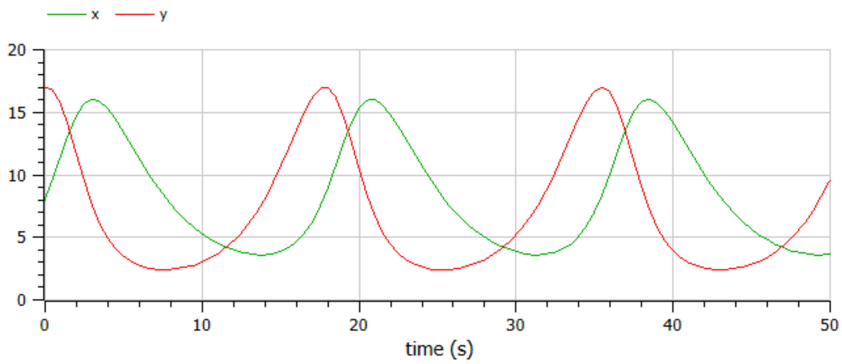

Рис. 4.5: График изменения численности хищников и численности жертв на OpenModelica

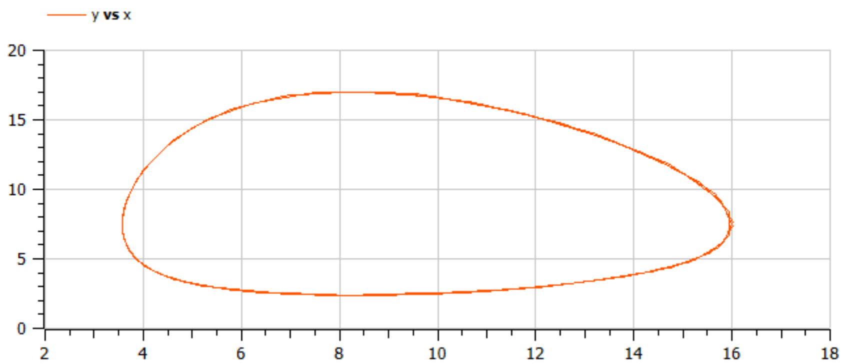

Рис. 4.6: График зависимости численности хищников от численности жертв на OpenModelica

Графики идентичны тем, что получены выше.

Построим графики в стационарном состоянии. Для этого в качестве начальных значений зададим в параметрах `x0` и `y0` найденную выше стационарную точку. Запустим симуляцию:

```
model lab5_2
  parameter Real a = 0.29;
  parameter Real b = 0.039;
  parameter Real c = 0.49;
  parameter Real d = 0.059;
  parameter Real x0 = 0.49/0.059;
  parameter Real y0 = 0.29/0.039;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
    der(x) = -a*x + b*x*y;
    der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5_2;
```

Просмотрим график изменения численности хищников и жертв (рис. 4.7), а также график зависимости численности хищников от численности жертв (рис. 4.8).

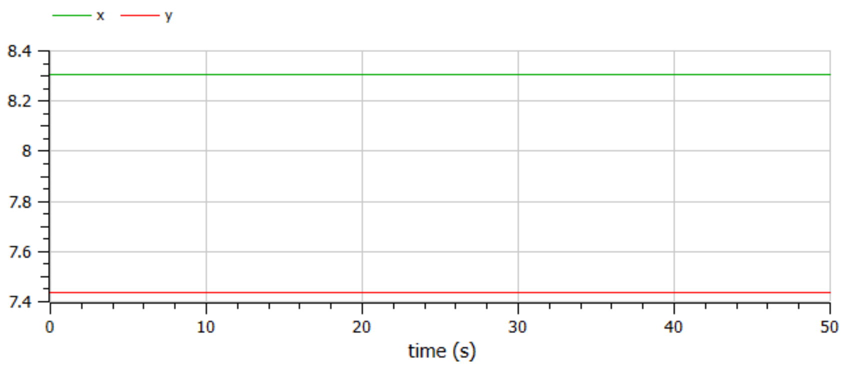

Рис. 4.7: График изменения численности хищников и численности жертв в стационарном состоянии на OpenModelica

На получившемся графике видим две прямые, параллельных оси абсцисс. Это означает, что с течением времени численность хищников и жертв не изменяется, что соответствует стационарному состоянию. Следовательно, стационарная точка найдена верно.

Фазовый портрет в стационарном состоянии будет выглядеть следующим образом:

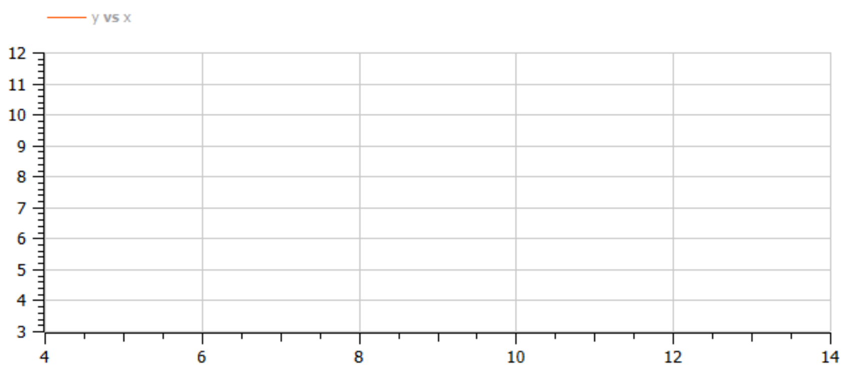

Рис. 4.8: График зависимости численности хищников от численности жертв в стационарном состоянии на OpenModelica

Полученные графики идентичны. Никаких особых различий не видно. Действительно, если начальное условие соответствует стационарной точке, то система находится в стационарном состоянии, то есть число хищников и жертв не изменяется.

5 Выводы

В результате выполнения работы была исследована модель Лотки-Вольтерры.

Список литературы