



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών και
Μηχανολογικού Σχεδιασμού



Εργασία στα πλαίσια του μαθήματος: Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Τυπολογισμός Δισδιάστατων Φορέων

Χρήστος Γεωργιάδης 6496
Διονύσης Νεόκοσμος Ηλιάδης 5857
Δημήτρης Κιούσης 6695
Αντώνης Κυριακόπουλος 6337
Αλεξία Μήτσογλου 5832

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβρης 2022

Περίληψη

Σκοπός της παφούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη προγράμματος πεπερασμένων στοχείων για την ανάλυση δισδιάστατης πλάκας υπό καμπτική και εφελκυστική φόρτιση. Συγχεκριμένα, το πρόγραμμα πρέπει να κατασκευάζει αυτόματα το πλέγμα, να εφαρμόζει τη θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων και έτσι να υπολογίζει τις μετατοπίσεις, τις παραμορφώσεις και τις τάσεις των κόμβων. Για την ανάλυση πλάκας με οπή, το πρόγραμμα πρέπει να υπολογίζει και τον συντελεστή συγχέντρωσης τάσης στην οπή. Ο χρήστης καθορίζει το υλικό, τη γεωμετρία της πλάκας, τη διάμετρο της οπής και το πλήθος των στοιχείων που θα δημιουργηθούν. Παρακάτω μελετάται η φόρτιση πλάκας με οπή και επαληθεύεται η ακρίβεια του προγράμματος με αναλυτικούς υπολογισμούς μια απλούστερης περίπτωσης.

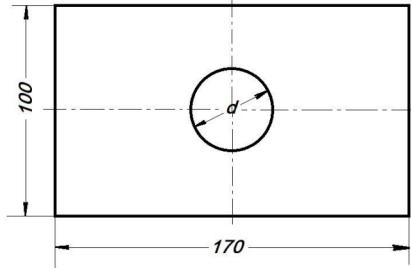
Περιεχόμενα

1 Διατύπωση Προβλήματος	1
1.1 Δεδομένα υλικού και γεωμετρίας	1
2 Περιγραφή προγράμματος	1
2.1 Μαθηματικό υπόβαθρο	1
2.2 Δημιουργία πλέγματος	2
2.3 Οριακές συνθήκες και εξωτερικές φορτίσεις	3
3 Αποτελέσματα	4
3.1 Εφελκυσμός	4
3.2 Κάμψη	8
3.3 Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης	11
4 Επαλήθευση ακρίβειας προγράμματος	13
4.1 Πλάκα σε εφελκυσμό	13
4.2 Πλάκα σε κάμψη	15
5 Συμπεράσματα	17

1 Διατύπωση Προβλήματος

1.1 Δεδομένα υλικού και γεωμετρίας

Η προς ανάλυση πλάκα έχει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που φαίνονται στο Σχήμα 1, όπου τα μήκη των πλευρών είναι μετρημένα σε mm . Η διάμετρος της οπής είναι $d = 30mm$ και το πάχος της πλάκας $t = 4mm$. Το υλικό είναι κοινός χάλυβας με μέτρο ελαστικότητας $E = 210.000 N/mm^2$, λόγο Poisson $\nu = 0.3$ και μέτρο διάτμησης $G = 80.769 N/mm^2$.

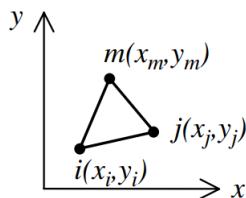


Σχήμα 1: Η γεωμετρία της πλάκας

2 Περιγραφή προγράμματος

2.1 Μαθηματικό υπόβαθρο

Για την μοντελοποίηση του προβλήματος χρησιμοποιούνται τριγωνικά στοιχεία (CST triangle elements) λόγω ευκολίας στην ανάπτυξη αλγορίθμου και της ικανότητάς τους να προσαρμόζονται αρκετά καλά σε γεωμετρίες με καμπυλότητες. Κάθε στοιχείο χαρακτηρίζεται από το μέτρο ελαστικότητας E , το λόγο Poisson ν και το πάχος t . Επίσης, κάθε στοιχείο αποτελείται από τρεις κόμβους των οποίων οι οιλικές συντεταγμένες φαίνονται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2: Το τριγωνικό στοιχείο

Το μητρώο στιβαρότητας για κάθε στοιχείο υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$[k] = tA[B^T][D][B] \quad (1)$$

όπου

A το εμβαδό του στοιχείου το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$2A = x_i(y_j - y_m) + x_j(y_m - y_i) + x_m(y_i - y_j) \quad (2)$$

B ο πίνακας μορφής

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

όπου τα β και γ βρίσκονται ως εξής:

$$\beta_i = y_i - y_m$$

$$\beta_j = y_m - y_i$$

$$\beta_m = y_i - y_j$$

$$\gamma_i = x_m - x_j$$

$$\gamma_j = x_i - x_m$$

$$\beta_m = x_j - x_i$$

και D ο πίνακας δυσκαμψίας για επίπεδη εντατική κατάσταση (plain stress) που δίνεται από τη σχέση:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Με βάση τα μητρώα στιβαρότητας των επιμέρους στοιχείων, συντίθεται το ολικό μητρώο στιβαρότητας και υπολογίζονται οι μετατοπίσεις και οι αντιδράσεις μέσω της σχέσης:

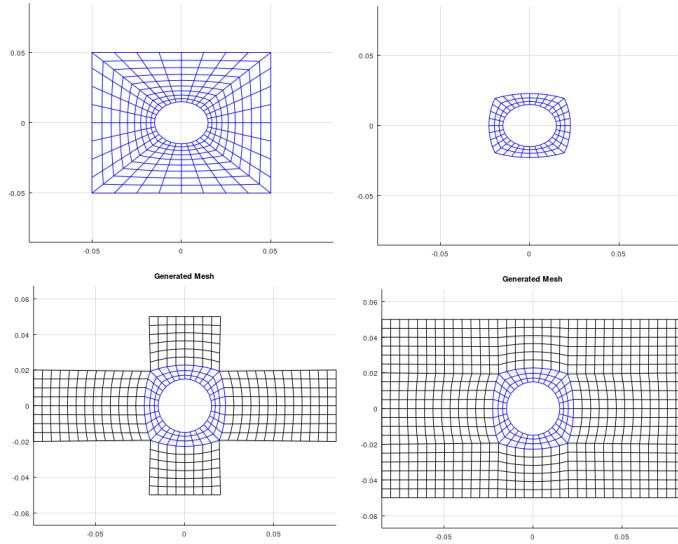
$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (5)$$

και οι τάσεις:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{u\} \quad (6)$$

2.2 Δημιουργία πλέγματος

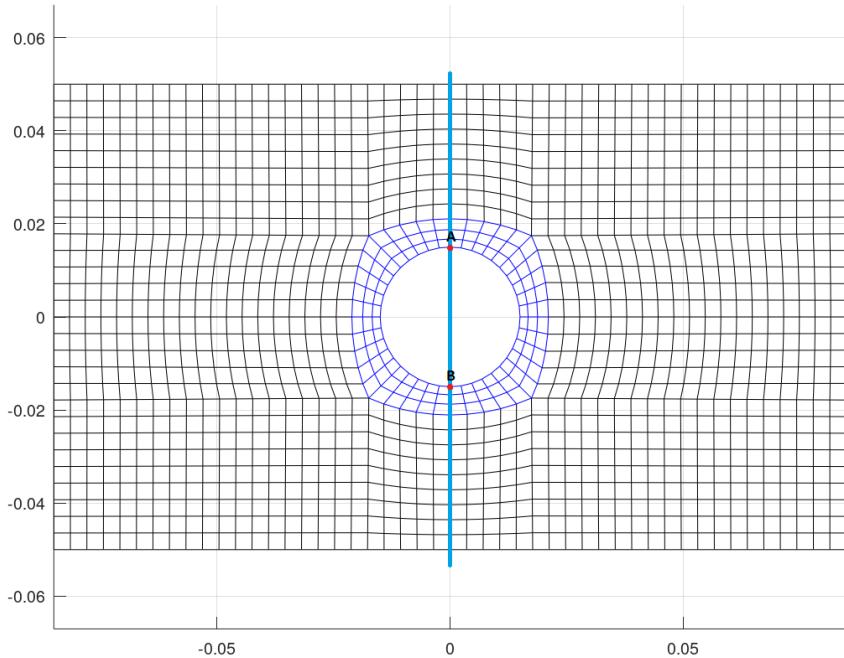
Για τη δημιουργία του πλέγματος ζητείται ο προσδιορισμός των κόμβων σε κάθε τεταρτημόριο της οπής, που πρέπει να υπερβαίνει το 4. Αρχικά, το πλέγμα δημιουργείται ακτινικά γύρω από την οπή, και από κυκλική γεωμετρία αλλάζει σταδιακά σε τετραγωνική. Όστερα κρατούνται μόνο τα κεντρικά τετράπλευρα και το πλέγμα επεκτείνεται από τις πλευρές του εναπομείναντος σχήματος ως την περίμετρο του τεμαχίου, σταυρωτά. Τέλος, γεμίζονται οι γωνίες του τεμαχίου. Στη συνέχεια τα στοιχεία που δημιουργούνται, χωρίζονται σε δύο τριγωνικά το καθένα, ενώνοντας τις δύο κοντινότερες γωνίες του κάθε τετραπλεύρου για να δημιουργηθούν όσο γίνεται καλώς ορισμένα τρίγωνα.



Σχήμα 3: Βήματα για τη δημιουργία του πλέγματος

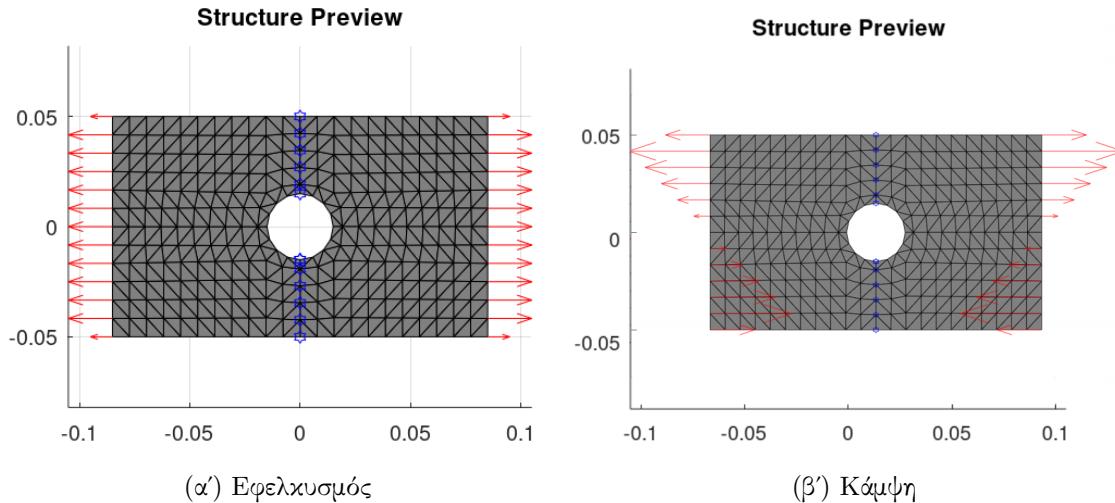
2.3 Οριακές συνθήκες και εξωτερικές φορτίσεις

Για να καθιστάται το πρόβλημα επιλύσιμο, έχουν περιοριστεί με $dx = 0$ όλοι οι κόμβοι στον άξονα συμμετρίας, καθώς γνωρίζουμε ήδη ότι εκεί η μετατόπιση στο x θα είναι μηδενική. Επιπλέον, έχει προστεθεί MPC στους δύο κόμβους άνω και κάτω της οπής (A και B) όπου περιορίζει τις μετατοπίσεις στον y με $dy_A + dy_B = 0$, έτσι ώστε οι μετατοπίσεις στα αποτελέσματα να εμφανίζονται συμμετρικές. Το MPC προστίθεται μόνο για αισθητικούς λόγους στα αποτελέσματα, καθώς αυτά θα παρέμεναν ορθά με την ακινητοποίηση οποιουδήποτε κόμβου στον y .



Σχήμα 4: Το παραγόμενο πλέγμα με τετραπλευρικά στοιχεία και οι κόμβοι που περιορίζονται

Η πλάκα αναλύεται σε δύο συνθήκες φόρτισης: καθαρό εφελκυσμό και καθαρή κάμψη. Οι καταπονήσεις ασκούνται συμμετρικά και στις δύο πλευρές του τεμαχίου. Οι φορτίσεις μπορούν να εισάγονται ελεύθερα από το χρήστη, στον εφελκυσμό ως δύναμη και στην κάμψη ως ροπή. Μετά προσομοιώνονται με φορτία διατομής όπου στη συνέχεια μοντελοποιούνται με δυνάμεις στους κόμβους, ανάλογα το φορτίο που αναλογεί στον καθένα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουν επιλεγεί για τον εφελκυσμό δυνάμεις μέτρου $10kN$ και για τη κάμψη ροπές μέτρου $500Nm$.



Σχήμα 5: Οι 2 περιπτώσεις φόρτισης

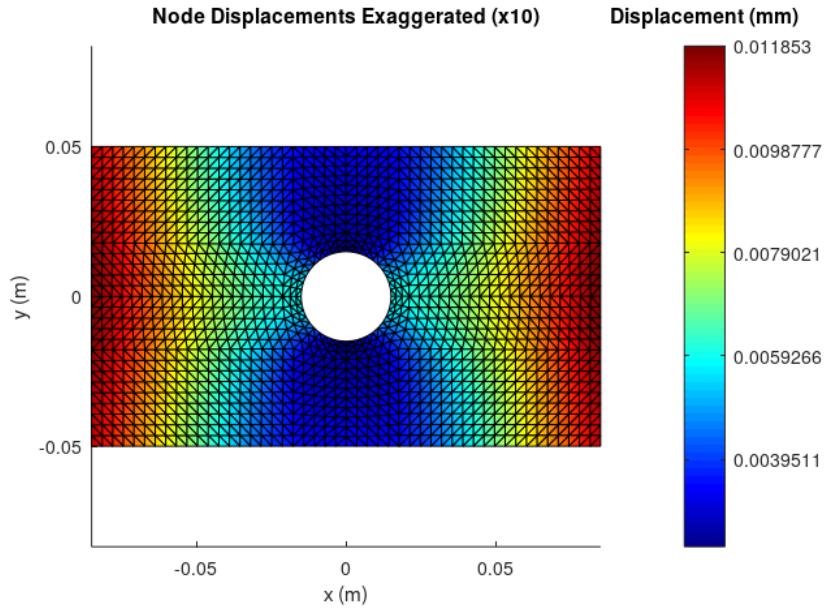
Το πλέγμα του σχήματος 5 έχει ελάχιστα στοιχεία για να είναι πιο ευδιάχριτοι οι περιορισμένοι κόμβοι και οι φορτίσεις, ενώ για την ανάλυση χρησιμοποιείται πιο πυκνό πλέγμα.

3 Αποτελέσματα

3.1 Εφελκυσμός

Μετατοπίσεις κόμβων

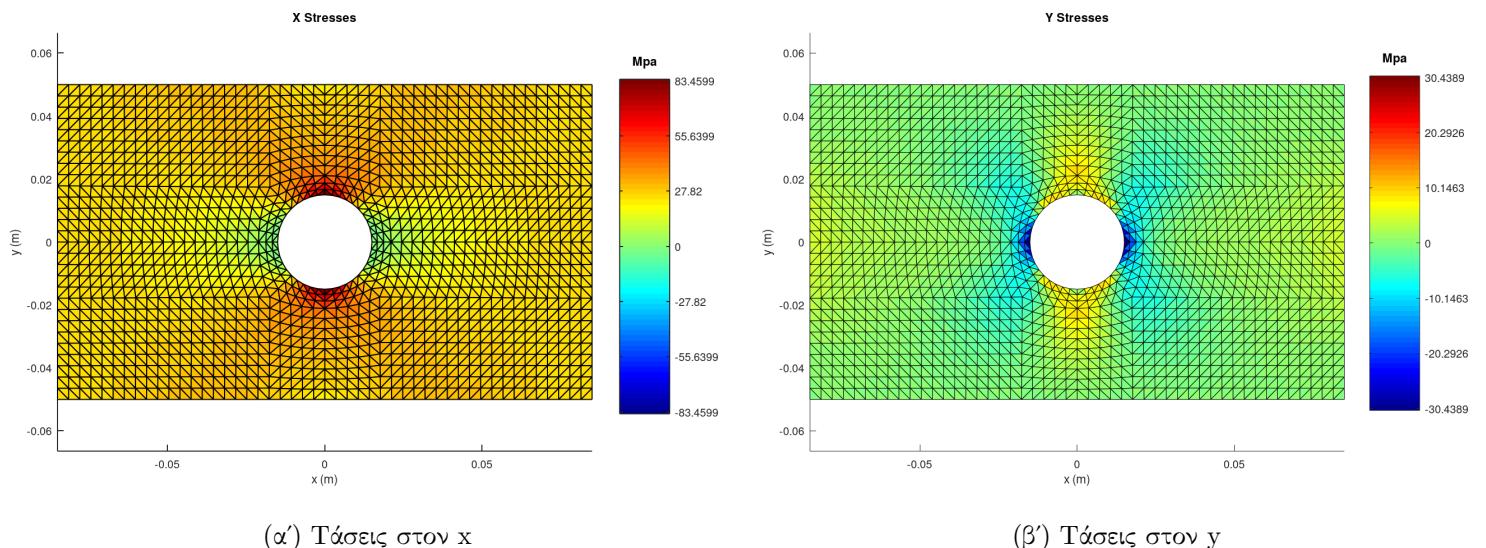
Στο σχήμα 6 παρουσιάζονται οι συνολικές μετατοπίσεις των κόμβων. Οι κόμβοι με $x = 0$ τίθενται ακίνητοι για να λυθεί το πρόβλημα (οριακές συνθήκες) και άρα οι μετατοπίσεις τους είναι μηδενικές. Οι μεγαλύτερες μετατοπίσεις ($\approx 0.01mm$) παρατηρούνται στους κόμβους των δύο άκρων της πλάκας, όπου ασκείται η εξωτερική φόρτιση. Αν αναλυόταν πλάκα δίχως οπή, οι χρωματικές ζώνες που δείχνουν τις μετατοπίσεις θα ήταν παράλληλες ως προς τον άξονα y . Όμως, λόγω της συγκέντρωσης τάσεων της εγκοπής, παρατηρούνται μεγαλύτερες τάσεις και ως συνέπεια, μετατοπίσεις γύρω από την οπή κατά τη διεύθυνση της φόρτισης. Λόγω των μεγαλύτερων μετατοπίσεων των κόμβων αριστερά και δεξιά της οπής παρατηρείται διαλάτυνσή της, η οποία θα ήταν περισσότερο προφανής υπό μεγαλύτερη εξωτερική φόρτιση.



Σχήμα 6: Μετατοπίσεις κόμβων στον εφελκυσμό

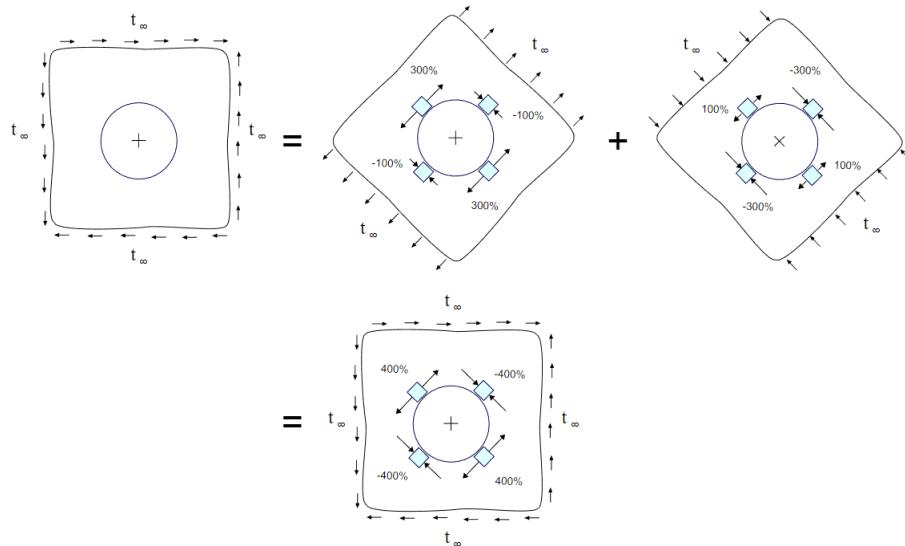
Τάσεις

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν φαίνονται στο σχήμα 7. Κατά τον άξονα x αναπτύσσονται εφελκυστικές τάσεις σχεδόν σε όλη την πλάκα. Οι μέγιστες τάσεις εμφανίζονται πάνω και κάτω από την οπή και έχουν μέτρο $83.46 MPa$. Στα σημεία αριστερά και δεξιά της οπής η τάση σ_x είναι μηδενική. Αντίθετα, σε αυτά τα σημεία στον άξονα y εμφανίζονται οι μέγιστες τάσεις και είναι θλιπτικές με μέτρο $30.4 MPa$. Αυτό επιβεβαιώνει ότι η οπή υφίσταται όντως μια διαπλάτυνση όπως προαναφέρθηκε.

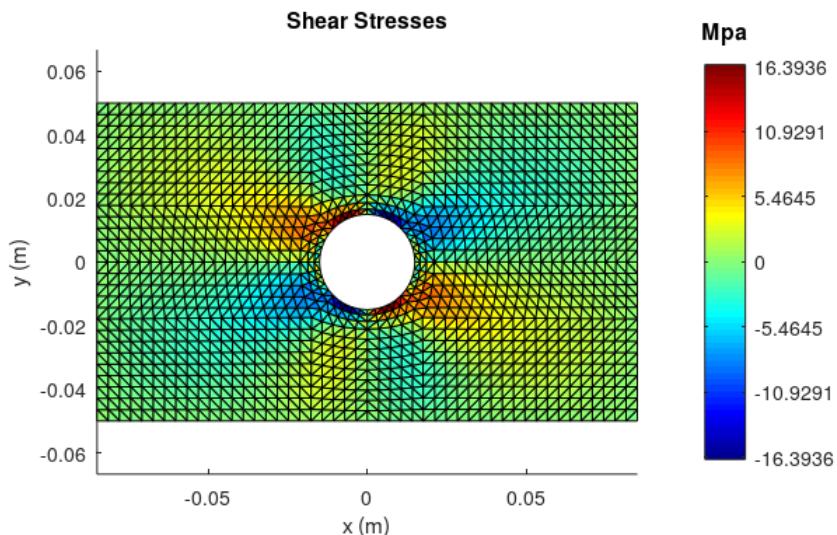


Σχήμα 7: Οι ορθές τάσεις στον εφελκυσμό

Για καλύτερη κατανόηση των διατμητικών τάσεων, μπορούν να υιοθετηθούν ως επαλληλία 2 κυρίων τάσεων περιστραμένων κατά $\pm 45^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα 8. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το πρόγραμμα συμφωνούν πλήρως με τη θεωρία και παρατίθενται στο σχήμα 8. Οι μέγιστες διατμητικές τάσεις (θετικές και αρνητικές) εμφανίζονται γύρω από την οπή και έχουν μέτρο $16.4 MPa$.



Σχήμα 8: Γραφική εξήγηση διατμητικών τάσεων

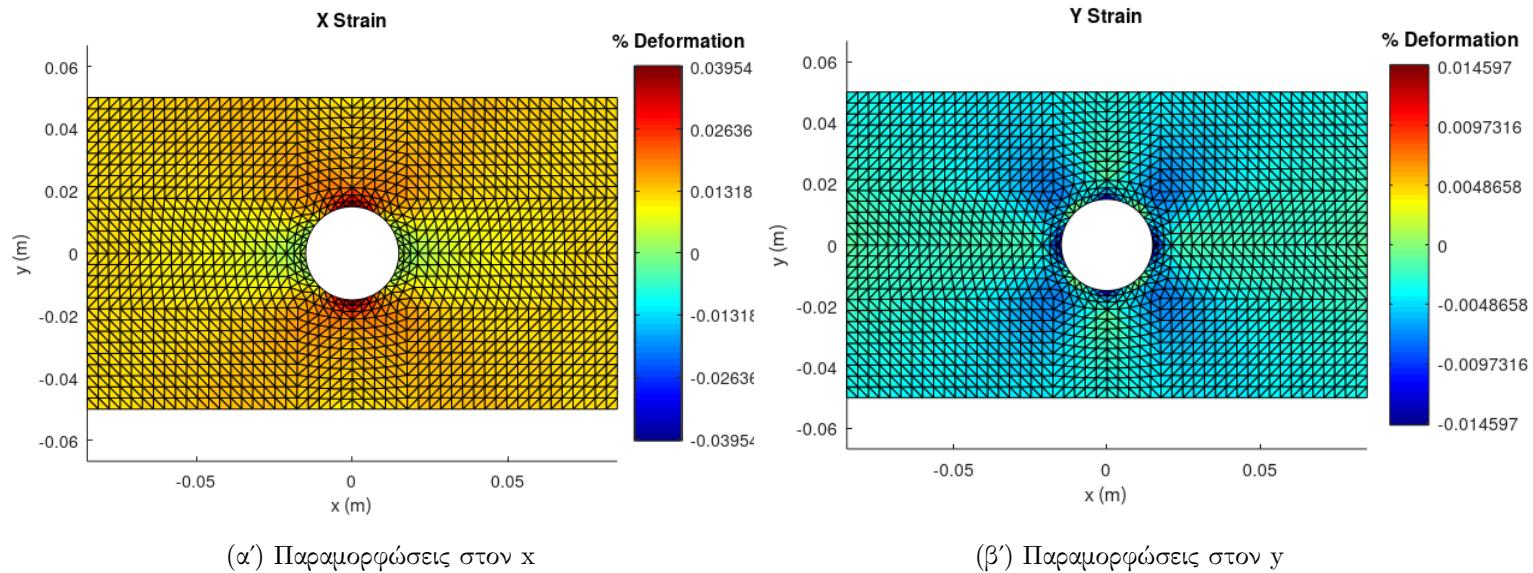


Σχήμα 9: Διατμητικές τάσεις στον εφελκυσμό

Παραμορφώσεις

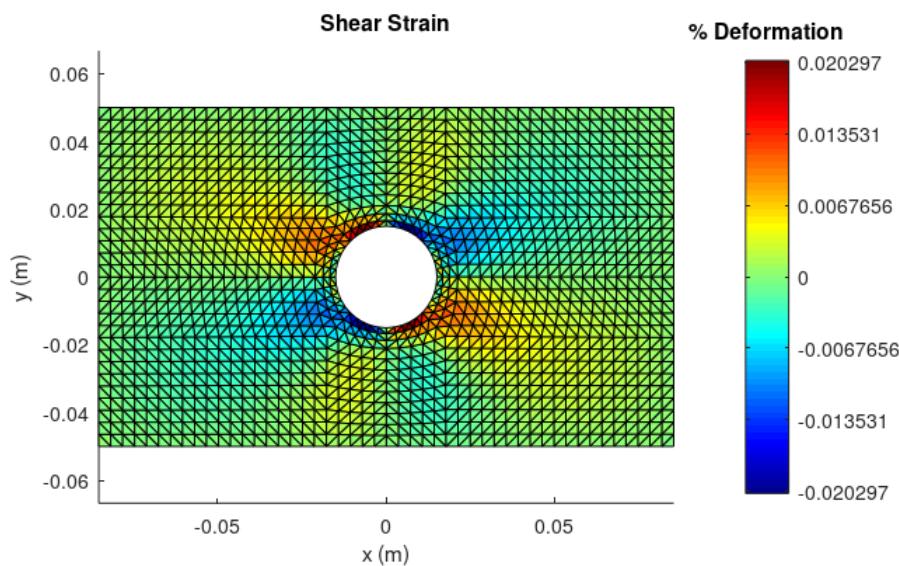
Όσον αφορά τις παραμορφώσεις, στον άξονα x ακολουθούν την τάση σ_x . Σχεδόν όλα τα στοιχεία αυξάνουν τη διάστασή τους σε αυτή τη διεύθυνση, με την μέγιστη παραμόρφωση να

συναντάται στο πάνω και κάτω μέρος της οπής και να έχει μέτρο ≈ 0.04 . Εφόσον τα περισσότερα στοιχεία παραμορφώνονται εφελκυστικά κατά τον άξονα x, αναμένεται να μειώνεται η διάστασή τους στον άξονα y. Αυτό γίνεται προφανές και στο σχήμα 10β', όπου σχεδόν όλα τα στοιχεία παραμορφώνονται θλιπτικά. Η μέγιστη τιμή των παραμορφώσεων αυτών είναι ≈ 0.015 .



Σχήμα 10: Οι παραμορφώσεις στον εφελκυσμό

Το διάγραμμα των διατμητικών παραμορφώσεων ταυτίζεται με το διάγραμμα των διατμητικών τάσεων και δίνεται παρακάτω (Σχήμα 11).

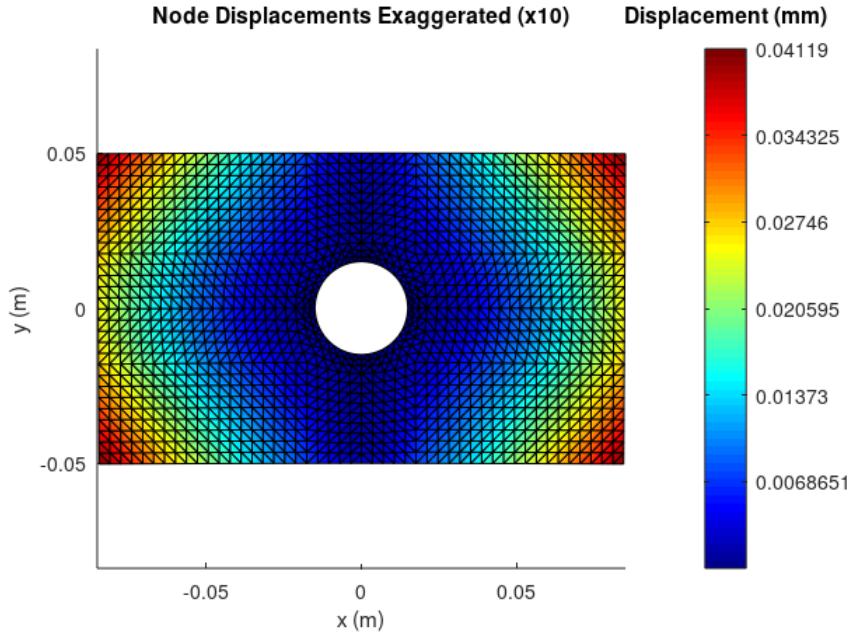


Σχήμα 11: Διατμητικές παραμορφώσεις

3.2 Κάμψη

Μετατοπίσεις κόμβων

Οι συνολικές μετατοπίσεις των κόμβων ακολουθούν την καμπτική φόρτιση, όπως αυτή έχει οριστεί, και λαμβάνουν μέγιστες τιμές ($\approx 0.04mm$) στις άκρες των πλευρών της πλάκας.

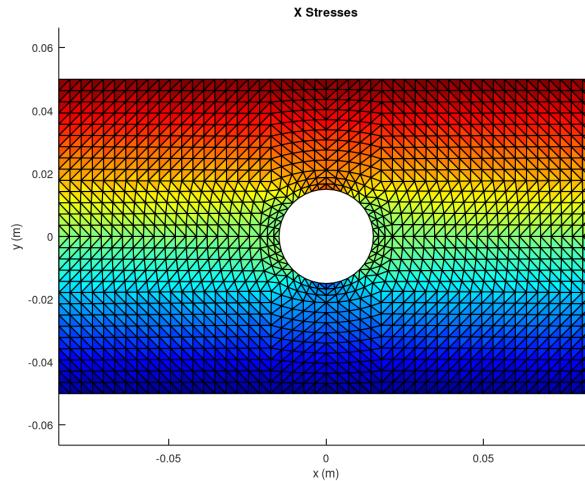


Σχήμα 12: Μετατοπίσεις κόμβων στην κάμψη

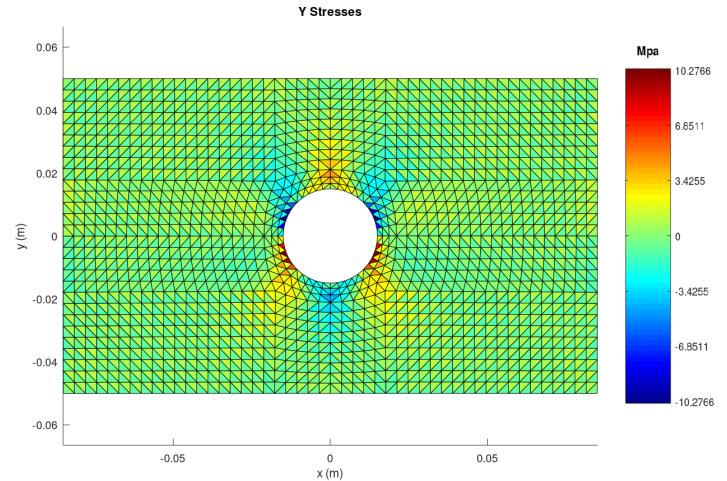
Τάσεις

Η καμπτική φόρτιση μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία εφελκυσμού στο πάνω ήμισυ της πλάκας και θλίψης στο κάτω τμήμα της. Οι μέγιστες εφελκυστικές τάσεις ($\approx 76MPa$) κατά τον άξονα x δημιουργούνται στο τμήμα της πλάκας πάνω από την οπή, ενώ κάτω από την οπή δημιουργούνται τάσεις ίδιου μεγέθους αλλά θλιπτικές (σχήμα 13α'). Κατά τον άξονα y οι τάσεις στο πάνω τμήμα της πλάκας είναι αντίστοιχες με αυτές που παρουσιάστηκαν προηγουμένως στο διάγραμμα του εφεκλυσμού, ενώ στο κάτω τμήμα της είναι ακριβώς αντίθετες (13β').

Με την ίδια λογική εξηγούνται και οι διατμητικές τάσεις που φαίνονται στο σχήμα 14. Οι μέγιστες διατμητικές τάσεις λαμβάνουν την τιμή $6.15MPa$.

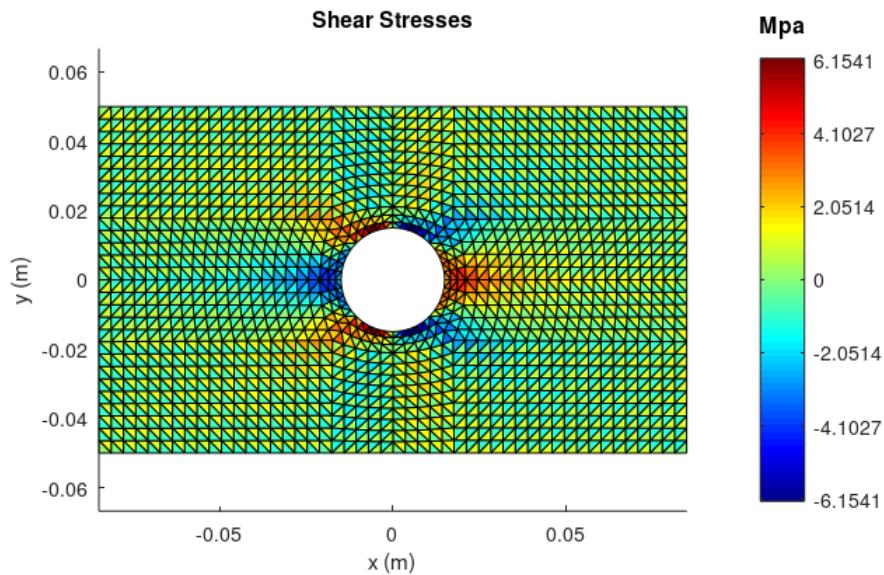


(α') Τάσεις στον x



(β') Τάσεις στον y

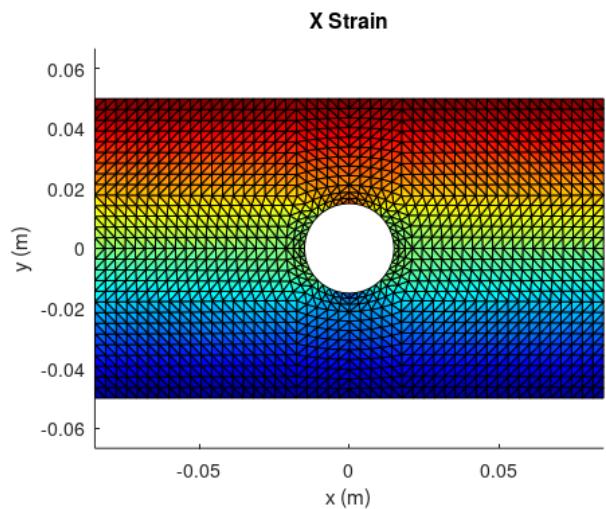
Σχήμα 13: Οι ορθές τάσεις στην κάμψη



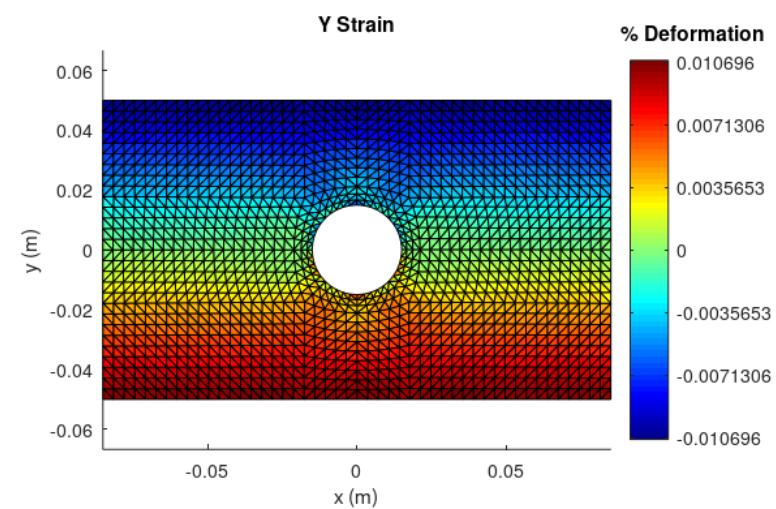
Σχήμα 14: Διατμητικές τάσεις στην κάμψη

Παραμορφώσεις

Κατά τον άξονα x οι παραμορφώσεις των στοιχείων ακολουθούν και πάλι την τάση σ_x . Στο άνω τμήμα της πλάκας τα στοιχεία εφελκύονται και στο κάτω ψλίβονται με μέγιστο μέτρο ≈ 0.036 (σχήμα 15α'). Κατά τον y άξονα, τα στοιχεία παραμορφώνονται αντίθετα από την παραμόρφωσή τους στον x. Οι μέγιστες παραμορφώσεις είναι ± 0.01 και συναντώνται σε 2 ζώνες, στο άνω και κάτω ήμισυ της πλάκας (σχήμα 15β').



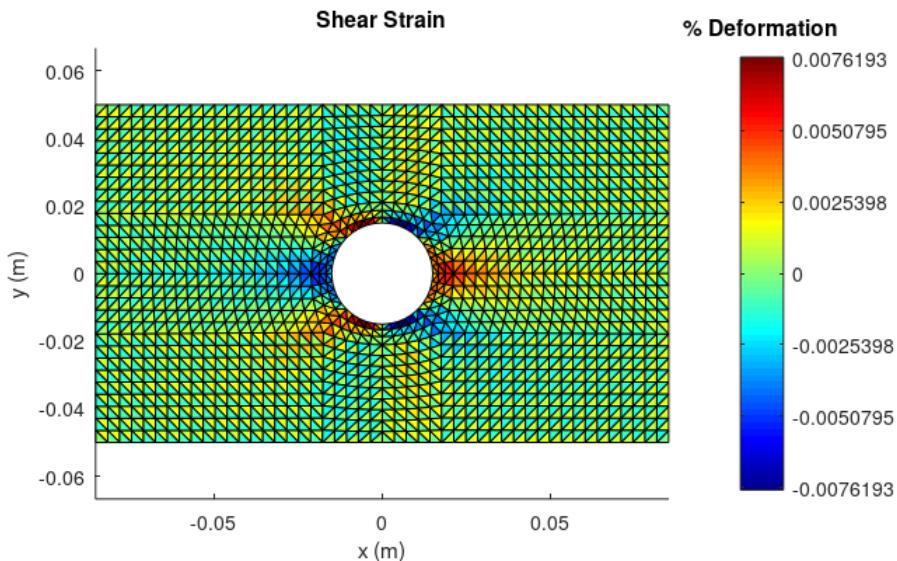
(α') Παραμορφώσεις στον x



(β') Παραμορφώσεις στον y

Σχήμα 15: Οι παραμορφώσεις στην κάμψη

Οι διατμητικές παραμορφώσεις ταυτίζονται ποιοτικά με τις διατμητικές τάσεις. Είναι μέγιστες γύρω από την οπή και στις περιοχές όπου μπορεί να θεωρηθεί ότι η φόρτιση αλλάζει από εφελκυστική σε θλιπτική και λαμβάνουν τις τιμές ≈ 0.007 (σχήμα 16).



Σχήμα 16: Διατμητικές τάσεις στην κάμψη

3.3 Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης

Εκτός από τα παραπάνω διαγραμματικά αποτέλεσματα, υπολογίζεται από το πρόγραμμα και ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης στην οπή, τόσο για την περίπτωση του εφελκυσμού όσο και της κάμψης. Στην συνέχεια, παρουσιάζονται οι υπολογισμοί με τη χρήση αναλυτικών τύπων και η σύγκριση τους με τιμές που παράγονται από το πρόγραμμα.

Στην περίπτωση του εφελκυσμού, η θεωρητική τιμή του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης υπολογίζεται σύμφωνα με τον παρακάτω αναλυτικό τύπο:

$$K_t = 3 - 3.13 \cdot (d/w) + 3.66 \cdot (d/w)^2 - 1.53 \cdot (d/w)^3 = 2.349 \quad (7)$$

όπου w το πλάτος της πλάκας και d η διάμετρος της οπής.

Στο πρόγραμμα εισάγεται αρχικά ο παρακάτω τύπος για τον υπολογισμό της ονομαστικής τάσης:

$$\sigma_{ov} = \frac{F}{(w-d) \cdot t} \quad (8)$$

όπου t το πάχος και F η εξωτερική φόρτιση. Στη συνέχεια εισάγεται ο τύπος (9) για τον προσδιορισμό του συντελεστή K_t :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ov}} = \frac{83}{1000/280} = 2.3868 \quad (9)$$

όπου σ_{max} η μέγιστη τάση που προέκυψε από το πρόγραμμα κατά τον εφελκυσμό. Παρατηρείται ότι το υπολογιστικό αποτέλεσμα συμφωνεί με τον θεωρητικό συντελεστή συγκέντρωσης τάσης με ένα μικρό σφάλμα της τάξης $\epsilon = 1.61\%$.

Αντίστοιχα για την περίπτωση της κάμψης, εισάγεται αρχικά ο τύπος

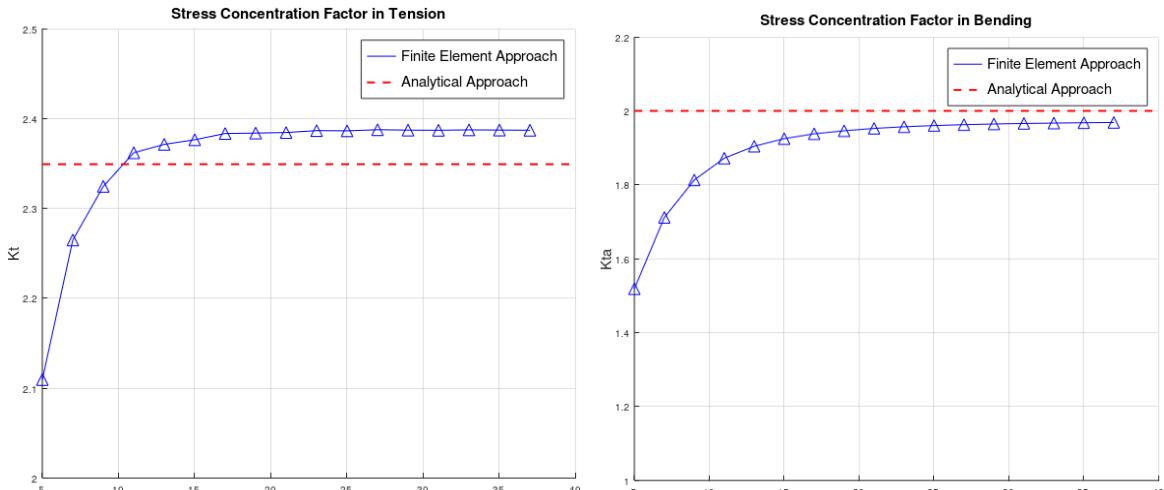
$$\sigma_{ov} = \frac{6 \cdot M \cdot d}{(w^3 - d^3) \cdot t} \quad (10)$$

και ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης υπολογίζεται:

$$K_{ta} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ov}} = 1.9686 \quad (11)$$

Το αποτέλεσμα συμφωνεί και πάλι με τον θεωρητικό συντελεστή $K_{ta} = 2$ του σημείου αυτού και το σφάλμα είναι $\epsilon = 1.57\%$.

Συνολικά, παρατηρείται ικανοποιητική συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων και των αντίστοιχων θεωρητικών τιμών, την οποία όμως μπορούσαμε να βελτιώσουμε με την άνξηση των κόμβων των στοιχείων. Αυτό φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα όπου παρουσιάζεται η σύγκλιση του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης και στις δύο περιπτώσεις φόρτισης καθώς αυξάνεται ο αριθμός των κόμβων.

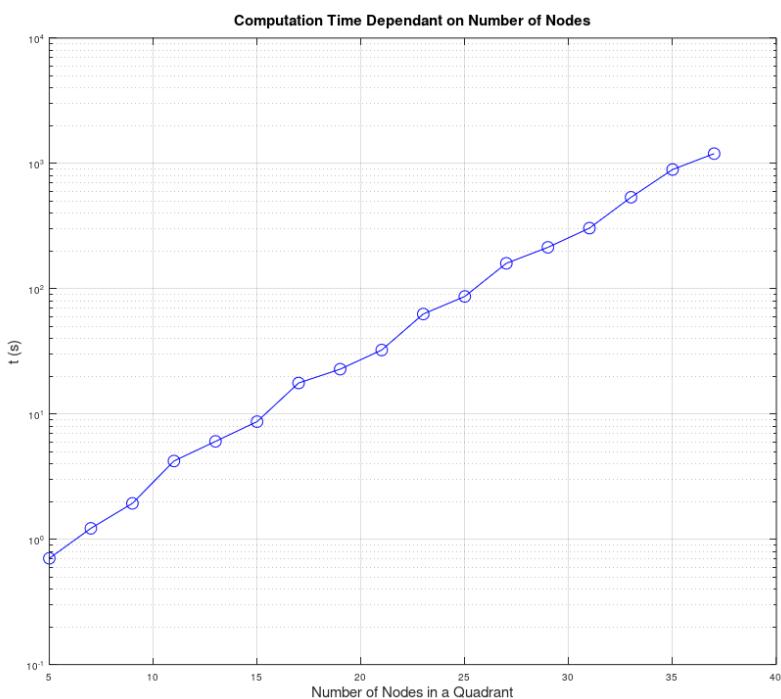


(α') Περίπτωση εφελκυσμού

(β') Περίπτωση κάμψης

Συγκεκριμένα, στην περίπτωση του εφελκυσμού η τιμή που προκύπτει από το πρόγραμμα συγχλίνει στην τιμή 2.4 και το σφάλμα σταθεροποιείται στο 2.08%. Αντίστοιχα, για την περίπτωση της κάμψης το αποτέλεσμα φαίνεται ότι συγχλίνει στην τιμή 1.97 και το σφάλμα σταθεροποιείται στο 1.5%.

Επίσης, παρουσιάζεται και το διάγραμμα εξάρτησης του υπολογιστικού χρόνου από των αριθμών χρησιμοποιούμενων κόμβων.



Σχήμα 18: Εξάρτηση χρόνου υπολογισμού από τον αριθμό κόμβων

Παρατηρούμε ότι για 35 κόμβους ανά τεταρτημόριο ο χρόνος υπολογισμού φτάνει τα 16 λεπτά, ενώ για 11 κόμβους, που έχει επιλεχθεί να λυθεί το πρόβλημα, ο υπολογιστικός χρόνος είναι

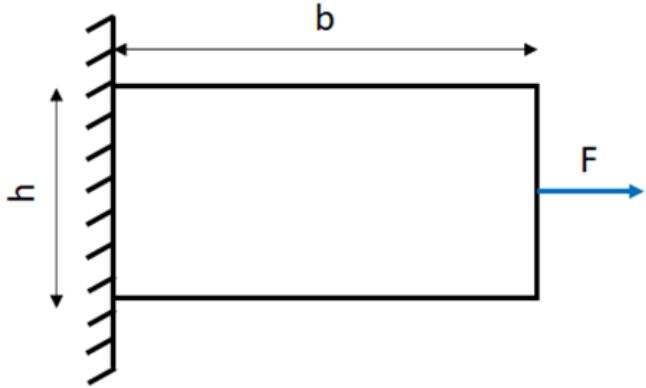
μόλις 4 δευτερόλεπτα, χωρίς να υπάρχει σημαντική διαφορά στο σφάλμα.

4 Επαλήθευση ακρίβειας προγράμματος

Για την επιβεβαίωση της σωστής λειτουργίας του προγράμματος κρίνεται απαραίτητη η επίλυση ενός απλούστερου προβλήματος και η επαλήθευση των αποτελεσμάτων με αναλυτικούς υπολογισμούς.

4.1 Πλάκα σε εφελκυσμό

Το παράδειγμα που εξετάζεται είναι αυτό μιας πλάκας, η οποία είναι πακτωμένη στο ένα της άκρο ενώ στο άλλο δρα μια εφελκυστική δύναμη όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 19: Πακτωμένη πλάκα σε εφελκυσμό

Οι παράμετροι του προβλήματος είναι οι εξής:

- Πλάτος: $b = 170mm$
- Ύψος: $h = 100mm$
- Εφελκυστική δύναμη: $F = 10000N$
- Εμβαδό διατομής: $A = 400mm^2$
- Μέτρο ελαστικότητας: $E = 210GPa$

Βάσει αυτών, υπολογίζεται η αξονική τάση που ασκείται στην πλάκα σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{F}{A} = \frac{10000N}{400mm^2} = 25MPa \quad (12)$$

Έπειτα υπολογίζονται οι αξονικές παραμορφώσεις στην πλάκα:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{25MPa}{210000MPa} = 0.011905 \cdot 10^{-2} \quad (13)$$

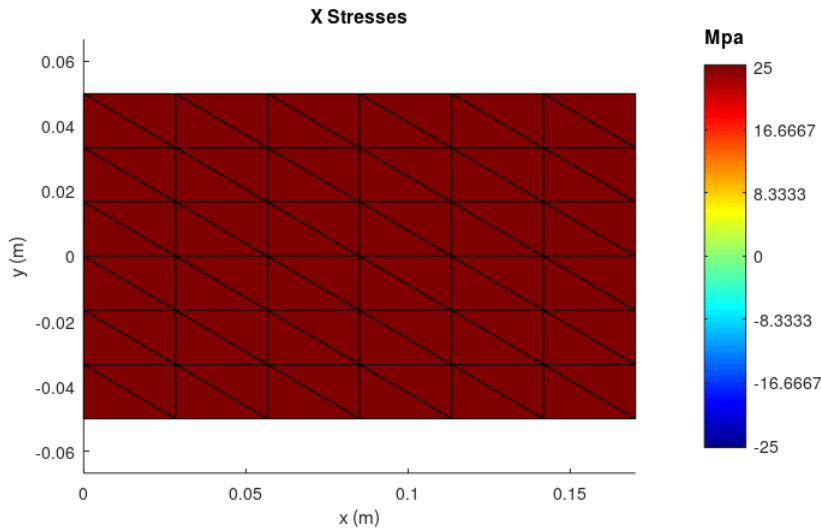
Τέλος, η κατανομή των μετατοπίσεων δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$u(x) = \frac{F \cdot x}{E \cdot A} \quad (14)$$

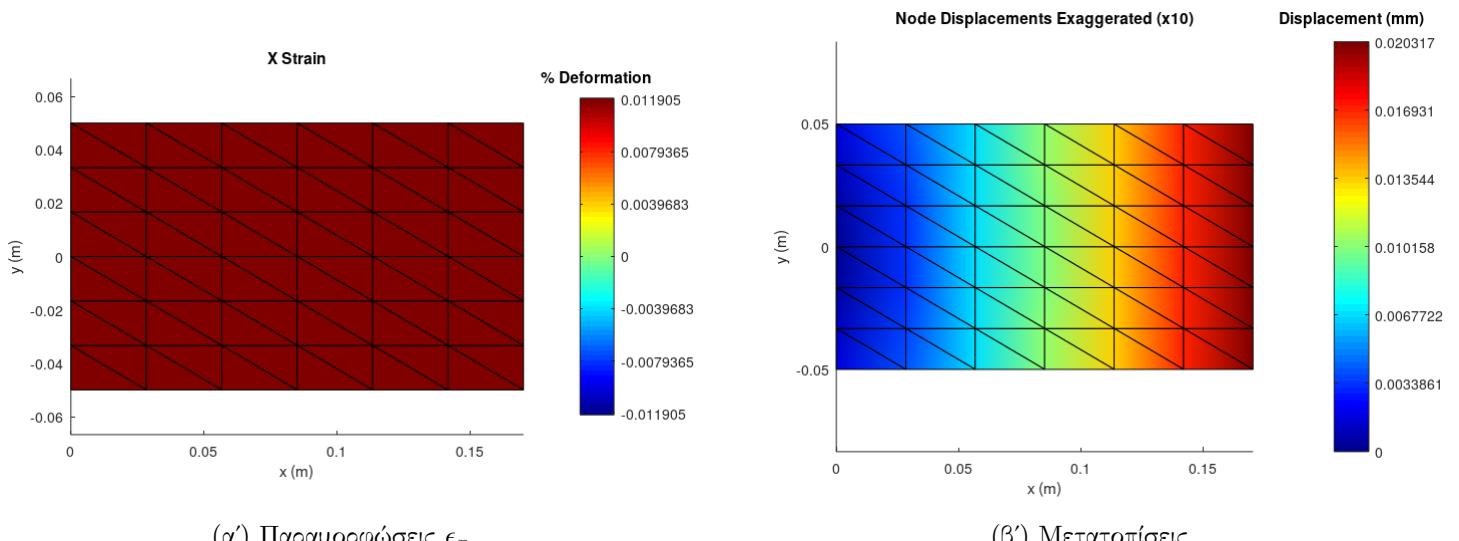
Η μέγιστη μετατόπιση προκύπτει για $x = b$ και είναι:

$$u(b) = \frac{10000 \cdot 170}{210 \cdot 10^3 \cdot 400} = 0.0202mm \quad (15)$$

Εισάγοντας το παραπάνω πρόβλημα στο πρόγραμμα προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:



Σχήμα 20: Αξονικές τάσεις σ_x στον εφελκυσμό

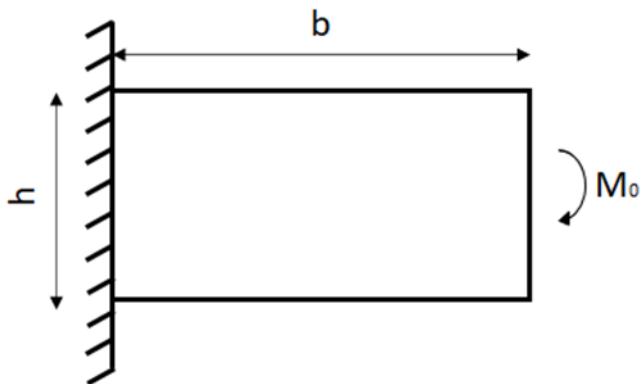


Σχήμα 21: Παραμορφώσεις και μετατοπίσεις στον εφελκυσμό

Είναι φανερό ότι οι τιμές και των τριών μεγεθών συγχλίνουν στις υεωρητικές τιμές που υπολογίστηκαν προηγουμένως. Συγχειριμένα, για τις τιμές της τάσης και της παραμόρφωσης προκύπτει μηδενικό σφάλμα ενώ για την τιμή της μετατόπισης υπάρχει ένα μικρό σφάλμα της τάξης του 0.56 %. Τα σφάλματα αυτά προέκυψαν χρησιμοποιώντας 49 κόμβους. Ωστόσο, τα σφάλματα στις τιμές της τάσης και της παραμόρφωσης προκύπτουν μηδενικά ακόμη και αν χρησιμοποιηθεί ο ελάχιστος αριθμός των 4 κόμβων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα δύο αυτά μεγέθη είναι σταθερά σε όλο το μήκος και ύψος της πλάκας και αντίστοιχα είναι σταθερές οι παράγωγοι των συναρτήσεων παρεμβολής των τριγωνικών στοιχείων. Οι συναρτήσεις παρεμβολής, ωστόσο, δεν είναι σταθερές και αυτό φαίνεται στο διάγραμμα των μετατοπίσεων όπου το χρώμα του κάθε στοιχείου δεν είναι σταθερό.

4.2 Πλάκα σε κάμψη

Αντίστοιχα, επιλύεται το πρόβλημα της ίδιας πλάκας η οποία καταπονείται σε κάμψη στο αριστερό της άκρο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 22: Πακτωμένη πλάκα σε κάμψη

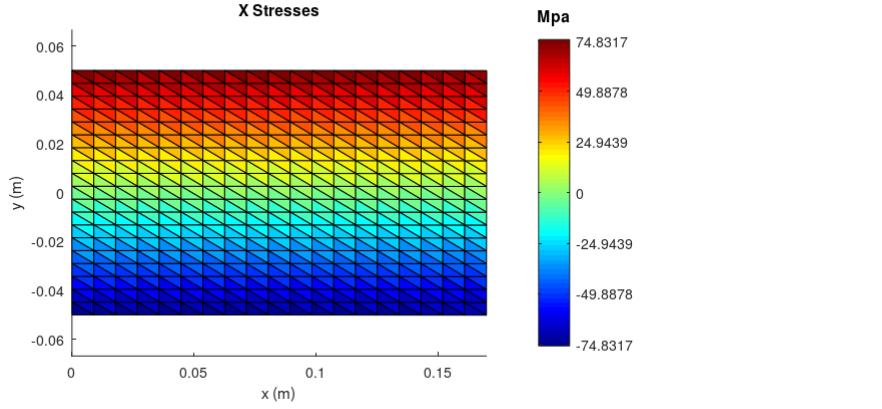
Οι διαστάσεις της πλάκας παραμένουν ίδιες με πριν. Επιπλέον η καμπτική ροπή M_0 και η ροπή αδράνεις I_y είναι:

- $M_0 = 500 \text{ Nm}$
- $I_y = 333.333 \text{ mm}^4$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δεδομένα υπολογίζεται η μέγιστη τάση:

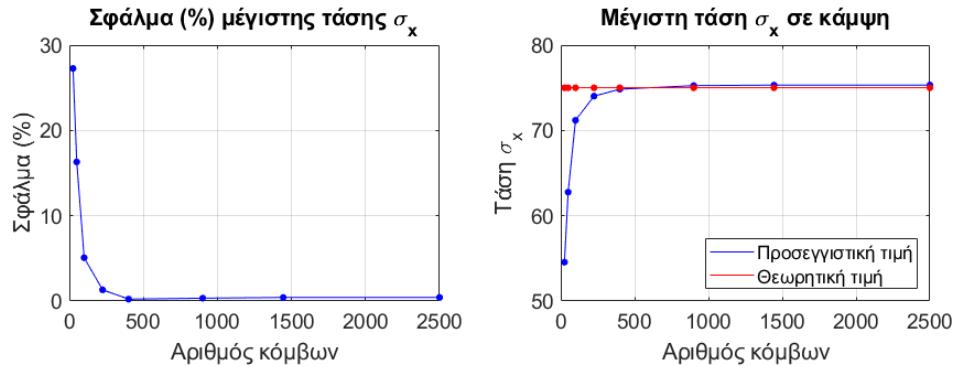
$$\sigma_x = \frac{M_0}{I_y} \cdot \frac{h}{2} = 75 \text{ MPa} \quad (16)$$

Εισάγοντας το πρόβλημα της κάμψης στο πρόγραμμα προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:



Σχήμα 23: Αξονικές τάσεις σ_x στην κάμψη

Παρατηρείται ότι η μέγιστη τιμή της τάσης παρουσιάζει ένα σφάλμα 0.22% από τη θεωρητική τιμή έχοντας χρησιμοποιήσει 400 κόμβους. Η ύπαρξη αυτού του μη μηδενικού σφάλματος οφείλεται στο γεγονός ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση οι τιμή της τάσης μεταβάλλεται με το ύψος της πλάκας, ενώ όπως αναφέρθηκε και πριν οι παράγωγοι των συναρτήσεων παραμβολής των τριγωνικών στοιχείων, που χρησιμοποιούνται κατά τον υπολογισμό των τάσεων, είναι σταθερές. Επιχειρείται, λοιπόν, με μια σταθερή συνάρτηση να πορβλεψθεί ένα μέγεθος που μεταβάλλεται. Επομένως, είναι αναμενόμενη η ύπαρξη σφάλματος και μάλιστα για να μειωθεί αυτό είναι αναγκαία η χρήση περισσότερων στοιχείων. Παρακάτω παρατίθεται ένα διάγραμμα στο οποίο φαίνεται η μεταβολή του σφάλματος σε σχέση με τον αριθμό των κόμβων που χρησιμοποιούνται.



Σχήμα 24: Σύγκλιση μέγιστης τάσης σ_x στην θεωρητική τιμή

Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, όσο αυξάνεται ο αριθμός των κόμβων τόσο ελαττώνεται το σφάλμα και η τιμή συγχλίνει στην θεωρητική.

5 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, στην παρούσα αναφορά παρουσιάστηκε η ανάλυση μιας ορθογώνιας πλάκας με οπή σε συνθήκες φόρτισης εφελκυσμού και κάμψης με τη χρήση ενός προγράμματος που κατασκευάστηκε σε H/Y. Για την ανάλυση αυτή χρησιμοποιήθηκαν τριγωνικά στοιχεία λόγω της ευκολίας στον προγραμματισμό και στην ανάπτυξη των εξισώσεων τους και έπειτα παρουσιάσθηκαν τα αποτελέσματα που παρήχθησαν. Τέλος, για την επιβεβαίωση της σωστής λειτουργίας του προγράμματος επιλύθηκε ένα απλούστερο πρόβλημα και τα αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν με αναλυτικούς υπολογισμούς. Τα σφάλματα που προέκυψαν είναι μικρά και μάλιστα φαίνεται αποτελούν συνάρτηση του αριθμού των χρησιμοποιούμενων κόμβων και στοιχείων.