

Отчет по лабораторной работе №

Математическое моделирование

Амуничников Антон, НПИбд-01-22

Содержание

1	Цель работы	4
2	Теоретическое введение	5
3	Задание	8
3.1	Определение варианта	8
3.2	Задание	8
4	Выполнение лабораторной работы	10
4.1	Модель колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы	10
4.1.1	Julia	10
4.1.2	OpenModelica	12
4.2	Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы	13
4.2.1	Julia	13
4.2.2	OpenModelica	15
4.3	Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы	16
4.3.1	Julia	16
4.3.2	OpenModelica	18
5	Выводы	20
	Список литературы	21

Список иллюстраций

3.1	Определение варианта	8
4.1	Колебания гармонического осциллятора для первого случая на Julia	11
4.2	Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора для первого случая на Julia	12
4.3	Колебания гармонического осциллятора для первого случая на OpenModelica	13
4.4	Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора для первого случая на OpenModelica	13
4.5	Колебания гармонического осциллятора для второго случая на Julia	14
4.6	Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора для второго случая на Julia	15
4.7	Колебания гармонического осциллятора для второго случая на OpenModelica	16
4.8	Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора для второго случая на OpenModelica	16
4.9	Колебания гармонического осциллятора для третьего случая на Julia	18
4.10	Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора для третьего случая на Julia	18
4.11	Колебания гармонического осциллятора для третьего случая на OpenModelica	19
4.12	Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора для третьего случая на OpenModelica	19

1 Цель работы

Построить математическую модель гармонического осциллятора.

2 Теоретическое введение

Гармонические колебания — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону [**wiki:harmonic**].

Гармоническое колебание является специальным, частным видом периодического колебания. Периодическим называется повторяющееся движение, у которого каждый цикл в точности воспроизводит любой другой цикл. Этот специальный вид колебания очень важен, так как он чрезвычайно часто встречается в самых различных колебательных системах. Колебание груза на пружине, маятника, зажатой металлической пластинки как раз и является по своей форме гармоническим. Следует заметить, что при больших амплитудах колебания указанных систем имеют несколько более сложную форму, но они тем ближе к гармоническому, чем меньше амплитуда колебаний [**landsberg:harmonic**].

Гармонический осциллятор (в классической механике) — система, которая при выведении её из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы F , пропорциональной смещению x [**wiki:oscillator**]:

$$F = -kx,$$

где k — постоянный коэффициент.

Если F — единственная сила, действующая на систему, то систему называют простым или консервативным гармоническим осциллятором. Свободные колебания такой системы представляют собой периодическое движение около положения равновесия (гармонические колебания). Частота и амплитуда при

этом постоянны, причём частота не зависит от амплитуды.

Если имеется ещё и сила трения (затухание), пропорциональная скорости движения (вязкое трение), то такую систему называют затухающим или диссипативным осциллятором. Если трение не слишком велико, то система совершает почти периодическое движение — синусоидальные колебания с постоянной частотой и экспоненциально убывающей амплитудой. Частота свободных колебаний затухающего осциллятора оказывается несколько ниже, чем у аналогичного осциллятора без трения.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

где x — переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ — параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 — собственная частота колебаний, t — время. (Обозначения $\ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$)

Уравнение (1) есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы. При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) вместо уравнения (1) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2)$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка (2) необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (3)$$

где $x(y)$ – численности войск первой (второй) стороны в момент времени t ; $a_x(a_y)$ – эффективность огня первой (второй) стороны (число поражаемых целей противника в единицу времени)¹; p и q – параметры степени. В начальный момент времени заданы численности сторон: $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$.

Уравнение второго порядка (2) можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases} \quad (4)$$

Начальные условия (3) для системы (4) примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (5)$$

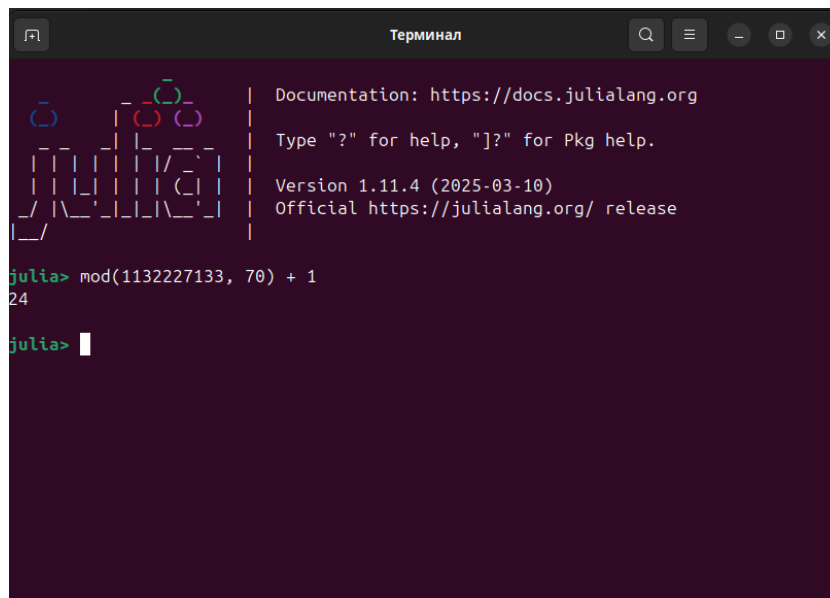
Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью.

Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

3 Задание

3.1 Определение варианта

Используя формулу для определения варианта задания (рис. 3.1).



```

┌───┐ ┌───┐ ┌───┐ ┌───┐ ┌───┐ ┌───┐ ┌───┐ ┌───┐ ┌───┐ ┌───┐
│   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │
│   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │
│   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │
│   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │
│   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │
│   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │
│   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │
│   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │
│   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │
│   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │ │   │
└───┘ └───┘ └───┘ └───┘ └───┘ └───┘ └───┘ └───┘ └───┘ └───┘

Documentation: https://docs.julialang.org
Type "?" for help, "]?" for Pkg help.
Version 1.11.4 (2025-03-10)
Official https://julialang.org/ release

julia> mod(1132227133, 70) + 1
24
julia> 
```

Рис. 3.1: Определение варианта

3.2 Задание

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внеш-

ней силы

$$\ddot{x} + 9x = 0$$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + \dot{x} + 4.9x = 0$$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

$$\ddot{x} + \dot{x} + 5.9x = 9.9\sin(t)$$

На интервале $t \in [0; 49]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = -0.5, y_0 = 1$.

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Модель колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

4.1.1 Julia

Реализуем модель на языке программирования Julia:

```
# Используемые библиотеки
```

```
using DifferentialEquations, Plots;
```

```
# Начальные условия
```

```
tspan = (0, 49)
```

```
u0 = [-0.5, 1]
```

```
p1 = [0, 9]
```

```
# Задание функции
```

```
function f1(u, p, t)
```

```
    x, y = u
```

```
    g, w = p
```

```
    dx = y
```

```
    dy = -g .*y - w^2 .*x
```

```
    return [dx, dy]
```

```
end
```

```
# Постановка проблемы и ее решение
```

```
problem1 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p1)
```

```
sol1 = solve(problem1, saveat=0.05)
```

Построим график решения и фазовый портрет:

```
plot(sol1, title = "Модель гармонического осциллятора без затуханий",  
      label = ["x" "y"], xaxis="t")
```

```
plot(sol1, idxs=(1, 2), title = "Фазовый портрет",  
      label = "зависимость x от y", xaxis="x", yaxis="y")
```

В результате получаем график решения уравнения гармонического осциллятора без затуханий (рис. 4.1) и его фазового портрета (рис. 4.2).

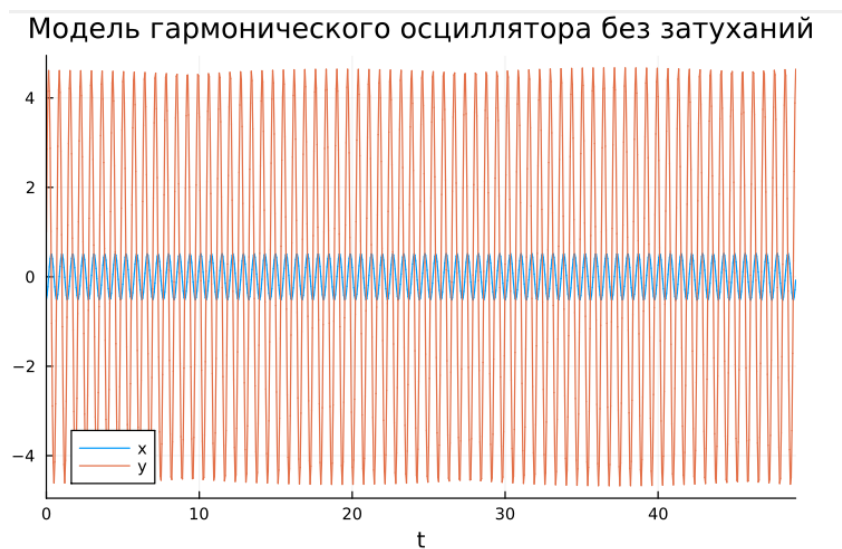


Рис. 4.1: Колебания гармонического осциллятора для первого случая на Julia

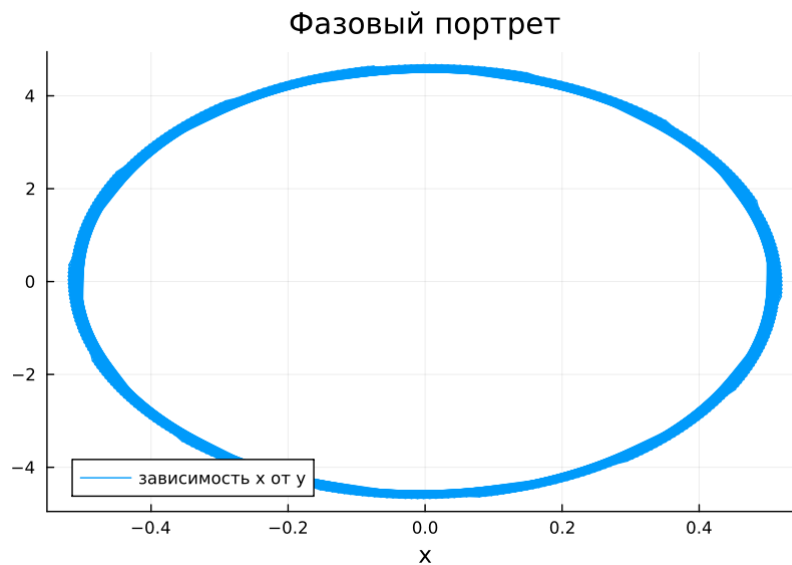


Рис. 4.2: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора для первого случая на Julia

Можно заметить периодичность колебаний осциллятора, график не затухает.

4.1.2 OpenModelica

Реализуем эту же модель на OpenModelica:

```
model lab4_1
  parameter Real g = 0;
  parameter Real w = 9;
  parameter Real x0 = -0.5;
  parameter Real y0 = 1;
  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
  der(x) = y;
  der(y) = -g .*y - w^2 .*x;
end lab4_1;
```

Посмотрим график решения (рис. 4.3) и фазового портрета (рис. 4.4).

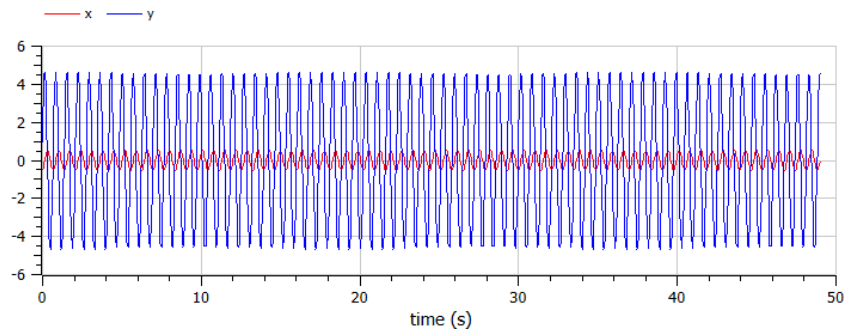


Рис. 4.3: Колебания гармонического осциллятора для первого случая на OpenModelica

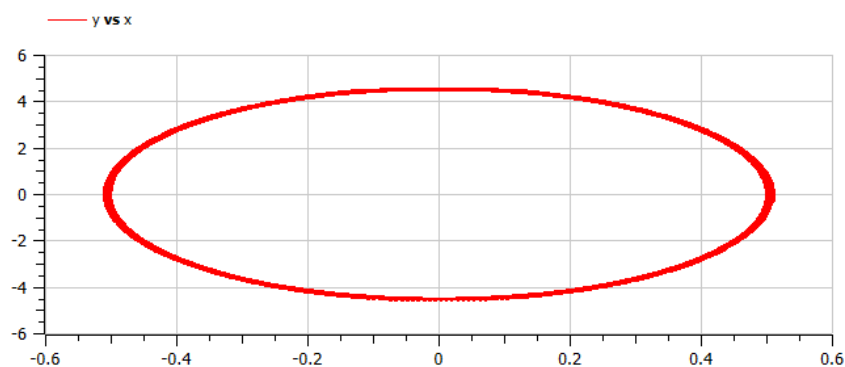


Рис. 4.4: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора для первого случая на OpenModelica

Графики идентичны.

4.2 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

4.2.1 Julia

Реализуем модель на языке программирования Julia, используя те же начальные условия и функцию, что и в предыдущей модели (кроме параметров уравнения):

```
# Начальные условия
```

```
p2 = [1, 4.9]
```

```
# Постановка проблемы и ее решение
```

```
problem2 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p2)
```

```
sol2 = solve(problem2, saveat=0.05)
```

Построим график решения и фазовый портрет:

```
plot(sol2, title = "Модель гармонического осциллятора с затуханиями",  
      label = ["x" "y"], xaxis="t")
```

```
plot(sol2, idxs=(1, 2), title = "Фазовый портрет",  
      label = "зависимость x от y", xaxis="x", yaxis="y")
```

В результате получаем график решения уравнения гармонического осциллятора с затуханиями (рис. 4.5) и его фазового портрета (рис. 4.6).

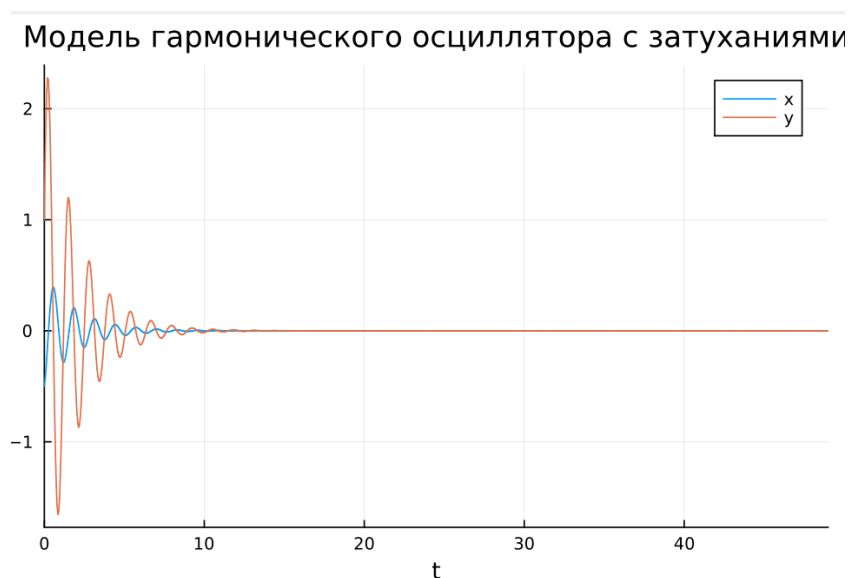


Рис. 4.5: Колебания гармонического осциллятора для второго случая на Julia

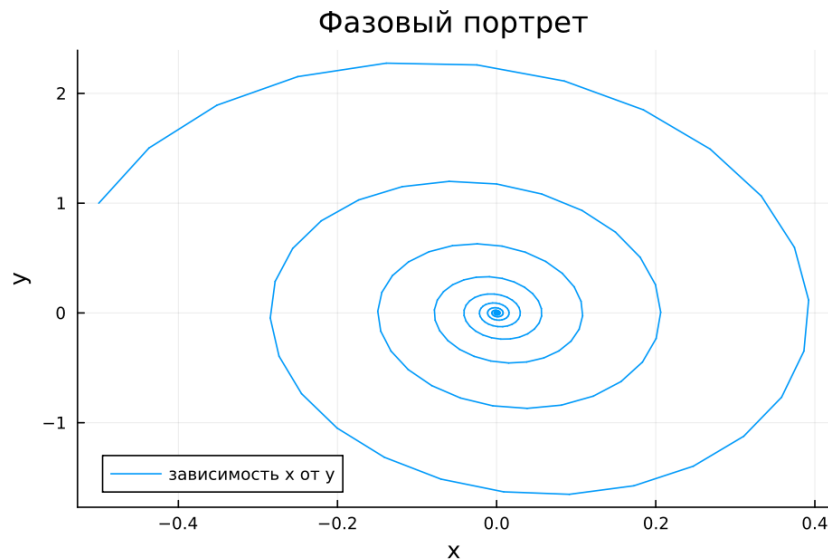


Рис. 4.6: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора для второго случая на Julia

В данном случае в результате колебаний график затухает.

4.2.2 OpenModelica

Реализуем эту же модель на OpenModelica:

```
model lab4_2
  parameter Real g = 1;
  parameter Real w = 4.9;
  parameter Real x0 = -0.5;
  parameter Real y0 = 1;
  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
  der(x) = y;
  der(y) = -g .*y - w^2 .*x;
end lab4_2;
```

Просмотрим график решения (рис. 4.7) и фазового портрета (рис. 4.8).

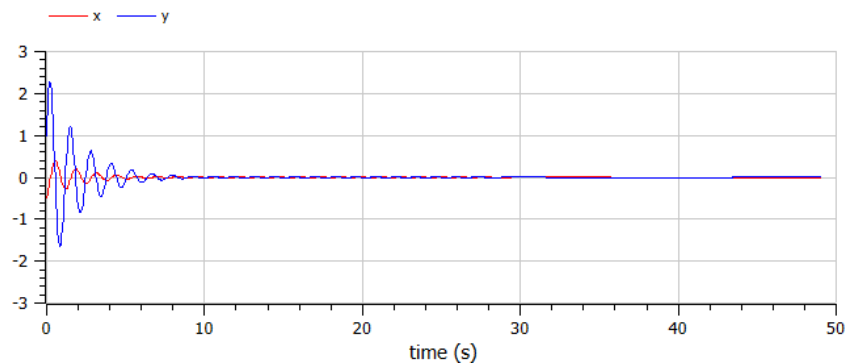


Рис. 4.7: Колебания гармонического осциллятора для второго случая на OpenModelica

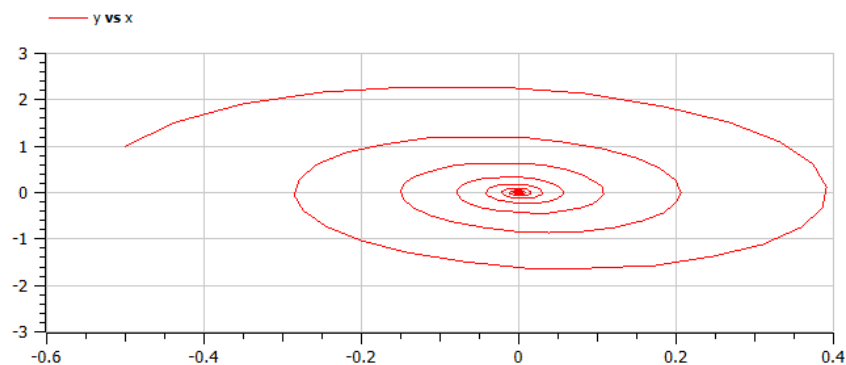


Рис. 4.8: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора для второго случая на OpenModelica

Также можно увидеть идентичность графиков.

4.3 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

4.3.1 Julia

Для программной реализации обновим параметры уравнения $p3$ и создадим на основе функции $f1$ функцию $f2$, учитывающую внешнюю силу:


```
# Начальные условия
```

```
p3 = [1, 5.9]
```

```
# Функция, описывающая внешние силы, действующие на осциллятор
```

```
f(t) = 9.9*sin(t)
```

```
# Задание функции
```

```
function f2(u, p, t)
```

```
    x, y = u
```

```
    g, w = p
```

```
    dx = y
```

```
    dy = -g .*y - w^2 .*x .+f(t)
```

```
    return [dx, dy]
```

```
end
```

```
# Постановка проблемы и ее решение
```

```
problem3 = ODEProblem(f2, u0, tspan, p3)
```

```
sol3 = solve(problem3, Tsit5(), saveat = 0.05)
```

Построим график решения и фазовый портрет:

```
plot(sol3, title = "Модель гарм. осц. с затуханиями под действием вн. силы",  
     label = ["x" "y"], xaxis="t")
```

```
plot(sol3, idxs=(1,2), title = "Фазовый портрет",  
     label = "зависимость x от y", xaxis="x", yaxis="y")
```

В результате получаем график решения уравнения гармонического осциллятора с затуханиями и под действием внешней силы (рис. 4.9) и его фазового

портрета (рис. 4.10).

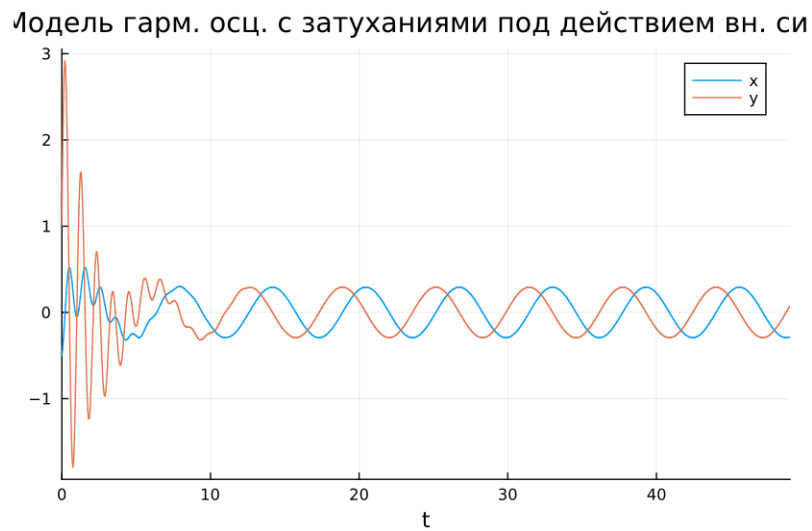


Рис. 4.9: Колебания гармонического осциллятора для третьего случая на Julia

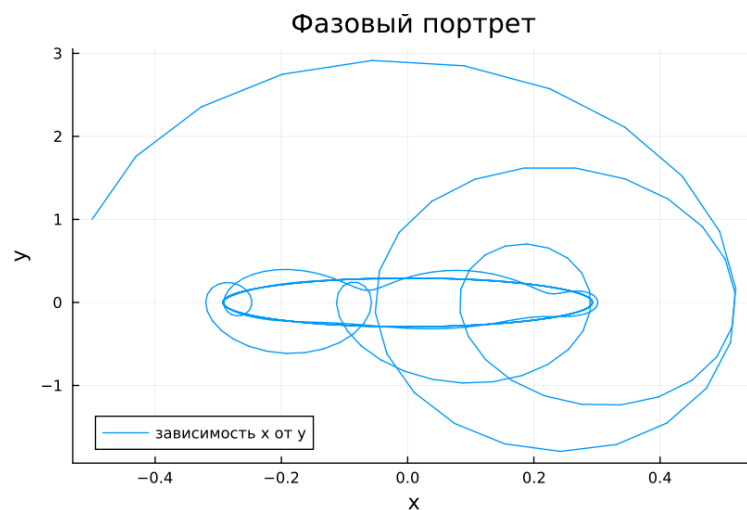


Рис. 4.10: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора для третьего случая на Julia

4.3.2 OpenModelica

Реализуем эту же модель на OpenModelica:

```
model lab4_3
  parameter Real g = 1;
```

```

parameter Real w = 5.9;
parameter Real x0 = -0.5;
parameter Real y0 = 1;
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
equation
  der(x) = y;
  der(y) = -g .*y - w^2 .*x + 9.9*sin(time);
end lab4_3;

```

Посмотрим график решения (рис. 4.11) и фазового портрета (рис. 4.12).

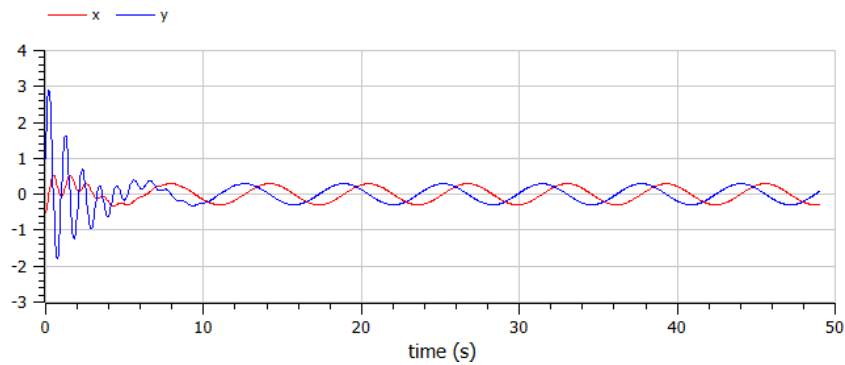


Рис. 4.11: Колебания гармонического осциллятора для третьего случая на OpenModelica

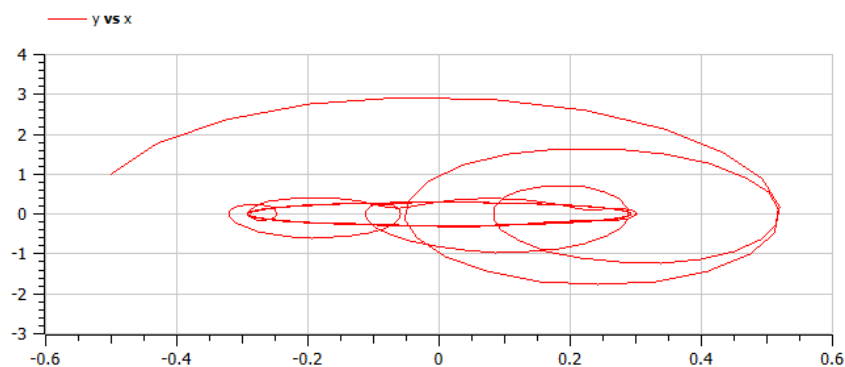


Рис. 4.12: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора для третьего случая на OpenModelica

5 Выводы

Построена математическая модель гармонического осциллятора и проведен анализ.

Список литературы