Computational Fluid Dynamics

Υπολογισμός οριακού στρώματος

Αντώνης Κυριακόπουλος

6337

antokyri@meng.auth.gr

2/5/2023

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η δημιουργία στρωτού οριακού στρώματος πάνω σε επίπεδη πλάκα, με μηδενική κλήση πίεσης, αποτελεί μια απλουστευμένη περίπτωση οριακού στρώμτατος. Έτσι, προκύπτει μια καλή ευκαιρία για την ανάπτυξη στοιχειώδους κώδικα που θα επιλύει τις εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα και την διερεύνηση της συμπεριφοράς του.

Μαθηματικό μοντέλο

Αυτή η περίπτωση οριακού στρώματος, περιγράφεται με τις εξισώσεις του Prandtl, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=v_{isc}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Προκειμένου να λυθούν υπολογιστικά, οι όροι κάθε εξίσωσεις διακριτοποιούνται ως έχει:

$$u_{i+1,j}=u_{i,j}+\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}\Delta x+\ldots\Rightarrow\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}=\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}$$

$$v_{i,j+1}=v_{i,j}+\frac{\partial v_{i,j}}{\partial y}\Delta y+\ldots\Rightarrow\frac{\partial v_{i,j}}{\partial y}=\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{\Delta y}$$

$$u_{i,j-1}=u_{i,j}-\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2}+\ldots\qquad[1]$$

$$u_{i,j+1}=u_{i,j}+\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2}+\ldots\qquad[2]$$

$$[2]-[1] \Rightarrow u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 2\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y}\Delta y \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$[2]+[1] \Rightarrow u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = 2u_{i,j} + 2\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{\Delta y^2}$$

Έτσι παράγονται οι εξισώσεις:

$$\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{\Delta y} = 0 \Rightarrow v_{i+1,j+1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\left(u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1}\right) + v_{i+1,j}$$

$$u_{i,j}\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + v_{i,j}\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} = v_{isc}\frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{\Delta y^2} \Rightarrow$$

$$u_{i+1,j} = \frac{\Delta x}{u_{i,j}}\left(v_{isc}\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} - v_{i,j}\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}\right) + u_{i,j}$$

Η παραπάνω μορφή είναι η ρητή μορφή των εξισώσεων. Για την πεπλεγμενη, θα αντικαταστήσουμε:

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_{i+1,j}}{\partial y^2}\right)}{2}$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} + \frac{\partial u_{i+1,j}}{\partial y}\right)}{2}$$

Οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$u_{i,j}\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}+v_{i,j}\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta y}+v_{i,j}\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}}{4\Delta y}=$$
$$v_{isc}\frac{u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-2u_{i,j}}{2\Delta y^2}+v_{isc}\frac{u_{i+1,j+1}+u_{i+1,j-1}-2u_{i+1,j}}{2\Delta y^2}\Rightarrow$$

$$\frac{u_{i,j}}{\Delta x}u_{i+1,j}+v_{i,j}\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}}{4\Delta y}-v_{isc}\frac{u_{i+1,j+1}+u_{i+1,j-1}-2u_{i+1,j}}{2\Delta y^2}=$$
$$\frac{u_{i,j}^2}{\Delta x}+v_{isc}\frac{u_{i+1,j+1}+u_{i+1,j-1}-2u_{i+1,j}}{2\Delta y^2}-v_{i,j}\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta y}$$

Για το συντελεστή τριβής:

$$C_f=\frac{\tau_{wall}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

$$\tau_{wall}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{wall}\Rightarrow\tau_{wall}=\mu\frac{u_{i,1}-u_{i,0}}{\Delta y}$$

Τα πάχη ορμής και μετατοπίσης υπολογίζονται με αριθμιτική ολοκλήρωση του προφίλ ταχυτήτων, βάση των εξισώσεων:

$$\delta_1=\int_0^{y_1}\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)dy,\qquad \delta_2=\int_0^{y_1}\left[\frac{u}{u_\infty}\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)\right]dy$$

Τέλος, για τον έλεγχο της λύσης έχουμε από την επίλυση Blasius:

$$\delta=\frac{5x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},\qquad \delta_1=\frac{1.72x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},\qquad \delta_2=\frac{0.664x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},\qquad C_f=\frac{0.664x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

Αλγόριθμος

Μέθοδος επίλυσης:

Η εξίσωση ορμής λύνεται κατά τον άξονα x, ενώ αυτή της συνέχειας κατά τον y.

Οριακές συνθήκες:

Ως οριακές συνθήκες τίθονται: $u_{y\max} = u_{\infty}, \quad u_{y=0} = 0, \quad v_{y=0} = 0$

Ενώ οι "αρχικές" συνθήκες είναι: $u_{x=0} = 0, \quad v_{x=0} = 0$

Διακριτοποίηση:

Η διακριτοποίηση γίνεται με βάση του y spacing στο ύψος, ενώ το x spacing επιλέγεται με βάση αυτό.

Ρητός αλγόριθμος:

Οι εξισώσεις λύνονται με δύο επαναλήψεις, η μία βρισκόμενη εντός της άλλης. Συγκεκριμένα, στο μεγάλο βρόχο λύνεται η επόμενη στήλη των u, ενώ στον εμφωλευμένο βρόχο λύνονται ένα, ένα τα v της επόμενης στήλης.

Συγκεκριμένα στήνονται πίνακες έτσι ώστε:

$$u_{i+1,j} = \frac{\Delta x}{u_{i,j}} \left[\frac{v_{isc}}{\Delta y^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,j-1} \\ u_{i,j} \\ u_{i,j+1} \end{bmatrix} - v_{i,j} \frac{1}{2\Delta y} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,j-1} \\ u_{i,j} \\ u_{i,j+1} \end{bmatrix} \right] + u_{i,j}$$

Η λύση δεν εφαρμόζεται στα οριακά u, τα οποία τίθονται ανάλογα τις οριακές συνθήκες. Οι κάθετες ταχύτητες v λύνονται επαναληπτικά "προχωρώντας" προς τα πάνω στον άξονα y, ακριβώς όπως φαίνεται στην εξίσωση που παράχθηκε.

Πεπλεγμένος αλγόριθμος:

Ο πεπλεγμένος αλγόριθμος λύνεται με την ίδια λογική σειρά. Η κύρια διαφορά είναι η επίλυση γραμμικού συστήματος. Τα μητρώα του γραμμικού συστήματος εξάγονται με την “αναδιοργάνωση” της πεπλεγμένης εξίσωσης όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\frac{u_{i,j}}{\Delta x}u_{i+1,j}+v_{i,j}\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}}{4\Delta y}-v_{isc}\frac{u_{i+1,j+1}+u_{i+1,j-1}-2u_{i+1,j}}{2\Delta y^2}=$$
$$\frac{u_{i,j}^2}{\Delta x}+v_{isc}\frac{u_{i+1,j+1}+u_{i+1,j-1}-2u_{i+1,j}}{2\Delta y^2}-v_{i,j}\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta y}\Rightarrow$$

$$\left(-\frac{v_{i,j}}{4\Delta y}-\frac{v_{isc}}{2\Delta y^2}\right)u_{i+1,j-1}+\left(\frac{u_{i,j}}{\Delta x}+\frac{v_{isc}}{\Delta y^2}\right)u_{i+1,j}+\left(\frac{v_{i,j}}{4\Delta y}-\frac{v_{isc}}{2\Delta y^2}\right)u_{i+1,j+1}=$$
$$\left(\frac{v_{i,j}}{4\Delta y}+\frac{v_{isc}}{2\Delta y^2}\right)u_{i,j-1}+\left(\frac{u_{i,j}}{\Delta x}-\frac{v_{isc}}{\Delta y^2}\right)u_{i,j}+\left(-\frac{v_{i,j}}{4\Delta y}+\frac{v_{isc}}{2\Delta y^2}\right)u_{i,j+1}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\left(-\frac{v_{i,j}}{4\Delta y}-\frac{v_{isc}}{2\Delta y^2}\right) & \left(\frac{u_{i,j}}{\Delta x}+\frac{v_{isc}}{\Delta y^2}\right) & \left(\frac{v_{i,j}}{4\Delta y}-\frac{v_{isc}}{2\Delta y^2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{i+1,j-1}\\ u_{i+1,j}\\ u_{i+1,j+1}\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\left(\frac{v_{i,j}}{4\Delta y}+\frac{v_{isc}}{2\Delta y^2}\right) & \left(\frac{u_{i,j}}{\Delta x}-\frac{v_{isc}}{\Delta y^2}\right) & \left(\frac{v_{i,j}}{4\Delta y}+\frac{v_{isc}}{2\Delta y^2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{i,j-1}\\ u_{i,j}\\ u_{i,j+1}\end{bmatrix}$$

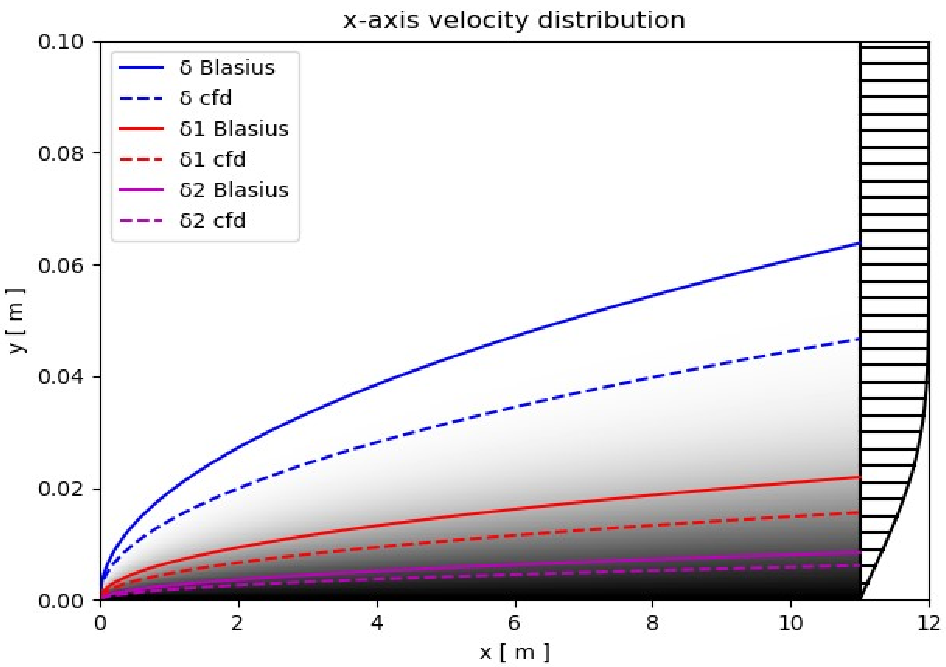
Στη συνέχεια μηδενίζονται, όλη η πρώτη και τελευταία γραμμή, ενώ το πρώτο και το τελευταίο στοιχείο εξισώνωνται με 1. Έτσι προκύπτει το σύστημα:

$$\mathrm{A}\cdot u_{i+1}=\mathrm{B}\cdot u_i\Rightarrow u_{i+1}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\cdot u_i$$

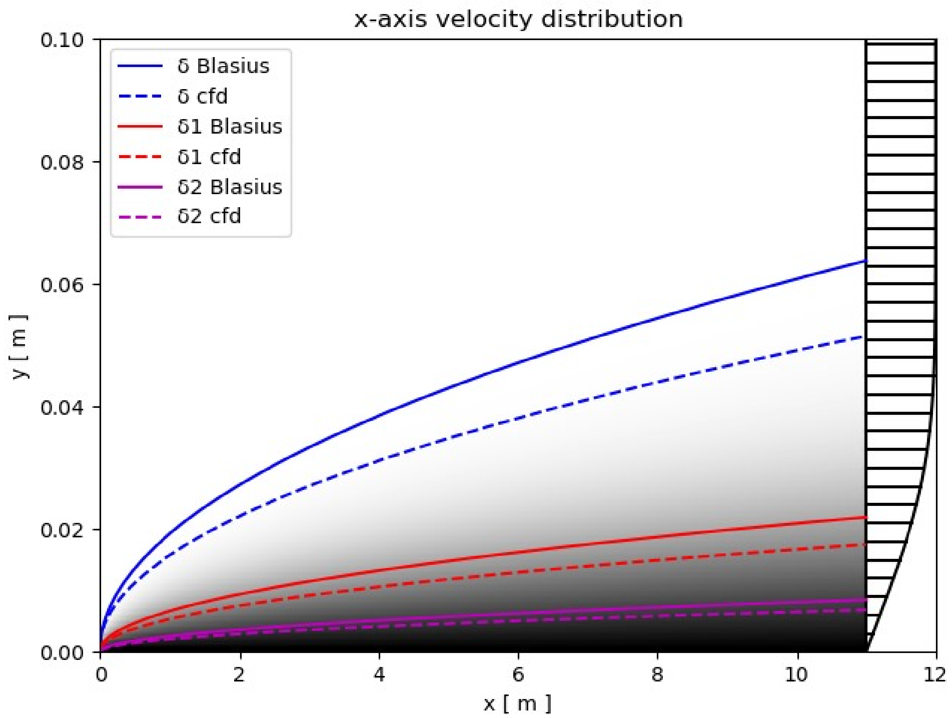
Οι ταχύτητες ν βρίσκονται με την ίδια μέθοδο που περιγράφθηκε στον ρητό αλγόριθμο.

Αποτελέσματα

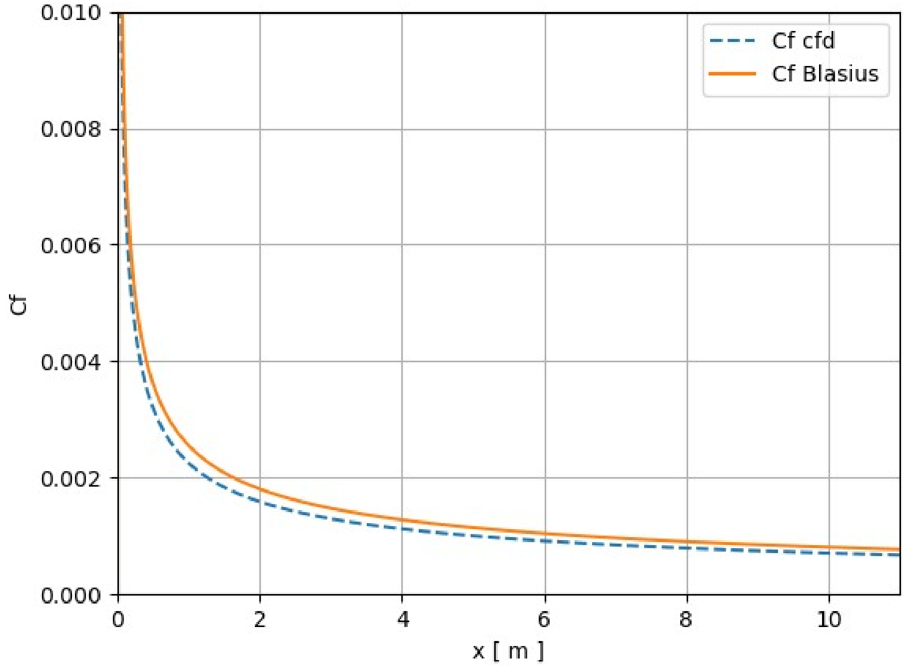
Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω.



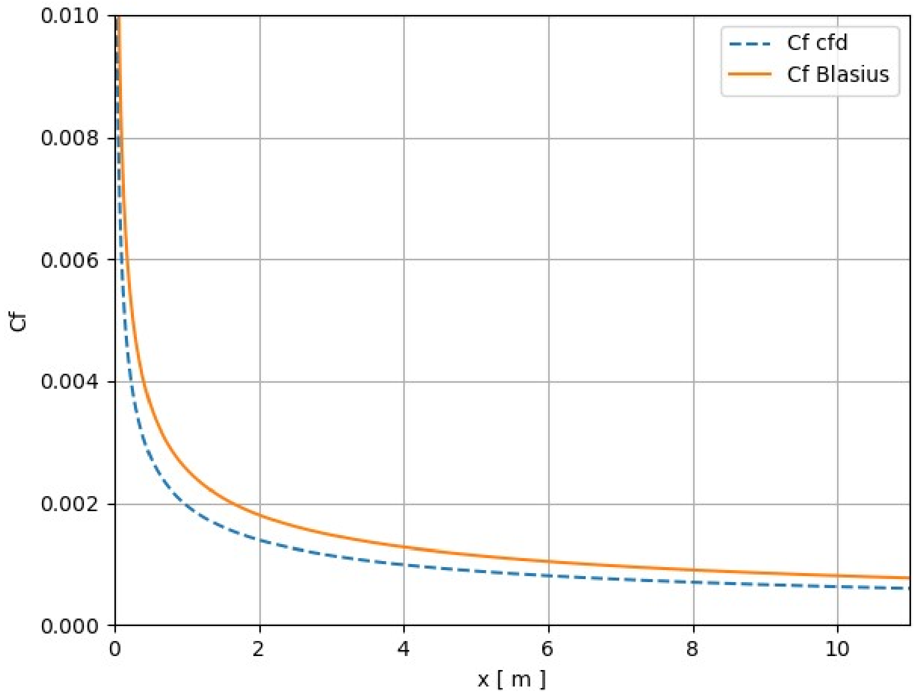
Ρητή μέθοδος



Πεπλεγμένη μέθοδος



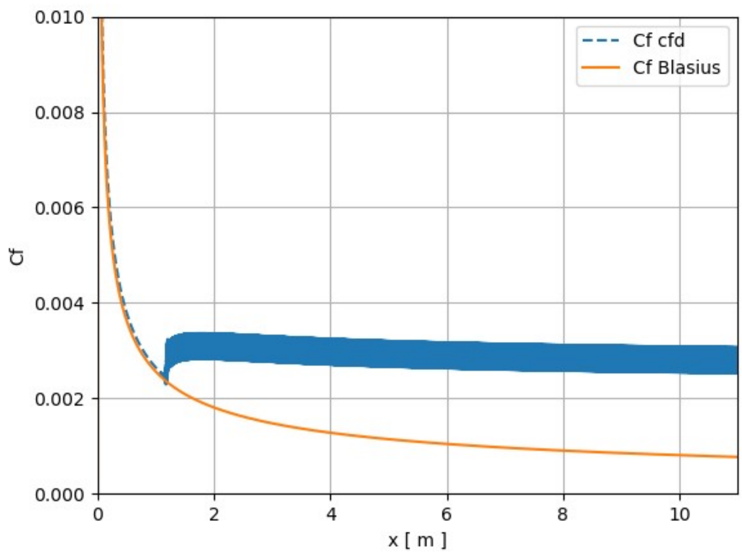
Ρητή μέθοδος



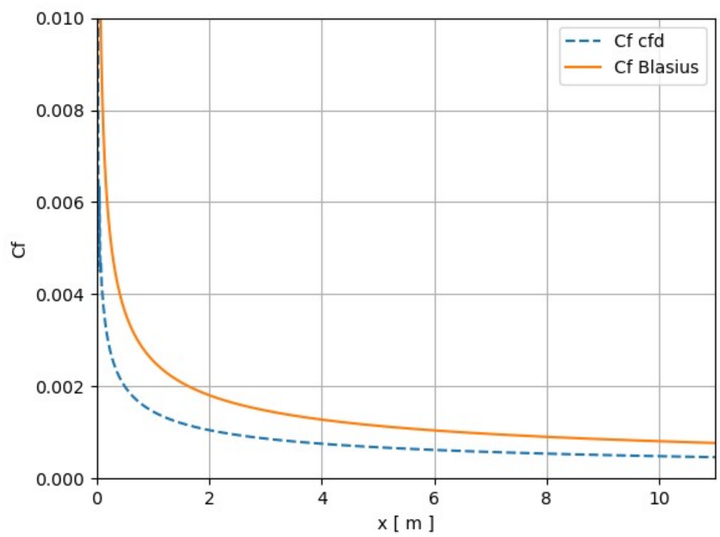
Πεπλεγμένη μέθοδος

Σχόλια:

Παρά το μεγάλο σφάλμα στο πάχος του οριακού στρώματος, η κλίση ταχύτητας στην επιφάνεια της πλάκας φαίνεται να παρουσιάζει καλή συμφωνία με αυτή εξαγώμενη από την επίλυση Blasius. Επίσης με τα ίδια πλέγματα η ρητή και η πεπλγμένη μέθοδος, δεν παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές στην ακρίβεια. Διαφορές εμφανίζονται σε "ακραίους" λόγους Δx/Δy. Ένα παράδειγμα για λόγο ίσο με μονάδα και Δy ίσο με 0.001 φαίνεται παρακάτω.



Ρητή μέθοδος

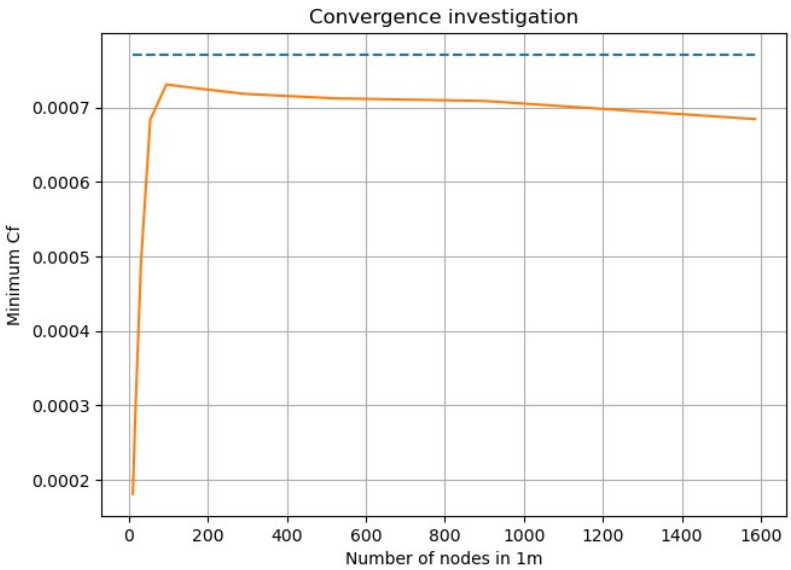


Πεπλεγμένη μέθοδος

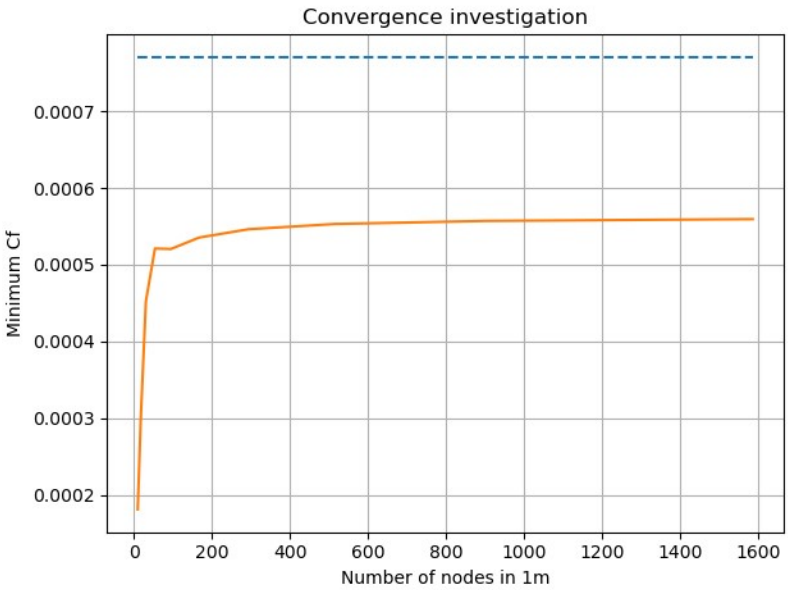
Μελέτη πλέγματος

Σύγκλιση πλέγματος

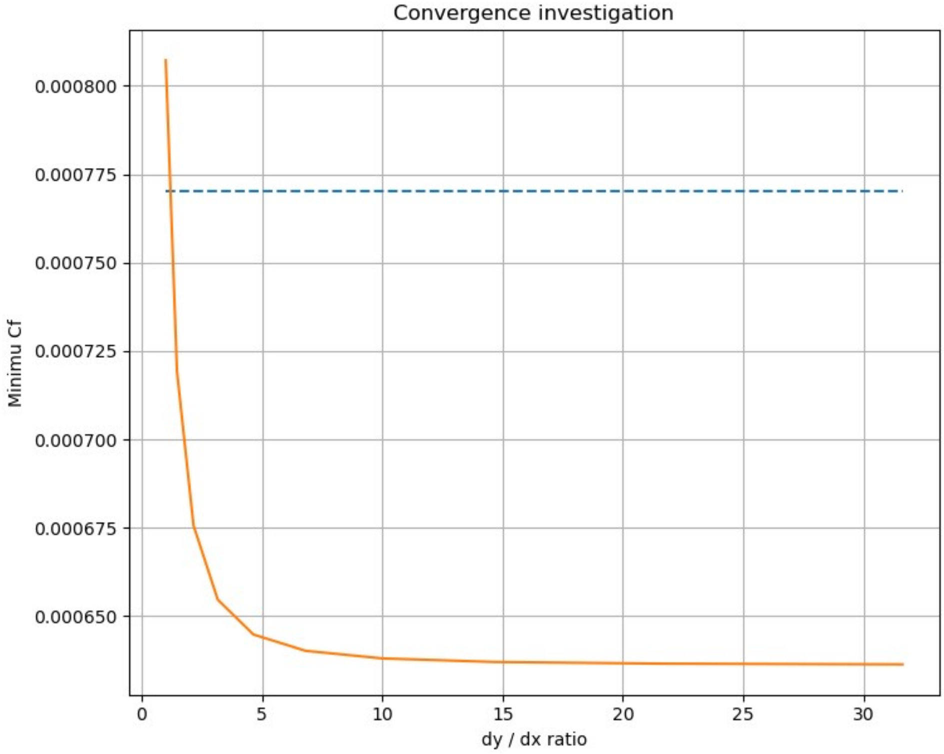
Η σύγκλιση πλέγματος μελετάται με βάση τη σύγκλιση του συντελεστή C_f. Μελετάται αρχικά με μεταβλητό spacing Δy και σταθερό λόγο Δx/Δy = 0.7, και έπειτα με σταθερό spacing Δy = 0.005 και για διάφορους λόγους Δx/Δy. Γίνεται και για τους δύο αλγορίθμους και συνοψίζεται στα παρακάτω διαγράμματα.



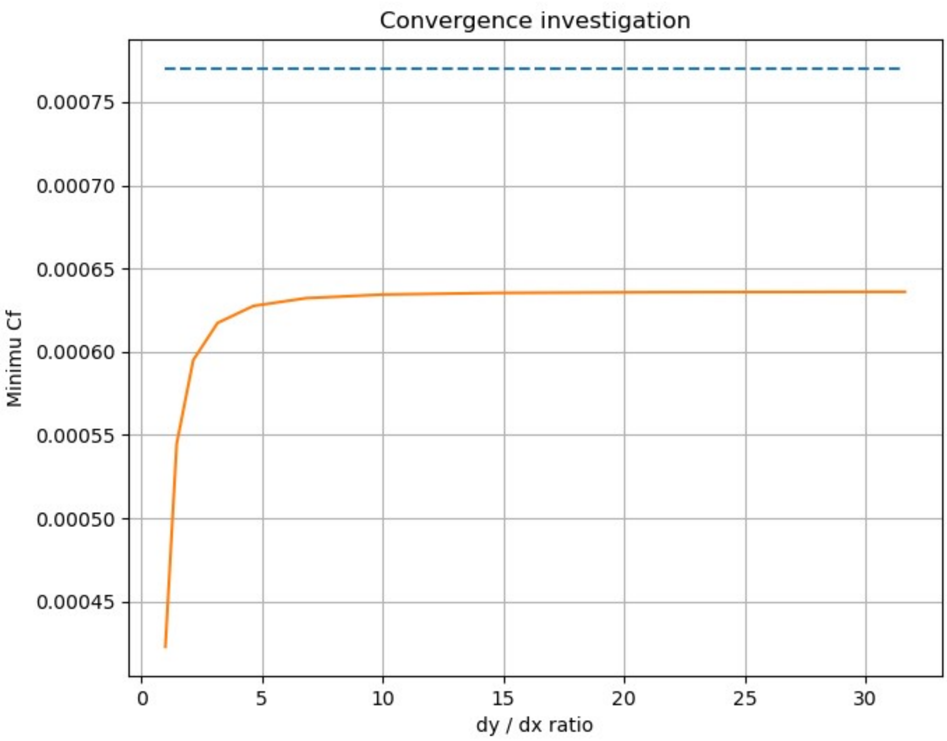
Ρητή μέθοδος



Πεπλεγμένη μέθοδος



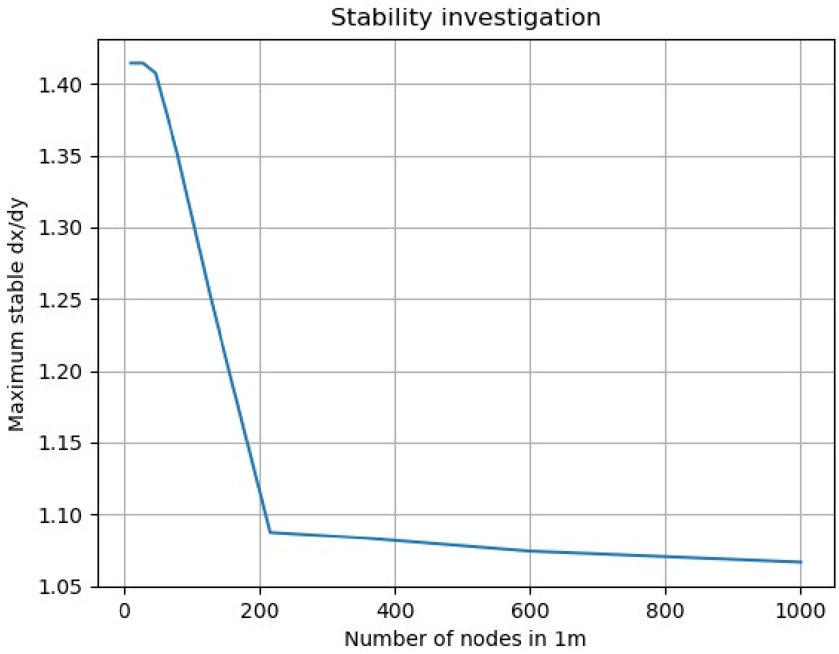
Ρητή μέθοδος



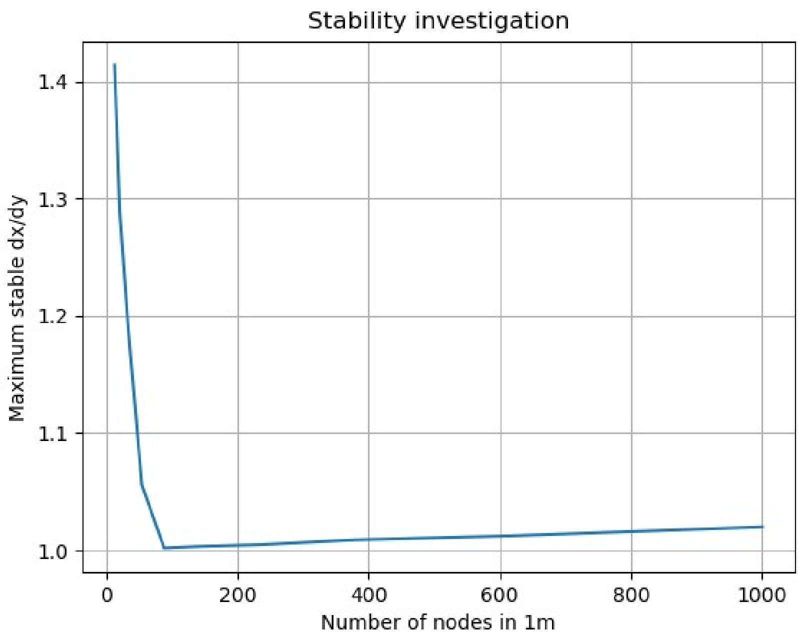
Πεπλεγμένη μέθοδος

Ευστάθεια πλέγματος

Η ευστάθεια μελετάται δοκιμάζοντας επαναληπτικά την δυνατότητα επίλυσης για διάφορα Δy και Δx/Δy. Ακολουθάται μια παραλλαγή της μεθόδου διχοτόμησης εως ότου το μέγεθος διαστήματος των τιμών που παίρνει ο λόγος Δx/Δy να είναι μικρότερο του 0.001. Τα διάγραμματα των μέγιστων λόγων Δx/Δy παρουσιάζονται:



Ρητή μέθοδος



Πεπλεγμένη μέθοδος