

1η Εργασία στη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων

Αντώνιος-Ιωακείμ Κυριακόπουλος

AEM: 6337

email: antokyri@meng.auth.gr

Περιεχόμενα:

Μέρος Α.....	2
Στοιχείο ράβδος.....	2
Στοιχείο δοκός.....	3
Φορέας δοκός.....	4
Λειτουργία προγράμματος.....	6
Μέρος Β.....	7
Δομή ράβδων.....	7
Δομή δοκών.....	10

Μέρος Α:

α) Αξονική φόρτιση στοιχείου ράβδου:

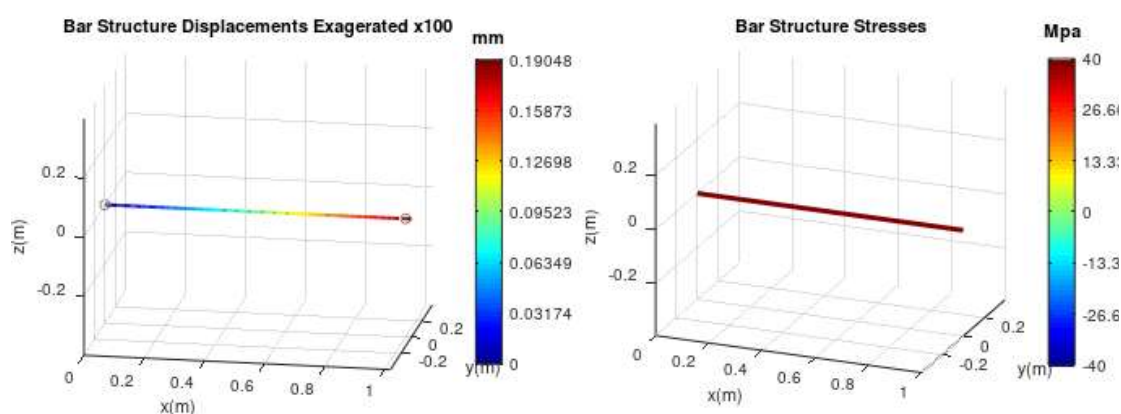
Το στοιχείο που θα χρησιμοποιηθεί έχει διατομή 25 cm^2 και μήκος 1 m . Οι κόμβοι τους οποίους συνδέει έχουν συντεταγμένες $[x \ y \ z]$ την αρχή των αξόνων και $[1 \ 0 \ 0] \text{ m}$. Η αξονική φόρτιση ασκείται στον κόμβο 2, είναι στον άξονα των x και έχει μέτρο 100 kN . Το υλικό του στοιχείου είναι χάλυβας με μέτρο ελαστικότητας $E = 210 \text{ GPa}$. Στηρίζουμε τον κόμβο 1 ακινητοποιώντας τον και στις τρεις διαστάσεις ενώ, για να είναι επιλύσιμο το πρόβλημα, ακινητοποιούμε τον κόμβο 2 στις διαστάσεις που δεν ενδιαφέρουν, δηλαδή στην y και z . Λύνοντας αναλυτικά το πρόβλημα, θα έχουμε

$$\Delta L = \frac{N_{x,1} L_1}{E_1 A_1} \quad \sigma_x(x) = \frac{N_x(x)}{A}$$

και προκύπτει $\Delta L = 0.1904761904761904 \text{ mm}$ και $\sigma_x = 40 \text{ MPa}$

Περνώντας τα δεδομένα στο πρόγραμμα, προκύπτουν:

Μεταβλητή	Αναλυτική λύση	Πρόγραμμα	Σφάλμα ($\% \cdot 10^{-14}$)
u	$0.1904761904761904 \text{ mm}$	$0.1904761904761904 \text{ mm}$	0
σ_x	40 MPa	$40.00000000000001 \text{ MPa}$	1.776356839400250



β)Καθαρή κάμψη στοιχείου δοκού:

Το στοιχείο που θα χρησιμοποιηθεί έχει τετραγωνική διατομή $5 \times 5 \text{ cm}^2$ και μήκος 1 m . Οι κόμβοι τους οποίους συνδέει έχουν συντεταγμένες $[x \ y \ z]$ την αρχή των αξόνων και $[1 \ 0 \ 0] \text{ m}$. Η φόρτιση ασκείται στον κόμβο 2, είναι ροπή στον άξονα των y και έχει μέτρο 1000 Nm . Το υλικό του στοιχείου είναι χάλυβας με μέτρο ελαστικότητας $E = 210 \text{ GPa}$. Στηρίζουμε τον κόμβο 1 περιορίζοντας μετατοπίσεις και περιστροφές και στις τρεις διαστάσεις ενώ ο κόμβος 2 αφήνεται ελεύθερος. Λύνοντας αναλυτικά θα έχουμε:

$$w''(x) = -\frac{M_y(x)}{EI_y}$$

και με ολοκλήρωση και αντικατάσταση έχουμε

μετατόπιση στον z : $w|_{x=1\text{m}} = -4.571428571428569 \text{ mm}$

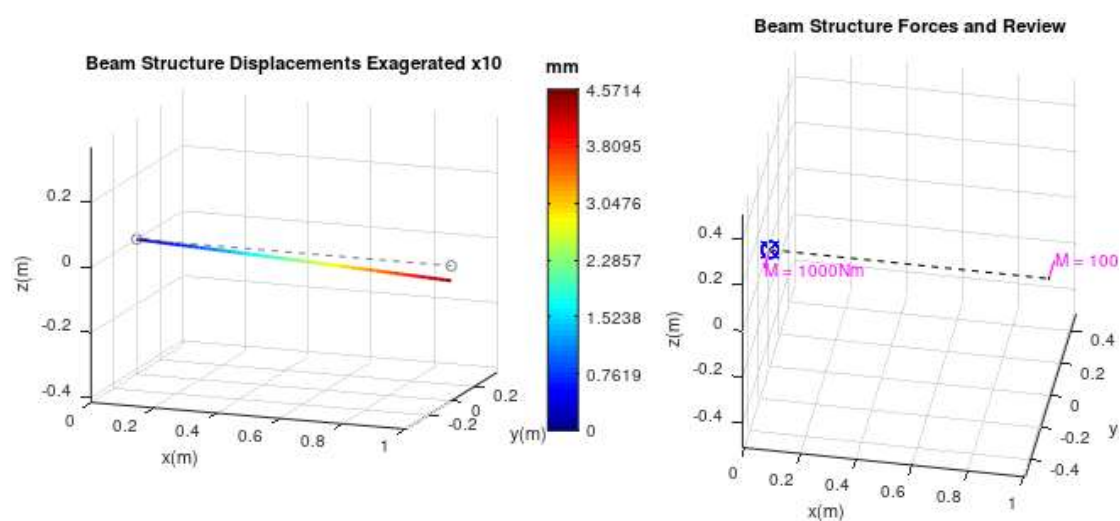
και κλίση: $w'|_{x=1\text{m}} = -0.009142857142857137$

Τέλος, με απλή ισορροπία ροπών, έχουμε ροπή αντίδρασης: $M_y|_{x=0} = 1000 \text{ Nm}$

Περνώντας τα δεδομένα στο πρόγραμμα, προκύπτουν:

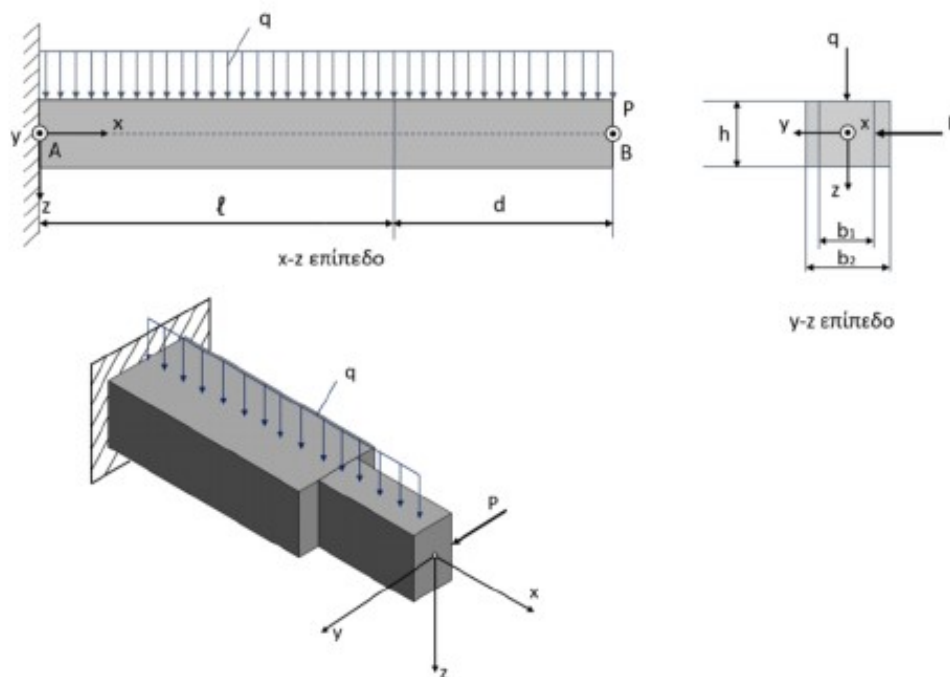
Μεταβλητή	Αναλυτική λύση	Πρόγραμμα	Σφάλμα ($\% \cdot 10^{-14}$)
$w _{x=1\text{m}}$	4.57142857142857 mm	4.571428571428574 mm	9.714451465470125
$w' _{x=1\text{m}}$	0.009142857142857	0.009142857142857	11.384122811097802
$M_y _{x=0}$	1000 Nm	1000.000000000001 Nm	10.23181539494544

Επίσης ανιχνεύεται ένα πλασματικό ζεύγος δυνάμεων στα άκρα με μέτρο $4.463716380647434 \cdot 10^{-13} \text{ N}$.



γ) Πρόβλημα φορέα δοκού:

Ο φορέας διακρίνεται σε δύο τμήματα, μήκους $l = 300 \text{ mm}$ και $d = 200 \text{ mm}$, με διαφορετικές ορθογωνικές διατομές. Τα πλάτη των διατομών είναι $b_1 = 60 \text{ mm}$ και $b_2 = 100 \text{ mm}$ ενώ και οι δύο έχουν ύψος $h = 80 \text{ mm}$. Ο φορέας είναι φτιαγμένος από χάλυβα με μέτρο ελαστικότητας $E = 210 \text{ GPa}$ και μέτρο διάτμησης $G = 80 \text{ GPa}$. Το ένα άκρο του φορέα είναι πακτωμένο ενώ το άλλο αφήνεται ελεύθερο. Σε όλο το μήκος του φορέα ασκείται φορτίο 50 kN/m στην κατεύθυνση θετικού z και στο ελεύθερο άκρο ασκείται δύναμη μέτρου 2 kN και κατεύθυνση θετικού y .



Με ολοκλήρωση της εξίσωσης της κάμψης θα προκύψουν οι παρακάτω εξισώσεις για κάθε καταπόνηση.

Επίπεδο x-z

$$I_{y,I} = \frac{h^3 b_2}{12}, \quad I_{y,II} = \frac{h^3 b_1}{12}$$

$$w''(x) = -\frac{M_y(x)}{EI_y} = \frac{q(L-x)^2}{2EI_y} = \frac{q}{2EI_y} (L^2 - 2Lx + x^2)$$

$$w'(x) = \frac{q}{2EI_y} \left(L^2 \cdot x - L \cdot x^2 + \frac{x^3}{3} \right) + c_1$$

$$w(x) = \frac{q}{2EI_y} \left(L^2 \cdot \frac{x^2}{2} - L \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + c_1 \cdot x + c_2$$

Επίπεδο x-y

$$I_{z,I} = \frac{b_2^3 h}{12}, \quad I_{z,II} = \frac{b_1^3 h}{12}$$

$$v''(x) = \frac{M_z(x)}{EI_z} = \frac{P(L-x)}{EI_z}$$

$$v'(x) = \frac{P}{EI_z} \left(L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + c_3$$

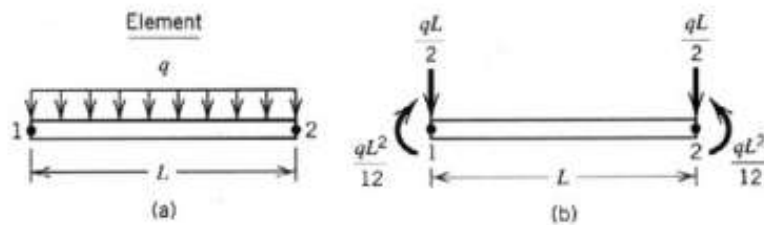
$$v(x) = \frac{P}{EI_z} \left(L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + c_3 \cdot x + c_4$$

Οι εξισώσεις θα έχουν μικρές διαφορές ανάλογα το x καθώς η διατομή αλλάζει. Από οριακές συνθήκες μπορούμε να υπολογίσουμε τα c_1 , c_2 , c_3 και c_4 για την πρώτη διατομή και με συνθήκες συνέχειας να υπολογίσουμε τα c_1 , c_2 , c_3 και c_4 για την δεύτερη. Και τελικά για $x = L$ θα έχουμε:

$$v_2 = 0.07335097001763668 \text{ mm}$$

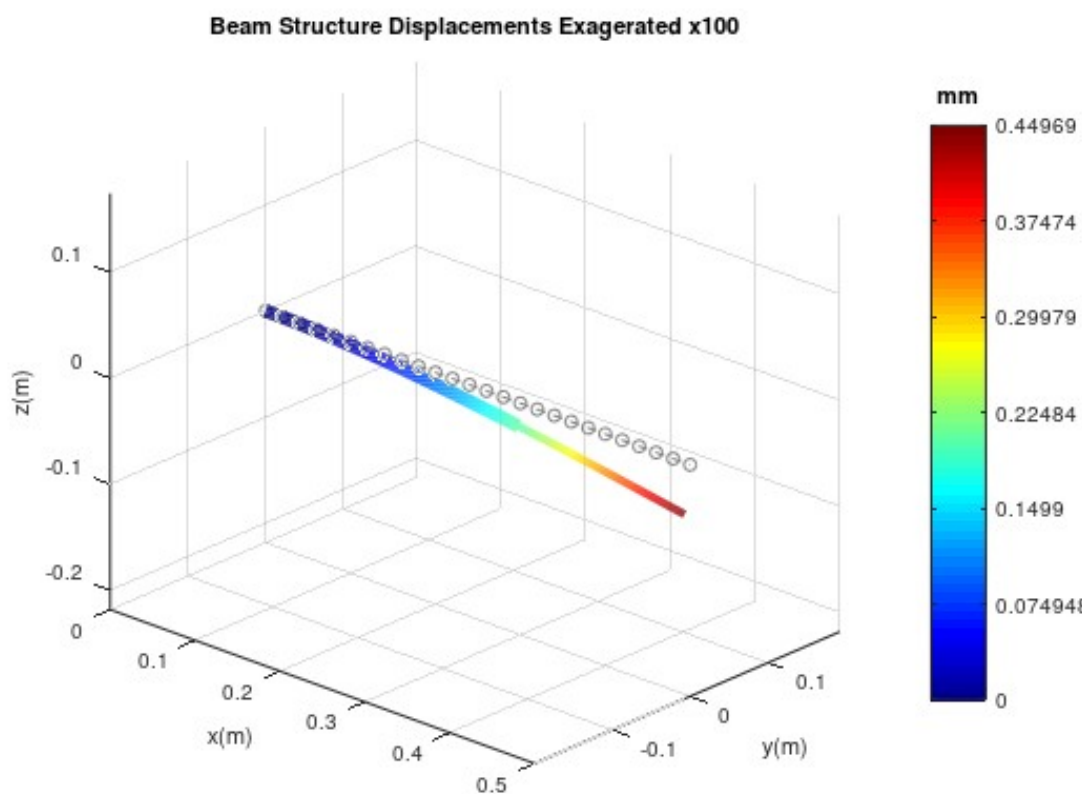
$$w_2 = 0.4434058779761902 \text{ mm}$$

Θα διακριτοποιήσουμε το φορέα σε 25 πεπερασμένα στοιχεία δοκών. Εισάγοντας τα δεδομένα στο πρόγραμμα, προσομοιώνουμε το φορτίο με τον παρακάτω κανόνα:



Και έχουμε ως αποτελέσματα:

Μεταβλητή	Αναλυτική λύση	Πρόγραμμα	Σφάλμα (%)
v_2	0.073350970017637 mm	0.073350970018172 mm	$7.295680770261769 \cdot 10^{-10}$
w_2	0.44340587797619 mm	0.443663194459261 mm	$5.803181596166980 \cdot 10^{-4}$



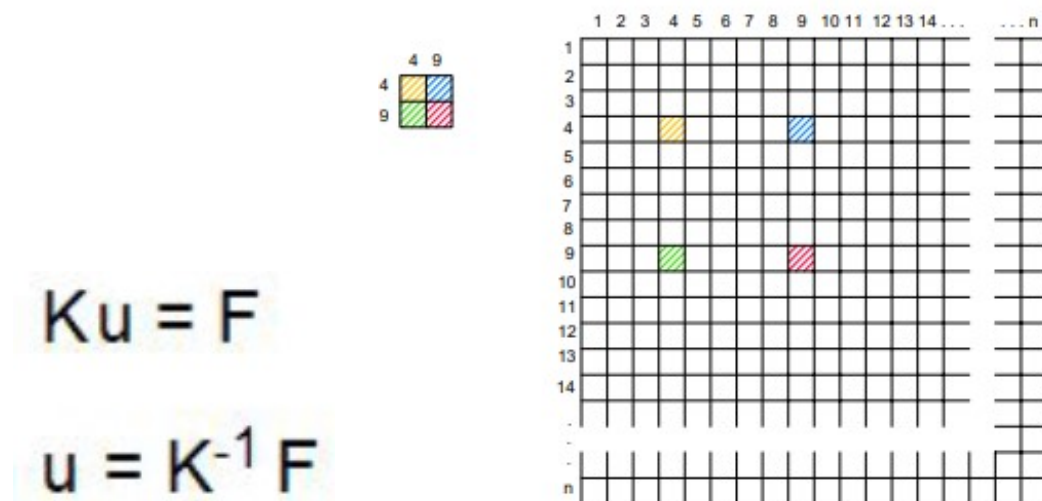
Λειτουργία Προγράμματος:

Το πρόγραμμα αποτελείται από τέσσερα τμήματα. Στο πρώτο γίνεται η κωδικοποίηση των δεδομένων με σχετικά ευανάγνωστο τρόπο. Το πρώτο μέρος, σε αντίθεση με τα υπόλοιπα τρία, δεν είναι γενικευμένο, δηλαδή κάθε πρόβλημα χρειάζεται ένα νέο αρχείο για να λυθεί. Το δεύτερο μέρος είναι ο PreviewPlotter και παίρνει τα αρχικά δεδομένα του πρώτου τμήματος για να δημιουργήσει μια οπτικοποίηση των κατασκευών. Το τρίτο μέρος είναι ο Solver και είναι υπεύθυνο για την αποκωδικοποίηση των δεδομένων του πρώτου μέρους και την επίλυση του προβλήματος. Επίσης αναλαμβάνει μερικές πρόσθετες λειτουργίες όπως τον υπολογισμό των εξωτερικών δυνάμεων. Η λειτουργία του εξετάζεται παρακάτω. Τέλος ο PostProcessor παίρνει τα δεδομένα του Solver και τα απεικονίζει.

Βήματα του Solver:

Το σύστημα που πρέπει να επιλυθεί είναι το $Ku = F$. Όπου K ο πίνακας στιβαρότητας u το διάνυσμα μετατοπίσεων και F το διάνυσμα δυνάμεων. Αρχικά δημιουργείται ένα άδριο μητρώο στιβαρότητας της όλης κατασκευής, με σειρές και στήλες, όσοι οι βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος. Μετά επαναληπτικά υπολογίζεται ο υποπίνακας κάθε στοιχείου, περιστρέφεται και συναθροίζεται στο μητρώο στιβαρότητας. Έπειτα, δημιουργείται το διάνυσμα των δυνάμεων και προστίθενται οι εξωτερικές δυνάμεις. Τέλος, ο πίνακας μετασχηματίζεται ανάλογα με τις εξισώσεις των περιορισμών, και έτσι το σύστημα καθίσταται επιλύσιμο.

Συνάθροιση υποπινάκων



Εφαρμογή constraints: Τα constraints δίνονται με πίνακες των συντελεστών των εξισώσεων που περιγράφουν τις "κινήσεις" των βαθμών ελευθερίας. Μπορούν να συσχετίζουν πολλούς βαθμούς ελευθερίας, ή να περιέχουν μόνο ένα. Επίσης μπορούν να είναι ομογενής και μη. Οι περιορισμοί είναι ότι δεν μπορούν να περιέχουν μη γραμμικούς όρους, και πρέπει οι εξισώσεις να είναι σύμφωνες μεταξύ

τους, δηλαδή το σύστημα που θα δημιουργούν να δέχεται λύση. Η εφαρμογή των constraints γίνεται με τη μέθοδο **Master-Slave**. Αρχικά δημιουργείται το σύστημα εξισώσεων των constraints και μετασχηματίζεται στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή (reduced row echelon form) του. Μετά τα οδηγία στοιχεία παίρνονται ως slave elements και με χρήση των εξισώσεων δημιουργείται ένας πίνακας μετασχηματισμού **T** τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να μετασχηματίσουμε το αρχικό σύστημα **Ku = F**.

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{u}' + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{K}\mathbf{T}\mathbf{u}' + \mathbf{K}\mathbf{b} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \mathbf{u}' = \mathbf{T}^T (\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{b})$$

Συμπεράσματα:

Και στα τρία προβλήματα το πρόγραμμα παρουσιάζει πολύ υψηλή ακρίβεια. Τα μικρά έως και μηδαμινά σφάλματα που προκύπτουν μπορούν να αποδοθούν στην περιορισμένη ακρίβεια μηχανής. Το μόνο σχετικά μεγάλο σφάλμα, το οποίο όμως παραμένει πολύ μικρό (το w_2 στο φορέα δοκού τάξης $10^{-4} \%$), μπορεί να εξηγηθεί από το "γεμάτο" πίνακα δυνάμεων σε εκείνη τη διάσταση, καθώς έτσι γίνονται πράξεις με μή μηδενικούς αριθμούς και περιορίζουν σημαντικά την ακρίβεια. Συμπαιρνούμε ότι μπορούμε να συνεχίσουμε σε πιο σύνθετα προβλήματα με μεγάλη εμπιστοσύνη στον Solver.

Μέρος Β:

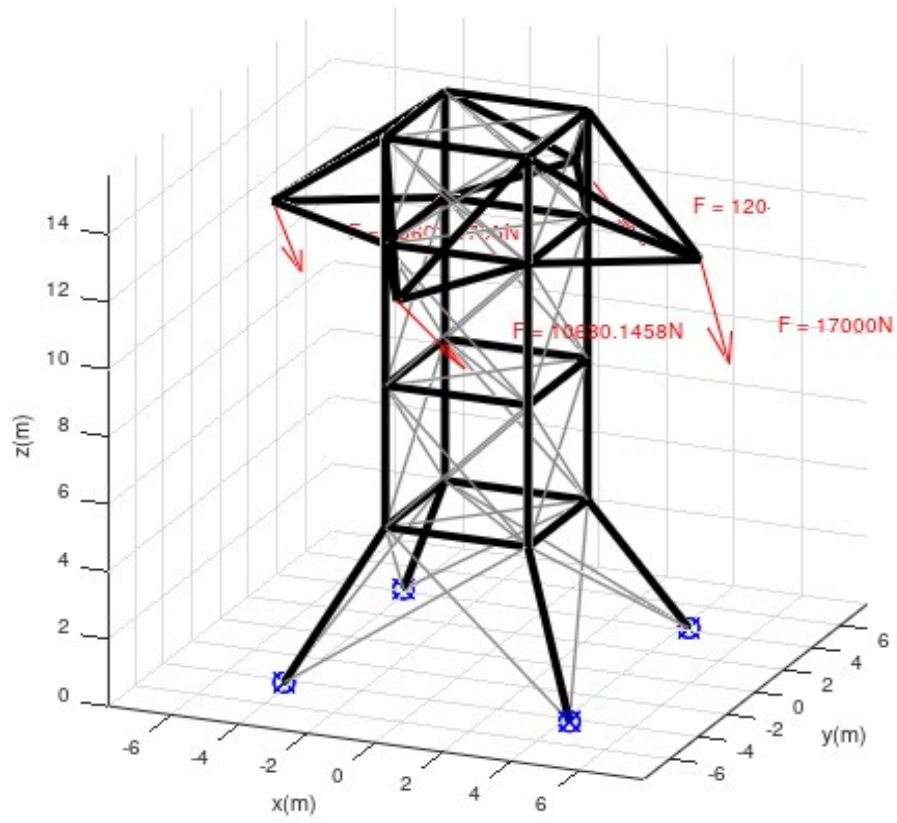
Υπολογισμός πυλώνα υψηλής τάσεως

Ο πυλώνας είναι φτιαγμένος από χάλυβα με μέτρο ελαστικότητας $E = 210 \text{ GPa}$ και μέτρο διάτμησης $G = 80 \text{ GPa}$. Έχει ύψος 15.75 m , στηρίζεται στα τέσσερα σημεία της βάσης του ενώ ασκούνται δυνάμεις στις τέσσερις κορυφές του.

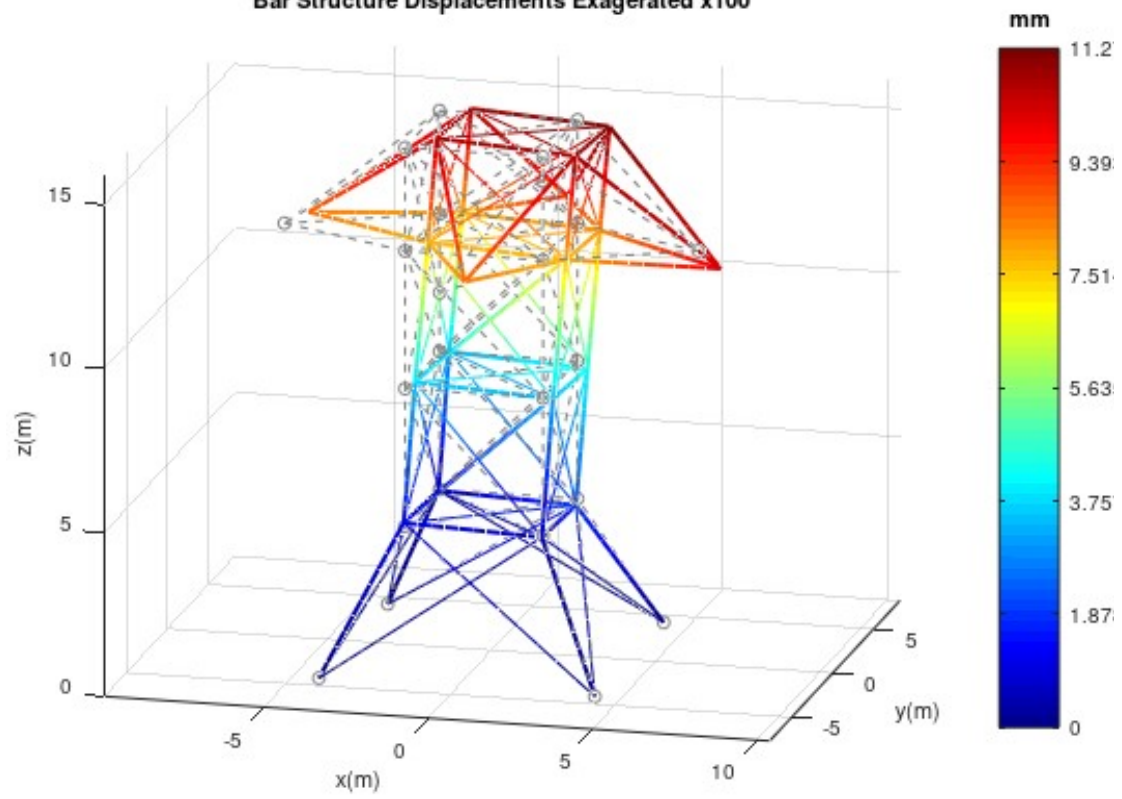
Δομή ράβδων:

Σε αυτή την περίπτωση ο πυλώνας αποτελείται από αρθρωτές ράβδους. Οι διαγώνιες ράβδοι (χρωματισμένες γκρι) έχουν εμβαδόν διατομής 2.82 cm^2 ενώ όλες οι υπόλοιπες (χρωματισμένες μαύρες) έχουν εμβαδόν διατομής 8.46 cm^2 .

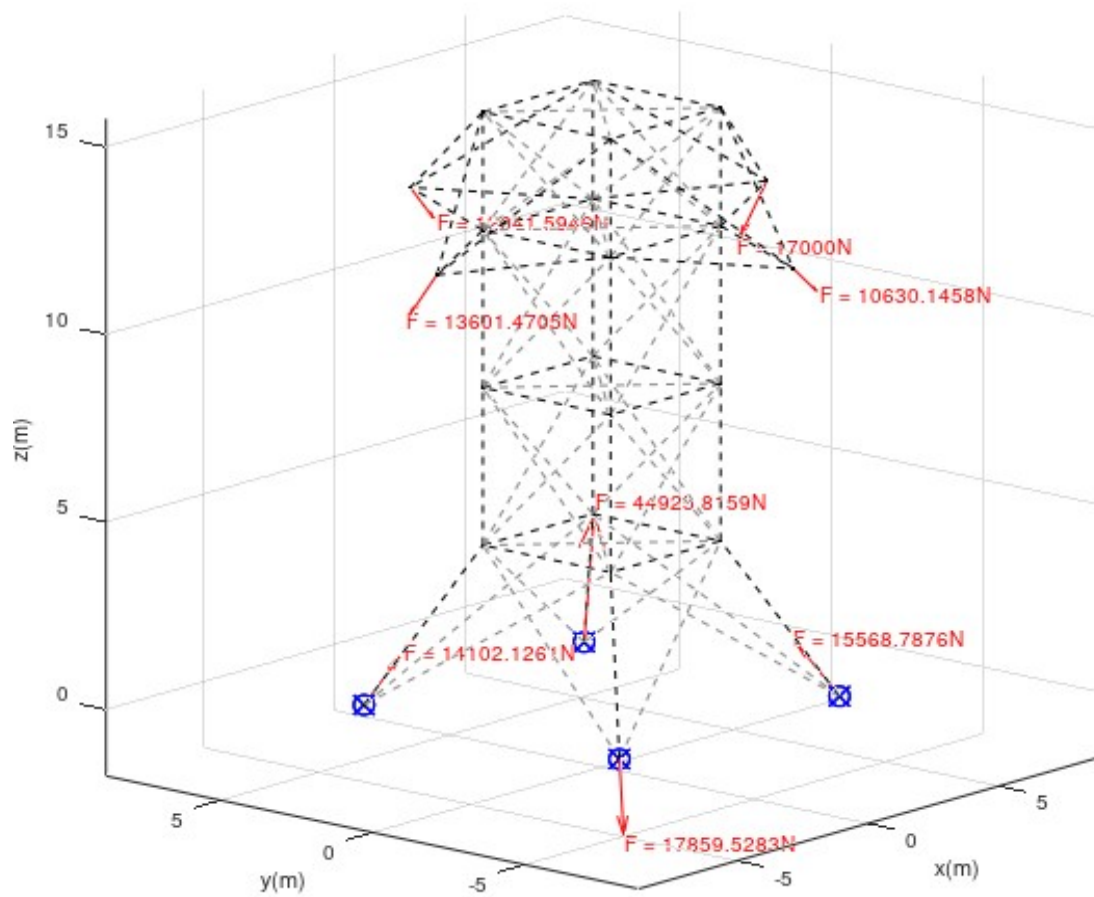
Bar Structure Preview



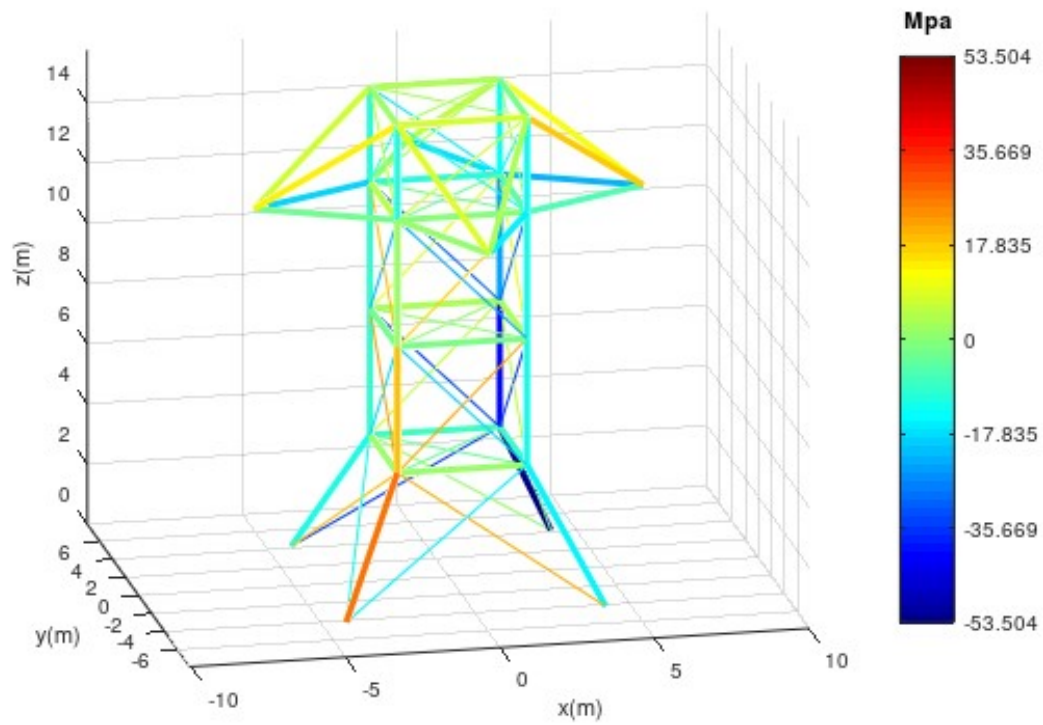
Bar Structure Displacements Exaggerated x100



Bar Structure External Forces

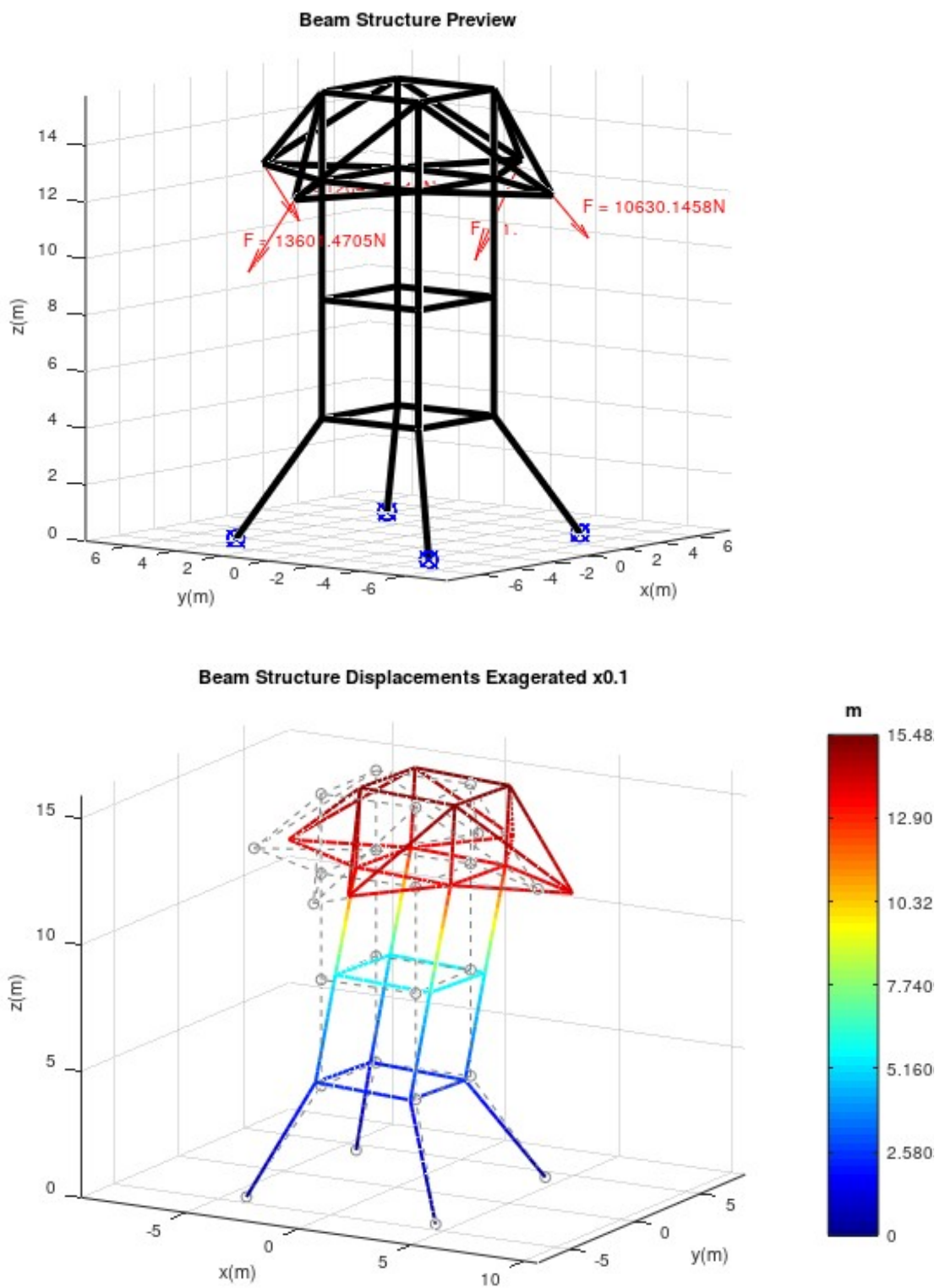


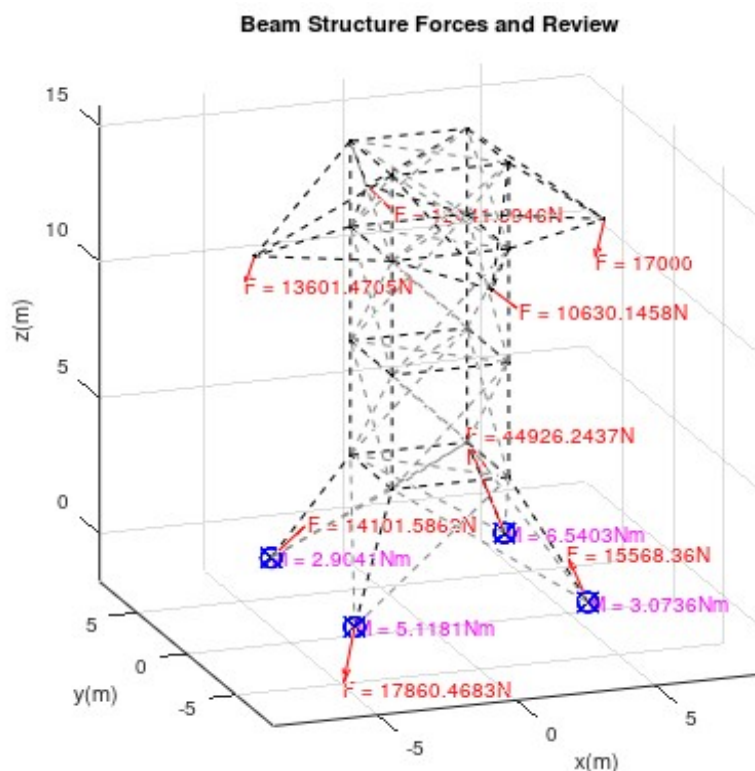
Bar Structure Stresses



Δομή δοκών:

Σε αυτή την περίπτωση ο πυλώνας αποτελείται συγκολλημένες δοκούς. Οι δοκοί έχουν κυκλική διατομή με ακτίνα 1.34 cm.





Παρατηρήσεις:

Η δομή δοκών φαίνεται να έχει πολλές τάξεις μικρότερη στιβαρότητα από τη δομή ράβδων. Τα αποτελέσματα δεν θα ήταν έμπιστα ακόμα και αν η επίλυση είναι σωστή, καθώς η γραμμική υπόθεση για μικρές παραμορφώσεις θα ήταν λανθασμένη. Οι τεράστιες μετατοπίσεις της δομής ίσως υποδεικνύουν λάθη στο "στήσιμο" του προβλήματος, έτσι κρίνεται σημαντικός τουλάχιστον ένας προκαταρκτικός έλεγχος. Από εμπειρία γνωρίζουμε ότι σε ένα δικτύωμα με διαγώνια στοιχεία τα αξονικά φορτία είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερα και υπερκαλύπτουν τα υπόλοιπα. Έτσι μπορεί να γίνει ένας αρχικός έλεγχος φτιάχνοντας ένα πυκνό δικτύωμα με στοιχεία δοκών και συγκρίνοντας το με αυτό των ράβδων. Η δομή θα "περάσει" τον έλεγχο αν οι μετατοπίσεις που προκύπτουν είναι πολύ παρόμοιες αλλά λίγο μικρότερες (λόγω της πρόσθετης στιβαρότητας των δοκών) από αυτές της δομής ράβδων. Όπως και φαίνεται παρακάτω.

