Отчет по лабораторной работе №2

Математическое моделирование

Амуничников Антон, НПИбд-01-22

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи поиска.

2 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A. Задача о кривой погони поставлена Леонардо да Винчи и решена Бугером в 1732 году.

Задача построения кривой погони впервые встала при выборе курса судна с учётом внешних факторов (боковых ветров, течения) для оптимального достижения точки цели путешествия.

Вновь эта проблема возникла при использовании в военных целях подводных лодок, торпед, а позднее и управляемых ракет с целью достижения и поражения движущихся целей. Кроме того, кривая погони применяется в космической навигации [**wiki?**].

3 Задание

3.1 Определение варианта

Использую формулу для определения варианта задания (рис. 3.1).

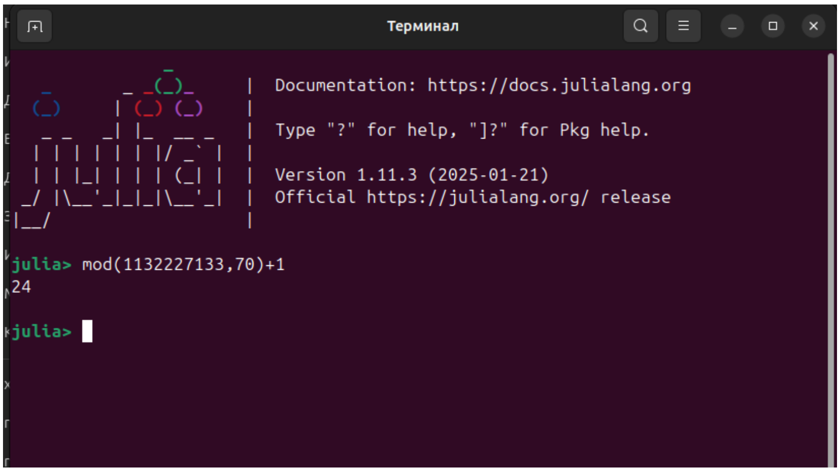

Рис. 3.1: Определение варианта

3.2 Задание

Вариант 24

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 11,4 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,1 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Вывод уравнения

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

1. Примем за $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения,$x_{k0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.
2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_{k0} ($\theta = x_{k0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.
3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.
4. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через

время t катер и лодка окажутся на одном расстояниих от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k-x$ (или $k+x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{4.1v}$ (во втором случае $\frac{k+x}{4.1v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниех можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{4.1v} \text{ – в первом случае}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{4.1v} \text{ – во втором случае}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{11.4}{5,1}$ и $x_2 = \frac{11.4}{3,1}$, задачу будем решать для двух случаев.

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и - v_τ тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $r\frac{d\theta}{dt}$.

Получаем:

$$v_\tau = \sqrt{16.81v^2 - v^2} = \sqrt{15.81}v$$

Из чего можно вывести:

$$r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{15.81}v$$

6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{15.81}v \end{cases}$$

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{11.4}{5.1} \end{cases} \tag{1}$$

Или для второго:

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{11.4}{3.1} \end{cases} \tag{2}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{15.81}}$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

4.2 Построение модели

Построим математическую модель на языке Julia. Воспользуемся библиотеками `OrdinaryDiffEq, Plots`

Введем известные данные:

```
k = 11.4 // расстояние  от лодки до катера
```

```
// данные для лодки браконьеров
fi = 3*pi/4
t = 0:0.01:15
fl(t) = tan(fi)*t //функция, описывающая движение лодки браконьеров

f(u, p, t) = u/sqrt(15.81) // функция, описывающая движение катера береговой охраны

// начальные условия для двух случаев
x1 = k/5.1
x2 = k/3.1

tetha1 = (0.0, 2*pi)
tetha2 = (-pi, pi)
```

Обозначим и решим задачу для первого случая:

```
s1 = ODEProblem(f, x1, tetha1)

sol1 = solve(s1, Tsit5(), saveat=0.01)
```

Построим график с траекторией движения катера и лодки (рис. 4.1):

```
plot(sol1.t, sol1.u, proj=:polar, lims=(0,15), label="траектория катера")

plot!(fill(fi, length(t)), fl.(t), label="траектория лодки")
```

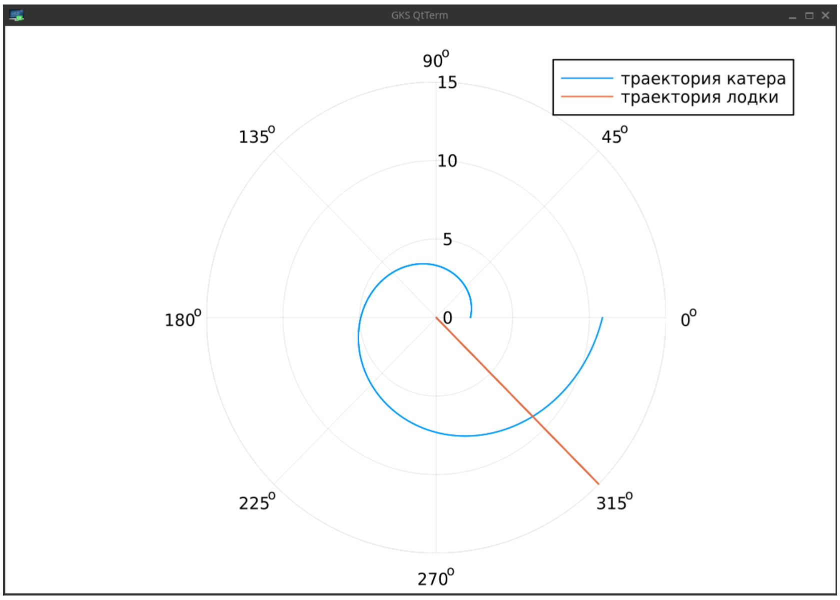

Рис. 4.1: Траектория движения катера и лодки для первого случая

Обозначим и решим задачу для второго случая:

```
s2 = ODEProblem(f, x2, tetha2)

sol2 = solve(s2, Tsit5(), saveat=0.01)
```

Построим график с траекторией движения катера и лодки (рис. 4.2):

```
plot(sol2.t, sol2.u, proj=:polar, lims=(0,15), label="траектория катера")

plot!(fill(fi, length(t)), fl.(t), label="траектория лодки")
```

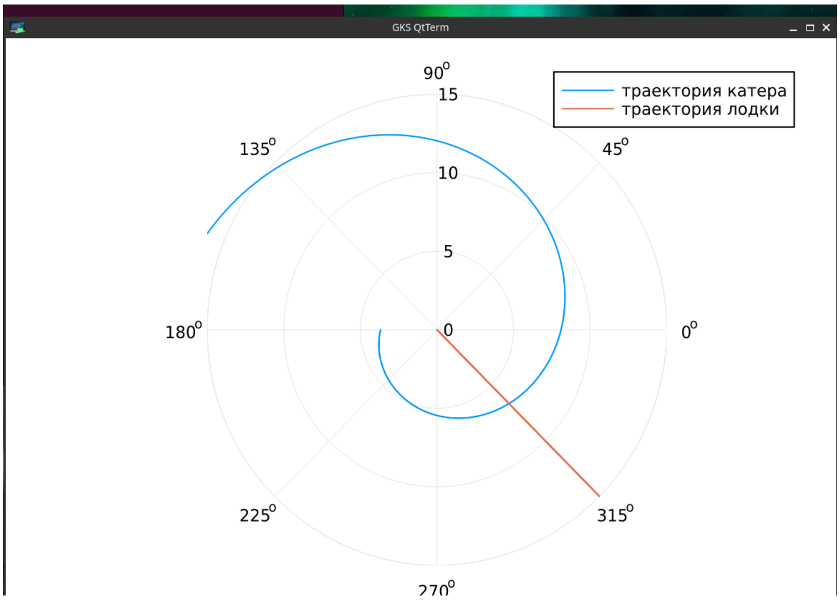

Рис. 4.2: Траектория движения катера и лодки для второго случая

4.3 Вывод точки пересечения

Найдем точку пересечения траектории катера и лодки. Для этого найдем аналитическое решение дифференциального уравнения, задающего траекторию движения катера. Решив задачу Коши, получим для первого случая

$$r = \frac{38\, e^{\frac{10\,x}{\sqrt{1581}}}}{17}$$

и для второго случая

$$r = \frac{114\, e^{\frac{10\,x}{\sqrt{1581}} + \frac{10\,\pi}{\sqrt{1581}}}}{31}$$

Найдем точку пересечения для первого случая:

```
y(x)=(38*exp(10*x)/(sqrt(1581)))/(17)
y(fi)
// точка пересечения лодки и катера для 1 случая
9.609292077117887e8
```

Найдем точку пересечения для второго случая:

```
y2(x)=(114*exp((10*x/sqrt(1581))+(10*pi/sqrt(1581))))/(31)
y2(fi-pi)
// точка пересечения лодки и катера для 2 случая
6.651143558300665
```

5 Выводы

Изучена задача погони. Была построена математическая модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи поиска.