

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

Αυτοματοποιημένη Σχεδίαση και Προετοιμασία Πλέγματος για  
Αεροτομές με Υπερ-Αντωτικές Διατάξεις

Automated Design and Grid Generation for Airfoils with High-Lift  
Arrays

Αντώνιος-Ιωακείμ Κυριακόπουλος

6337

Διπλωματική εργασία

Θεσσαλονίκη, 2025

(Η σελίδα αφήνεται σκόπιμα κενή)

<b>ΣΥΝΟΨΗ</b>	
<b>Τύπος εργασίας</b> Διπλωματική	<b>Ημερομηνία</b> 13/6/2025
<b>Τίτλος</b>  Αυτοματοποιημένη Σχεδίαση και Προτετοιμασία Πλέγματος για Αεροτομές με Υπερ-Αντωτικές Διατάξεις	
<b>Όνοματεπώνυμο</b> Αντώνιος-Ιωακείμ Κυριακόπουλος	<b>AEM</b> 6337
<b>Υπεύθυνος φορέας</b> Εργαστήριο Μηχανικής Ρευστών και Στροβιλομηχανών, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πολυτεχνική Σχολή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης (ΑΠΘ)	<b>Διανομή</b> Ελεύθερη
<b>Τριμελής επιτροπή</b> Περικλής Παναγιώτου, Επίκουρος καθηγητής (επιβλέπων) Κυριάκος Υάκινθος, Καθηγητής Παναγιώτης Σεφερλής, Καθηγητής	<b>Κωδικός</b> PP-037
<b>Υπεύθυνος παρακολούθησης</b> Περικλής Παναγιώτου, Επίκουρος καθηγητής	<b>Αριθμός σελίδων</b> 78

(Η σελίδα αφήνεται σκόπιμα κενή)

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Πρώτα από όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή κο Περικλή Παναγιώτου για την καθοδήγηση και την βοήθεια του στην ολοκλήρωση της εργασίας. Οι παρακολουθήσεις των μαθημάτων του υπήρξαν η έμπνευση που με οδήγησε στην επιλογή αυτής της εργασίας. Ακόμα, ευχαριστώ τα μέλη του Εργαστηρίου Μηχανικής Ρευστών και Στροβιλομηχανών για τη συμβολή τους στην ακαδημαϊκή μου πορεία. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για τη συνεχή στήριξη τους κατά τη διάρκεια των σπουδών.

(Η σελίδα αφήνεται σκόπιμα κενή)

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Θέμα της παρούσας διπλωματικής είναι η δημιουργία μιας προγραμματιστικής βιβλιοθήκης που διευκολύνει τον δισδιάστατο αεροδυναμικό σχεδιασμό συσκευών υψηλής άντωσης και την παραγωγή του αντίστοιχου πλέγματος υπολογιστικής ρευστομηχανικής για την προσομοίωση τους. Παρουσιάζονται οι βασικές πτυχές των αεροτομών και των συστημάτων υψηλής άντωσης. Μετά από μια συνοπτική εισαγωγή στη υπολογιστική ρευστομηχανική ακολουθεί μια σύντομη επισκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικής με τη παραγωγή πλεγμάτων και των μετρικών ποιότητας πλέγματος. Έπειτα, εκθέτονται συνοπτικά οι σημαντικότερες για την εργασία μαθηματικές σχέσεις. Η βιβλιοθήκη αναπτύσσεται στην προγραμματιστική γλώσσα Python και βασίζεται στις βιβλιοθήκες NumPy, Matplotlib, NURBS-Python και Gmsh. Ένα μεγάλο μέρος του κώδικα αφορά τη παροχή γενικευμένων και εξειδικευμένων εργαλείων για τη δημιουργία και τη διαμόρφωση δισδιάστατων γεωμετριών. Έτσι, διευκολύνεται η δημιουργία τομών υψηλής άντωσης όλων των ειδών. Επιπρόσθετα, επινοείται ένας αλγόριθμος για την αυτόματη παραγωγή υπολογιστικού πλέγματος πρακτικά οποιασδήποτε γεωμετρίας αεροτομών. Η διευκόλυνση που παρέχει η βιβλιοθήκη επιδεικνύεται με τέσσερα παραδείγματα χρήσης της. Η ικανότητα των παραγομένων πλεγμάτων ως προς την επίλυση εξετάζεται σε μια αεροτομή Eppler-387, καθώς και σε διάφορες γεωμετρίες υψηλής άντωσης για την αεροτομή NACA 23012, που παρήχθησαν στα προηγούμενα παραδείγματα. Διαπιστώνεται η ποιότητα των πλεγμάτων βάση της καλής ευστοχίας των υπολογιζόμενων αεροδυναμικών συντελεστών με τους πειραματικούς, σε όλες εκτός των πιο ακραίων περίπτωσεων. Τέλος, γίνονται προτάσεις για την επέκταση και τη χρήση της βιβλιοθήκης.

(Η σελίδα αφήνεται σκόπιμα κενή)

## **ABSTRACT**

Subject of the current thesis is the implementation of a programming library which facilitates the 2D aerodynamic design of high lift devices and the generation of a CFD grid for their simulation. The aerodynamic coefficients of 2D objects are introduced and the core aspects of the geometry of airfoils along with the basic concepts of high lift systems are shown. After a short introduction in CFD, a brief overview of literature concerning grid generation and grid quality metrics is given. Thereafter, the most important, for the thesis, mathematical relations are presented. The library was developed in the Python scripting language and relies on the NumPy, Matplotlib, NURBS-Python and Gmsh libraries. A large part of the written code relates to generation and reshaping of airfoil geometry, thus allowing easy generation of high lift wing sections of any type. Additionally, an algorithm is devised for the automated mesh generation of roughly any wing section geometry. Use of the library is demonstrated with four examples. The generated meshe's ability to conceive solutions is tested on an E-387 airfoil, and various types of high lift geometries of a NACA 23012 airfoil, that were generated in the previous examples. The quality of the grid is ascertained by the good agreement of the aerodynamic coefficients with the experimental data, on all but the most extreme of cases. Finally, suggestions are made for the expansion and use of the library.

(Η σελίδα αφήνεται σκόπιμα κενή)

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	<b>σελ.</b>	<b>1</b>
Κίνητρο & Στόχοι	σελ.	1
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ</b>	<b>σελ.</b>	<b>3</b>
2.1 Ρευστομηχανικές Δυνάμεις	σελ.	3
2.2 Αεροτομές	σελ.	4
2.3 Συστήματα Υψηλής Άντωσης	σελ.	7
2.4 Υπολογιστική Ρευστομηχανική	σελ.	9
2.5 Υπολογιστικό Πλέγμα	σελ.	9
2.6 Διαστατική Ανάλυση	σελ.	13
2.7 Εξισώσεις Διατήρησης	σελ.	14
2.8 Μοντελοποίηση Τύρβης	σελ.	17
2.9 Μαθηματικό Υπόβαθρο	σελ.	17
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ</b>	<b>σελ.</b>	<b>21</b>
3.1 Κώδικας	σελ.	21
3.1.1 Διάταξη	σελ.	21
3.1.2 Δομή	σελ.	21
3.1.3 Βοηθητικές Συναρτήσεις	σελ.	21
3.1.4 Διαμόρφωση Γεωμετρίας	σελ.	22
3.1.5 Παραγωγή Πλέγματος	σελ.	38
3.2 Παραδείγματα	σελ.	53
3.2.1 Παράδειγμα 1 - Παραγωγή Πλέγματος για Αεροτομή Eppler-387	σελ.	53
3.2.2 Παράδειγμα 2 - Αεροτομή NACA 23012 με Slotted Flap και Auxiliary Flap	σελ.	54
3.2.3 Παράδειγμα 3 - Αεροτομή NACA 23012 με Fowler Flap	σελ.	57
3.2.4 Παράδειγμα 4 - Ελεύθερη Διαμόρφωση Αεροτομής NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat	σελ.	60
3.3 Επαλήθευση	σελ.	61
3.3.1 Επίλυση Πλέγματος για Αεροτομή Eppler-387	σελ.	62

3.3.2 Επίλυση Πλέγματος για Αεροτομή NACA 23012 με Slotted Flap και Auxiliary Flap	σελ.	63
3.3.3 Επίλυση Πλέγματος για Αεροτομή NACA 23012 με Fowler Flap	σελ.	66
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</b>	σελ.	67
4.1 Αεροτομή Eppler-387	σελ.	67
4.2 Αεροτομή NACA 23012 με Slotted Flap και Auxiliary Flap	σελ.	68
4.3 Αεροτομή NACA 23012 με Fowler Flap	σελ.	71
4.4 Γενικά Σχόλια	σελ.	73
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΣΥΝΟΨΗ</b>	σελ.	77
5.1 Προτάσεις για Μελλοντικά Βήματα	σελ.	77

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Βασικό και αναγνωριστικό στοιχείο κάθε "βαρύτερου από αέρα" αεροσκάφους αποτελεί η αεροτομή. Κάθε σώμα που κινείται μέσα σε ένα ρευστό, δέχεται δύναμη από αυτό. Η δύναμη αυτή αναλύεται σε δύο συνιστώσες ανάλογα με τη διεύθυνση της. Κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας του σώματος είναι η άντωση ενώ παράλληλη και κατά κανόνα αντίρροπη σε αυτή είναι η οπισθέλκουσα. Το σημαντικότερο ίσως και πιο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό μιας αεροτομής είναι η ικανότητα της να παραγάγει πολύ μικρότερη οπισθέλκουσα σε σχέση με άλλα σχήματα όμοιων διαστάσεων. Οι αεροτομές έχουν μια μακρά ιστορία εξέλιξης, από τη φυσική εμφάνιση τους σε ζωντανούς οργανισμούς έως και τη σύγχρονη μελετημένη μορφή τους. Βέβαια, παρά όλη αυτή την εξέλιξη, συνεχίζουν να παρουσιάζουν ορισμένα προβλήματα που δεν μπορούν να επιλυθούν από ένα σώμα αμετάβλητου σχήματος.

Τα σύγχρονα αεροσκάφη καλούνται να ανταποκριθούν σε ένα μεγάλο εύρος σημείων λειτουργίας. Στην απογείωση, επιδιωκόμενος είναι ένας υψηλός συντελεστής άντωσης με μικρή σχετική οπισθέλκουσα. Στη συνεχή πτήση το σημαντικότερο χαρακτηριστικό είναι ένας χαμηλός συντελεστής οπισθέλκουσας ενώ κατά τη προσγείωση είναι επιθυμητό και οι δύο συντελεστές να είναι υψηλοί. Το σταθερό σχήμα των αεροτομών είναι ανίκανο να ανταπεξέλθει σε όλες αυτές τις απαιτήσεις. Το πρόβλημα αυτό περιθάλπεται με μηχανισμούς οι οποίοι μεταβάλουν το σχήμα μιας αεροτομής, δηλαδή τα συστήματα υψηλής άντωσης. Αυτά τα συστήματα είναι σχεδόν τόσο αρχαία όσο τα πρώτα αεροπλάνα και εξελίχθηκαν ανάλογα με τις ανάγκες που προέκυπταν από την αύξηση του εύρος των ταχυτήτων λειτουργίας. Η πολυπλοκότητα τους έφτασε σε κορυφαίο σημείο μάλλον το 1970 με την κατασκευή του ακραίου αεροσκάφους Boeing 747 [18], ενώ από τότε η τάση κατευθύνθηκε προς την επίτευξη ικανοποιητικών χαρακτηριστικών με όσο το δυνατόν απλούστερα συστήματα. Αυτή η τάση εξηγείται από τα εμφανή μειονεκτήματα των συστημάτων υψηλής άντωσης. Συγκεκριμένα, οι ατέλειες στην εφαρμογή των κινούμενων τμημάτων προκαλούν αύξηση της οπισθέλκουσας στην πτήση ενώ οι μηχανισμοί έχουν μεγάλο σχετικό βάρος και ακόμα μεγαλύτερο σχετικό κόστος.

Η δυνατότητα κίνησης προς τα απλούστερα συστήματα οφείλεται κυρίως στις εξελίξεις της υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Η βελτιστοποίηση των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών οποιασδήποτε γεωμετρίας βασιζόταν αποκλειστικά σε συνεχή πειράματα τα οποία αποδεικνύονται ακριβά και χρονοβόρα. Με την εξέλιξη της υπολογιστικής ρευστομηχανικής έγινε δυνατός ο σημαντικός περιορισμός των πειραμάτων τα οποία πλέον γίνονται κυρίως για την επιβεβαίωση της πιστότητας των μοντέλων. Παρόλο που ο χρόνος και το κόστος της διαδικασίας μειώθηκε σημαντικά, υπάρχει περαιτέρω δυνατότητα βελτίωσης. Στη σύγχρονη εποχή, το μεγαλύτερο μέρος χρόνου μιας βελτιστοποίησης χρησιμοποιείται στην παραγωγή των υπολογιστικών πλεγμάτων για τις ρευστομηχανικές αναλύσεις, έτσι η διευκόλυνση ή αυτοματοποίηση αυτής είναι ιδιαιτέρου ενδιαφέροντος.

## Κίνητρο & Στόχοι

Με το παραπάνω σκεπτικό η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια δημιουργίας μιας συστηματικής μεθόδου για την παραγωγή γεωμετριών υψηλής άντωσης, των υπολογιστικών πλεγμάτων τους και τέλος την κατασκευή μιας προγραμματιστικής βιβλιοθήκης η οποία θα επιτρέπει την εύκολη αυτοματοποίηση των παραπάνω. Ενώ η αυτόματη παραγωγή πλεγμάτων για αεροτομές πολλαπλών στοιχείων έχει εφαρμοσθεί στο παρελθόν [15], αυτή αφορούσε ή συγκεκριμένες περιπτώσεις δομών, ή μείωνε δραστικά την γεωμετρική πιστότητα των αεροτομών για να επιτρέψει την εφαρμογή μιας μη πολύπλοκης διαδικασίας παραγωγής πλέγματος. Έτσι, σκοπός της διπλωματικής αυτής είναι η δημιουργία και ο προγραμματισμός ενός γενικευμένου αλγορίθμου παραγωγής πλεγμάτων για πρακτικά οποιαδήποτε γεωμετρία καθώς και η δημιουργία απλών και γενικευμένων εργαλείων για τη παραγωγή γεωμετριών υψηλής άντωσης. Οι παραπάνω αλγόριθμοι συλλέγονται σε ένα αρχείο σε μορφή βιβλιοθήκης για την εύκολη χρήση τους.

(Η σελίδα αφήνεται σκόπιμα κενή)

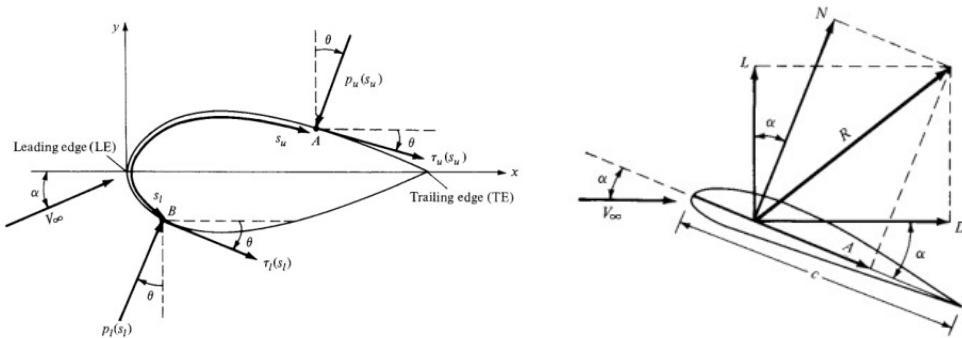
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

#### 2.1 Ρευστομηχανικές Δυνάμεις

Όταν ένα ρευστό ρέει γύρω από ένα σώμα ασκεί σε αυτό διαφόρων ειδών δυνάμεις. Το ενδιαφέρον της αεροδυναμικής συγκεντρώνεται στις λεγόμενες επιφανειακές δυνάμεις, δηλαδή στις δυνάμεις που επιδρούν στην επιφάνεια τους σώματος λόγω της επαφής αυτού με το ρευστό. Αυτές διαιρούνται σε δύο υποκατηγορίες ανάλογα με τη “πηγή” τους. Οι δυνάμεις πίεσης ασκούνται μόνο κάθετα στην επιφάνεια του σώματος και οφείλονται στην πίεση του ρευστού. Οι δυνάμεις ιξώδους ασκούνται και παράλληλα στην επιφάνεια ενώ η κάθετη συνιστώσα τους συνήθως αγνοείται λόγω της σημαντικά μικρότερης τιμής της σε σχέση με αυτή της πίεσης. Καθώς οι δυνάμεις αυτές ασκούνται σε κάθε απειροστό τμήμα της επιφάνειας του σώματος και οι τιμές τους μπορούν να μεταβάλλονται ανά τμήμα, αυτές ορίζονται ως φορτία με μονάδα τη δύναμη προς μονάδα επιφάνειας. Έτσι, χωρίζονται στις πιέσεις  $p$  και τις τάσεις  $\tau$  αντίστοιχα.

Με την ολοκλήρωση των κατανομών φορτίων σε όλη την επιφάνεια του σώματος υπολογίζεται μια μέση δύναμη  $R$  καθώς και μια μέση ροπή  $M$  για όλο το σώμα. Αυτή η δύναμη αναλύεται περαιτέρω σε δύο συνιστώσες, την παράλληλη στη ροή γνωστή ως οπισθέλκουσα  $D$  και την κάθετη, γνωστή ως άντωση  $L$ .



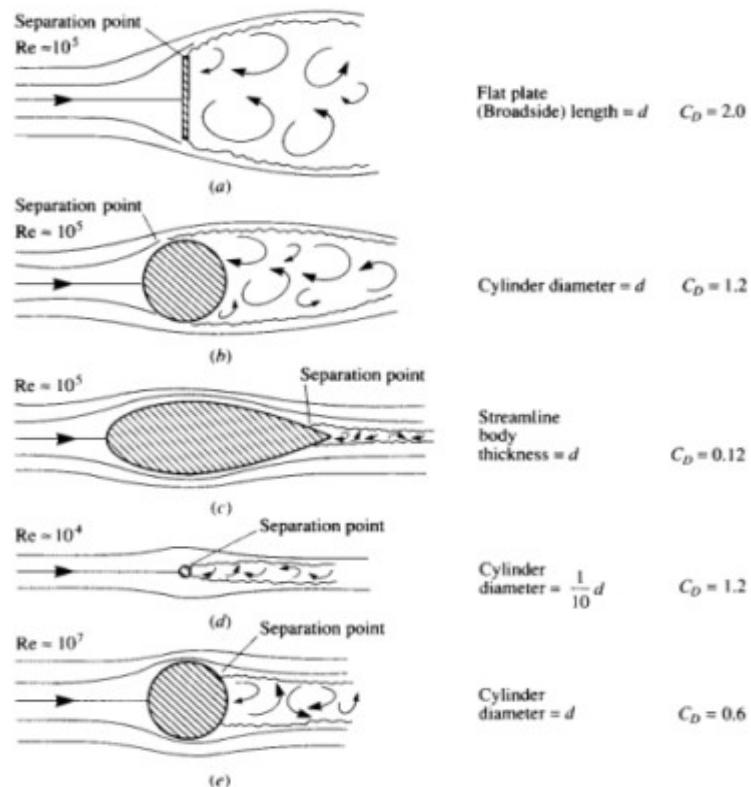
Ρευστομηχανικά φορτία και οι δυνάμεις που προκύπτουν [9]

Τα μεγέθη της ροπής και της δύναμης επηρεάζονται από διάφορους παράγοντες όπως τη ταχύτητα της ροής, τα χαρακτηριστικά του ρευστού, το μέγεθος του σώματος καθώς και του σχήματος του. Πολλοί από αυτούς τους παράγοντες είναι ή περιοριστικοί λόγω της αδυναμίας ελέγχου τους ή στόχοι επίδοσης για τον τομέα της αεροδυναμικής. Ο σημαντικότερος και πιο ευέλικτος από αυτούς μάλλον είναι το σχήμα της γεωμετρίας. Συνεπώς, είναι επιθυμητή η εύρεση ενός συντελεστή απόδοσης για τη γεωμετρία αυτή. Αυτό επιτυγχάνεται με την διαστατική ανάλυση των δυνάμεων σε σχέση με τους βασικούς παράγοντες που προαναφέρθηκαν, και έτσι εξάγονται τρεις βασικοί συντελεστές, η ανάλυση των οποίων γίνεται σε μετέπειτα παράγραφο.

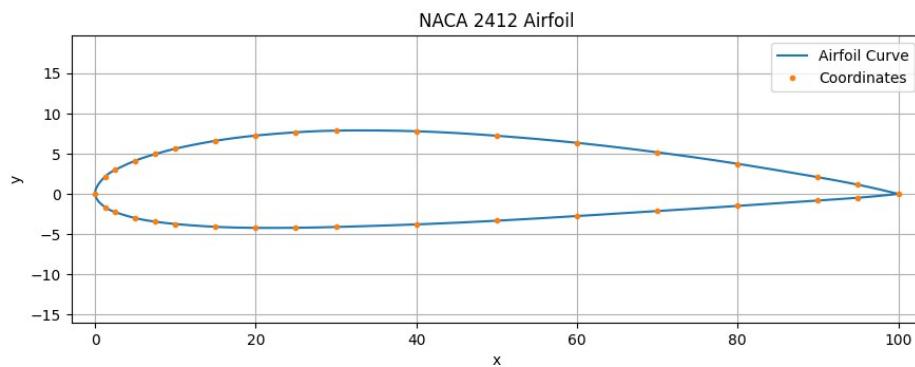
- Συντελεστής οπισθέλκουσας  $C_d$
- Συντελεστής άντωσης  $C_L$
- Συντελεστής ροπής  $C_m$

## 2.2 Αεροτομές

Ιδιαίτερη συμπεριφορά όσον αφορά τους συντελεστές επίδοσης παρουσιάζει η γεωμετρία της αεροτομής. Σε κατάλληλη τοποθέτηση μια αεροτομή έχει πολύ μικρό συντελεστή οπισθέλκουσας, ενώ ταυτόχρονα διατηρεί τη δυνατότητα μεγάλου συντελεστή άντωσης. Ως δισδιάστατες εξ' ορισμού, οι αεροτομές είναι ιδιαίτερα εύκολες στη μελέτη χάρη της απλότητας τους όπως φαίνεται και από τη μακρά ιστορία δεδομένων για αυτές. Έτσι έχει δημιουργηθεί μια συστηματική μέθοδος για τον προσδιορισμό της γεωμετρίας τους. Συγκεκριμένα, για την αναπαραγωγή της γεωμετρίας μιας αεροτομής μια καμπύλη spline διαγράφεται από συγκεκριμένα σημεία. Οι συντεταγμένες αυτών των σημείων αποτελούν το αναγνωριστικό χαρακτηριστικό κάθε αεροτομής καθώς ορίζουν τη γεωμετρία της. Ένα παράδειγμα για την αεροτομή NACA 2412 αποτυπώνεται παρακάτω.



Συντελεστές οπισθέλκουσας διαφόρων σωμάτων [9]



Καμπύλη και Συντεταγμένες Αεροτομής

Βέβαια, ενώ οι συντεταγμένες αυτών των σημείων ορίζουν τη γεωμετρία της αεροτομής, αυτές δεν επικοινωνούν αισθητά τις επιδόσεις της. Έτσι, αναγνωρίζονται γεωμετρικά χαρακτηριστικά με την βοήθεια των οποίων μπορεί να γίνει εκτίμηση των επιδόσεων αυτών. Αυτά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά περιγράφονται παρακάτω.

### Χορδή (Chord)

Ορίζεται ως το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την ακμή προσβολής με την ακμή φυγής. Είναι το χαρακτηριστικό μήκος κάθε αεροτομής και βάση αυτού γίνονται οι συγκρίσεις των αεροδυναμικών επιδόσεων.

### Μέση γραμμή κυρτότητας (Mean Camber Line)

Ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν ίση απόσταση από την άνω και κάτω επιφάνεια, με την απόσταση αυτή να υπολογίζεται κάθετα στην ίδια τη γραμμή κυρτότητας.

### Πάχος (Thickness)

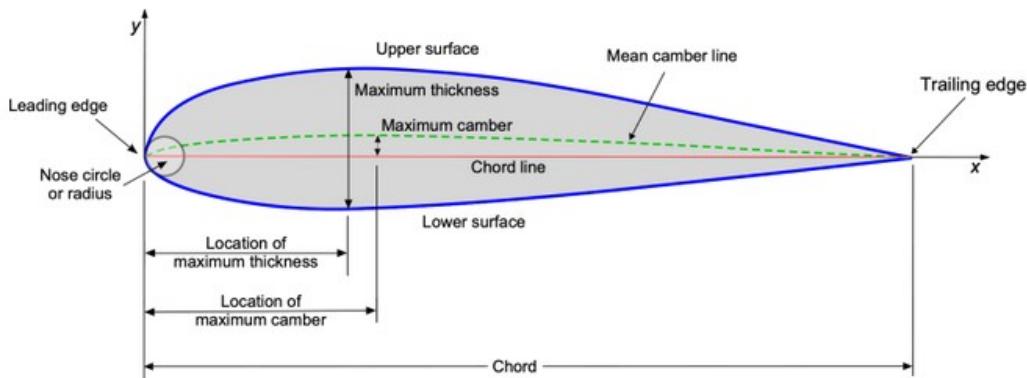
Η απόσταση μεταξύ των άνω και κάτω επιφανειών, ορισμένη ως κάθετη στη μέση γραμμή κυρτότητας. Μεγάλα πάχη υπάρχουν κυρίως σε αεροτομές χαμηλών ταχυτήτων.

### Μέγιστη Κυρτότητα (Maximum Camber)

Η μέγιστη διαφορά της μέσης γραμμής κυρτότητας από τη χορδή, υπολογιζόμενη κάθετα στη χορδή. Μεγαλύτερες μέγιστες κυρτότητες εμφανίζονται σε αεροτομές χαμηλότερων ταχυτήτων και υψηλότερης άντωσης.

### Ακτίνα Ακμής Προσβολής (Leading Edge Radius)

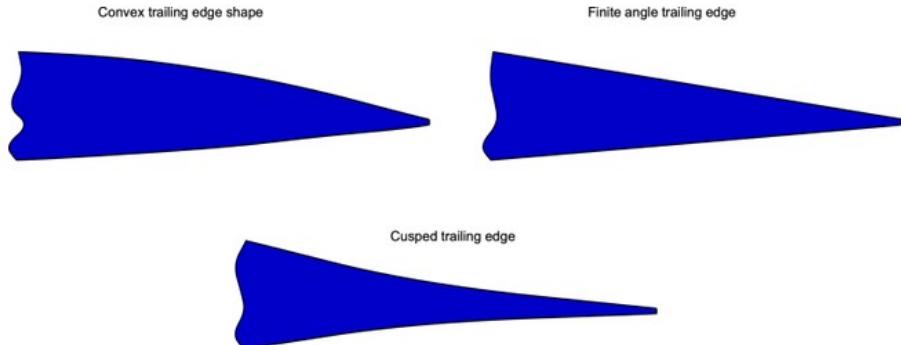
Είναι η ακτίνα καμπυλότητας της ακμής προσβολής.



Γεωμετρικά Στοιχεία Αεροτομής [10]

### Ακμή Φυγής (Trailing Edge)

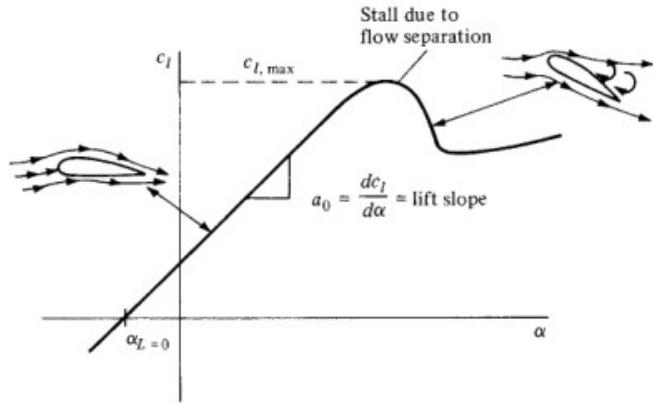
Η ακμή φυγής μιας αεροτομής είναι το σημείο όπου η ροή της άνω επιφάνειας συναντάει αυτή της κάτω και μπορεί να έχει διάφορες διαμορφώσεις. Η "αιχμηρή" ακμή φυγής (cusp) είναι μια διαμόρφωση μηδενικής γωνίας όπου οι δύο επιφάνειες είναι γεωμετρικά εφαπτόμενες μεταξύ τους. Αντιθέτως η ακμή φυγής πεπερασμένης γωνίας (finite angle) έχει μη μηδενική γωνία και χρησιμεύει για την απλότητα της. Τέλος, υποκατηγορία της δεύτερης αποτελεί η "κυρτή" ακμή φυγής που είναι πιο "συμπαγής" ενώ χρησιμεύει σε αεροτομές μεγάλου πάχους όπου ζητούμενο είναι ο χώρος εντός της πτέρυγας να είναι μεγάλος. Σημειώνεται, ότι θεωρητικά μια ακμή φυγής μηδενικού πάχους είναι βέλτιστη ως προς την αεροδυναμική συμπεριφορά της, όμως στη πραγματικότητα όλες έχουν ένα μικρό πεπερασμένο πάχος λόγω τεχνικών περιορισμών.



Είδη Ακμών Φυγής Αεροτομής [10]

#### Γωνία Προσβολής (Angle of Attack)

Ένα ακόμα μέγεθος που δεν είναι σχετικό με τη γεωμετρία της αεροτομής καθαυτή, αλλά με τη τοποθέτησή της στη ροή είναι η γωνία προσβολής. Ως γωνία προσβολής ορίζεται η γωνία μεταξύ της χορδής και της ταχύτητας της ελεύθερης ροής. Όλοι οι αεροδυναμικοί συντελεστές αλλάζουν σημαντικά με αυτό το μέγεθος. Καθώς αυξάνεται η γωνία προσβολής αυξάνονται και οι αεροδυναμικοί συντελεστές ενώ με υπερβολική αύξηση προκαλείται “απώλεια στήριξης” όπως επεξηγείται παρακάτω.



Διάγραμμα Συντελεστή Άντωσης - Γωνίας Προσβολής [9]

#### Απώλεια Στήριξης (Stall)

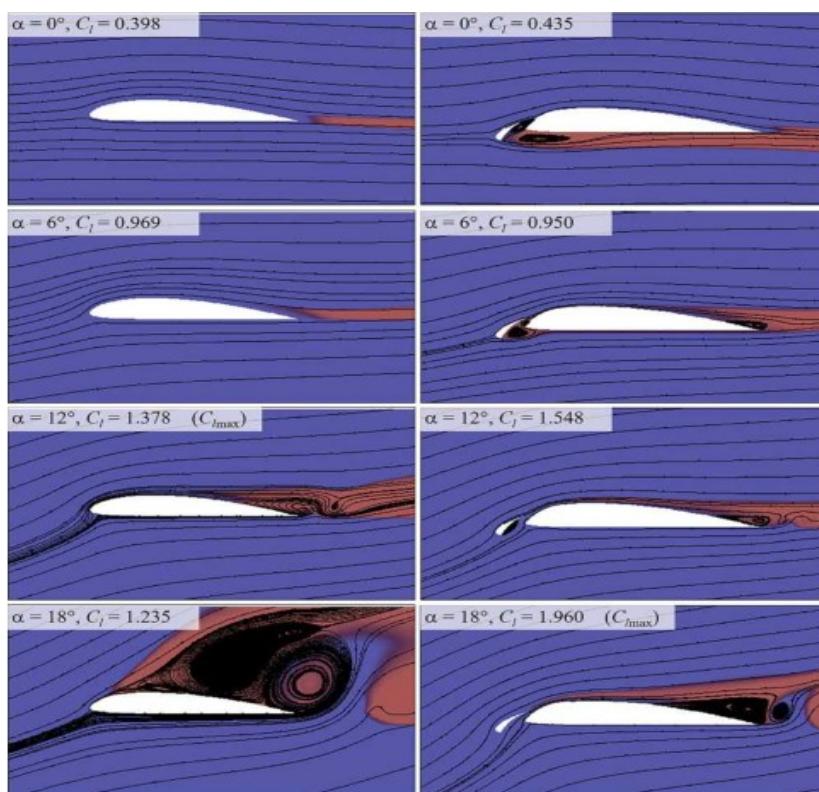
Για οποιαδήποτε αεροτομή και γωνία προσβολής, σε ένα σημείο αρνητικής κλίσης πίεσης της αεροτομής, η ταχύτητα του οριακού στρώματος αντιστρέφεται προκαλώντας την λεγόμενη “αποκόλληση” της ροής. Το σημείο αυτό είναι συγκεκριμένο και αλλάζει ανάλογα την αεροτομή, τη γωνία προσβολής και τον αριθμό  $Re$ . Μετά την αποκόλληση το οριακό στρώμα επαναπροσκολλάται ως τυρβώδες. Σε πολύ υψηλές γωνίες προσβολής, η εκ νέου προσκόλληση της ροής αποτυγχάνει. Κοντά σε αυτό το σημείο οι αεροδυναμικοί συντελεστές μειώνονται και προκαλείται απώλεια στήριξης [7].

## 2.3 Συστήματα Υψηλής Αντωσης

Ενώ τα αεροδυναμικά φορτία επηρεάζονται και από άλλους παράγοντες εκτός της γεωμετρίας, όπως η ταχύτητα και τα χαρακτηριστικά του αέρα (τα οποία “ελέγχονται” με το υψόμετρο), οι παράγοντες αυτοί ή είναι πολύ δύσκολο να ελεγχθούν ή αποτελούν στόχους επίδοσης. Έτσι, όταν οι αεροτομές καλούνται να ανταπεξέλθουν στο μεγάλο εύρος των αναγκών ενός σύγχρονου αεροσκάφους, η πιο αποτελεσματική λύση φαίνεται να είναι η αλλαγή της γεωμετρίας τους. Κάποιες από τις μη δραστικές αλλαγές είναι οι περιστροφές των επιφανειών ελέγχου του αεροσκάφους οι οποίες, ανάλογα με τη θέση τους και την περιστροφή τους επιφέρουν την επιθυμητή συμπεριφορά. Κατά την προσγείωση και απογείωση, συνήθως απαιτούνται δραστικότερες αλλαγές στη γεωμετρία οι οποίες επιτυγχάνονται με τη χρήση μηχανισμών, τα λεγόμενα συστήματα υψηλής άντωσης. Τα συστήματα αυτά έχουν τρία κύρια σκεπτικά για την αύξηση της άντωσης. Τα σκεπτικά αυτά περιγράφονται παρακάτω.

### Καθυστέρηση Αποκόλλησης Ροής

Η καθυστέρηση αποκόλλησης ροής επιδιώκεται διότι αυξάνει τη γωνία προσβολής που επέρχεται απώλεια στήριξης. Έτσι, με μεγαλύτερες γωνίες προσβολής μπορεί να παραχθεί μεγαλύτερη μέγιστη άντωση. Αυτή η καθυστέρηση συνήθως επιτυγχάνεται με τη δημιουργία κατάλληλων διακένων ή στην αεροτομή ή μεταξύ των επιμέρους στοιχείων της. Λόγω του σχήματος τους, αυτά αυξάνουν την πίεση του οριακού στρώματος στην πλευρά αναρρόφησης και καθυστερούν την αποκόλληση του.



Καθυστέρηση Αποκόλλησης Ροής με Χρήση Στοιχείου Slat [8]

Όμως, η αύξηση αυτή πολλές φορές δεν είναι πρακτική καθώς η γωνία αυτή περιορίζεται από τις διαστάσεις του αεροσκάφους. Σε πολύ μεγάλες γωνίες προσβολής, κατά την απογείωση και προσγείωση, το ουραίο του αεροσκάφους μπορεί να χτυπήσει το διάδρομο ή άλλα αντικείμενα. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως “tailstrike”. Έτσι, οι μέθοδοι καθυστέρησης αποκόλλησης ροής συνήθως χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με άλλες μεθόδους αύξησης άντωσης που παράπλευρα έχουν το αντίθετο αποτέλεσμα, δηλαδή μειώνουν

τη μέγιστη γωνία προσβολής. Με το συνδυασμό αυτό η μέγιστη γωνία προσβολής πριν την απώλεια στήριξης παραμένει σε επιθυμητά όρια.



Ζημιά από *tailstrike* [11]

#### Αύξηση Αισθητής Κυρτότητας

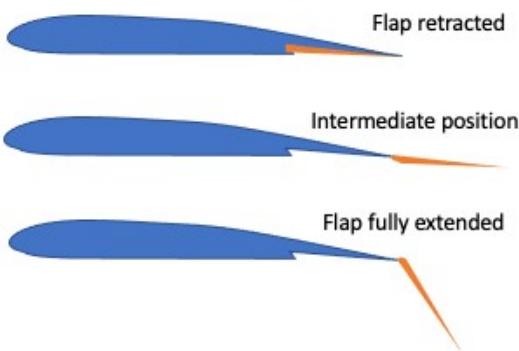
Γενικά, καθώς μεγαλώνει η κυρτότητα μιας αεροτομής μεγαλώνει και η άντωση αυτής. Για το λόγο αυτό γίνεται προσπάθεια για την αύξηση κυρτότητας που μπορεί να γίνει μέσω της περιστροφής τμημάτων της γεωμετρίας μιας αεροτομής όπως φαίνεται παρακάτω. Σημειώνεται ότι μια αύξηση κυρτότητας επιφέρει και μείωση της μέγιστης γωνίας προσβολής.



Αύξηση Αισθητής Κυρτότητας [8]

#### Αύξηση Αισθητού Μήκους Χορδής

Αυξάνοντας το αισθητό μήκος χορδής αυξάνει η επιφάνεια του φτερού άρα και η μέγιστη άντωση. Ένα τέτοιο σύστημα βασίζεται στην μετατόπιση των στοιχείων αεροτομής, το λεγόμενο “fowling motion”, όπως φαίνεται παρακάτω.



Αύξηση Αισθητού Μήκους Χορδής [12]

## 2.4 Υπολογιστική Ρευστομηχανική

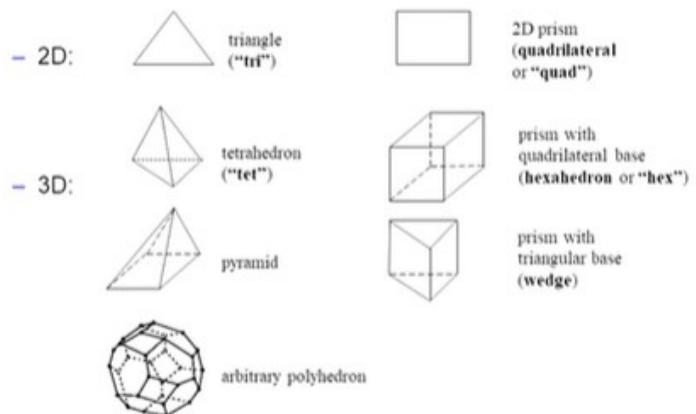
Η υπολογιστική ρευστομηχανική είναι ο νεότερος μεγάλος κλάδος της ρευστομηχανικής. Η ρευστομηχανική ιστορικά αρχίζει με την πειραματική ρευστομηχανική, η οποία είναι η βάση για κάθε εφαρμογή της. Αργότερα αναπτύχθηκε η κλασσική ρευστομηχανική, ένα μαθηματικό μοντέλο πιστό στη πραγματικότητα, που όμως αποδεικνύεται δύσχρηστο καθώς μπορεί να επιλυθεί μόνο σε πολύ περιορισμένες περιπτώσεις. Τελικά, πάνω σε αυτό το κλάδο δημιουργείται ο κλάδος της υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Η υπολογιστική ρευστομηχανική, απλοποιώντας τις εξισώσεις της κλασσικής, μπορεί να δώσει προσεγγιστικά αποτελέσματα που ναι μεν δεν είναι πάντα εύστοχα αλλά είναι χρήσιμα, ειδικά σε συνδυασμό με πειράματα. Παράλληλα, με την εξέλιξη του τομέα η πιστότητα των αποτελεσμάτων συνεχώς αυξάνεται.

Η υπολογιστική ρευστομηχανική είναι θεμελιωμένη πάνω στα μαθηματικά μοντέλα της κλασσικής. Το μεγαλύτερο και συνήθως πιο έμπιστο παρακλάδι της υπολογιστικής ρευστομηχανικής βασίζεται στην αριθμητική επίλυση του πεδίου ροής με τις εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής κι ενέργειας. Αυτή η επίλυση πραγματοποιείται με διάφορους τρόπους από τους οποίους τρεις είναι πιο διαδεδομένοι. Συγκεκριμένα, η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών, η μέθοδος πεπερασμένων όγκων και η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων. Στη πρώτη γίνεται μια βασική διακριτοποίηση των εξισώσεων στο χώρο, οι οποίες έπειτα λύνονται και δίνουν τιμές για κάθε σημείο (κόμβο) διακριτοποίησης. Στη δεύτερη, η ροή διακριτοποιείται σε πολλούς μικρούς όγκους όπου οι εξισώσεις διατήρησης εφαρμόζονται απλοποιημένες στα όρια αυτών δίνοντας λύση για κάθε ένα από αυτούς τους όγκους. Στην τρίτη μέθοδο, η ροή χωρίζεται σε στοιχεία που μπορεί να ομοιάζουν στους μικρούς όγκους που προαναφέρθηκαν. Σε αυτή όμως, η επίλυση βασίζεται σε προσεγγιστικές εξισώσεις οι οποίες συνδέουν τις τιμές των κόμβων (των ακμών του στοιχείου) μεταξύ τους. Και στις τρεις αυτές μεθόδους υπάρχει η ανάγκη διακριτοποίησης του πεδίου ροής δηλαδή της δημιουργίας του λεγόμενου "υπολογιστικού πλέγματος".

## 2.5 Υπολογιστικό Πλέγμα

### Βασικά Στοιχεία:

Το υπολογιστικό πλέγμα απεικονίζει μια διακριτοποίηση ενός μοντέλου γεωμετρίας, συνήθως για την εφαρμογή μιας υπολογιστικής προσομοίωσης. Στην περίπτωση επίλυσης πεδίου ροής, αυτή η γεωμετρία αναφέρεται στο ίδιο το ρευστό και όχι στα σώματα σε επαφή με αυτό. Το πλέγμα αποτελείται από κόμβους και στοιχεία, τα οποία έχουν διαφορετική σημασία ανάλογα τη μέθοδο επίλυσης. Το κοινό χαρακτηριστικό είναι ότι τα στοιχεία αποτελούν πολύγωνα και οι κόμβοι είναι τα σημεία στις ακμές τους. Υπάρχουν διάφορα είδη στοιχείων ανάλογα τη μέθοδο επίλυσης και τις χωρικές διαστάσεις του προβλήματος. Μερικά παραδείγματα φαίνονται παρακάτω.



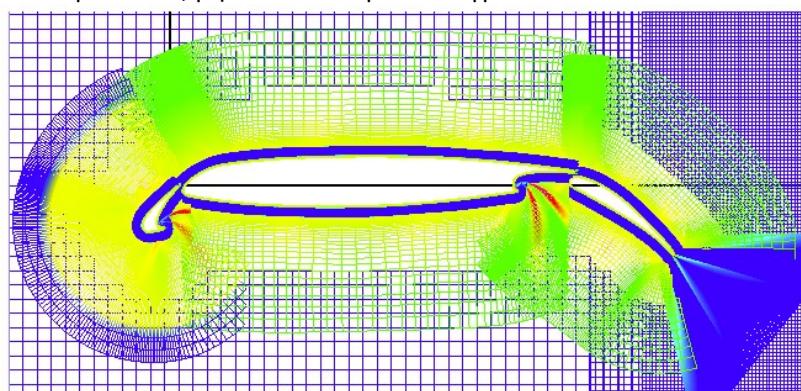
Διάφορα Είδη Στοιχείων [13]

#### Μέθοδοι Παραγωγής Πλέγματος:

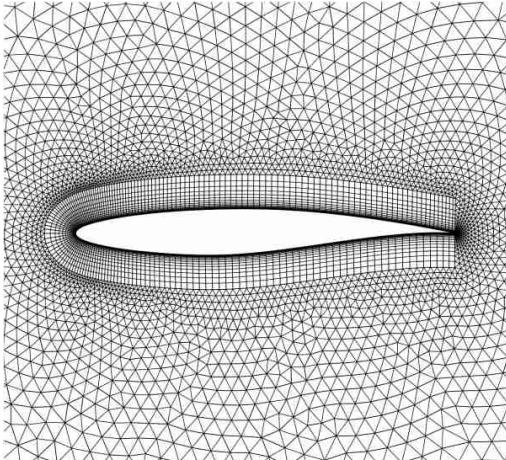
Υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες μεθόδων για την παραγωγή στοιχείων και κόμβων. Τα δομημένα πλέγματα αποτελούνται από στοιχεία και κόμβους που τοποθετούνται βάση ενός ξεκάθαρου και προβλέψιμου κανόνα, ακολουθώντας ένα συγκεκριμένο μοτίβο για όλο το πλέγμα. Παράγονται πιο γρήγορα και συνήθως επιταχύνουν την επίλυση. Το πρόβλημα τους έγκειται στη δυσκολία εφαρμογής τους σε πολύπλοκες γεωμετρίες. Τα μη δομημένα πλέγματα παράγονται από διάφορους αλγόριθμους που τοποθετούν κόμβους με βάση κάποιο σκεπτικό αλλά χωρίς να ακολουθούν ένα προβλέψιμο κανόνα. Είναι ικανά να "καλύψουν" ιδιόμορφες γεωμετρίες αλλά είναι πιο αργά στην παραγωγή τους και την επίλυση. Συνδυασμός των δύο μεθόδων είναι τα υβριδικά πλέγματα, τα οποία χρησιμοποιούν και τις δύο στρατηγικές σε διαφορετικές υποπεριοχές του πεδίου ροής και αποτελούν τη "μέση λύση" των δύο μεθόδων.

#### Διαίρεση σε Υποπεριοχές:

Μια στρατηγική για τη δημιουργία πλέγματος για πολύπλοκες γεωμετρίες είναι η διαίρεση του πεδίου ροής σε υποπεριοχές (subdomains). Έτσι σε κάθε υποπεριοχή μπορεί να εφαρμοστεί διαφορετικός αλγόριθμος παραγωγής πλέγματος ανάλογα με τις ανάγκες. Σε περίπτωση μη ενιαίου πλέγματος, τα σύνορα των υποπεριοχών δεν είναι ξεκάθαρα και αυτές επικαλύπτονται. Για την επίλυση του πεδίου υπολογίζονται σχέσεις μεταξύ των τιμών των κόμβων/στοιχείων που επικαλύπτονται βάση αλγορίθμων παρεμβολής. Τέτοιου είδους πλέγματα είναι γνωστά ως επικαλυπτόμενα ή χιμαιροειδή και χρειάζονται πιο ειδικές μεθόδους επίλυσης. Σε περιπτώσεις ενιαίου πλέγματος τα σύνορα των υποπεριοχών είναι κοινά, με κοινούς κόμβους και κοινές πλευρές στοιχείων και το πεδίο ροής επιλύεται "κανονικά". Η παρούσα εργασία ασχολείται αποκλειστικά με ενιαία, μη επικαλυπτόμενα πλέγματα.



Επικαλυπτόμενο πλέγμα [6]



Υθριδικό πλέγμα [14]

#### Λίγα λόγια περί ποιότητας πλέγματος:

Το υπολογιστικό πλέγμα αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για τα αποτελέσματα μιας επίλυσης. Με την εξέλιξη του τομέα της υπολογιστικής ρευστομηχανικής γίνονται όλο και μεγαλύτερες προσομοιώσεις σε όλο και πολυπλοκότερα προβλήματα. Σύγχρονα μοντέλα μπορούν να περιέχουν περίπλοκες γεωμετρίες και ροήκα φαινόμενα, διάφορες φάσεις διαφορετικών ρευστών έως και χημικές αντιδράσεις. Έτσι προκύπτει και η ανάγκη για όλο και πιο περίπλοκα πλέγματα, υψηλότερης ποιότητας, που να μπορούν να συλλάβουν τα φαινόμενα.

Το πρόβλημα παραγωγής ποιοτικού πλέγματος είναι πολυδιάστατο, δεν έχει ξεκάθαρο ορισμό και δεν επιδέχεται κλειστή ή μοναδική λύση. Εξαρχής η ερώτηση “Πότε ένα πλέγμα είναι καλό;” δεν απαντάται εύκολα. Ο Kuprr [3] επιχειρεί να δώσει ορισμό στην ποιότητα πλέγματος. Σύμφωνα με αυτόν, η ποιότητα πλέγματος αφορά τα χαρακτηριστικά του πλέγματος που επιτρέπουν σε μια συγκεκριμένη αριθμητική προσομοίωση μερικών διαφορετικών εξισώσεων, να διεξαχθεί αποδοτικά, με πιστότητα στα φυσικά φαινόμενα στα οποία βασίζεται και με την ακρίβεια που απαιτείται από το πρόβλημα. Αυτός ο ορισμός φανερώνει τη πολυπαραγοντικότητα του θέματος στην οποία γίνεται εμβάθυνση παρακάτω.

Ένα “καλό” πλέγμα δεν έχει συγκεκριμένες προδιαγραφές που πρέπει να τηρεί. Κάθε πρόβλημα έχει διαφορετικές ανάγκες πιστότητας από το μοντέλο και έτσι διαφορετικές απαιτήσεις από την ποιότητα πλέγματος. Αρχικά, πρέπει να ληφθεί υπόψη η επιθυμητή ακρίβεια η οποία ανάλογα με τη φύση του προβλήματος μπορεί να αλλάζει. Για παράδειγμα, σε μοντέλα που είναι ιδιαίτερα μελετημένα και κατανοητά το σφάλμα συνήθως είναι προβλέψιμο και μη απαγορευτικό. Αντιθέτως σε μοντέλα που προσδοκάται η κατανόηση της φύσης του φαινομένου απαιτείται ασυνήθιστα μεγάλη ακρίβεια. Γενικά, προτιμάται το πλέγμα να είναι λίγο πιο “λεπτό” από όσο χρειάζεται παρά πιο “τραχύ”. Η αποτύπωση του πλέγματος στη λύση συνήθως δηλώνει την μη ικανοποιητικά ακριβή σύλληψη του μοντέλου το οποίο είναι απευκταίο.

Παράλληλα, ένα πλέγμα υπόκειται και σε άλλους περιορισμούς διαφορετικούς από την ικανότητα σύλληψης των φαινομένων. Η επίλυση του πρέπει να είναι δυνατή και να γίνεται σε επιτρεπτό χρόνο. Έτσι περιορίζεται ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του πλέγματος καθώς ο χρόνος επίλυσης αυξάνεται με αυτόν. Επίσης τα στοιχεία του πλέγματος δεν πρέπει να οδηγούν σε αστάθεια τον επιλυτή και δεν πρέπει να δυσκολεύουν τη σύγκλιση της λύσης. Για το λόγο αυτό αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι ελέγχου για την ποιότητα των στοιχείων του πλέγματος και καθορίστηκαν τα αντίστοιχα μεγέθη.

Στη σύγχρονη εποχή έχει προκύψει ένας μεγάλος αριθμός τέτοιων μετρήσεων ελέγχου της γεωμετρίας στοιχείων, οι βασικότερες των οποίων φαίνονται παρακάτω. Αυτοί οι έλεγχοι εφαρμόζονται στα στοιχεία, συνήθως πριν την προσομοίωση, με σκοπό να παρέχουν μια ένδειξη της ακρίβειας και της ταχύτητας της επίλυσης. Όμως, παρατηρείται ότι ενώ η μετρούμενη ποιότητα των στοιχείων είναι σχετική με την ταχύτητα σύγκλισης, δεν συμβαίνει το ίδιο και για την ακρίβεια. Ο Thornburg [1] στη δημοσίευση του αναφέρει πως

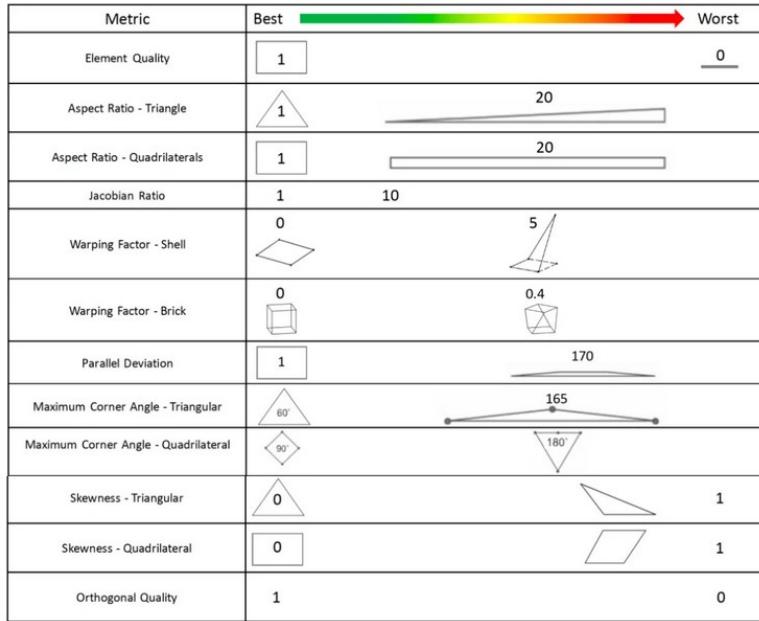
για τα τραχιά πλέγματα τυχόν “κακώς ορισμένα” στοιχεία είχαν επίπτωση στην ακρίβεια μιας προσομοίωσης, ενώ για τα πυκνά πλέγματα η επίδραση αυτή δεν ήταν σημαντική. Πιο ξεκάθαρη σχέση είχε η ποιότητα των στοιχείων με την ταχύτητα σύγκλισης, η οποία επιτάχυνε καθώς τα στοιχεία βελτιωνόντουσαν. Επίσης, η ποιότητα της γεωμετρίας των στοιχείων έχει ενδιαφέρον κυρίως μόνο για τις περιοχές με μεγάλες κλίσεις μεταβλητών, δηλαδή έντονα ροϊκά φαινόμενα. Όμοιως, ο Dannenhoffer [5] καταλήγει ότι οι μετρήσεις ποιότητας στοιχείων είναι χρήσιμες μόνο για την εύρεση προβληματικών ακραίων στοιχείων, ενώ πολύ μεγαλύτερη σημασία για την ακρίβη επίλυση είχε η πύκνωση του πλέγματος γύρω από τις περιοχές των ροϊών φαινομένων. Σημειώνεται ότι η έρευνα του περιορίζόταν σε υπερηχητικές ροές. Συνεχίζοντας, σύμφωνα με τον Knupp, πολλά από τα μεγέθη των μετρήσεων είναι προβληματικά ενώ η χρήση τους πρέπει να γίνεται προσεκτικά, από έμπειρο χειριστή και με ξεκάθαρη αίσθηση του χαρακτήρα της λύσης του προβλήματος. Παράλληλα, η χρήση τους περιορίζεται κυρίως στην εύρεση ακραίων στοιχείων και στη βελτίωση του πλέγματος στα σημεία τους.

Ο Luke και ο Katz στις δημοσιεύσεις τους, κάνουν έρευνες σχετικά με την ευαισθησία των λύσεων σε διάφορες γεωμετρίες στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα ο Katz [4] επιλύει διάφορες ροές με γνωστή λύση για διαφορετικά χαρακτηριστικά Aspect Ratio, Mesh Stretching, Curvature και Skewness, χρησιμοποιώντας τετραπλευρικά στοιχεία. Οι λύσεις δε φαίνεται να παρουσιάζουν μεγάλη ευαισθησία στην αλλαγή του Aspect Ratio ούτε στο Mesh Stretching και το Curvature. Σε διάφορα Mesh Stretching γίνεται διερεύνηση και με τριγωνικά στοιχεία που φαίνεται να παρουσιάζουν λίγο μεγαλύτερο σφάλμα από τα τετραπλευρικά σε μεγάλους αριθμούς Re. Το Element Skewness έχει ελάχιστη επιφρούρη σε μικρές γωνίες παραμόρφωσης που όμως αυξάνεται δυσανάλογα σε μεγαλύτερες γωνίες. Τέλος, οι προσομοιώσεις υψηλού Re είναι πολύ περισσότερο ανεκτικές σε στοιχεία “κακής” ποιότητας κι έτσι φαίνεται να συμφωνούν τα αποτλέσματά του με αυτά του Dannenhoffer. Ο Luke [2] ερευνά την επίδραση της πύκνωσης πλέγματος στην ακρίβεια της λύσης. Φτιάχνει πλέγματα στοιχείων με ποικίλα Aspect Ratio και δοκιμάζει την απόδοση τους για διάφορες γωνίες ροής έτσι ώστε τα στοιχεία και η ροή να μην είναι ευθυγράμμισμένα. Καταλήγει ότι η λύση ενός ισότροπου πλέγματος με Aspect Ratio κοντά στη μονάδα δεν είναι ευαίσθητη στη μη ευθυγράμμιση με τη ροή ενώ όσο αυξάνει το Aspect Ratio, η γωνία στοιχείων και ροής που κρατάει το σφάλμα σε επιτρεπτό επίπεδο μειώνεται δραστικά.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα πλέγμα πρέπει να προσαρμοστεί και στον επιλυτή του καθώς και στις σχετικές μεθόδους που θα χρησιμοποιηθούν. Κάθε πλέγμα μπορεί να εξυπηρετεί διαφορετικά μοντέλα τύρβης, διαφορετική μέθοδο επίλυσης ακόμα και διαφορετικούς τρόπους επεξεργασίας δεδομένων. Για παράδειγμα η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών αδυνατεί να επιλύσει μη δομημένα πλέγματα βάση του κλασσικού ορισμού της.

Έτσι καταλήγουμε στο ότι μπορεί να γίνει μια συλλογή γενικών εμπειρικών κανόνων για την δημιουργία πλέγματος βάση των τάσεων που παρατηρούνται από την κοινότητα. Μια βασική συλλογή τέτοιων κανόνων για την παραγωγή πλεγμάτων αεροτομών πολλών στοιχείων, φαίνεται παρακάτω.

- Πύκνωση πλέγματος γύρω από τα στοιχεία της αεροτομής.
- Πύκνωση πλέγματος στον απόρρους της αεροτομής.
- Χρήση τετραπλευρικών στοιχείων στο οριακό στρώμα.
- Χρήση υψηλού Aspect Ratio μόνο κοντά στην επιφάνεια της αεροτομής στο οριακό στρώμα.
- Πύκνωση οριακού στρώματος σε σημεία υψηλής καμπυλότητας αεροτομής.
- Πύκνωση σε περιοχές οριακού στρώματος όπου η ροή μπορεί να μην είναι παράλληλη σε αυτό.
- Πύκνωση κοντά στις ακμές στοιχείων.
- Πύκνωση σε περιοχές όπου σώματα βρίσκονται κοντά μεταξύ τους.



Διάφορες Μετρήσεις Ποιότητας Στοιχείων [17]

## 2.6 Διαστατική Ανάλυση

Η διαστατική ανάλυση αποτελεί ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο για τη σύγκριση λύσεων ή δεδομένων. Η εφαρμογή της βασίζεται στο σκεπτικό της ποιοτικής περιγραφής της φύσης ενός φαινομένου χωρίς την συμπερίληψη διαστάσεων σε αυτή. Θεμέλια της διαστατικής ανάλυσης είναι οι αδιάστατοι αριθμοί, που χρησιμεύουν σε τέτοιες περιγραφές και η αδιαστατοποίηση μεγεθών. Σύμφωνα με το θεώρημα “ $\pi$ ” του Buckingham, κάθε εξίσωση με φυσικό νόημα που περιέχει  $n$  ανεξάρτητες μεταβλητές και  $m$  διαστάσεις μπορεί να οδηγήσει σε με μια ανάλογη εξίσωση με  $m - n$  αδιάστατες μεταβλητές. Για την αδιαστατοποίηση αυτή χρησιμοποιούνται χαρακτηριστικές μονάδες ή και φυσικές σταθερές του φαινομένου που περιγράφεται. Για τη μηχανική ρευστών, οι κύριες χαρακτηριστικές μονάδες οι οποίες θεωρείται ότι “παράγουν” όλες τις άλλες είναι αυτές του μήκους, του χρόνου και είτε της μάζας είτε της δύναμης. Μέσα από αυτή τη διαδικασία μπορούν να παραχθούν τρεις βασικοί αδιάστατοι αριθμοί για την συσχέτιση των δυνάμεων που δέχεται ένα σώμα από ένα κινούμενο ρευστό και των χαρακτηριστικών αυτού, της ροής και του σώματος.

### Αριθμός Reynolds:

Ο αριθμός Reynolds ή  $Re$ , επιδιώκει να προβλέψει ροϊκά φαινόμενα υπολογίζοντας το λόγο δυνάμεων αδράνειας και ιξώδους. Είναι ο πιο διαδεδομένος και πολυχρησιμόποιημένος αδιάστατος αριθμός στη ανάλυση ροών και αφορά τη κατάσταση της ροής. Χαμηλοί αριθμοί ενδεικνύουν στρωτή προβλέψιμη ροή ενώ ψηλοί χαρακτηρίζουν πιο στοχαστικές τυρβώδης ροές.

$$Re = \frac{\rho_\infty \cdot V_\infty \cdot l}{\mu_\infty}$$

Όπου:

$\rho_\infty$  : πυκνότητα ελεύθερης ροής

$V_\infty$  : ταχύτητα ελεύθερης ροής

$l$  : χαρακτηριστικό μήκος

$\mu_\infty$  : δυναμικό ιξώδες ελεύθερης ροής

### Αριθμός Mach:

Ο αριθμός Mach ή  $M$  είναι μάλλον ο δεύτερος πιο διαδεδομένος αριθμός στην αεροδυναμική. Ερμηνεύει το λόγο δυνάμεων αδράνειας και συμπιεστότητας. Μεγάλοι αριθμοί  $M$  χαρακτηρίζουν ροές υψηλής ταχύτητας όπου τα φαινόμενα συμπίεσης της ροής αποκτούν ψηλότερη σημασία.

$$M = \frac{V_\infty}{a_\infty}$$

Όπου:

$a_\infty$  : ταχύτητα ήχου ελεύθερης ροής

### Συντελεστής δύναμης:

Αυτός ο συντελεστής αφορά τις γεωμετρίες που επηρεάζουν τη ροή και συσχετίζει τη δύναμη αδράνειας του ρευστού με αυτή που ασκείται από μια γεωμετρία σε αυτό (και από αυτό στη γεωμετρία). Βάση αυτού του συντελεστή ορίζονται οι γνωστοί συντελεστές αεροδυναμικών επιδόσεων που περιγράφονται παρακάτω.

$$\text{Συντελεστής άντωσης: } c_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \cdot S}$$

$$\text{Συντελεστής οπισθέλκουσας: } c_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \cdot S}$$

$$\text{Συντελεστής ροπής: } c_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \cdot S \cdot l}$$

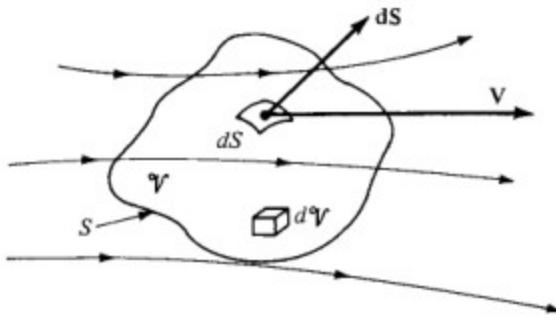
Για δισδιάστατες (χωρικά) ροές, ορίζεται  $S = l \cdot 1 \text{ m}$  με τους συντελεστές να συμβολίζονται αντίστοιχα:

$c_l, c_d, c_m$ .

## 2.7 Εξισώσεις Διατήρησης

### Εξίσωση Διατήρησης Μάζας:

Η εξίσωση συνέχειας μοντελοποιεί τη βασική αρχή σύμφωνα με την οποία η μάζα δεν παράγεται ή καταστρέφεται.



Αυθαίρετος Όγκος Ελέγχου [9]

Έτσι για έναν αυθαίρετο όγκο ελέγχου η ροή μάζας μέσα από ένα απειροστό στοιχείο της επιφάνειας του υπολογίζεται ως  $\rho \cdot V_n \cdot dS$  με  $\rho$  τη πυκνότητα της ροής εκεί,  $dS$  το εμβαδό της απειροστής επιφάνειας και  $V_n$  τη κάθετη σε αυτή ταχύτητα με κατεύθυνση εκτός του όγκου. Ολοκληρώνοντας για όλη την επιφάνεια παίρνουμε τη ροή της μάζας μέσα από τα όρια του όγκου ως:

$$\iint_S \rho V \cdot dS$$

Η μάζα εντός του όγκου υπολογίζεται ως την ολοκλήρωση της πυκνότητας στον όγκο, ως έχει:

$$\iiint_V \rho dV \quad \text{και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο:} \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV$$

Έτσι με την αρχή διατήρηση μάζας εξάγεται η εξίσωση συνέχειας και η διαφορική μορφή της για απειροστό όγκο ρευστού.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho V \cdot dS = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

### Εξίσωση Διατήρησης Ορμής:

Η εξίσωση διατήρησης ορμής μοντελοποιεί τον δεύτερο νόμο Newton για το ρευστό. Σε έναν όγκο ελέγχου επιδρούν οι μαζικές δυνάμεις, οι οποίες εφαρμόζονται σε κάθε στοιχείο εντός του όγκου (πχ. βαρυτική, ηλεκτρομαγνητική) και οι επιφανειακές δυνάμεις που εφαρμόζονται στις επιφάνειες του όγκου. Οι επιφανειακές δυνάμεις διακρίνονται στις δυνάμεις πίεσης και τις δυνάμεις ιξώδους.

Όπως και πριν, ολοκληρώνοντας τη πίεση σε όλη την επιφάνεια ρευστού εξάγεται η δύναμη πίεσης  $-\iint_S p dS$ .

Ολοκληρώνοντας τις μαζικές δυνάμεις  $f$  σε όλο τον όγκο του ρευστού αυτές αναπαριστώνται ως  $\iiint_V f \rho dV$ .

Ομοίως με την πίεση ολοκληρώνονται οι επιφανειακές τάσεις λόγω ιξώδους του ρευστού στην επιφάνεια του όγκου. Η συνολική συνεισφορά τους μπορεί να συμβολιστεί ως  $F_{viscous}$ .

Για τον υπολογισμό της μεταβολής της ορμής παίρνεται υπόψη η ορμή της μάζας που ρέει μέσα από τα όρια του όγκου, και η μεταβολή της ταχύτητας της μάζας εντός του όγκου. Συγκεκριμένα:

Ολοκληρώνοντας την ροή της μάζας επί την ταχύτητα της σε όλη την επιφάνεια του ρευστού παίρνουμε τη ροή της ορμής ως  $\iint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{V}$ .

Η μεταβολή της ορμής σε όλο τον όγκο του ρευστού θα είναι  $\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot \mathbf{V} dV$ .

Οπότε, εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο Newton, έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot \mathbf{V} dV + \iint_S (\rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) \mathbf{V} = \iiint_V f \cdot \rho dV - \iint_S p dS + F_{viscous}$$

Από αυτή την εξίσωση μπορούν να εξαχθούν διαφορικές εξισώσεις για την διατήρηση της ορμής στην κάθε διάσταση ανάλογα το σύστημα συντεταγμένων. Για καρτεσιανό σύστημα θα έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις, γνωστές και ως εξισώσεις Navier-Stokes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + F_{x,viscous} \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + F_{y,viscous} \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + F_{z,viscous} \end{aligned}$$

#### Εξίσωση Διατήρησης Ενέργειας:

Αυτή η εξίσωση αποτελεί την εφαρμογή του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου σε ροές. Παρακάτω παρουσιάζονται συνοπτικά η ολοκληρωμένη και η διαφορική μορφή της. Δεν γίνεται περαιτέρω εμβάθυνση καθώς στα πλαίσια αυτής της εργασίας οι εξισώσεις αυτές παραλείπονται όπως εξηγείται στην επόμενη παράγραφο.

$$\begin{aligned} \iiint_V \dot{q} \rho dV + \dot{Q}_{viscous} - \iint_S p \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}) dV + \dot{W}_{viscous} &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \left( e + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) dV \\ + \iint_S \rho \left( e + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) \mathbf{V} \right] = \rho \dot{q} - \nabla \cdot (p \mathbf{V}) + \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}) + \dot{Q}'_{viscous} + \dot{W}'_{viscous}$$

#### Απλοποιήσεις Εξισώσεων:

Η περιγραφή της ροής για το πρόβλημα που αφορά τη συγκεκριμένη εργασία, επιδέχεται διάφορες απλοποιήσεις που μειώνουν σημαντικά την πολυπλοκότητα του προβλήματος. Η πρώτη παραδοχή που γίνεται είναι μηδενικές μαζικές δυνάμεις, καθώς η επίδραση της βαρύτητας σε ροή αέρα γύρω από

αεροτομή είναι αμελητέα. Επίσης, λόγω των χαμηλών ταχυτήτων στις προσομοιώσεις, ο αέρας μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστος, κάνοντας τη πυκνότητα σταθερή. Αυτή η παραδοχή επιτρέπει την παράλειψη της εξίσωσης της διατήρησης ενέργειας καθώς οι εξισώσεις διατήρησης μάζας και ορμής επαρκούν για τον υπολογισμό των μειωμένων αγνώστων μεταβλητών. Ακόμα, καθώς οι αεροτομές είναι δισδιάστατες γεωμετρίες, η τρίτη χωρική διάσταση μπορεί επίσης να παραληφθεί. Τέλος η ροή θεωρείται σταθερή στο χρόνο. Έτσι παίρνουμε τις απλοποιημένες μορφές των εξισώσεων όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\text{Εξισώση συνέχειας: } \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) (u \ V) = - \frac{\partial p}{\partial x} + F_{x,viscous}$$

Εξισώσεις ορμής:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) (v \ V) = - \frac{\partial p}{\partial y} + F_{y,viscous}$$

## 2.8 Μοντελοποίηση Τύρβης

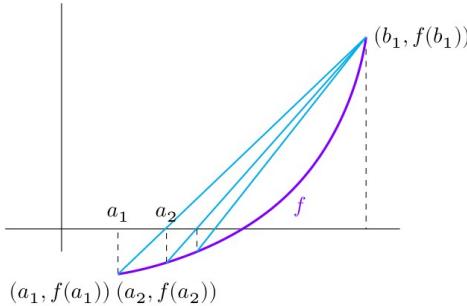
Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν ροή σταθερή στο χρόνο. Στην πραγματικότητα, η πλειοψηφία των ροών που συναντάται στη φύση είναι τυρβώδες. Οι τυρβώδες ροές χαρακτηρίζονται από στοχαστικότητα ταχυτήτων, μεταβλητότητα στο χρόνο καθώς και άλλες ιδιότητες όπως υψηλή διαχυτότητα. Για αυτό το λόγο, η απευθείας προσομοίωση τυρβώδων ροών (Direct Numerical Simulation) απαιτεί πολύ πυκνά πλέγματα και πολύ μικρές κλίμακες χρόνου (επιλύσεις μόνιμης ροής δεν υφίστανται), που οδηγούν σε απαράδεκτα πολύπλοκα προβλήματα με μη επιτρεπτούς χρόνους επίλυσης. Για αυτό το λόγο, πολύ συχνά η τύρβη μοντελοποιείται, και τα πιο διαδεδομένα μοντέλα για αυτό είναι τα RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes). Αυτά τα μοντέλα προσπαθούν να εκτιμήσουν την μέση επίδραση της τύρβης, χωρίς να την προσομοιώνουν. Στη παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν το μοντέλο δύο εξισώσεων k-omega SST καθώς και το μοντέλο μιας εξισώσης Spalart-Allmaras, λόγω της ευστοχίας του στην εκτίμηση εξωτερικών ροών και της ταχύτητας επίλυσης του.

## 2.9 Μαθηματικό Υπόβαθρο

Εντός του κώδικα γίνεται συχνή χρήση μεθόδων και εννοιών αριθμητικής ανάλυσης, γραμμικής άλγεβρας και γεωμετρίας. Οι σημαντικότερες παρουσιάζονται συνοπτικά παρακάτω.

### Μέθοδος Χορδής:

Αποτελεί μια απλή και αξιόπιστη αριθμητική μέθοδο επίλυσης συναρτήσεων χωρίς τύπο παραγώγου. Βασίζεται στο θεώρημα Bolzano και χρειάζεται ένα διάστημα δύο τιμών όπου σε αυτές η συνάρτηση έχει αντίθετα πρόσημα. Διαγράφεται μια ευθεία από τα δύο σημεία που ορίζονται από τις τιμές του διαστήματος και της συνάρτησης, βρίσκεται η τιμή όπου η ευθεία τέμνει τον άξονα και ανάλογα με το πρόσημο της συνάρτησης στην τιμή τομής, αυτή αντικαταστεί την ομόσημη τιμή του διαστήματος. Έπειτα η διαδικασία επαναλαμβάνεται, μέχρι η τιμή συνάρτησης στη τομή και η ομόσημη της να έχουν την επιθυμητά μικρή διαφορά.



Αναπαράσταση Μεθόδου Χορδής [19]

### Κινούμενος Μέσος Όρος:

Αποτελεί μια απλή τεχνική για τη μείωση του “θορύβου” σε ένα σύνολο στοιχισμένων δεδομένων. Είναι η αντικατάσταση μιας τιμής με το μέσο όρο των κοντινών της.

$$x'_i = \frac{\sum_{j=i-k}^{i+2k} x_j}{2k+1}$$

### Ανάπτυγμα Taylor:

Είναι ένα άπειρο άθροισμα πολυωνυμικών όρων που προσεγγίζει μια συνάρτηση κοντά στη τιμή στην οποία εφαρμόζεται. Χρησιμεύει για την αριθμητική προσέγγιση παραγώγων, αγνοώντας τους μεγαλύτερους όρους του πολυωνύμου.

$$f_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} (x - x_0)^n$$

### Γεωμετρική Μετατόπιση:

Πράξη που μετατοπίζει ένα σύνολο συντεταγμένων στο χώρο. Για μετατόπιση κατά διάνυσμα  $[x_v, y_v]$ :

$$\begin{bmatrix} x'_1, y'_1 \\ x'_2, y'_2 \\ \vdots & \vdots \\ x'_n, y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_v, y_1 + y_v \\ x_2 + x_v, y_2 + y_v \\ \vdots & \vdots \\ x_n + x_v, y_n + y_v \end{bmatrix}$$

### Γεωμετρική Περιστροφή:

Πράξη που περιστρέφει ένα σύνολο συντεταγμένων στο χώρο, γύρω από την αρχή των αξόνων. Για περιστροφή κατά γωνία  $\theta$ :

$$\begin{bmatrix} x'_1, y'_1 \\ x'_2, y'_2 \\ \dots \\ \dots \\ x'_n, y'_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta), & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta), & \cos(\theta) \end{pmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1, y_1 \\ x_2, y_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n, y_n \end{bmatrix}^T$$

### Γεωμετρική Μεγέθυνση – Σμίκρυνση:

Πράξη που μεταβάλει ένα σύνολο συντεταγμένων με τρόπο που οι μεταξύ τους αποστάσεις αλλάζουν, χωρίς όμως να αλλάζουν οι μεταξύ τους γωνίες.

$$\begin{bmatrix} x'_1, y'_1 \\ x'_2, y'_2 \\ \dots \\ \dots \\ x'_n, y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot x_1, \beta \cdot y_1 \\ \alpha \cdot x_2, \beta \cdot y_2 \\ \dots \\ \dots \\ \alpha \cdot x_n, \beta \cdot y_n \end{bmatrix}$$

### Κύκλος εφαπτόμενος σε δύο ευθείες, με ορισμένη ακτίνα:

Για την εύρεση κέντρου κύκλου ακτίνας  $r$  εφαπτόμενου σε δύο ευθείες

$$y = \alpha_1 x + \beta_1, \text{ λύνεται το σύστημα: } \begin{aligned} y &= \alpha_1 x + \beta_1 \pm r \cdot \sqrt{\alpha_1^2 + 1} \\ y &= \alpha_2 x + \beta_2 \pm r \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + 1} \end{aligned}$$

### Εφαρμογή κύκλου σε σημεία:

Για την εύρεση κατάλληλου κέντρου  $[x_c, y_c]$  και ακτίνας  $r$  κύκλου, που προσεγγίζει ένα σύνολο  $n$  σημείων με συντεταγμένες  $[x, y]$  με βάση την μέθοδο του Coope [20] ορίζουμε:

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i y_i & \sum_{i=0}^n x_i \\ 2 \sum_{i=0}^n x_i y_i & \sum_{i=0}^n y_i^2 & \sum_{i=0}^n y_i \\ 2 \sum_{i=0}^n x_i & 2 \sum_{i=0}^n y_i & n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n (x_i^3 + x_i y_i^2) \\ \sum_{i=0}^n (y_i^3 + y_i x_i^2) \\ \sum_{i=0}^n x_i + \sum_{i=0}^n y_i \end{bmatrix}$$

Με τη λύση του συστήματος  $S = A^{-1} \cdot B$

Έτσι έχουμε  $x_c = s_1$ ,  $y_c = s_2$  και

$$r = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + \frac{1}{n} \left( \sum_{i=0}^n x_i^2 + \sum_{i=0}^n y_i^2 - 2x_c \sum_i x_i - 2y_c \sum_i y_i \right)}$$

#### NURBS:

Τα Non Uniform Rational B-Splines αποτελούν μια ευρεία οικογένεια παραμετρικών καμπυλών. Αυτές ορίζονται με βάση συναρτήσεις οι οποίες καθορίζουν συντεταγμένες στο χώρο βάση μιας παραμέτρου, ανάλογα με "σημεία ελέγχου". Ο γενικός ορισμός τους είναι ως έχει:

$$C(u) = \sum_{i=1}^k R_{i,n}(u) P_i$$

$$R_{i,n}(u) = \frac{N_{i,n}(u) w_i}{\sum_{j=1}^k N_{j,n}(u) w_j}$$

$$N_{i,n} = f_{i,n} N_{i,n-1} + g_{i+1,n} N_{i+1,n-1}$$

$$f_{i,n}(u) = \frac{u - k_i}{k_{i+1} - k_i}$$

$$g_{i,n}(u) = 1 - f_{i,n}(u)$$

Όπου  $P_i$  είναι τα σημεία ελέγχου (control points), βάση των οποίων μπορεί να γίνει εύκολα και διαισθητικά η διαμόρφωση της γεωμετρίας της καμπύλης από ένα χρήστη. Αυτές οι καμπύλες είναι πολύ διαδεδομένες σε υπολογιστικές μοντελοποιήσεις όλων των ειδών. Οι καμπύλες Bezier είναι υποκατηγορία αυτών των καμπυλών. Η εμβάθυνση στις καμπύλες Splines ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσας εργασίας, αλλά μπορεί κανείς να αναφερθεί στο σύγγραμμα των Piegle και Tiller [21].

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

#### 3.1 Κώδικας Βιβλιοθήκης

Για την παρούσα εργασία έχει συγγραφεί κώδικας σε μορφή βιβλιοθήκης, η οποία κάνει πολύ εύκολη την αυτοματοποίηση παραγωγής γεωμετριών υψηλής άντωσης καθώς και την παραγωγή γεωμετρικού πλέγματος για αυτές.

##### 3.1.1 Διάταξη

Ο κώδικας έχει συγγραφεί στη γλώσσα προγραμματισμού Python 3.13.2, στο προγραμματιστικό περιβάλλον Visual Studio Code. Για τη λειτουργία του δημιουργήθηκε ένα virtual environment στο οποίο εγκαταστάθηκαν οι παρακάτω βιβλιοθήκες:

###### NURBS - Python, (geomdl 5.3.1):

Μια βιβλιοθήκη σχετική με καμπύλες NURBS, που επιτρέπει την εύκολη δημιουργία τους και επαλήθευση τους.

###### NumPy, (numpy 2.2.3):

Μια από τις πιο διαδεδομένες βιβλιοθήκες της python, ειδικά σε επιστημονικούς κλάδους. Είναι μια βιβλιοθήκη σχετική με μαθηματικές πράξεις, αριθμητική ανάλυση και γραμμική άλγεβρα. Είναι η βάση για σχεδόν κάθε συνάρτηση στο κώδικα.

###### Matplotlib, (matplotlib 3.10.1):

Βιβλιοθήκη σχετική με απεικονίσεις διαγραμμάτων η οποία έχει επιβοηθητικό ρόλο στην επιθεώρηση γεωμετριών καθώς και στη παραγωγή της πλειοψηφίας των διαγραμμάτων της εργασίας.

###### Gmsh, (gmsh 4.13.1):

Επρόκειτο για ένα API της python για το χειρισμό του προγράμματος Gmsh, το οποίο χρησιμοποιείται για να παράγει το υπολογιστικό πλέγμα των γεωμετριών.

#### 3.1.2 Δομή

Σκοπός μιας βιβλιοθήκης είναι η εύκολη πρόσβαση σε έναν αριθμό προγραμματιστικών εργαλείων (συναρτήσεων ή κλάσεων) τα οποία είναι σχετικά με ένα συγκεκριμένο θέμα. Για την διευκόλυνση αυτής της πρόσβασης, αλλά και για ευκολότερη συντήρηση το σύνολο του κώδικα “τακτοποιήθηκε” σε διάφορες “wrapper” κλάσεις, δηλαδή σε κλάσεις με κύριο σκοπό τους να ξεχωρίσουν τις λειτουργικές κλάσεις και συναρτήσεις σε διαφορετικές κατηγορίες. Παρακάτω παρουσίαζονται οι συναρτήσεις και οι αντίστοιχες κλάσεις, που έχουν ομαδοποιηθεί στις ομάδες **Βοηθητικών Συναρτήσεων**, **Διαμόρφωσης Γεωμετρίας** και **Παραγωγής Πλέγματος** ανάλογα το σκοπό τους.

#### 3.1.3 Βοηθητικές Συναρτήσεις

Αυτές οι συναρτήσεις, εξυπηρετούν βοηθητικούς και γενικούς σκοπούς, κυρίως για τις ανάγκες του υπόλοιπου κώδικα. Βρίσκονται σε δύο ξεχωριστές wrapper κλάσεις, την **file**, και την **num**.

**file:**

Εμπεριέχει τη συνάρτηση `read_csv`, η οποία διαβάζει αρχεία csv με συντεταγμένες αεροτομών και δημιουργεί `Airfoil` objects από αυτές.

**num:**

Εμπεριέχει διάφορες συναρτήσεις αριθμητικής ανάλυσης, οι οποίες περιγράφονται συνοπτικά παρακάτω.

**bisect\_solver:**

Επρόκειτο για έναν αλγόριθμο επίλυσης συναρτήσεων με διχοτόμηση. Έχει σχετικά γρήγορη επανάληψη αλλά αργεί να συγκλίνει.

**chord\_solver:**

Ένας αλγόριθμος επίλυσης συναρτήσεων με τη μέθοδο χορδής. Έχει ελαχίστως πιο αργή επανάληψη αλλά συγκλίνει πολύ γρηγορότερα, με πολύ λιγότερες επαναλήψεις.

**basic\_optim:**

Ένας απλός αλγόριθμος αριθμητικής βελτιστοποίησης. Επαναληπτικά υπολογίζει τιμές σε ένα διάστημα, και “κόβει” το λιγότερα υποσχόμενο μέρος του.

**roll\_average:**

Η εφαρμογή του κινούμενο μέσου όρου για ένα σύνολο δεδομένων. Μειώνει τον “θόρυβο”.

**roots:**

Εξεύρεση προσεγγιστικών ριζών μιας γραμμικής παρεμβολής δεδομένων. Δεδομένα εντός ρυθμιζόμενου εύρους τιμών, πάνω και κάτω από τον χάρονα μπορούν να αγνοηθούν σε περίπτωση υψηλού “θορύβου”.

**derivative:**

Εξεύρεση κλίσεων κάθε ευθύγραμμου τμήματος μιας γραμμικής παρεμβολής δεδομένων.

### 3.1.4 Διαμόρφωση Γεωμετρίας

Οι παρακάτω συναρτήσεις και κλάσεις είναι σχετικές με την διαμόρφωση και την δημιουργία γεωμετριών. Παρέχεται ένας μεγάλος αριθμός βασικών εργαλείων, για την ελεύθερη διαμόρφωση γεωμετρίας από τον χρήστη, καθώς και πιο εξειδικευμένα εργαλεία, αλλά με πιο περιορισμένες χρήσεις. Όπως αναφέρθηκε, οι αεροτομές, και σχετικές καμπύλες στη πλειοψηφία των περιπτώσεων δίνονται με συντεταγμένες σημείων για splines. Έτσι, όλες οι γεωμετρικές πράξεις του κώδικα βασίζονται πάνω σε κατάλληλη μετατόπιση / προσθήκη / διαγραφή σημείων ώστε να επιτευχθεί καλύτερη συνοχή και ευκολία χρήσης. Επίσης σημειώνεται ότι όλα τα σημεία αυτά ορίζονται σε δύο διαστάσεις, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

**geo:**

Κλάση που περιέχει βασικές γεωμετρικές συναρτήσεις καθώς και ξεχωριστές κλάσεις για την κατηγοριοποίηση αυτών. Αποτελεί το θεμέλιο του υπόλοιπου κώδικα και τα προγραμματιστικά εργαλεία που παρέχει έχουν γενικές χρήσεις.

**translate:**

Γεωμετρική μετατόπιση σημείων.

**rotate:**

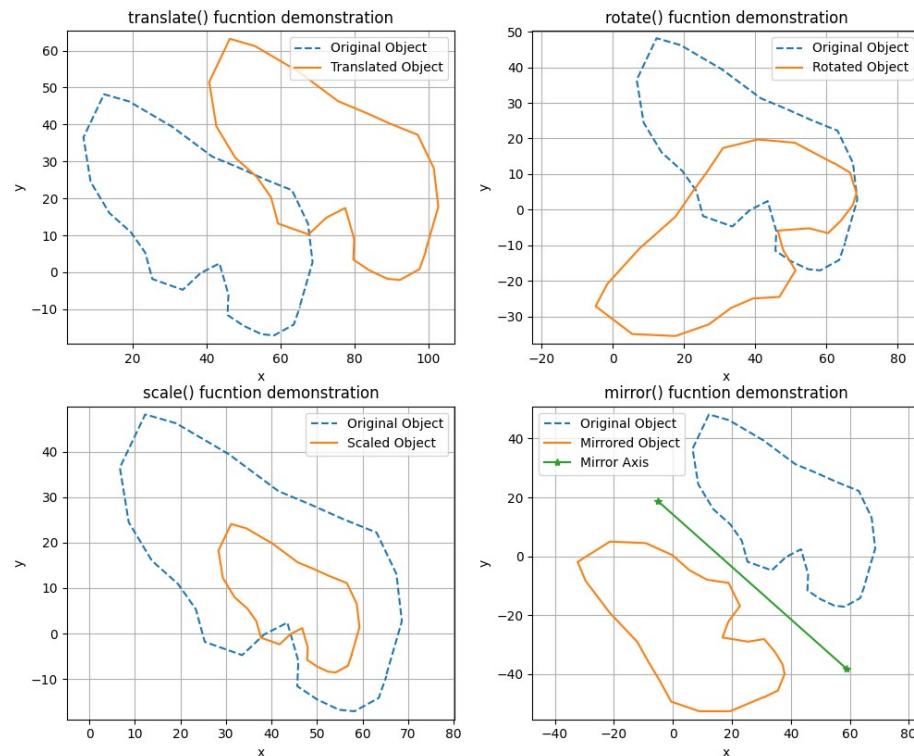
Γεωμετρική περιστροφή σημείων γύρω από ένα κέντρο.

*scale:*

Γεωμετρική μεγέθυνση-σμίκρυνση σημείων γύρω από ένα κέντρο.

*mirror:*

Εύρεση συμμετρικών σημείων σε σχέση με ορισμένο άξονα.



Γεωμετρικές Μετατροπές

*inproxim:*

Ελέγχει αν δύο σημεία έχουν αρκετά μικρή απόσταση μεταξύ τους για να θεωρούνται ίδια.

*inpolyg:*

Ελέγχει αν ορισμένα σημεία είναι εντός ενός πολυγώνου.

*distance:*

Υπολογίζει όλες τις αποστάσεις μεταξύ δύο συνόλων σημείων.

*spline:*

Κλάση εντός της **geo** που περιέχει συναρτήσεις σχετικές με splines, με spline να είναι τα objects καμπυλών της βιβλιοθήκης NURBS-Python.

*get\_prmtr:*

Υπολογίζει την παράμετρο ενός spline αναλόγως τα ορίσματα. Μπορεί να υπολογίσει την παράμετρο όπου ένα spline τέμνει μια ευθεία, τη παράμετρο σε συγκεκριμένο μήκος του spline, τη παράμετρο όπου το spline προσεγγίζει συγκεκριμένο σημείο, ή και τη παράμετρο όπου το spline απέχει συγκεκριμένη απόσταση από ένα σημείο.

*bezier:*

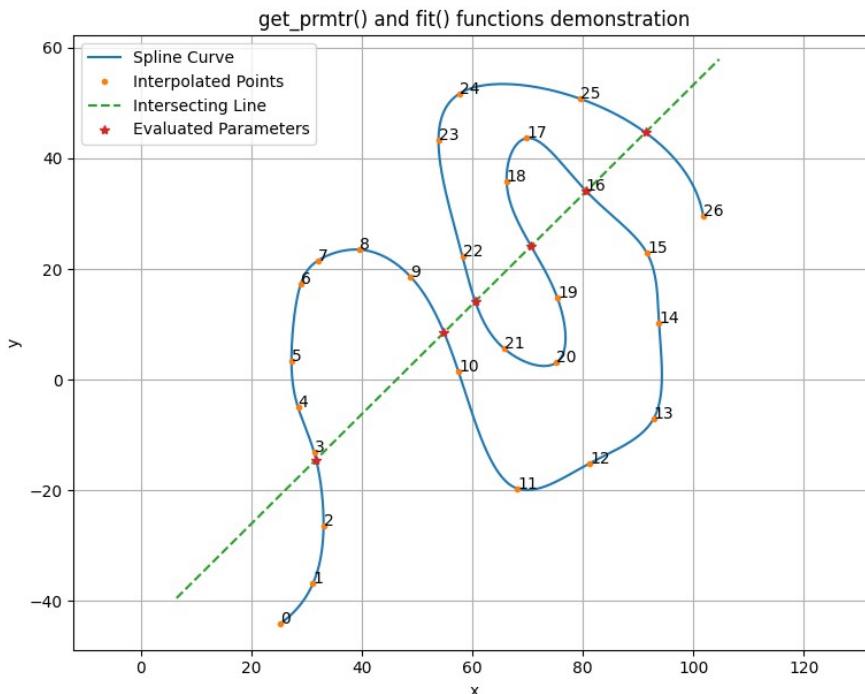
Δημιουργεί μια καμπύλη Bezier με ορισμένα control points και βάρη.

*fit:*

Εφαρμόζει ένα spline σε ένα σύνολο σημείων.

*length:*

Υπολογίζει το μήκος ενός spline σε έναν αριθμό παραμέτρων.



Υπολογισμός παραμέτρων ενός Spline τεμνόμενου με ευθεία, το οποίο έχει εφαρμοστεί στα αριθμημένα σημεία.

*vector:*

Κλάση εντός της **geo** που περιέχει συναρτήσεις σχετικές με διανύσματα. Αυτά ορίζονται ως λίστες που έχουν το ζευγάρι των συνιστώσων του διανύσματος που αναπαριστούν.

*unit:*

Υπολογίζει το μοναδιαίο ενός διανύσματος.

*angle:*

Υπολογίζει τη γωνία ενός διανύσματος με τον x άξονα, ή μεταξύ δύο διανυσμάτων.

*quadrant:*

Επιστρέφει το τεταρτημόριο στο οποίο “δείχνει” ένα διάνυσμα.

*bisector:*

Υπολογίζει το μοναδιαίο διάνυσμα που διχοτομεί δύο ορισμένα διανύσματα.

*vertical:*

Υπολογίζει ένα διάνυσμα κάθετο στο ορισμένο διάνυσμα.

**line:**

Κλάση εντός της **geo** που περιέχει συναρτήσεις σχετικές με ευθείες. Αυτές ορίζονται ως λίστες με τους συντελεστές της ευθείας που αναπαριστούν.

**bisector:**

Υπολογίζει την ευθεία που διχοτομεί δύο ορισμένες ευθείες.

**vertical:**

Υπολογίζει την κάθετη ευθεία σε μία ορισμένη ευθεία.

**intersect:**

Υπολογίζει την τομή δύο ευθειών.

**project:**

Υπολογίζει τη προβολή ενός σημείου σε μια ευθεία.

**fit:**

Εφαρμόζει μια ευθεία σε δύο σημεία και επιστρέφει τους συντελεστές της.

**angle:**

Υπολογίζει τη γωνία μιας ευθείας με τον x άξονα.

**circle:**

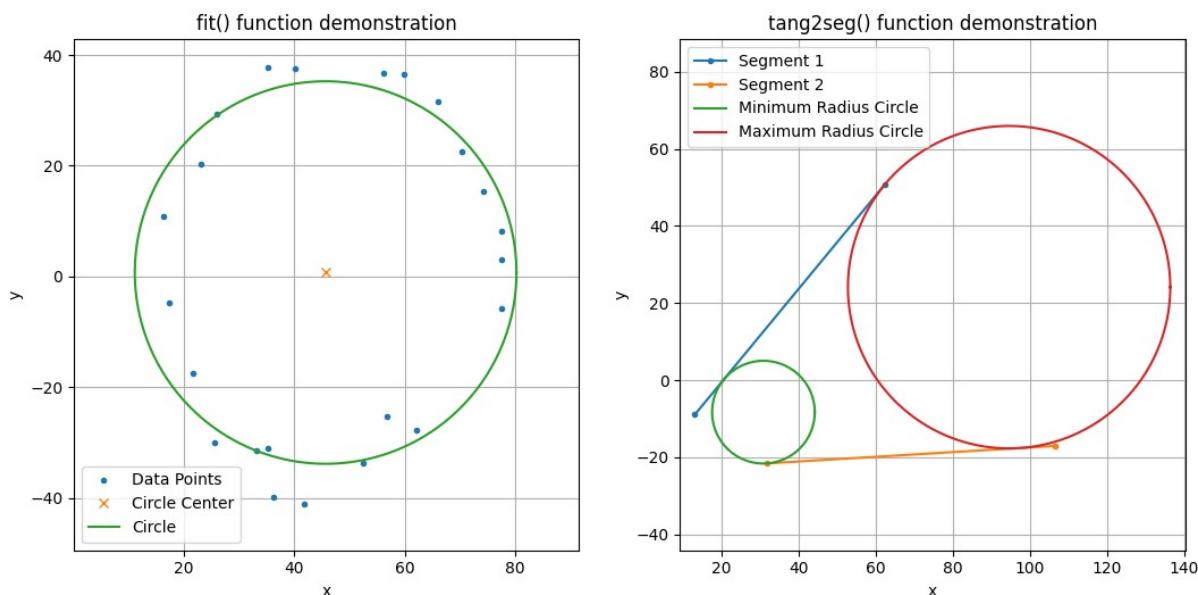
Κλάση εντός της **geo** που περιέχει συναρτήσεις σχετικές με κύκλους.

**fit:**

Υπολογίζει το κέντρο και την ακτίνα κύκλου που προσεγγίζει ένα σύνολο σημείων.

**tang2seg:**

Υπολογίζει την ελάχιστη και την μέγιστη διάμετρο κύκλου, που εφάπτεται σε δύο ευθύγραμμα τμήματα.



Εφαρμογή κύκλου σε σημεία (αριστερά), Εύρεση ελάχιστης και μέγιστης ακτίνας κύκλου εφαπτομένου σε δύο ευθύγραμμα τμήματα (δεξιά)

*fit2pr:*

Υπολογίζει το κέντρο κύκλου ορισμένης ακτίνας που περνάει από δύο σημεία.

*tang2lnr:*

Υπολογίζει τα κέντρα κύκλων που εφάπτονται σε δύο ευθείες.

*tang2pln:*

Υπολογίζει το κέντρο κύκλου που εφάπτεται σε συγκεκριμένο σημείο ορισμένης ευθείας και περνάει από ένα άλλο.

*tang2crv:*

Υπολογίζει κύκλο με ορισμένο κέντρο που εφάπτεται σε καμπύλη με ακτίνα όσο δυνατόν κοντινότερη στην ζητούμενη.

*arc:*

Δημιουργεί τα σημεία ενός τόξου κύκλου, ανάμεσα σε δύο σημεία αυτού.

*curve:*

Class εντός της **geo** που περιέχει συναρτήσεις σχετικές με καμπύλες. Ως καμπύλη ορίζεται ένα σύνολο συντεταγμένων σημείων από τα οποία αυτή διαγράφεται. Έτσι, όλες οι μετρήσεις και οι μετατροπές σημείων μπορούν να εφαρμόζονται απευθείας πάνω στις καμπύλες.

*segment\_len:*

Υπολογίζει το μήκος κάθε ευθύγραμμου τμήματος ορισμένης καμπύλης, μεταξύ κάθε σημείου και του επομένου του.

*length:*

Υπολογίζει το προσεγγιστικό μήκος ορισμένης καμπύλης σε κάθε σημείο αυτής.

*curvature:*

Υπολογίζει τη προσεγγιστική καμπυλότητα ορισμένης καμπύλης σε κάθε σημείο αυτής.

*normals:*

Υπολογίζει τα προσεγγιστικά κάθετα διανύσματα ορισμένης καμπύλης σε κάθε σημείο της.

*plot:*

Δημιουργεί ένα διάγραμμα της καμπύλης.

*interp:*

Επιστρέφει σημεία που παρεμβάλλεται μια καμπύλη, βάση της συνάρτησης *get\_prmtr*.

*loop:*

Επιστρέφει το πρώτο σημείο όπου μια καμπύλη τέμνει τον εαυτό της.

*draw:*

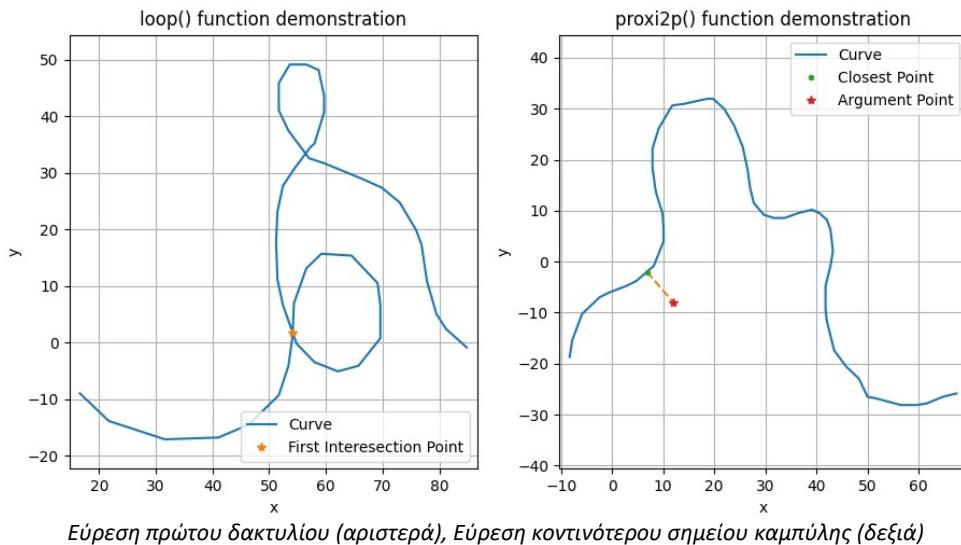
Επιτρέπει την παραγωγή ενός συνόλου καμπυλών με χρήση ποντικιού σε ένα διάγραμμα.

*prox2p:*

Υπολογίζει το σημείο πάνω στα ευθύγραμμα τμήμα που ορίζουν διαδοχικά τα σημεία μιας καμπύλης, με την ελάχιστη απόσταση από ορισμένο.

*addpoints:*

Προσθέτει ορισμένα σημεία σε αυτά της καμπύλης, στο αρχικό ή στο τελευταίο άκρο.



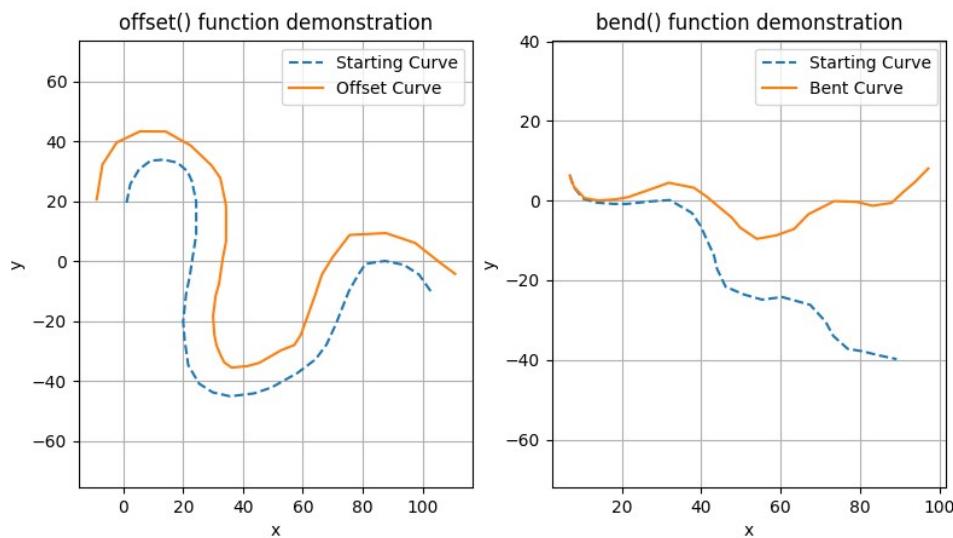
Εύρεση πρώτου δακτυλίου (αριστερά), Εύρεση κοντινότερου σημείου καμπύλης (δεξιά)

*offset:*

Επιστρέφει καμπύλη παράλληλη στην ορισμένη καμπύλη, με ορισμένη απόσταση.

*bend:*

Παραμορφώνει μια καμπύλη, ώστε να “λυγίζει” υπό ορισμένη γωνία.



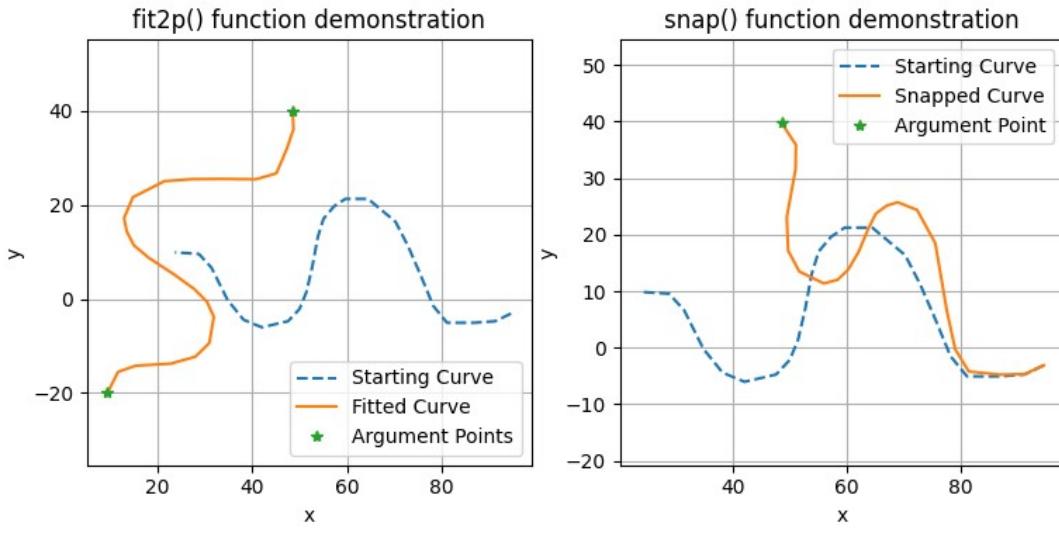
Εφαρμογή καμπύλης σε δύο σημεία (αριστερά), Παραμόρφωση καμπύλης βάση σημείου (δεξιά)

*fit2p:*

Μετατρέπει γεωμετρικά μια καμπύλη ώστε να εφαρμόζει σε δύο ορισμένα σημεία.

*snap:*

Παραμορφώνει μια καμπύλη ώστε η άκρη της να συμπίπτει με ορισμένο σημείο.



Εφαρμογή καμπύλης σε δύο σημεία (αριστερά), Παραμόρφωση καμπύλης βάση σημείου (δεξιά)

*snip:*

Επιστρέφει τμήματα μιας καμπύλης, που “κόβεται” παραμετρικά βάση της συνάρτησης `get_prmtr`.

*split:*

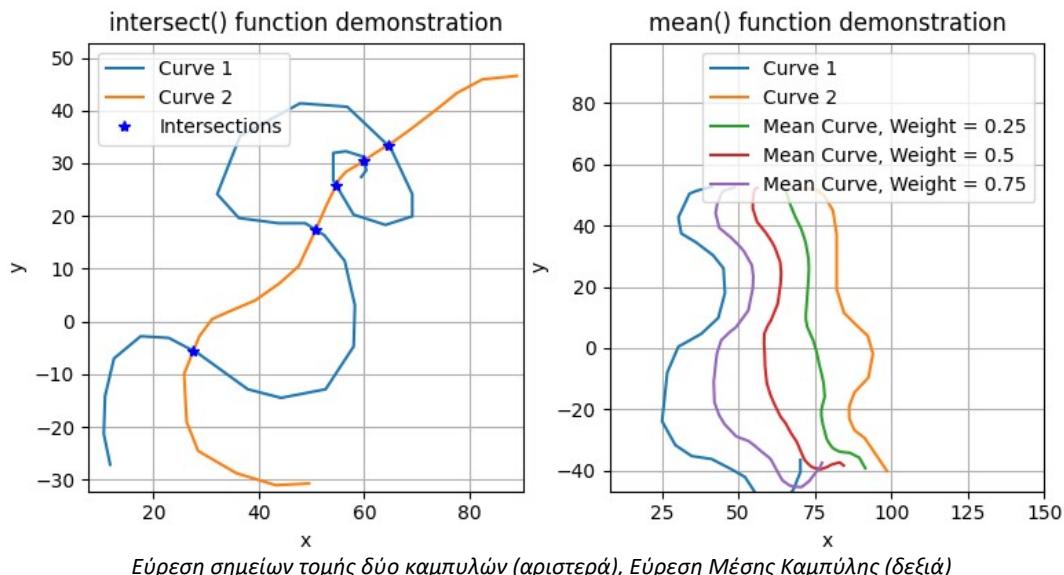
Ομοίως με την `snip`, “κόβει” μια καμπύλη, αλλά σε συγκεκριμένο σημείο αυτής βάση δέικτη .

*mean:*

Επιστρέφει την μέση καμπύλη μεταξύ δύο ορισμένων καμπυλών.

*intersect:*

Επιστρέφει όλες τις τομές μεταξύ δύο καμπυλών.



Εύρεση σημείων τομής δύο καμπυλών (αριστερά), Εύρεση Μέσης Καμπύλης (δεξιά)

*arrange:*

Αλλάζει τη διαδοχή των σημείων των καμπυλών με ένα τουλάχιστον κοινό άκρο ώστε η τελευταία άκρη της μιας να εφαρμόζει στην αρχική άκρη της άλλης.

*patch:*

Δημιουργεί μια καμπύλη, “συγκολλώντας” δύο ορισμένες με κοινό άκρο.

*bridge:*

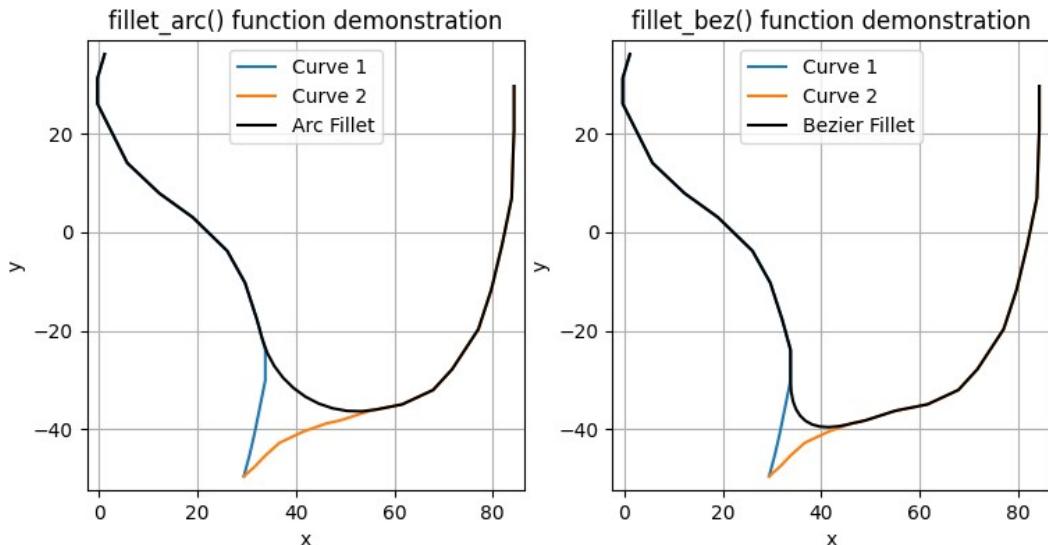
Δημιουργεί καμπύλη Bezier που εφάπτεται σε δύο άκρα δύο καμπυλών.

*fillet\_bez:*

Δημιουργεί μια στρογγυλοποιημένη καμπύλη, “συγκολλώντας” δύο ορισμένες με ένα τουλάχιστον κοινό άκρο χρησιμοποιώντας καμπύλη Bezier.

*fillet\_arc:*

Δημιουργεί μια στρογγυλοποιημένη καμπύλη, “συγκολλώντας” δύο ορισμένες με ένα τουλάχιστον κοινό άκρο χρησιμοποιώντας τόξο κύκλου.



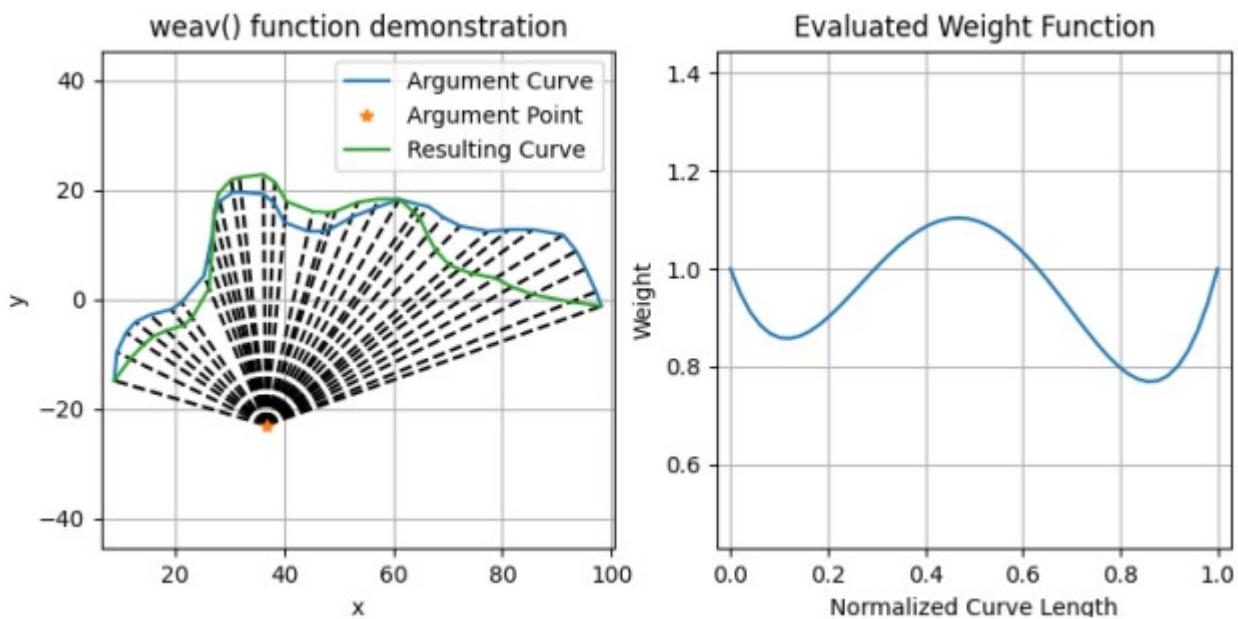
Σύγκριση συναρτήσεων στρογγυλοποίησης με τόξο κύκλου (αριστερά), και με καμπύλη Bezier (δεξιά)

*crvforge:*

Class εντός της **geo** που περιέχει συναρτήσεις διαμόρφωσης καμπυλών. Οι συναρτήσεις στο συγκεκριμένο class παράγουν καμπύλες βασισμένες σε αρχικές καμπύλες. Χρησιμεύουν ιδιαίτερα στη παραγωγή καμπυλών των στοιχείων υψηλής άντωσης μιας αεροτομής βάση του προφίλ της όπως θα φανεί και αργότερα.

*weav:*

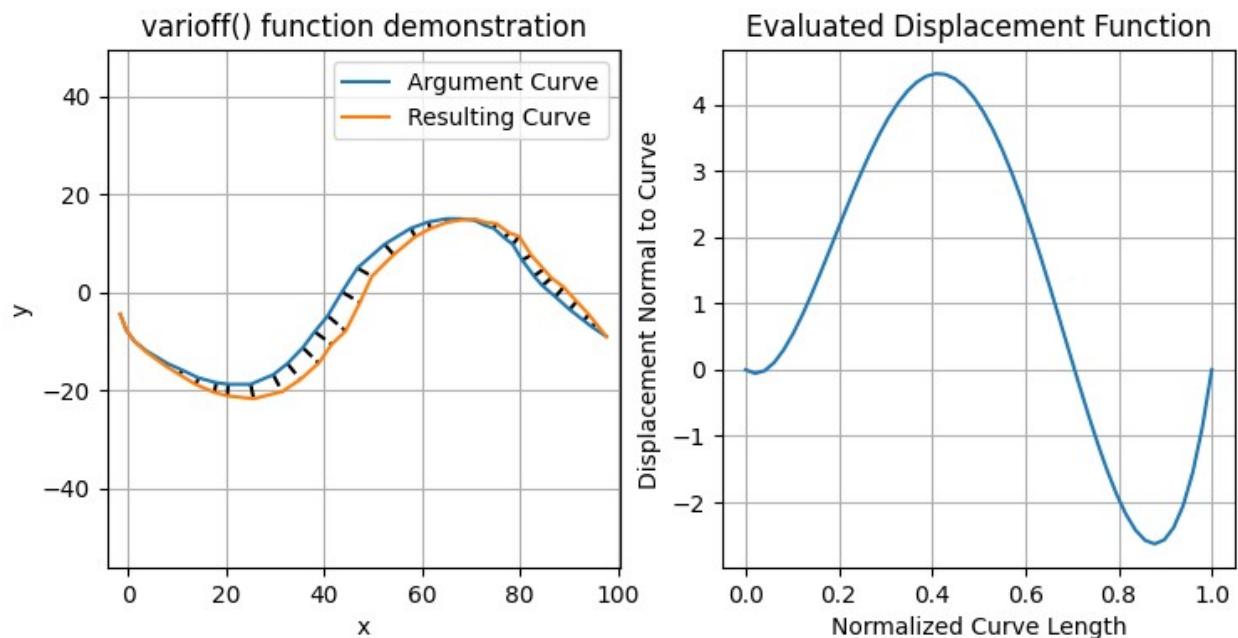
Υπολογίζει τον σταθμισμένο μέσο όρο των σημείων μιας καμπύλης και ενός ορισμένου σημείου, βάση μιας συνάρτησης κατανομής βάρους. Αυτός ο μέσος όρος επιστρέφεται ως η παραγόμενη καμπύλη. Ένα παράδειγμα καθώς και η συνάρτηση βάρους που χρησιμοποιήθηκε φαίνεται παρακάτω.



Παραμόρφωση καμπύλης με τη συνάρτηση `weav` (αριστερά), και η συνάρτηση κατανομής βάρους (δεξιά)

#### *varioff:*

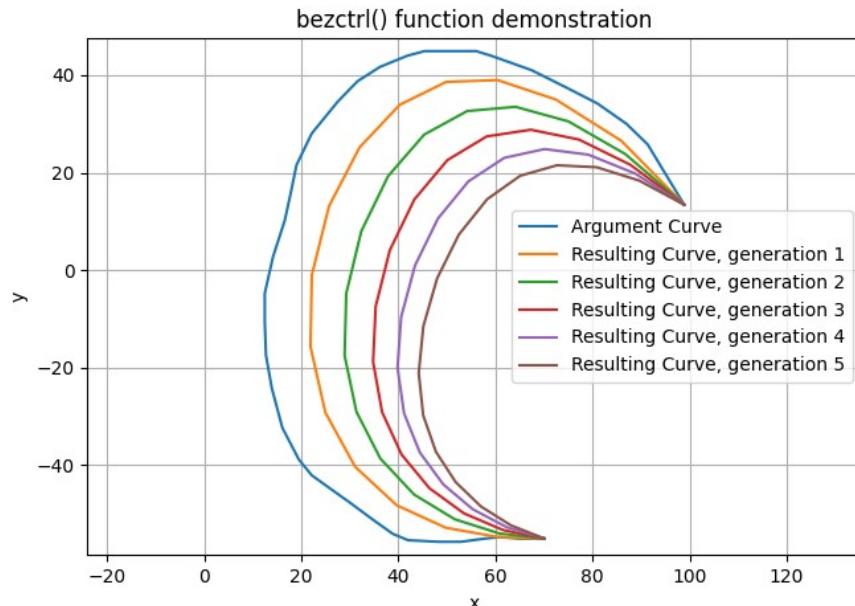
Μια διαδεδομένη τεχνική παραμόρφωσης καμπυλών στον ερευνητικό χώρο της βελτιστοποίησης. Αυτή η συνάρτηση μετατοπίζει τα σημεία της καμπύλης κάθετα σε αυτή, βάση συνάρτησης κατανομής. Ομοίως, παρακάτω φαίνεται ένα παράδειγμα.



Παραμόρφωση καμπύλης με τη συνάρτηση `varioff` (αριστερά), και η συνάρτηση κατανομής μετατόπισης (δεξιά)

*bezctrl:*

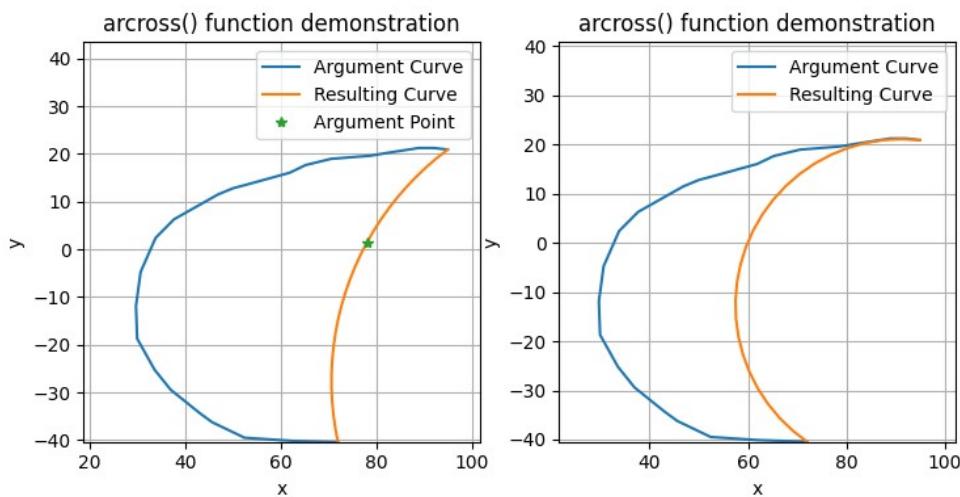
Υπολογίζει τα σημεία μιας καμπύλης Bezier που έχει ως control points έναν αριθμό σημείων της προηγούμενης. Η διαδικασία, ανάλογα ορισμάτων, μπορεί να γίνει πολλές φορές.



Παραμόρφωση καμπύλης με τη συνάρτηση *bezctrl*, για κάθε επανάληψη της συνάρτησης

*arcross:*

Υπολογίζει τα σημεία ενός τόξου κύκλου που περνάει από τα άκρα μιας καμπύλης και προαιρετικά ένα τρίτο. Αν δεν δοθεί τρίτο σημείο, ο κύκλος παίρνεται ως εφαπτόμενος με το πρώτο ευθύγραμμο τμήμα της καμπύλης.

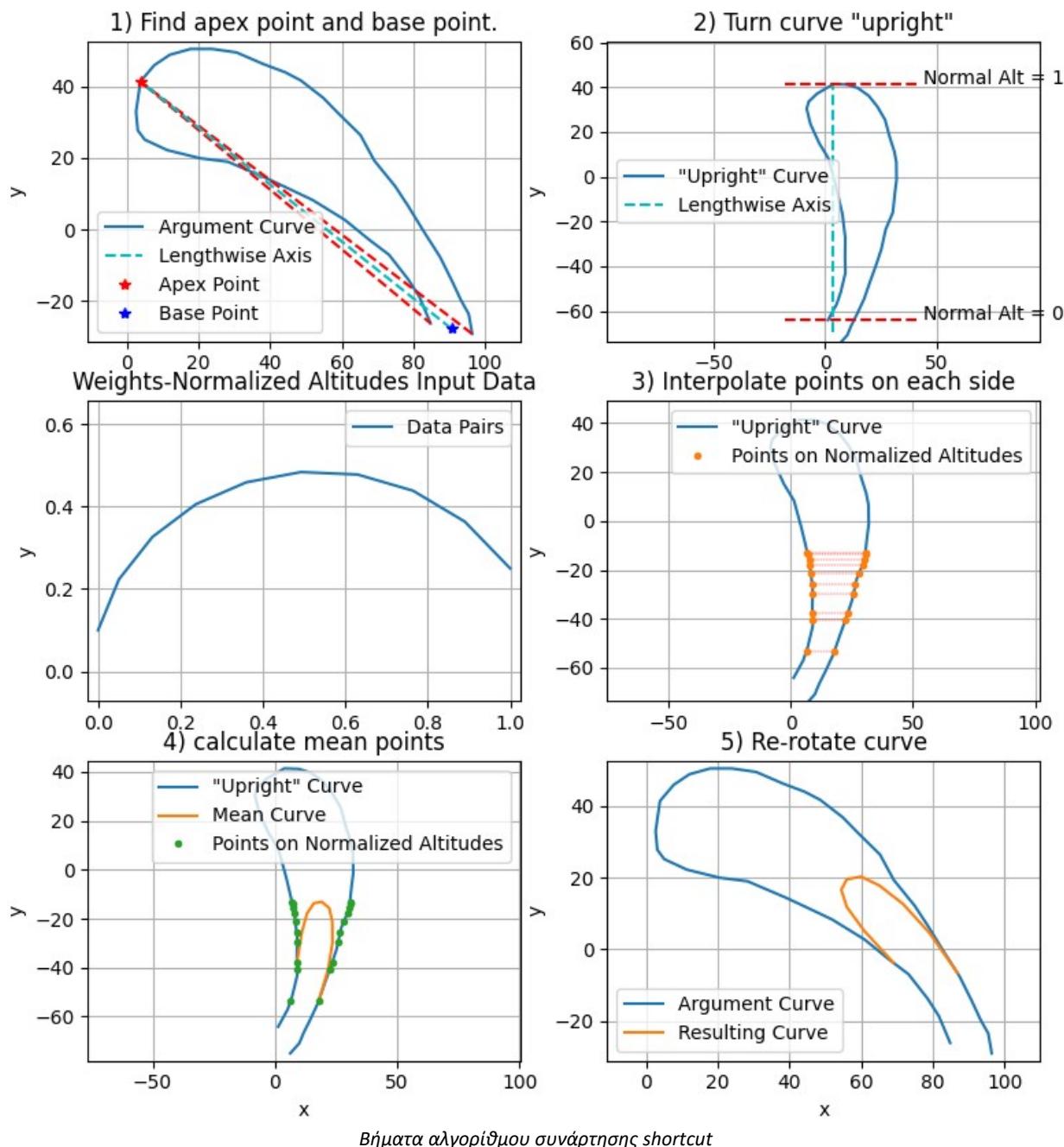


Δημιουργία τόξου κύκλου με τη συνάρτηση *arcross*, με ορισμένο σημείο (αριστερά), και χωρίς ορισμένο σημείο (δεξιά)

*shortcut:*

Υπολογίζει τον σταθμισμένο μέσο όρο δύο άκρων μιας καμπύλης σε ένα σύνολο τιμών εύρους από τα άκρα της έως το σημείο μέγιστης απόστασης από αυτά, βάση ενός συνόλου ζευγών βάρους-κανονικοποιημένου

“ύψους”. Αποτελεί μια πολύ ιδιαίτερη συνάρτηση, ακόμα κι ανάμεσα σε αυτές εντός της κλάσης `crvforge`. Οι καμπύλες στις οποίες εφαρμόζεται είναι σχετικά απλές, με άκρα που πλησιάζουν μεταξύ τους. Επίσης είναι η μόνη συνάρτηση εντός της κλάσης της, η οποία δεν παράγει σωστό αποτέλεσμα αν περαστεί απευθείας ως όρισμα στην συνάρτηση `slot`, η οποία θα παρουσιαστεί αργότερα. Αντίθετα, η ορθή χρήση της για αυτούς τους σκοπούς, γίνεται απευθείας πάνω στο προφίλ μιας αεροτομής και τα παραγόμενα αποτελέσματα εισάγονται άμεσα ως σημεία. Τα αρνητικά της αντισταθμίζονται με το ότι είναι η πιο επιτυχημένη συνάρτηση στην παραγωγή καμπυλών `slot` στην ακμή φυγής μιας αεροτομής ανεξαρτήτως πάχους, καμπυλότητας και άλλων χαρακτηριστικών. Ο αλγόριθμος της παρουσιάζεται συνοπτικά παρακάτω.



### **Object Classes:**

Αποτελούν κλάσεις για “αντικείμενα” με ιδιαίτερες ιδιότητες / δυνατότητες, σε αντίθεση με τις κλάσεις που επισκοπήθηκαν οι οποίες απλά ομαδοποιούσαν το κώδικα. Παρακάτω περιγράφονται οι κλάσεις σχετικές με τη διαμόρφωση γεωμετρίας.

#### **geo.Shape:**

Επρόκειτο για ένα object class που βρίσκεται εντός της **geo**. Αναπαριστά ένα γεωμετρικό σχήμα ως ένα σύνολο καμπυλών οι οποίες το απαρτίζουν. Έχει δύο attributes:

- curves: μια λίστα καμπυλών που χαρακτηρίζει το σχήμα.
- transformlog: μια λίστα που “σημειώνει” κάθε βασική γεωμετρική μετατροπή που εφαρμόζεται στο σχήμα.

#### **Methods:**

Τα methods εμπεριέχουν τις βασικές γεωμετρικές μετατροπές οι οποίες εφαρμόζονται σε κάθε σημείο των καμπυλών του σχήματος, και περιγράφονται ήδη προηγουμένως, καθώς και την `undo_transform`, μια μέθοδο για την επαναφορά του σχήματος από μια μετατροπή, βάση του `transformlog`. Τα υπόλοιπα methods περιγράφονται παρακάτω.

#### **plot:**

Ομοίως με τη συνάρτηση για `curves`, δημιουργεί διάγραμμα του σχήματος.

#### **sort:**

Αλλάζει τη διαδοχή καμπυλών και τη θέση τους στη λίστα `Shape.curves`, ώστε το τελευταίο άκρο της κάθε μιας να διαδέχεται το αρχικό της επόμενης.

#### **isclockwise:**

Ελέγχει αν η φορά διαδοχής των καμπυλών είναι αυτή του ρολογιού.

#### **reverse:**

Αντιστρέφει τη φορά διαδοχής των καμπυλών.

#### **vertex\_angle:**

Υπολογίζει τη γωνία που σχηματίζει κάθε ζευγάρι καμπυλών στο κοινό τους άκρο.

#### **round\_vertex:**

“Κόβει” ή στρογγυλοποιεί ορισμένες ακμές του σχήματος ανάλογα με ορίσματα.

#### **fillet:**

Στρογγυλοποιεί και συνενώνει τις καμπύλες ορισμένων ακμών με επιλογή συνάρτησης στρογγυλοποίησης.

#### **weld:**

Συνενώνει τις καμπύλες ορισμένων ακμών στο κοινό τους άκρο

#### **splitin3:**

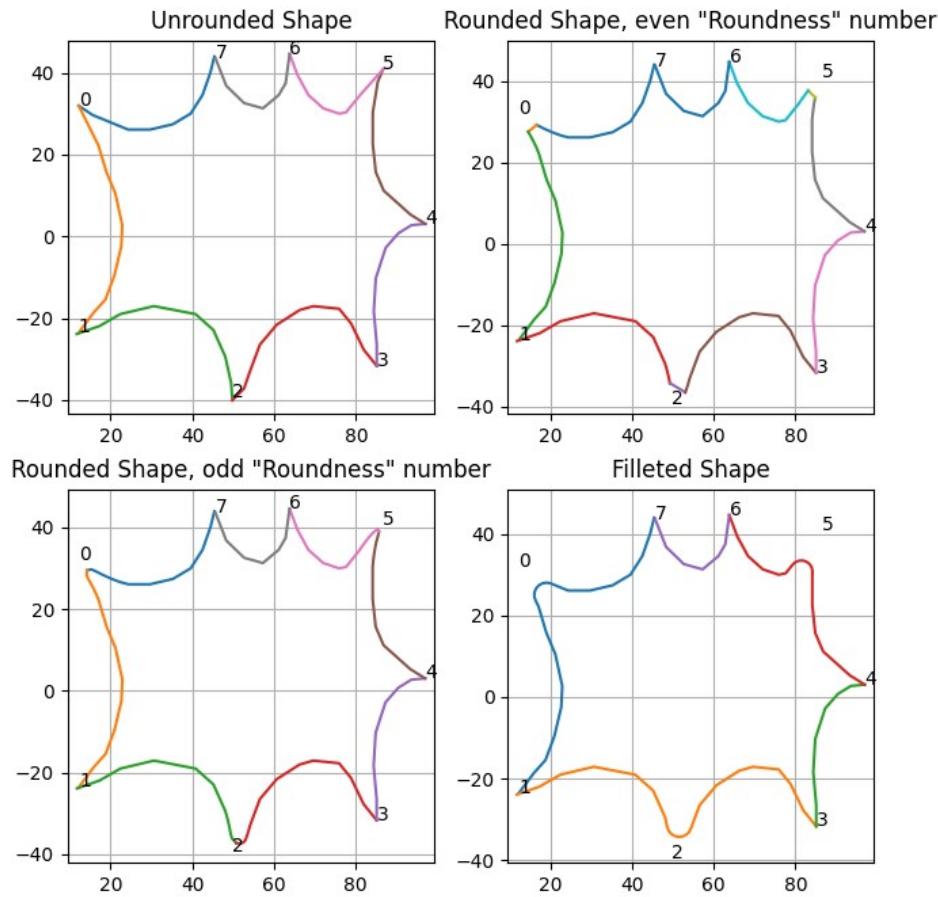
Επιστρέφει τρεις ομάδες καμπυλών που παράγονται από την τομή του σχήματος με μια ευθεία.

#### **geofid:**

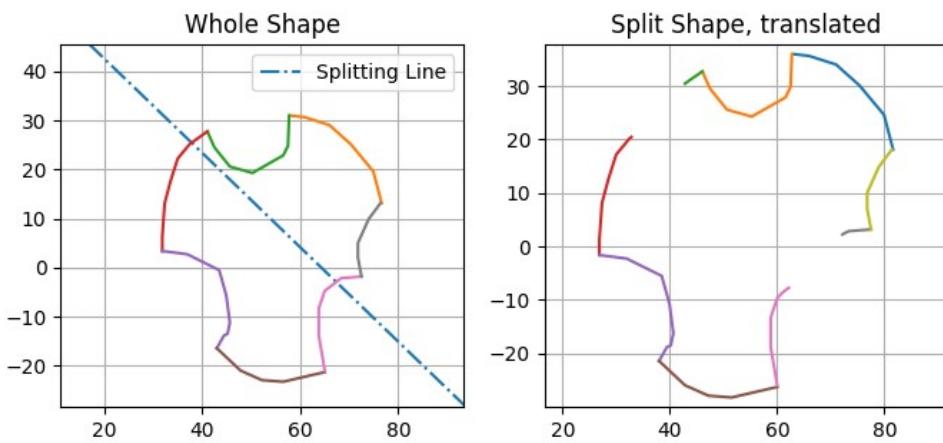
Αλλάζει τη γεωμετρική πιστότητα ενός σχήματος, μεταβάλλοντας τον αριθμό σημείων σε κάθε καμπύλη.

### *airfoil:*

Δημιουργεί ένα Airfoil object από το παρόν σχήμα.



Σχήμα με αριθμημένες ακμές (πάνω αριστερά), Σχήμα με “κομμένες” τις ακμές 0,2,5 με την `round_vertex` (πάνω δεξιά),  
Σχήμα με στρογγυλοποιημένες τις ακμές 0,2,5 με την `round_vertex` (κάτω αριστερά), Σχήμα με στρογγυλοποιημένες τις ακμές  
0,2,5 με την `fillet` (κάτω δεξιά)



Πλήρες σχήμα με την ευθεία που το τέμνει (αριστερά), Καμπύλες αποτελέσματος της `splitin3`, ελαφρώς μετατοπισμένες για  
καλύτερη ευκρίνεια (δεξιά)

### **geo.Section:**

Ακόμα ένα object class που βρίσκεται εντός της **geo**. Αναπαριστά ένα σύνολο γεωμετρικών σχημάτων σε μια ενιαία γεωμετρία. Το μοναδικό του attribute είναι μια λίστα με το σύνολο των geo.Shape objects που το απαρτίζει. Τα methods αυτού είναι οι βασικές γεωμετρικές μεταμορφώσεις που εφαρμόζονται στα σχήματα αυτού.

### **Airfoil:**

Child class του geo.Shape, συμβολίζει σχήμα με ιδιότητες αεροτομής. Βρίσκεται εκτός της wrapper κλάσης geo, καθώς επρόκειτο για πιο εξειδικευμένη κλάση. Κληρονομεί όλα τα methods του geo.Shape. Η κύρια διαφορά του είναι ένας αριθμός πρόσθετων attributes. Συγκεκριμένα:

- te: οι συντεταγμένες της ακμής φυγής
- le: οι συντεταγμένες της ακμής προσβολής
- aoa: η γωνία προσβολής
- chord: η χορδή
- le\_crcl: τα δεδομένα του κύκλου της ακμής προσβολής
- profile: τα σημεία του προφίλ της αεροτομής

Επίσης σημειώνεται ότι το πρώτο σημείο της πρώτης καμπύλης κατά τον ορισμό θεωρείται ότι είναι η ακμή φυγής.

### **Methods:**

Έχει δύο πρόσθετες γενικές μεθόδους σε σχέση με το parent class του, καθώς και τέσσερις μεθόδους για τη δημιουργία γεωμετριών υψηλής άντωσης από τη συγκεκριμένη αεροτομή.

### *interp:*

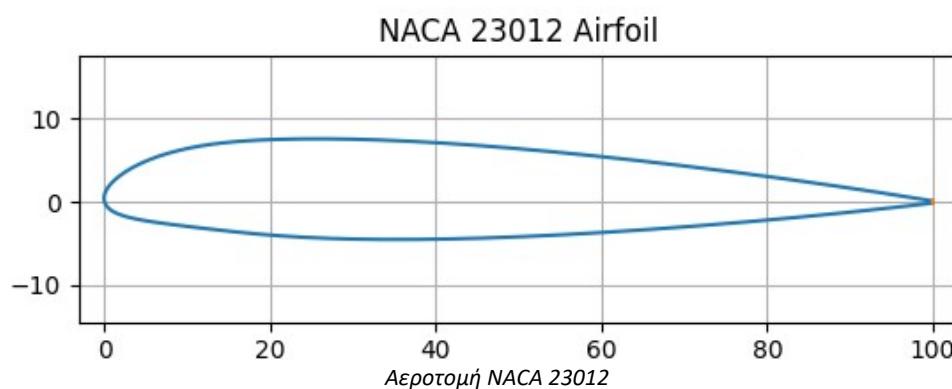
Επιστρέφει τα σημεία παρεμβολής των επιφανειών της αεροτομής σε συγκεκριμένη τιμή τετμημένης.

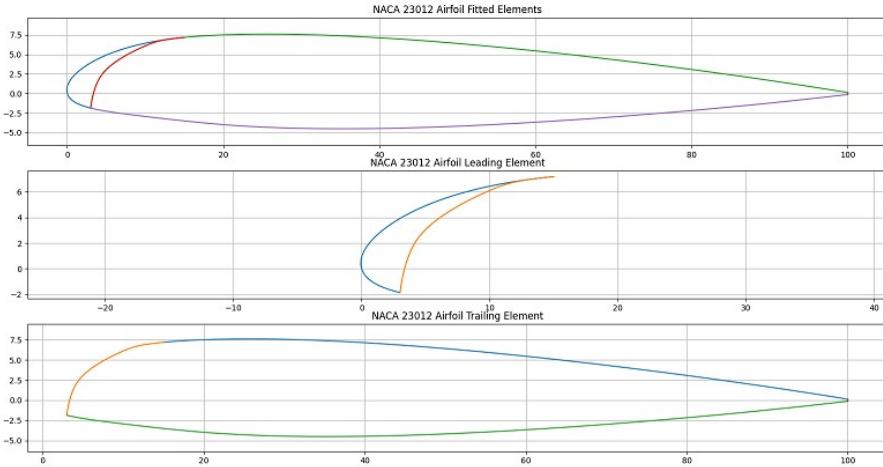
### *reset:*

Μετατρέπει μια αεροτομή γεωμετρικά ώστε αυτή να έχει ακμή προσβολής στις συντεταγμένες [0,0] και ακμή φυγής στις συντεταγμένες [100,0].

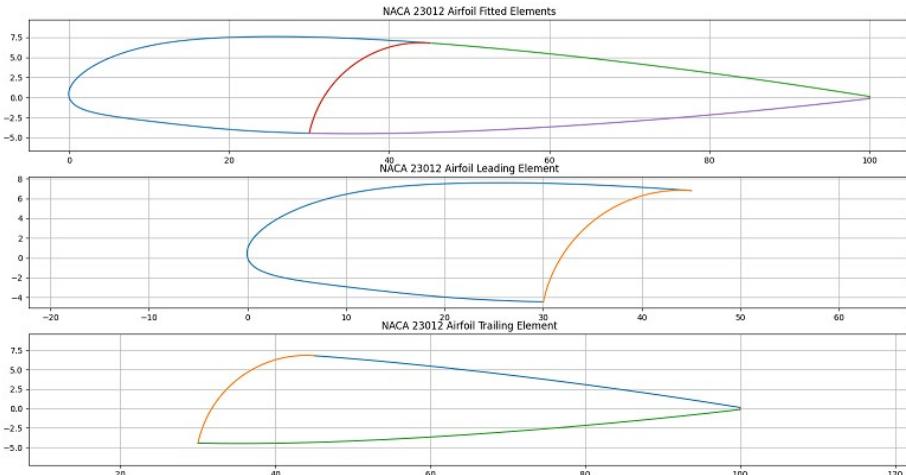
### *slot:*

Παράγει παραμετρικά δύο στοιχεία από μια αεροτομή, που όταν εφαρμόζουν, παίρνουν το σχήμα αυτής. Η καμπύλη που χωρίζει τα δύο στοιχεία μπορεί είτε να δημιουργηθεί από τη ίδια τη συνάρτηση περνώντας μια από τις συναρτήσεις της κλάσης **geo.crvforge** (όλες εκτός από την *shortcut*), είτε να περαστεί άμεσα. Η μορφή των αποτελεσμάτων για διάφορα ορίσματα φαίνεται παρακάτω.

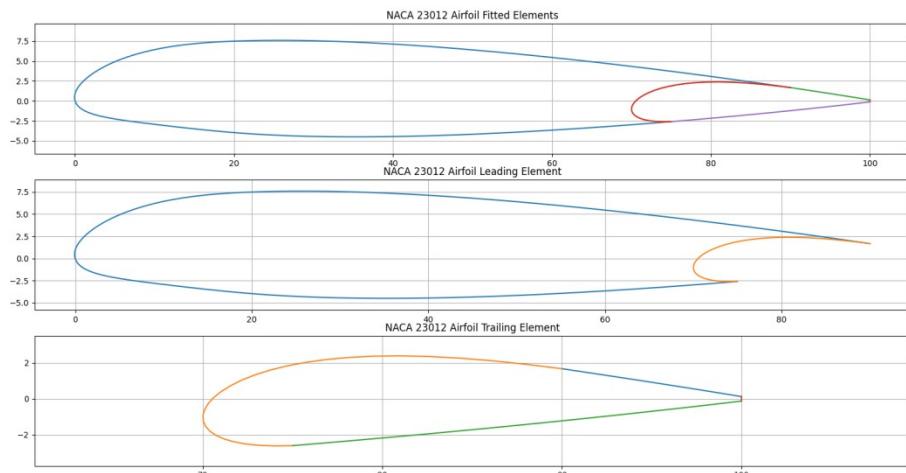




Στοιχεία προσβολής και φυγής παραγμένα από το slot method εφαρμοσμένου σε μια NACA 23012, με ορίσματα  $sx=15$ ,  $px=3$  και συνάρτηση παραγωγής καμπύλης την weav.



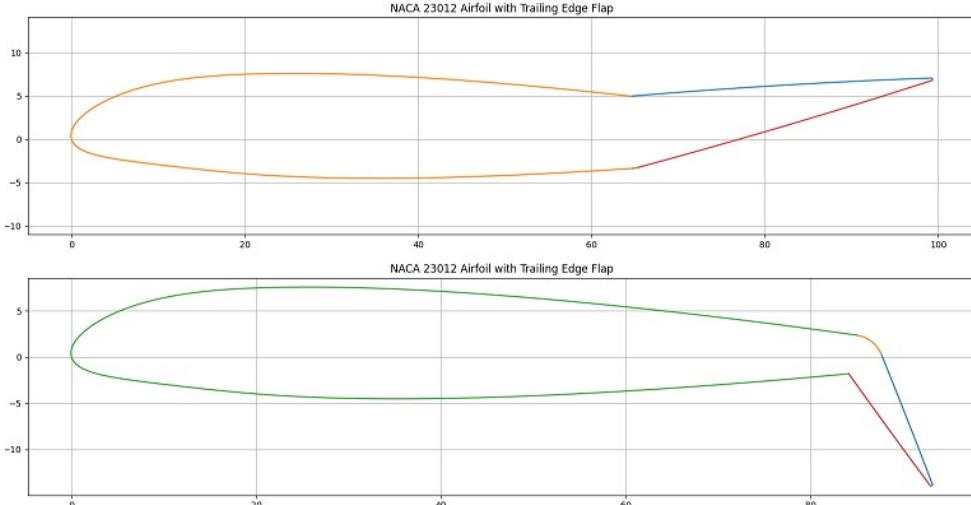
Στοιχεία προσβολής και φυγής παραγμένα από το slot method εφαρμοσμένου σε μια NACA 23012, με ορίσματα  $sx=45$ ,  $px=30$  και συνάρτηση παραγωγής καμπύλης την arcross.



Στοιχεία προσβολής και φυγής παραγμένα από το slot method εφαρμοσμένου σε μια NACA 23012, με ορίσματα  $sx=90$ ,  $px=75$  και άμεσα εισαγώμενη καμπύλη που παράχθηκε με τη συνάρτηση shortcut εφαρμοσμένη στο προφίλ της αεροτομής

### *te\_flap:*

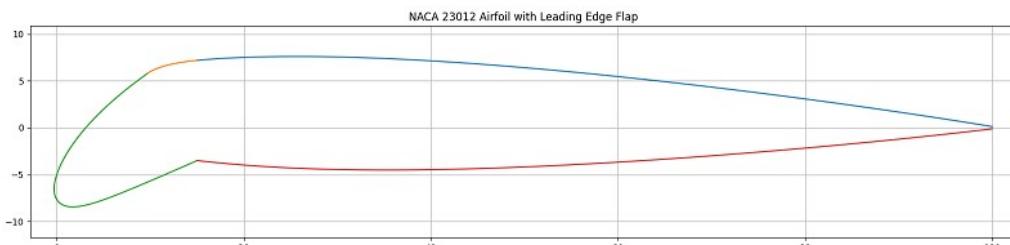
Παράγει παραμετρικά μια αεροτομή με την ακμή φυγής περιστραμμένη, βασισμένη στη γεωμετρία της αρχικής αεροτομής. Παρακάτω φαίνονται αποτελέσματα της συνάρτησης εφαρμοσμένης σε μια αεροτομή NACA 23012 για διάφορα ορίσματα.



Αεροτομές με περιστραμμένη ακμή φυγής παραγμένες από το *te\_flap* method εφαρμοσμένου σε μια NACA 23012, με ορίσματα  $x=65$ ,  $y=0$ ,  $\theta = -\pi/16$  (πάνω), και  $x=85$ ,  $y=-1$ ,  $\theta = \pi/3$  (κάτω).

### *le\_flap:*

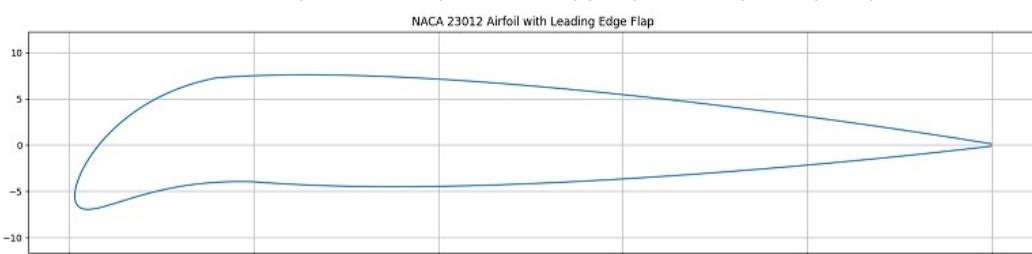
Παράγει παραμετρικά μια αεροτομή με την ακμή προσβολής περιστραμμένη, βασισμένη στη γεωμετρία της αρχικής αεροτομής. Παρακάτω φαίνεται ένα αποτέλεσμα της συνάρτησης εφαρμοσμένης σε μια αεροτομή NACA 23012.



Αεροτομή με περιστραμμένη ακμή προσβολής παραγμένη από το *le\_flap* method εφαρμοσμένου σε μια NACA 23012, με ορίσματα  $sx=15$ ,  $px=15$ ,  $\theta = \pi/6$ .

### *le\_varcam:*

Παράγει παραμετρικά μια αεροτομή με την ακμή φυγής να έχει καμπτεί σε λεία γεωμετρία variable camber. Παρακάτω φαίνεται ένα αποτέλεσμα της συνάρτησης εφαρμοσμένης σε μια αεροτομή NACA 23012.



Αεροτομή με γεωμετρία variable camber παραγμένη από το *le\_varcam* method εφαρμοσμένου σε μια NACA 23012, με ορίσματα  $sx=16$ ,  $px=20$ ,  $hinge=[25,0]$ ,  $\theta = \pi/12$ .

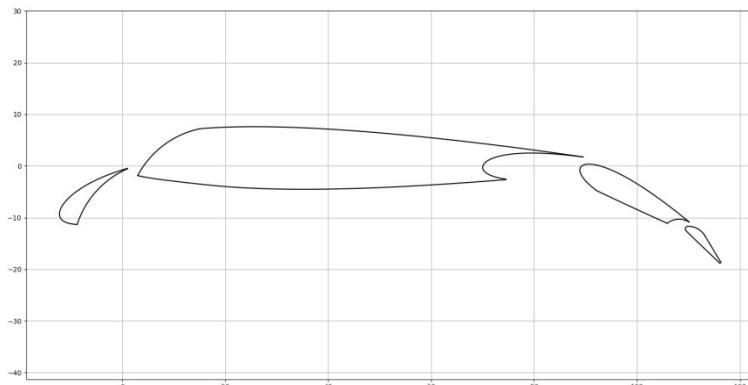
Σημειώνεται ότι όλες αυτές οι διαμορφώσεις μπορούν να εφαρμοσθούν συνδυαστικά, επιτρέποντας την παραγωγή πιο πολύπλοκων και φιλοσοφημένων γεωμετριών όπως θα φανεί και στα παραδείγματα παρακάτω.

### 3.1.4 Παραγωγή Πλέγματος

Σε αντίθεση με τις γεωμετρίες υψηλής άντωσης, ένα πλέγμα προσομοίωσης αυτών έχει πολύ πιο ξεκάθαρο στόχο και ακολουθεί πολύ πιο συγκεκριμένους κανόνες. Οπότε, μπορεί να αυτοματοποιηθεί σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό, με το χρήστη να χρειάζεται μόνο να ρυθμίσει μερικές παραμέτρους που ελέγχουν την “ένταση” μερικών χαρακτηριστικών. Με αυτό το σκεπτικό, δημιουργήθηκε ένα object class, του οποίου τα attributes είναι αυτές οι ρυθμίσεις, και το οποίο, έπειτα μπορεί να παράξει πλέγμα για οποιαδήποτε τομή πτέρυγας χωρίς αλλαγές, κάνοντας την παραγωγή πλέγματος για μια προϋπάρχουσα γεωμετρία ιδιαίτερα εύκολη και γρήγορη. Αυτή η κλάση και η λειτουργία της, περιγράφεται παρακάτω.

#### **Mesh:**

Object class για την παραγωγή πλέγματος μέσω του Gmsh. Μέσα από αυτό το class μπορούν να παραχθούν Mesh objects. Τα attributes κάθε object ρυθμίζονται με διαφορετικά methods ανάλογα την κατηγορία. Έπειτα μπορεί να κληθεί το generate method για την δημιουργία ενός πλέγματος για ένα geo.Section. Ο κάθε αλγόριθμος που χρησιμοποιείται, θα αναδειχθεί σε μια γεωμετρία αεροτομής NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat, η δημιουργία της οποίας περιγράφεται αργότερα, στα παραδείγματα.



Γεωμετρία αεροτομής NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat

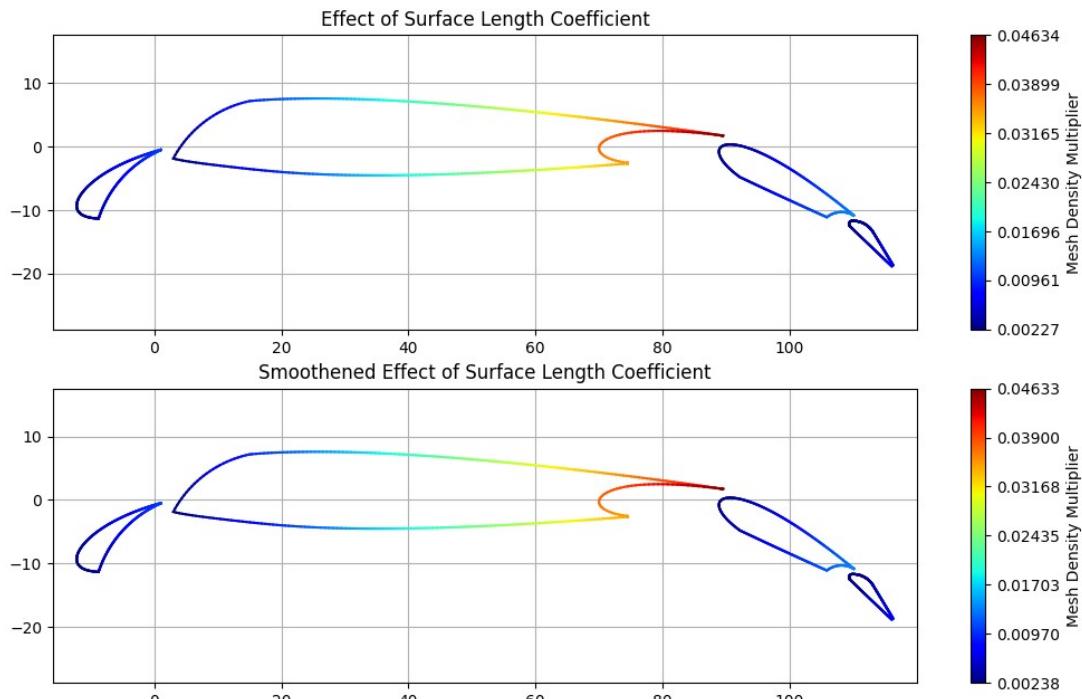
#### **tangent\_spacing:**

Αυτό το method αφορά τον υπολογισμό πλάτους των στοιχείων πλέγματος στο οριακό στρώμα, εφαπτομενικά στις επιφάνειες των σχημάτων. Επεξηγούνται τα attributes με το όνομα των ορισμάτων που τα ρυθμίζουν, και απεικονίζεται η επίδραση τους.

- **default\_spacing:** το πάχος των στοιχείων, ανεπηρέαστο από συντελεστές. Με μηδενισμένους συντελεστές, αυτό θα είναι το πάχος στοιχείων σε όλη την επιφάνεια των στοιχείων.
- **smoothness\_coef:** συντελεστής που ρυθμίζει την ομοιομορφία κατανομής μεγέθους πλέγματος στην επιφάνεια, η επίδραση του φαίνεται στις κατανομές των υπολοίπων συντελεστών που παρουσιάζονται παρακάτω.
- **surface\_len\_coef:** συντελεστής που μειώνει το μέγεθος πλέγματος, ανάλογα με το μήκος των επιφανειών. Το μέγεθος μειώνεται καθώς η ροή κινείται από την ακμή προσβολής στην ακμή φυγής.

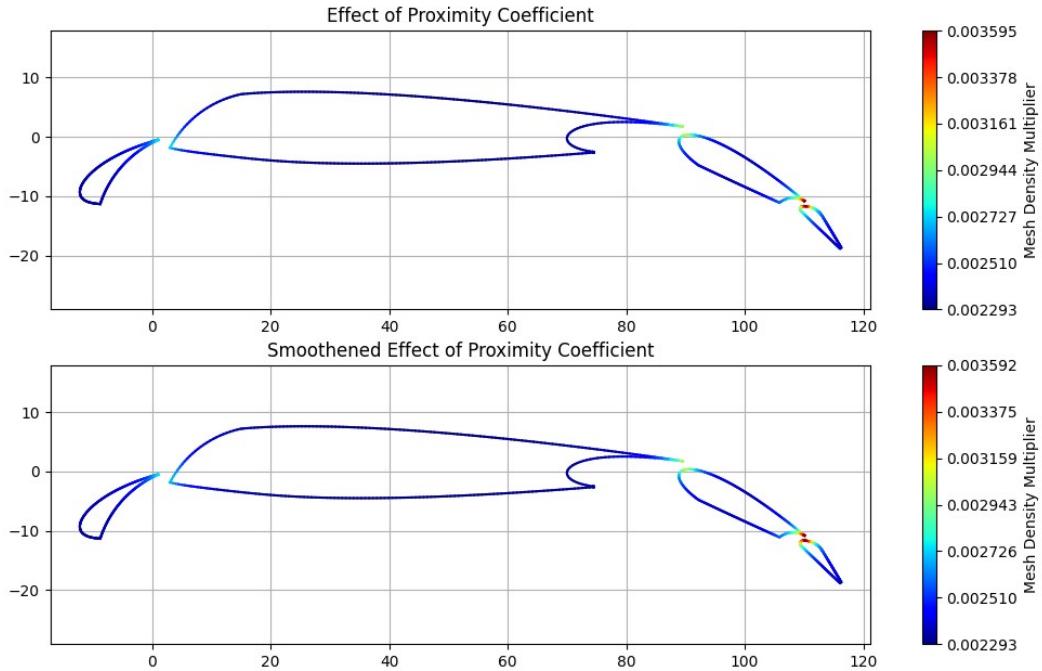
- proximity\_coef: συντελεστής που μειώνει το μέγεθος πλέγματος αναλόγως με την εγγύτητα άλλων σχημάτων.
- vertex\_sharpness\_coef: συντελεστής που μειώνει το μέγεθος πλέγματος κοντά σε ακμές, ανάλογα της αιχμηρότητας τους. Μπορούν να δοθούν διαφορετικοί συντελεστές για κυρτές και μη κυρτές γωνίες.
- curvature\_coef: συντελεστής που μειώνει το μέγεθος πλέγματος ανάλογα της καμπυλότητας της περιοχής της καμπύλης. Μπορούν να δοθούν διαφορετικοί συντελεστές για θετικές και αρνητικές καμπυλότητες.
- orientation\_coef: συντελεστής που μειώνει το μέγεθος πλέγματος ανάλογα με τη γωνία των κάθετων στην επιφάνεια διανυσμάτων (προς τα που “βλέπει” η επιφάνεια). Μπορούν να δοθούν διαφορετικοί συντελεστές για διανύσματα που “δείχνουν” ανάντι και κατάντι της ροής.

Η επίδραση του κάθε συντελεστή φαίνεται με την κατανομή του πρόσθετου συντελεστή πυκνότητας. Οι συντελεστές τελικά αθροίζονται, προστίθονται στη μονάδα, κι έπειτα πολλαπλασιάζουν την κατανομή πυκνότητας.



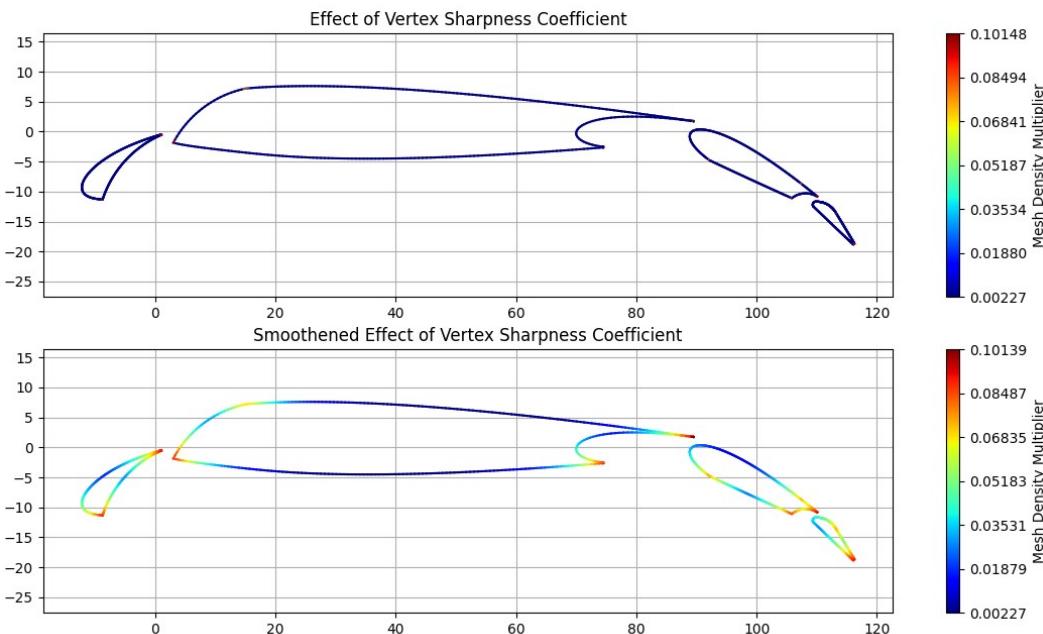
Μη εξομαλυμένη επίδραση συντελεστή μήκους επιφάνειας (surface\_len\_coef) (πάνω), και εξομαλυμένη (κάτω)

Όπως είναι λογικό, ο συντελεστής αυτός παράγει μόνος του μια κατανομή αρκετά ομαλή, ώστε ο αλγόριθμος εξομάλυνσης να μην την επηρεάζει.



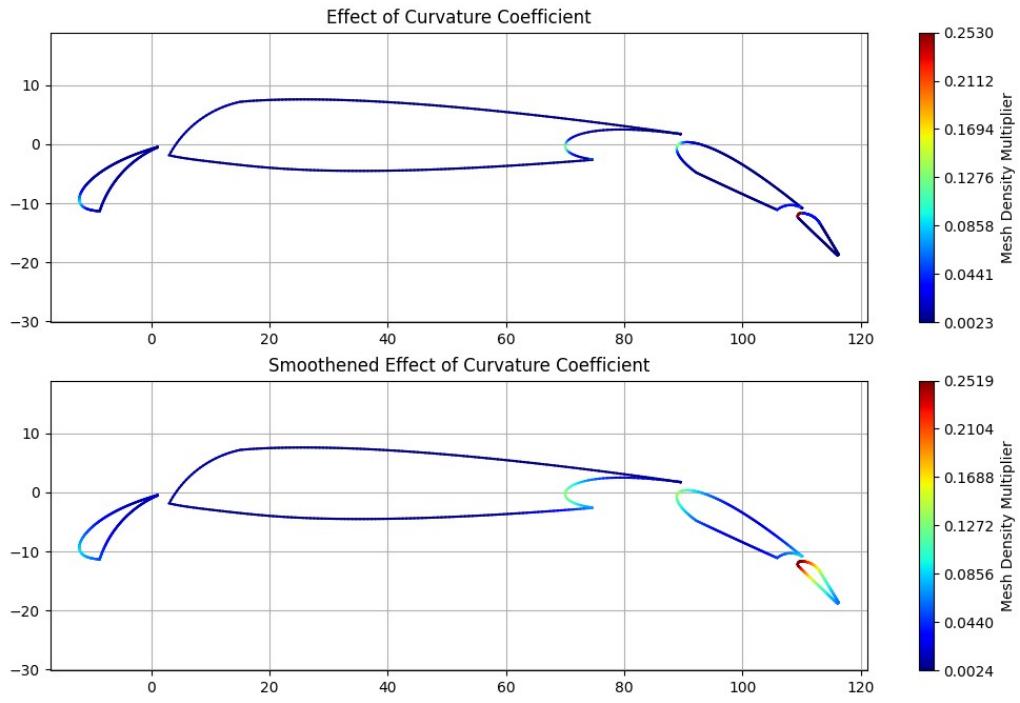
Μη εξομαλυμένη επίδραση συντελεστή εγγύτητας (*proximity\_coef*) (πάνω), και εξομαλυμένη (κάτω)

Ομοίως με πριν, η εξομάλυνση σπάνια επηρεάζει τον συντελεστή εγγύτητας.

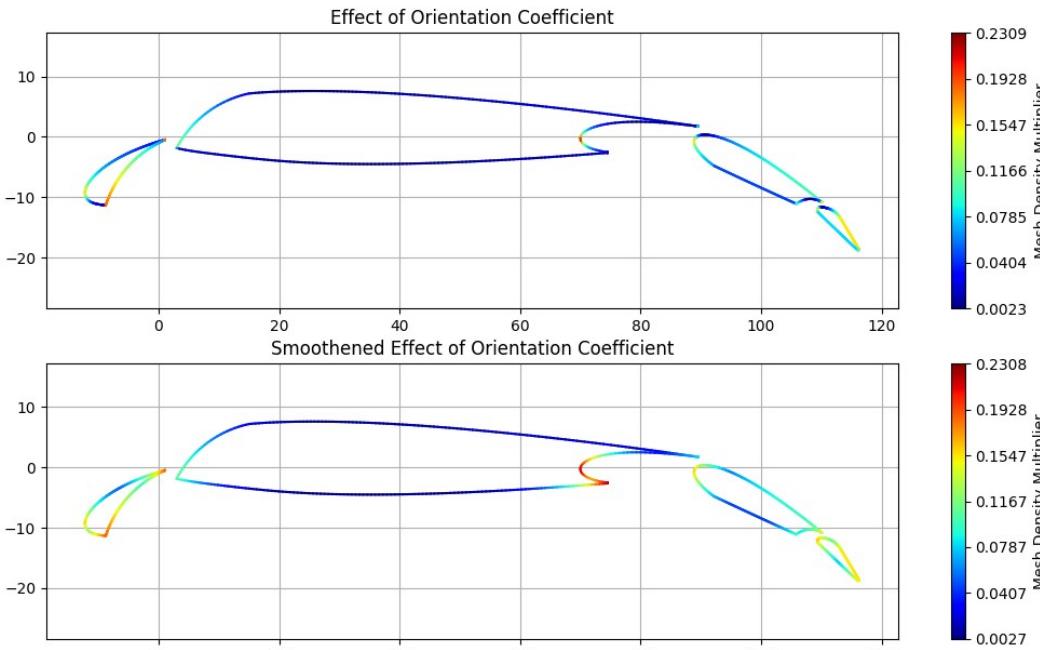


Μη εξομαλυμένη επίδραση συντελεστή αιχμηρότητας ακμών (*vertex\_sharpness\_coef*) (πάνω), και εξομαλυμένη (κάτω)

Αντιθέτως με προηγουμένως, ο συντελεστής αιχμηρότητας ακμών αυξάνει δραματικά την πυκνότητα πάνω στις ακμές, και εξαρτάται από τον αλγόριθμο εξομάλυνσης πυκνότητας, ώστε η επίδραση του να γίνει αισθητή στις περιοχές γύρω από τις ακμές.



Μη εξομαλυμένη επίδραση συντελεστή καμπυλότητας (*curvature\_coef*) (πάνω), και εξομαλυμένη (κάτω)



Μη εξομαλυμένη επίδραση συντελεστή προσανατολισμού (*orientation\_coef*) (πάνω), και εξομαλυμένη (κάτω)

#### ***normal\_spacing:***

Αυτό το method αφορά τον υπολογισμού του ύψους των στοιχείων πλέγματος στο οριακό στρώμα, κάθετα στις επιφάνειες των σχημάτων. Οπότε, οι ρυθμιστικές παράμετροι είναι:

- `first_cell_height`: το ύψος του πρώτου στοιχείου πάνω στην επιφάνεια των σχημάτων
- `thickness`: το πάχος του οριακού στρώματος
- `growth_ratio`: ο συντελεστής αύξησης του ύψους των στοιχείων του οριακού στρώματος

Σημειώνεται ότι το πάχος του οριακού στρώματος κάθε στοιχείου ρυθμίζεται ανάλογα το κλάσμα του μήκους χορδής του, προς το μέγιστο μήκος χορδής στοιχείου της γεωμετρίας. Έτσι, το μεγαλύτερο στοιχείο (συνήθως το κύριο σώμα της αεροτομής) θα έχει το ορισμένο πάχος, και τα άλλα θα έχουν μειωμένο, ανάλογα με το κλάσμα που αναφέρθηκε, υψηλότερο σε έναν εκθέτη.

#### ***inflation\_layer:***

Η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι σχετική με την εγγύς περιοχή γύρω από τη γεωμετρία όπου το μέγεθος πλέγματος μειώνεται.

- `distance`: η απόσταση που η περιοχή πύκνωσης πλέγματος εκτείνεται από την γεωμετρία
- `near_field_spacing`: το μέγεθος πλέγματος στα όρια της περιοχής
- `far_field_spacing`: το μέγεθος πλέγματος στα όρια του όγκου ελέγχου

#### ***wake\_region:***

Αφορά την πύκνωση πλέγματος στις περιοχές του απόρρους.

- `deflection_range`: το μήκος στο οποίο η ροή θεωρείται ότι εκτρέπεται από τη γεωμετρία
- `aoa`: η γωνία προσβολής, όχι της γεωμετρίας αλλά ολόκληρου του πλέγματος, (μπορεί να είναι η πρώτη και η τελευταία τιμή ενός εύρους γωνιών)
- `far_spacing`: το μέγεθος πλέγματος του απόρρους στο όριο της εκροής του όγκου ελέγχου
- `distribution_degree`: βαθμός κατανομής μεγέθους, όσο μεγαλύτερος τόσο μεγαλύτερη η απόσταση για την οποία παραμένει λεπτό το πλέγμα του απόρρους

#### ***control\_volume:***

Συνάρτηση σχετική με την οριοθέτηση του όγκου ελέγχου.

- `xrange`: το εύρος όγκου ελέγχου στον άξονα x
- `yrange`: το εύρος όγκου ελέγχου στο άξονα y
- `inlet_arc`: μεταβλητή που ρυθμίζει αν η εισροή στον όγκο ελέγχου θα έχει σχήμα κυκλικού τόξου ή ευθεία

#### ***advanced\_options:***

Αυτό το method δίνει τη δυνατότητα ελέγχου μερικών πιο ιδιαίτερων παραμέτρων σχετικά με το πλέγμα. Όλες οι μεταβλητές του έχουν default προτεινόμενες τιμές, οπότε η κλήση αυτού του method δεν είναι αναγκαία. Οι ελεγχόμενες παράμετροι είναι:

- `minnodes`: (default: 6) Ο ελάχιστος αριθμός κόμβων σε μια καμπύλη της γεωμετρίας. Χρησιμεύει ιδιαίτερα στον έλεγχο του αριθμού στοιχείων σε ακμές φυγής, και άλλες “κομμένες” ακμές.

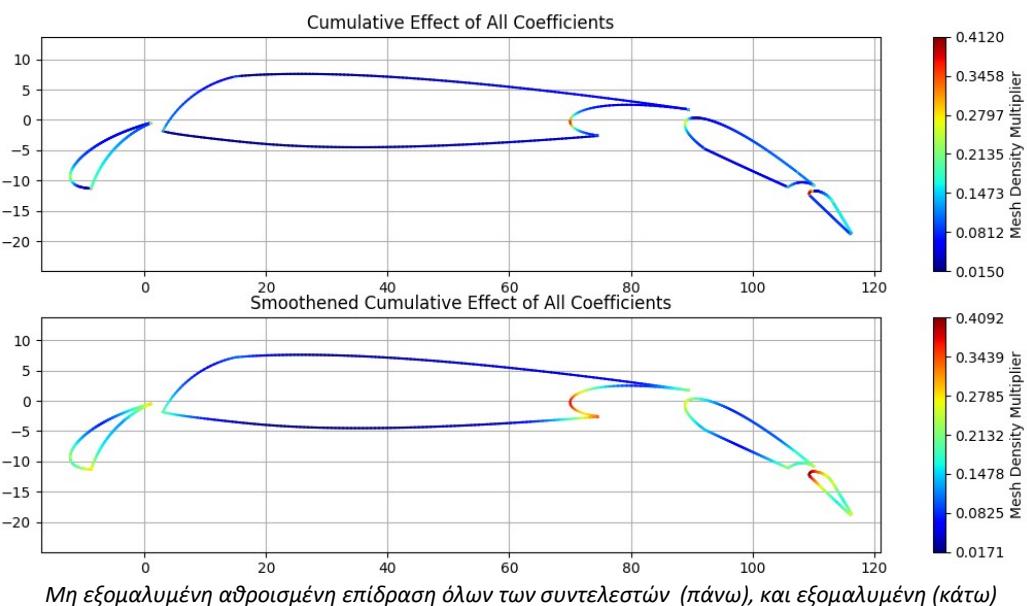
- thickness\_var\_degree: (default: 0.8) ο εκθέτης στον οποίο υψώνεται το κλάσμα μήκους χορδής προς μέγιστο μήκος χορδής, για τον υπολογισμό του πάχους οριακού στρώματος.
- lengthwise\_spacing\_coefs: (default: []) Μια λίστα ζευγαριών δείκτη και συναρτήσεων κατανομής πυκνότητας ως προς το κανονικοποιημένο μήκος ολόκληρης της επιφάνειας ενός στοιχείου. Ο δείκτης δείχνει το στοιχείο στην κατανομή συντελεστή πυκνότητας του οποίου, προστίθεται η κατανομή η οποία εξάγεται από τη συνάρτηση. Η συνάρτηση παίρνει ως όρισμα το κανονικοποιημένο μήκος ολόκληρης της βρεχόμενης επιφάνειας του στοιχείου, από την ακμή φυγής, εώς την ακμή προσβολής και πίσω στην ακμή φυγής. Συνήθως, αυτές οι συναρτήσεις δεν χρειάζονται για την δημιουργία ικανοποιητικού πλέγματος και κυρίως δίνονται για πολύ ειδικές περιπτώσεις.
- fan\_dens\_factor: (default: 0.5) Πολλαπλασίαζει την πυκνότητα μιας ακμής για τον υπολογισμό του αριθμού κόμβων στη γεωμετρία “βεντάγιας” που παράγεται στο οριακό στρώμα.
- wake\_max\_vertex\_angle: (default: pi \* 2/3) Είναι η μέγιστη γωνία ακμής για την οποία θεωρείται ότι παράγεται “ίχνος” απόρρους.

### Αλγόριθμος Παραγωγής Πλέγματος:

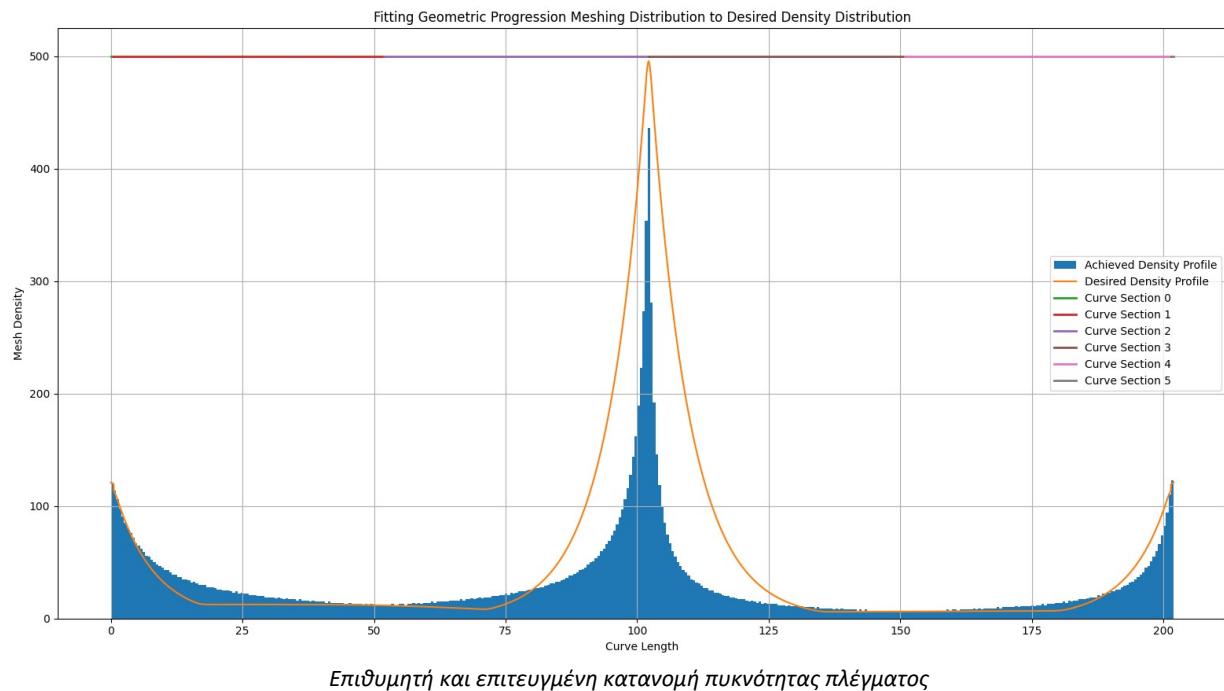
Έχοντας ρυθμίσει τις παραμέτρους παραγωγής πλέγματος μπορεί να κληθεί το method generate(), όπου και παράγεται το πλέγμα για μια γεωμετρία. Ο αλγόριθμος παραγωγής πλέγματος θα εξεταστεί με τη βοήθεια του παραδείγματος της αεροτομής NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat, μιας σκέτης NACA-23012, καθώς και μιας σκέτης αεροτομής Eppler-387.

### Δεδομένα Οριακού Στρώματος:

Προτεραιότητα παίρνει η παραγωγή δεδομένων της περιοχής του οριακού στρώματος, τα οποία ετοιμάζονται για την εισαγωγή τους στο Gmsh. Η αρχή γίνεται με την δημιουργία της κατανομής στοιχείων πάνω σε κάθε καμπύλη. Οπότε, από τα δεδομένα που υπολογίζονται για τους συντελεστές κατανομής πυκνότητας, όπως επισκοπήθηκε στην παράγραφο του tangent\_spacing, εξάγεται ο αθροιστικός συντελεστής κατανομής πυκνότητας, ο οποίος προστίθεται στη μονάδα και πολλαπλασιάζει την ανεπηρέαστη από συντελεστές πυκνότητα.



Έχοντας το προφίλ πυκνότητας το μόνο που μένει είναι να γίνει η κατανομή του στις καμπύλες. Όμως, όπως πολλοί άλλοι pre-processors, το Gmsh διαθέτει μόνο βασικές κατανομές όπως αυτή της γεωμετρική προόδου. Για τη περίθαλψη του προβλήματος, παράγεται ένας αλγόριθμος ο οποίος διασπά τις καμπύλες στα μήκοι όπου η κατανομή έχει ακρότατα και σημεία καμπής. Τυχόν τμήματα που είναι πολύ μικρά για τον αριθμό στοιχείων που έχουν επανενώνονται με το πιο ταιριαστό διπλανό τους. Έπειτα, επιλέγεται κατάλληλος συντελεστής γεωμετρικής προόδου και αριθμός κόμβων για κάθε τμήμα ώστε οι κατανομές τους να ταιριάζουν όσο το δυνατόν γίνεται καλύτερα στην επιθυμητή. Για καλύτερη σαφήνεια του αλγορίθμου, απεικονίζονται παρακάτω οι γεωμετρικές κατανομές, τα τμήματα μήκους και η επιθυμητή κατανομή για την καμπύλη μιας αεροτομής Eppler-387.



Έτσι, απομένει μόνο ο υπολογισμός του πάχους οριακού στρώματος, ο οποίος εξηγήθηκε παραπάνω και ο υπολογισμός των αριθμών κόμβων σε κάθε “βεντάγια”. Η “βεντάγια” είναι μια γεωμετριά μορφής τμήματος δίσκου, δομημένου πλέγματος, η οποία παράγεται στις ακμές των γεωμετριών. Ο υπολογισμός των κόμβων γίνεται βάση του πάχους του οριακού στρώματος και της γωνίας της ακμής στην οποία παράγεται “βεντάγια”, ώστε η πυκνότητα στην εξωτερική πλευρά αυτής να ισούται με την πυκνότητα στοιχείων στο τοίχωμα στην εγγύς περιοχή. Καθώς αυτός ο αριθμός είναι πολύ μεγάλος, πολλαπλασιάζεται με ένα συντελεστή (fan\_dens\_factor) για τη μείωση του σε επιθυμητά επίπεδα. Τέλος, τα υπολογισμένα δεδομένα τακτοποιούνται ώστε να μπορούν να περαστούν εύκολα στο Gmsh.

#### Δεδομένα περιοχής απόρρους:

Επόμενη στη σειρά είναι η παραγωγή δεδομένων περιοχή απόρρους. Η πύκνωση πλέγματος στην περιοχή απόρρους ελέγχεται με την προσθήκη σημείων στον όγκο ελέγχου, τα οποία επιβάλουν συγκεκριμένο μέγεθος πλέγματος στη θέση τους. Ο αλγόριθμος παραγωγής αυτών των σημείων εξηγείται παρακάτω.

- 1) Επαναληπτικά, για κάθε γεωμετρικό στοιχείο, συλλέγονται όλες οι ακμές αυτού. Τυχόν πολύ μικρές καμπύλες θεωρούνται “κομμένες” ακμές.
- 2) Έπειτα για κάθε ακμή:
  - I. Ελέγχεται αν η ακμή “δείχνει” κατάντι της ροής (το δίανυσμα που την αντιπροσωπεύει πρέπει να έχει γωνία εντός του εύρους γωνιών προσβολής πλέγματος  $\pm \pi/2$ ) και αν η γωνία της ακμής είναι

μικρότερη της μέγιστης (wake\_max\_vertex\_angle). Το δίανυσμα που αντιπροσωπεύει μια ακμή θεωρείται ότι είναι το διάνυσμα που τη διχοτομεί και “δείχνει” εξωτερικά του σχήματος.

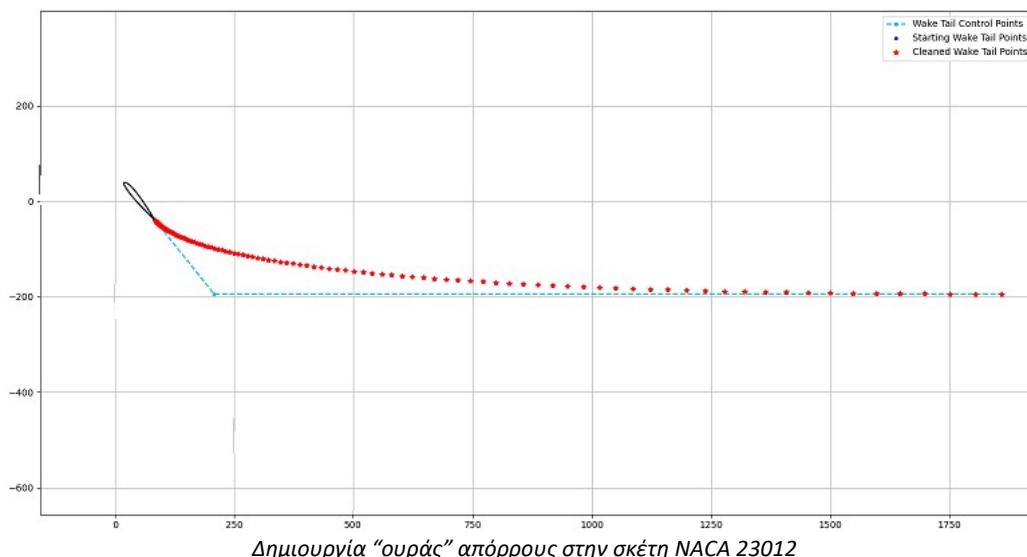
- II. Τοποθετούνται δύο σημεία. Ένα είναι στη θέση του αντιπροσωπευτικού διανύσματος της ακμής, με μέτρο το μήκος εκτροπής (deflection\_range). Το δεύτερο υπολογίζεται στο σημείο τομής μιας ευθείας με το θετικό όριο  $x$  του όγκου ελέγχου. Αυτή η ευθεία περνάει από το πρώτο σημείο και έχει γωνία με τον  $x$  άξονα, την γωνία προσβολής του πλέγματος. Για ένα εύρος γωνιών προσβολής η διαδικασία γίνεται δύο φορές για τα δύο όρια του εύρους.
- III. Το σημείο της ακμής που παράγει απόρρους και τα δύο που υπολογίστηκαν ορίζονται ως control points μιας καμπύλης Bezier, με βάση της οποίας τοποθετείται ένα πλήθος σημείων που αναπαριστά τον απόρρους. Το σύνολο αυτών των σημείων που παράγονται από την ίδια καμπύλη Bezier, θα αναφερθούν ως “ουρά απόρρους” για καλύτερη σαφήνεια.

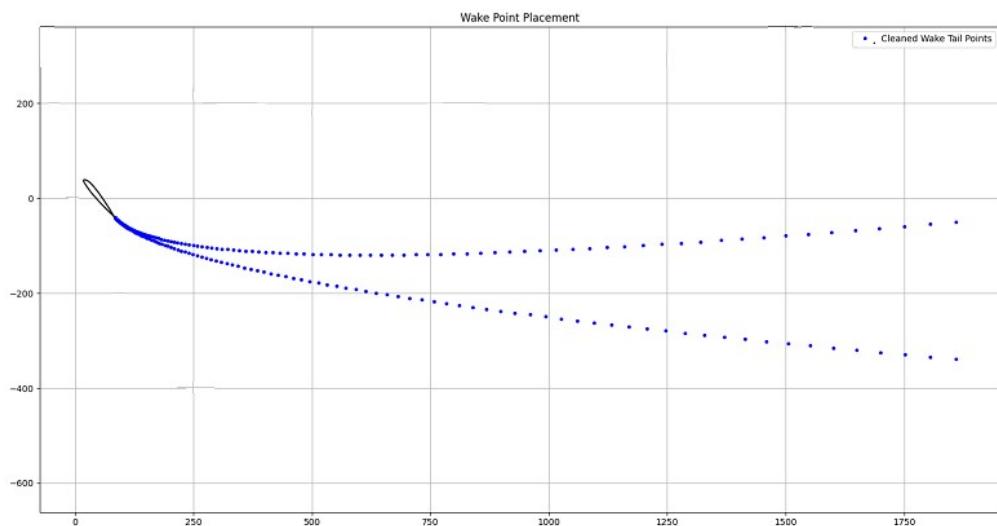
Ακολουθεί ο “καθαρισμός” των σημείων της ουράς που ενδέχεται να επιβάλουν μέγεθος πλέγματος σε μη επιθυμητές περιοχές.

- IV. Αρχικά αφαιρούνται τα σημεία της ουράς που βρίσκονται εντός του γεωμετρικού σχήματος που την παράγει.
- V. Αν η ουρά τέμνει ξένα στοιχεία (δηλαδή αν έχει σημεία που βρίσκονται εντός άλλων σχημάτων) “κόβεται” (δηλαδή αφαιρούνται όλα τα σημεία από εκεί και πέρα) στο πρώτο σημείο που τέμνει ξένο σχήμα.
- VI. Επίσης η ουρά κόβεται στο πρώτο σημείο, εντός της εγγύς περιοχής πύκνωσης (inflation layer), όπου το μέγεθος πλέγματος αυτής είναι μεγαλύτερο από αυτό της περιοχής πύκνωσης, εάν αυτό το σημείο υπάρχει υπάρχει.
- VII. Τέλος αφαιρούνται όλα τα σημεία της ουράς που βρίσκονται απαράδεκτα κοντά ή εντός των οριακών στρωμάτων της γεωμετρίας.

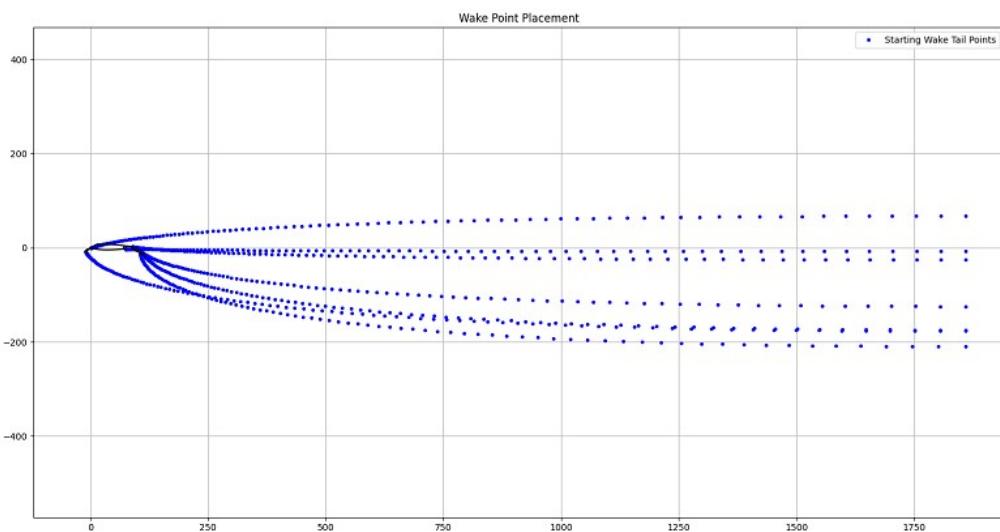
Το μέγεθος πλέγματος που επιβάλει κάθε σημείο μιας ουράς απόρρους υπολογίζεται κατανέμοντας μεγέθη βάση του μήκους αυτής και του βαθμού κατανομής (distribution\_degree). Το μέγεθος στην αρχή της ουράς υπολογίζεται βάση της πυκνότητας της ακμής που την παράγει, ενώ στο τέλος της ουράς δίνεται με τη παράμετρο far\_spacing του wake\_region.

Παρακάτω αναπαριστούνται τα βήματα του αλγορίθμου για την γεωμετρία σκέτης αεροτομής NACA23012 και την πιο περίπλοκη της NACA 23012 πολλών στοιχείων που επισκοπήθηκε προηγουμένων.

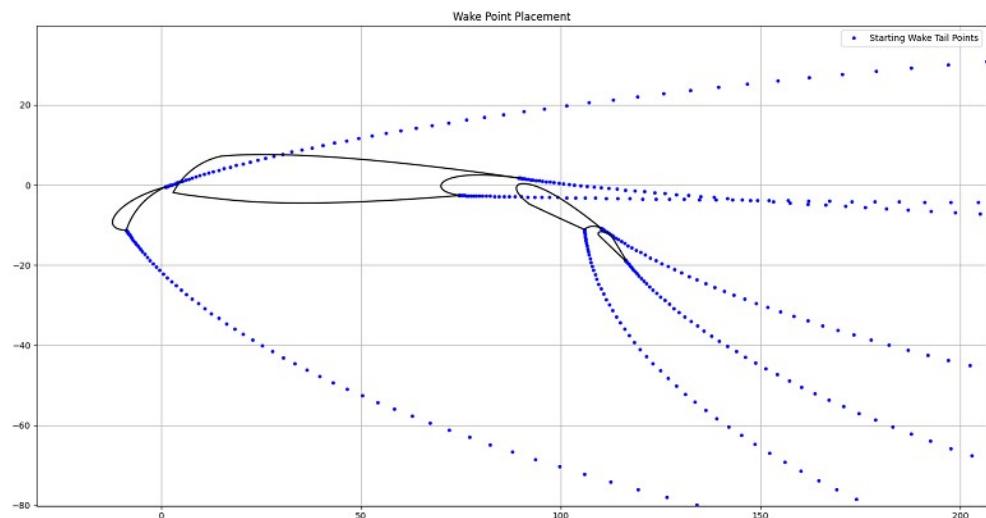




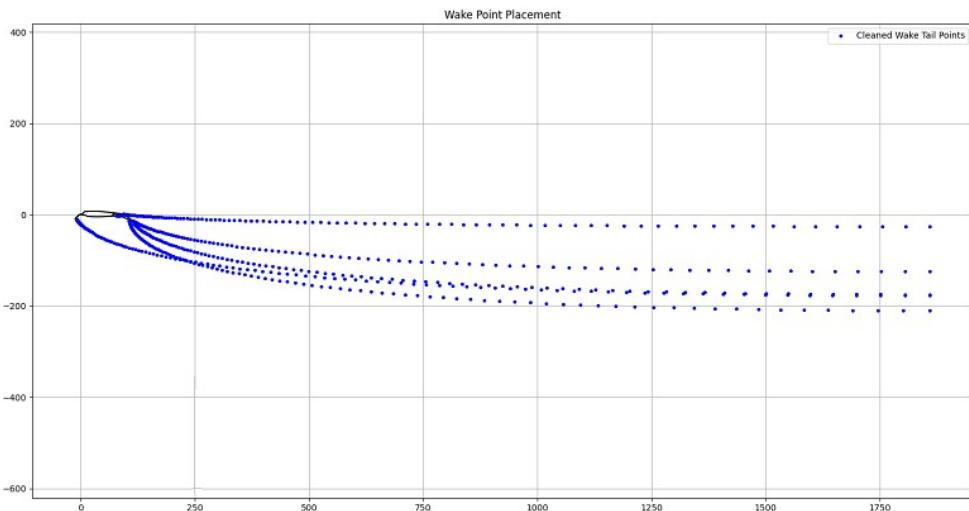
“Ουρές” απόρρους στην σκέτη NACA 23012, για ένα εύρος γωνιών προσβολής πλέγματος



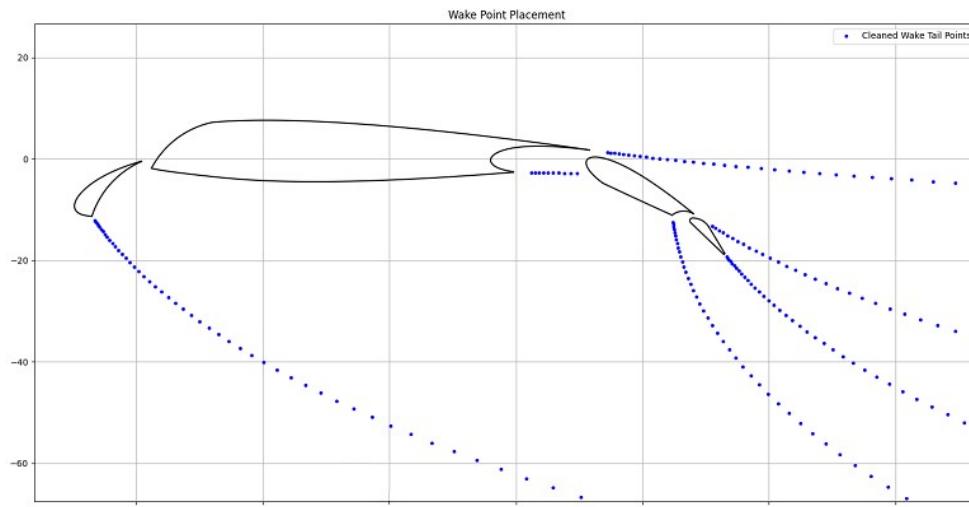
“Ουρές” απόρρους στην NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat (πλήρης όψη)



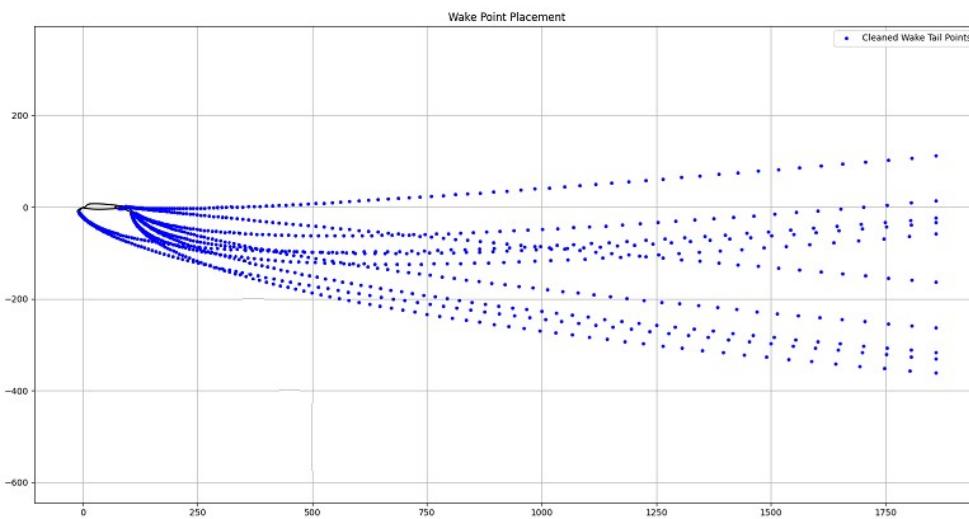
“Ουρές” απόρρους στην NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat (λεπτομέρεια)



Καθαρισμένες “ουρές” απόρρους στην NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat (πλήρης όψη)



Καθαρισμένες “ουρές” απόρρους στην NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat (λεπτομέρεια)



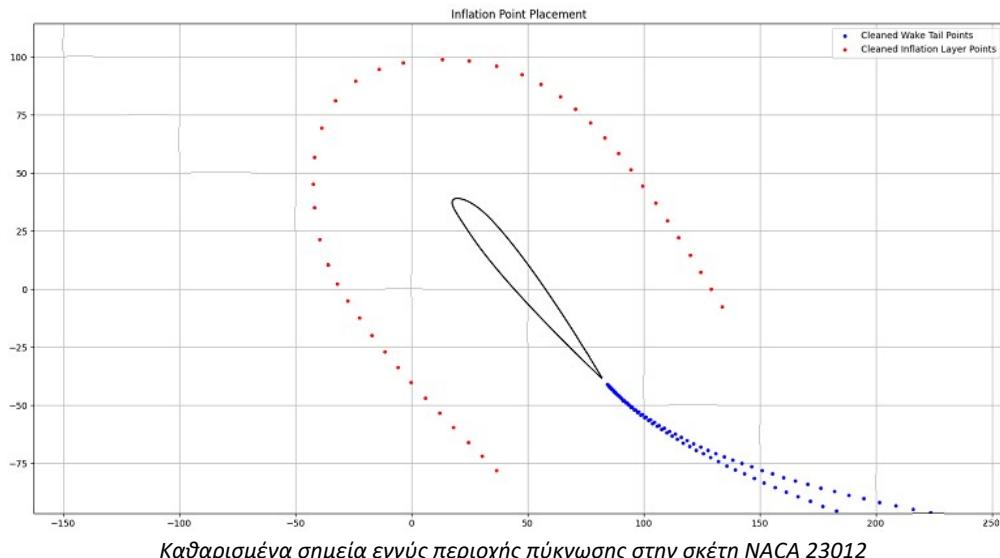
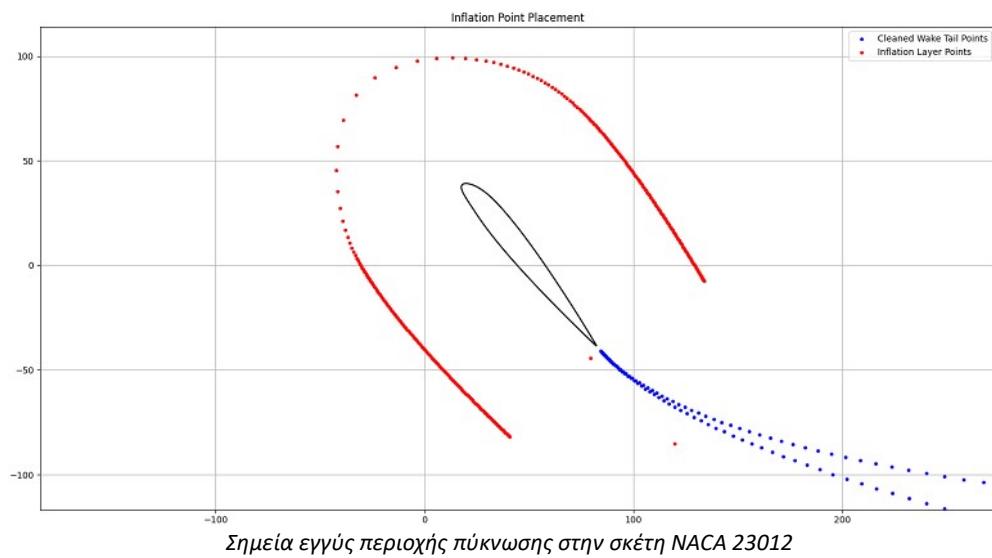
Καθαρισμένες “ουρές” απόρρους στην NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat, για ένα εύρος γωνιών προσβολής πλέγματος (πλήρης όψη)

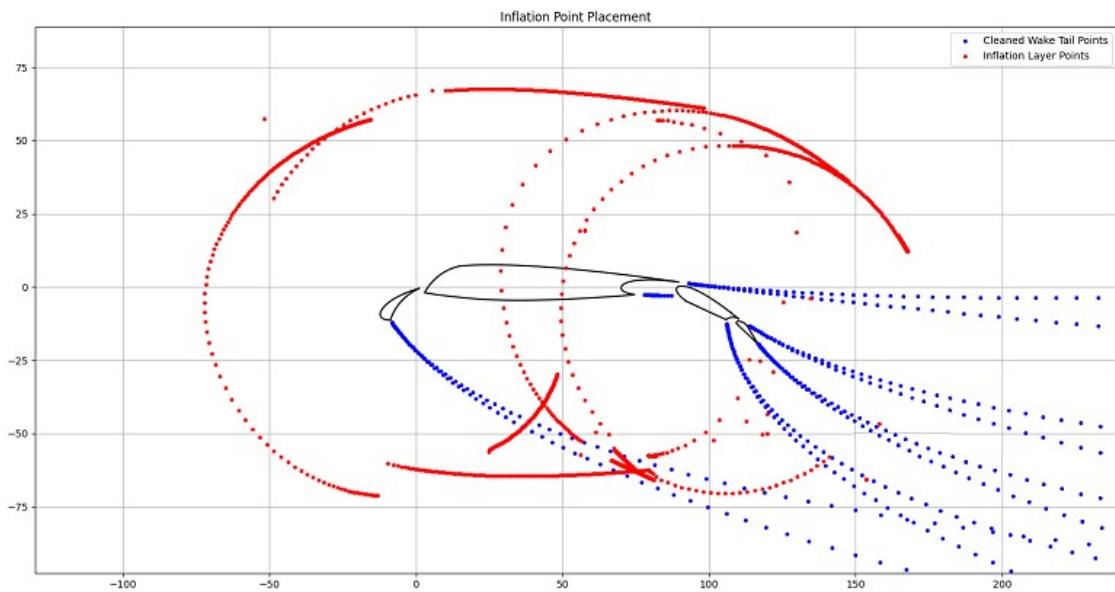
### Δεδομένα εγγύς περιοχής πύκνωσης:

Επόμενη είναι η παραγωγή δεδομένων της εγγύς περιοχής πύκνωσης. Ομοίως με την πύκνωση πλέγματος στην περιοχή απόρρους, και αυτή ρυθμίζεται με την προσθήκη ανάλογων σημείων στον όγκο ελέγχου. Ομοίως, ο αλγόριθμος παραγωγής και “καθαρισμού” τους παρουσιάζεται παρακάτω.

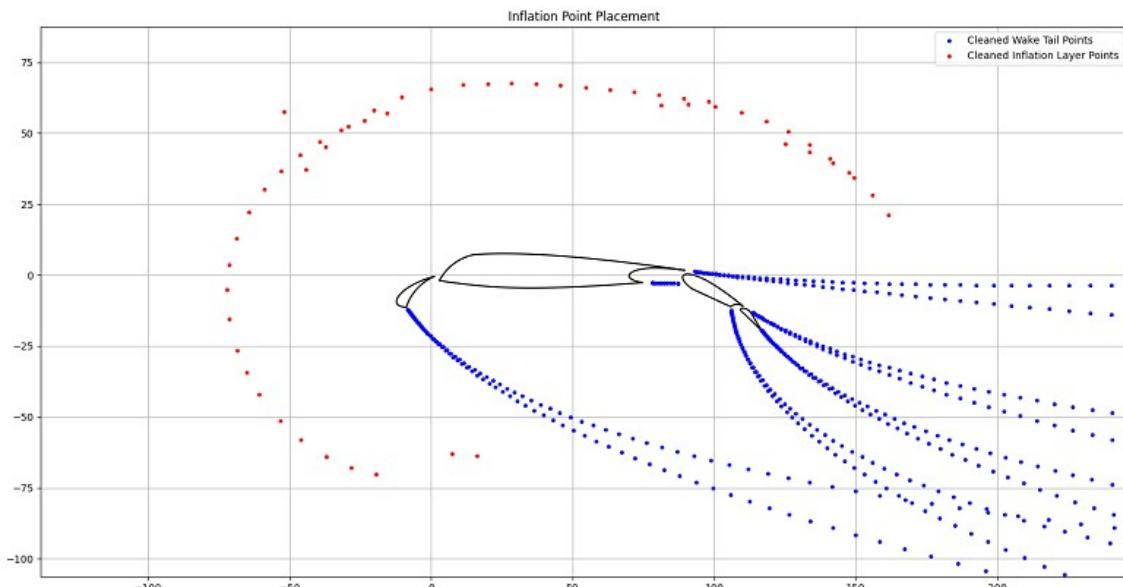
- 1) Για κάθε στοιχείο γεωμετρίας δημιουργούνται σημεία κάθετα στην επιφάνεια του προφίλ του, σε απόσταση αυτή της παραμέτρου *distance* στο *inflation\_layer*.
- 2) Κάθε σημείο με απόσταση από οποιοδήποτε τμήμα της γεωμετρίας, μικρότερη από αυτή την απόσταση επί 0.95 αφαιρείται, ώστε να αποφευχθεί η επιβολή του μεγέθους του ορίου της εγγύς περιοχής πιο κοντά στη γεωμετρία από ότι είναι επιθυμητό.
- 3) Κάθε σημείο με απόσταση από τα σημεία απόρρους μικρότερη από την *distance* επί 0.4 αφαιρείται (για να μην γίνει επιβολή μεγαλύτερου μεγέθους στην περιοχή απόρρους).
- 4) Τέλος τα σημεία αφαιρούνται εναλλάξ, αν η απόσταση μεταξύ τους είναι πολύ μικρή για το μέγεθος πλέγματος της περιοχής πύκνωσης που έχει επιλεγεί.

Τα βήματα της παραγωγής δεδομένων εγγύς περιοχής πύκνωσης απεικονίζονται παρακάτω.





Σημεία εγγύς περιοχής πύκνωσης στην NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat

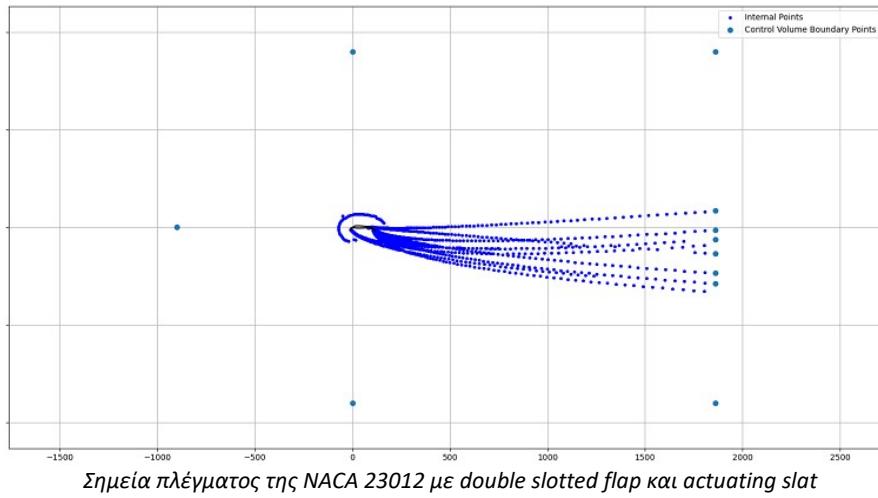
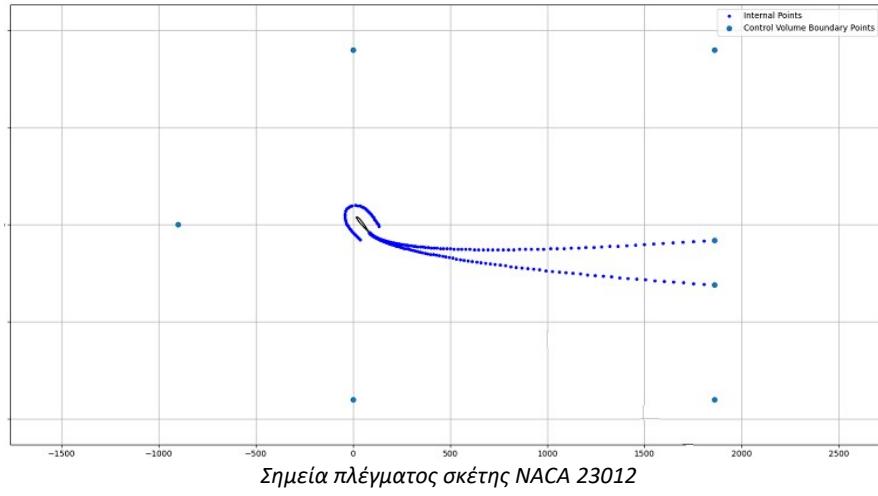


Καθαρισμένα σημεία εγγύς περιοχής πύκνωσης στην NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat

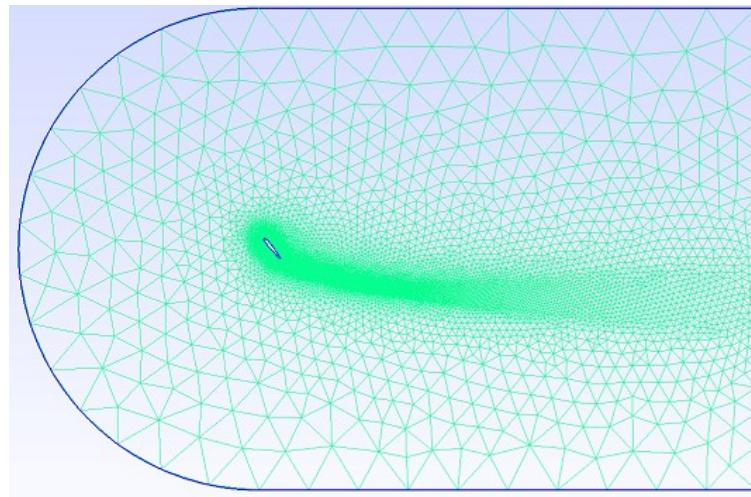
Αφού τοποθετήθηκαν όλα τα σημεία που επιβάλλουν συγκεκριμένο μέγεθος πλέγματος εντός του όγκου ελέγχου, γίνεται "καθαρισμός" κάθε σημείου που βρίσκεται πολύ κοντά σε άλλα για το μέγεθος πλέγματος που επιβάλλει.

#### Δεδομένα όγκου ελέγχου:

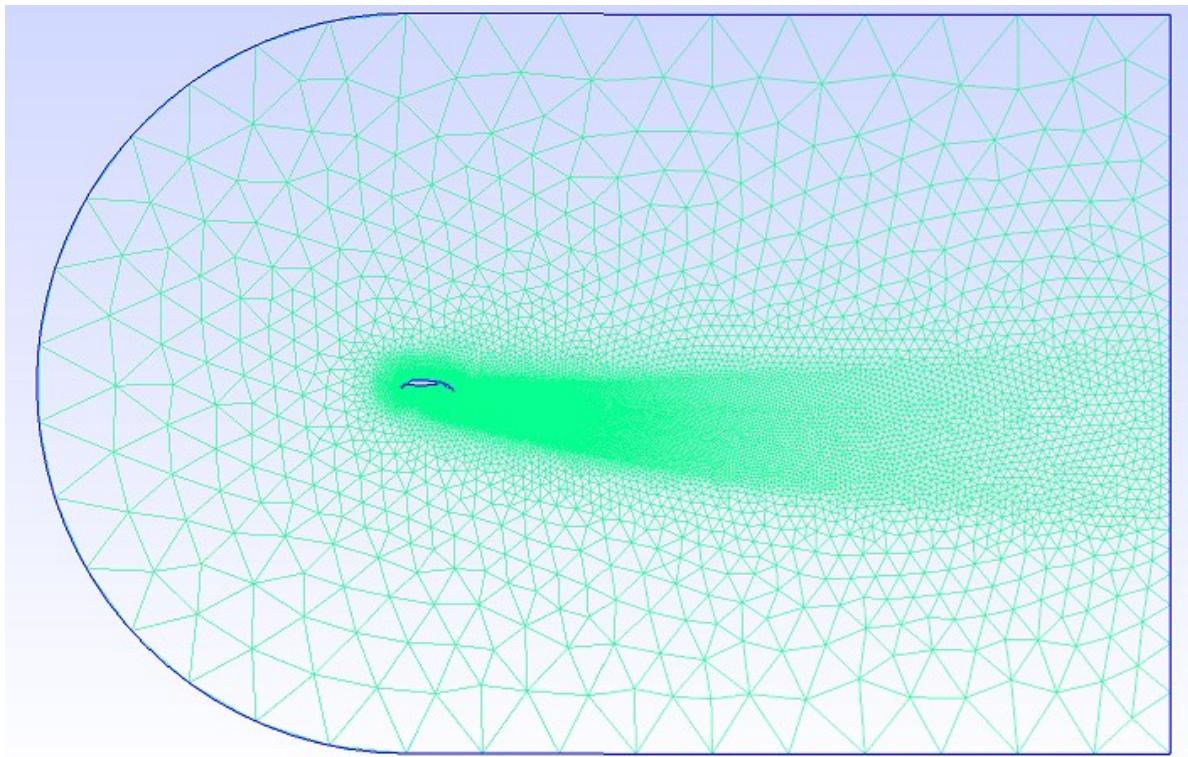
Τελικό βήμα στην παραγωγή των δεδομένων πλέγματος αποτελεί η παραγωγή των δεδομένων όγκου ελέγχου. Συγκεκριμένα, τοποθετούνται τα σημεία που ορίζουν τα όρια του όγκου ελέγχου. Τυχόν σημεία απόρρους στο θετικό όριο του εύρους τετμημένων του όγκου ελέγχου, αφαιρούνται από τα σημεία που θα τοποθετηθούν εντός του όγκου και εισάγονται στα σημεία ορίου του όγκου ελέγχου. Έτσι, με αυτό το τελευταίο βήμα απεικονίζονται παρακάτω τα συνολικά δεδομένα σημείων του πλέγματος.



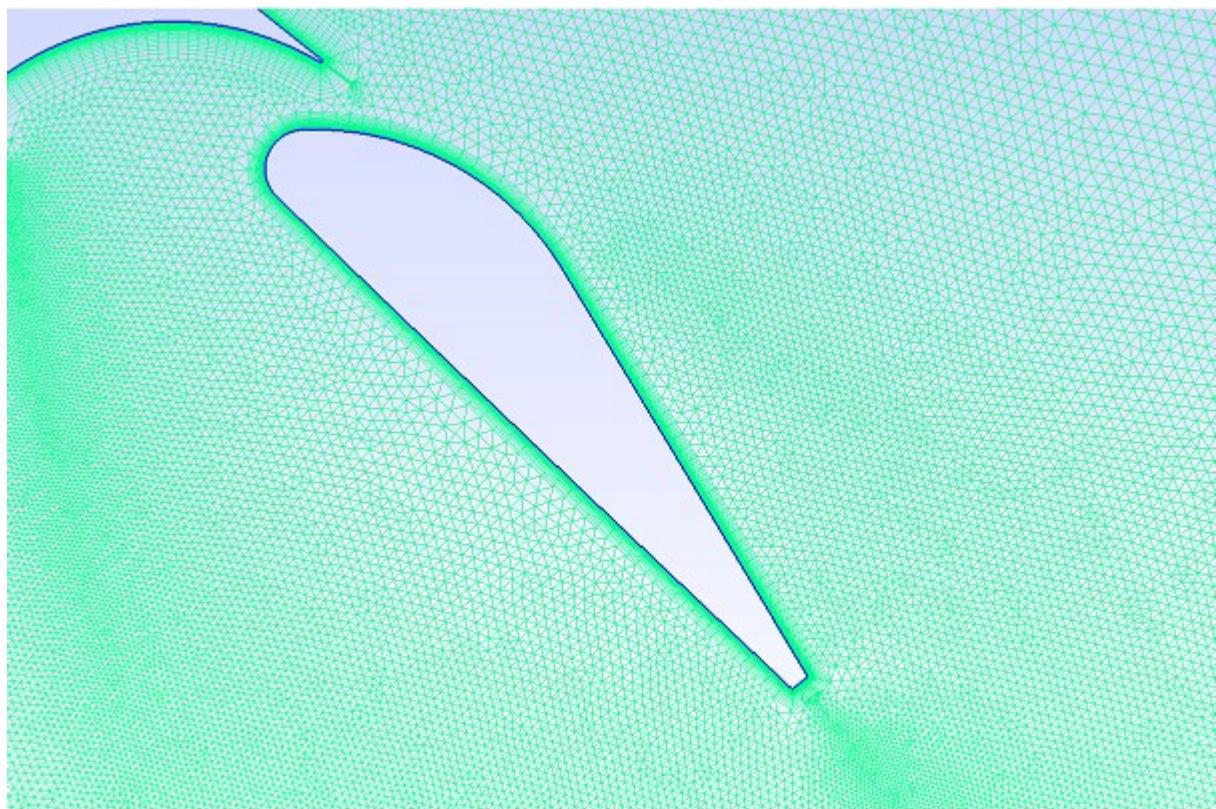
Έπειτα, όλα αυτά τα δεδομένα, περνούνται μεθοδικά στο Gmsh, και για τις δύο παραπάνω τομές παράγονται τα παρακάτω πλέγματα.



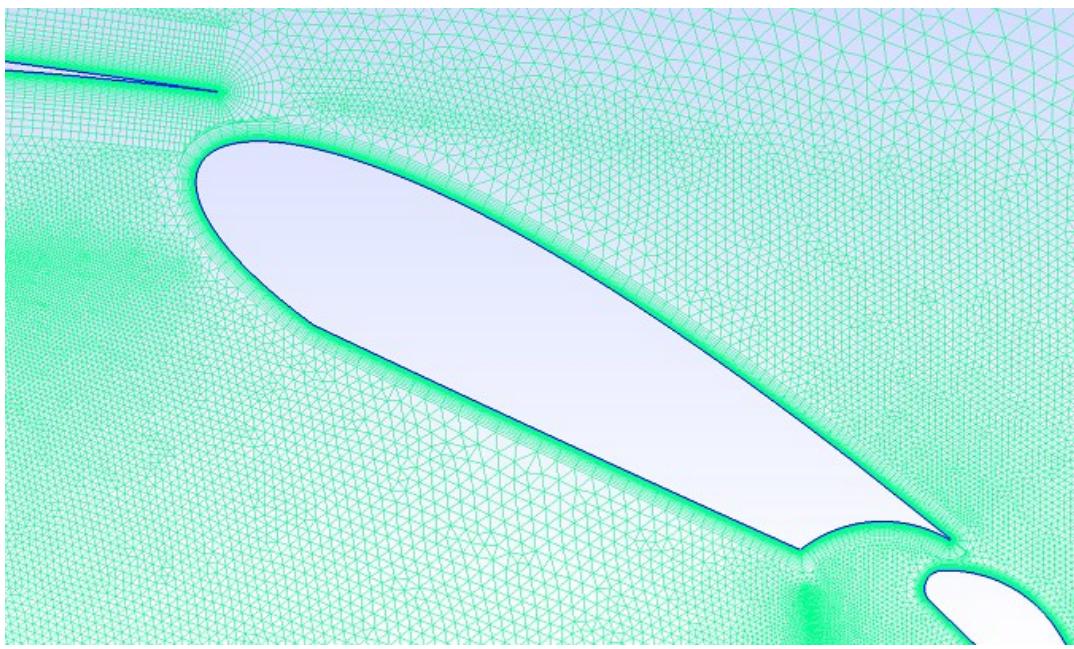
Πλέγμα σκέτης NACA 23012



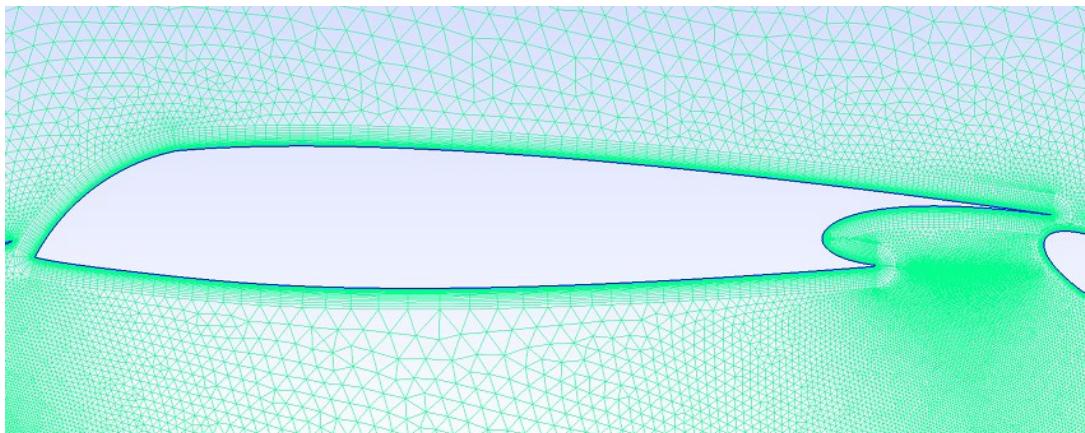
Πλέγμα της NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat (πλήρης όψη)



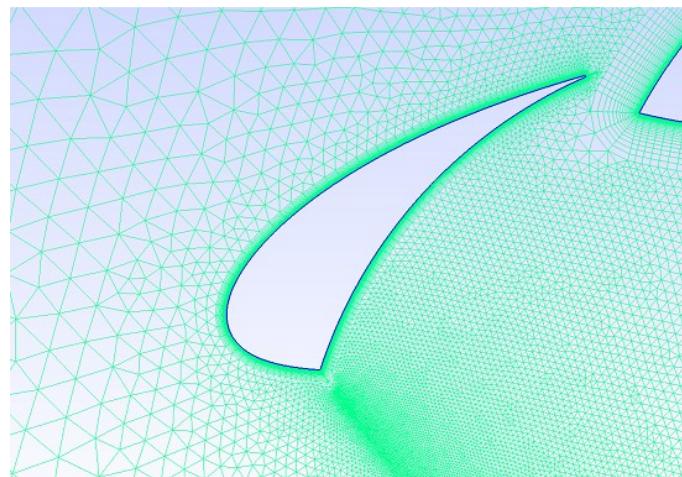
Πλέγμα της NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat (λεπτομέρεια δεύτερου πτερυγίου φυγής)



Πλέγμα της NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat (λεπτομέρεια πρώτου πτερυγίου φυγής)



Πλέγμα της NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat (λεπτομέρεια κύριου σώματος αεροτομής)



Πλέγμα της NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat (λεπτομέρεια πτερυγίου προσβολής)

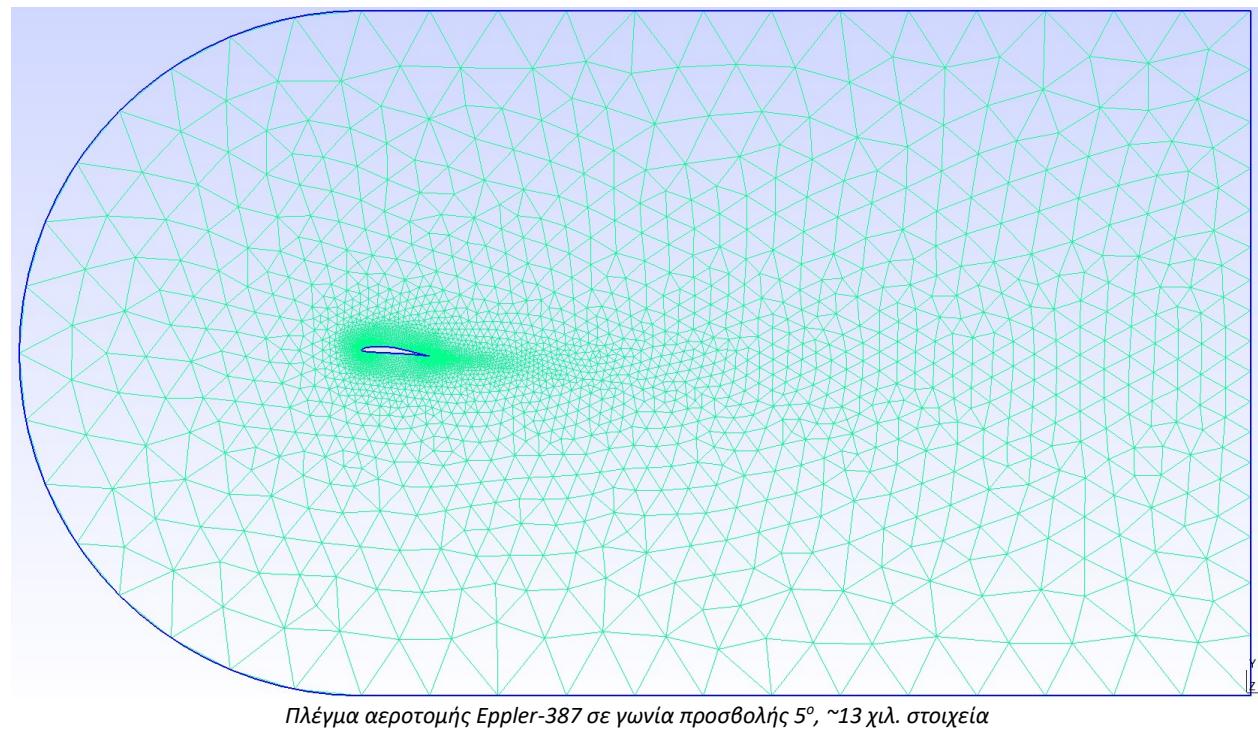
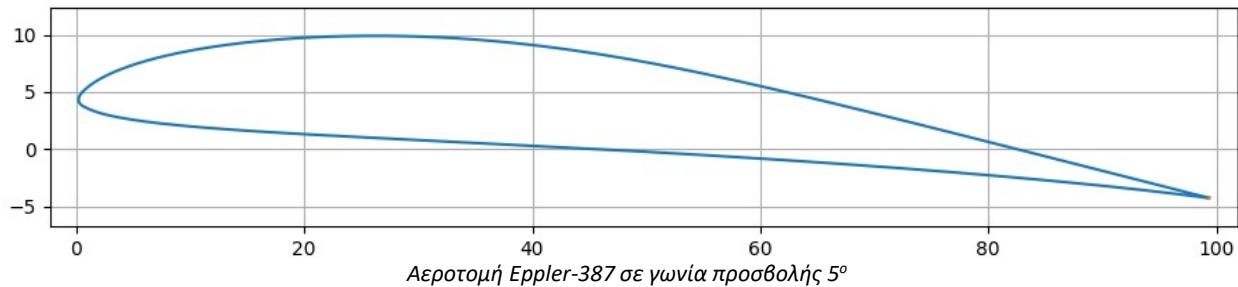
## 3.2 Παραδείγματα

Μια βιβλιοθήκη δεν κάνει κάποια λειτουργία από μόνη της. Η χρήση αυτής γίνεται από εξωτερικά αρχεία κώδικα τα οποία την εισάγουν και χρησιμοποιούν τα εργαλεία της. Μερικά τέτοια εξωτερικά αρχεία συγγράφηκαν με σκοπό να παρέχουν κάποια αρχική καθοδήγηση στη χρήση της βιβλιοθήκης καθώς και για την επαλήθευση των πλεγμάτων που παράγονται. Το αρχείο της βιβλιοθήκης καθώς και τα σχετικά παραδείγματα μπορούν να βρεθούν στο ακόλουθο GitHub repository:

<https://github.com/AntoKyr/AirfoilLib>

### 3.2.1 Παράδειγμα 1 - Παραγωγή Πλέγματος για Αεροτομή Eppler-387

Το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ιδιαίτερα απλό, και ο κύριος σκοπός του είναι η πλήρης εξήγηση των παραμέτρων πλέγματος. Ξεκινά με την εισαγωγή των συντεταγμένων της Eppler-387, έπειτα γίνεται η ρύθμιση της γεωμετρικής πιστότητας, και ακολουθεί η κοπί της αιχμηρής ακμής φυγής. Ακόμα δημιουργείται ένα geo.Section object από αυτή, το οποίο περιστρέφεται. Στη συνέχεια γίνεται περιγραφή όλων των παραμέτρων ρύθμισης πλέγματος καθώς και η παραγωγή αυτού. Παρακάτω φαίνεται η γεωμετρία της αεροτομής καθώς και το παραγόμενο πλέγμα.



### Σχόλια:

Ενδιαφέρον έχει η εύκολη αύξηση / μείωση αριθμού στοιχείων για μελέτες ανεξαρτησίας πλέγματος. Λογική είναι η επιθυμία να μην αλλάζουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του πλέγματος αφού βρεθούν κατάλληλες παράμετροι, παρά μόνο ο αριθμός στοιχείων σε κάθε περιοχή. Για το σκοπό αυτό οι μόνες παράμετροι που θα πρέπει να αλλάζουν είναι η *default\_spacing* του *tangent\_spacing*, η *first\_cell\_height* του *normal\_spacing*, η *near\_field\_spacing* και η *far\_field\_spacing* του *inflation\_layer* καθώς και η *far\_spacing* του *wake\_region*.

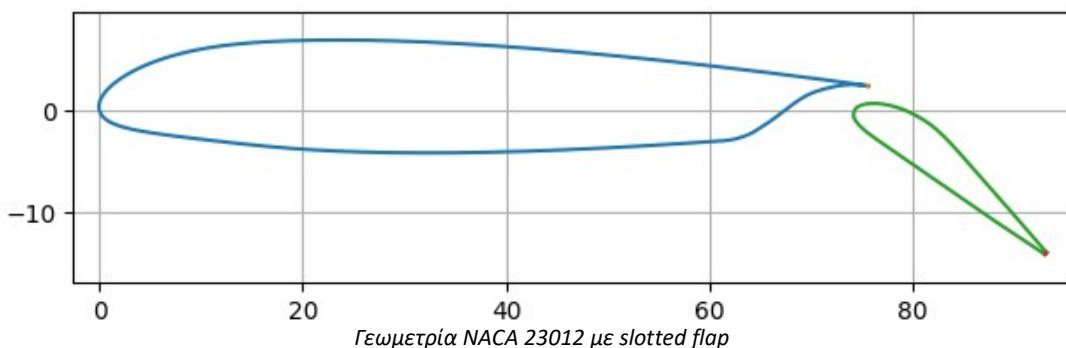
### 3.2.2 Παράδειγμα 2 - Αεροτομή NACA 23012 με Διάφορα Είδη Slotted Flap

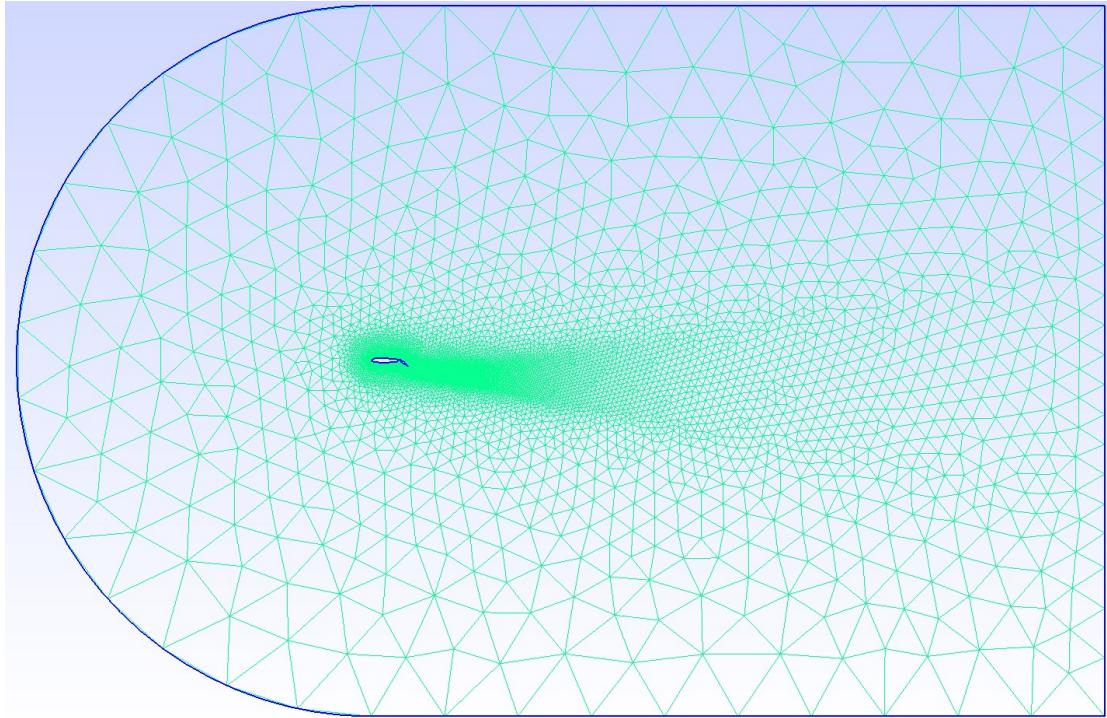
Για το συγκεκριμένο παράδειγμα παράγονται μερικές από τις γεωμετρίες που περιγράφονται στην πηγή [22]. Καθώς οι γεωμετρίες και οι καμπύλες δίνονται άμεσα με συντεταγμένες, η διαμόρφωση της γεωμετρίας γίνεται κυρίως με χρήση των βασικών γεωμετρικών συναρτήσεων. Για την αναπαραγωγή της εξεταζόμενης τομής ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

- 1) Αρχικά εισάγονται οι συντεταγμένες της αεροτομής και ρυθμίζεται η γεωμετρική πιστότητα. Έπειτα εισάγονται οι συντεταγμένες του κύριου πτερυγίου φυγής (slotted flap) και αυτό μετατοπίζεται στη σωστή του θέση. Ακολουθεί η εισαγωγή των συντεταγμένων του slot της κύριας αεροτομής.
- 2) Για την δημιουργία της γεωμετρίας, η κύρια καμπύλη της αεροτομής πρέπει να κοπεί σε δύο σημεία. Το πρώτο σημείο είναι αυτό της πλευράς αναρρόφησης, το οποίο βρίσκεται με τη βοήθεια της συνάρτησης *prox12p*. Το δεύτερο είναι στη πλευρά πίεσης και βρίσκεται βάση των δεδομένων κύκλου που δίνονται από τους Wenzinger και Gauvain, με χρήση της συνάρτησης *tang2crv*. Οπότε, μπορεί να κοπεί η καμπύλη της αεροτομής και να προστεθούν τα ακραία σημεία.
- 3) Ακολουθεί η δημιουργία τόξου κύκλου που ενώνει την καμπύλη της αεροτομής με αυτή του slot, κι έτσι δημιουργείται η νέα γεωμετρία της αεροτομής.

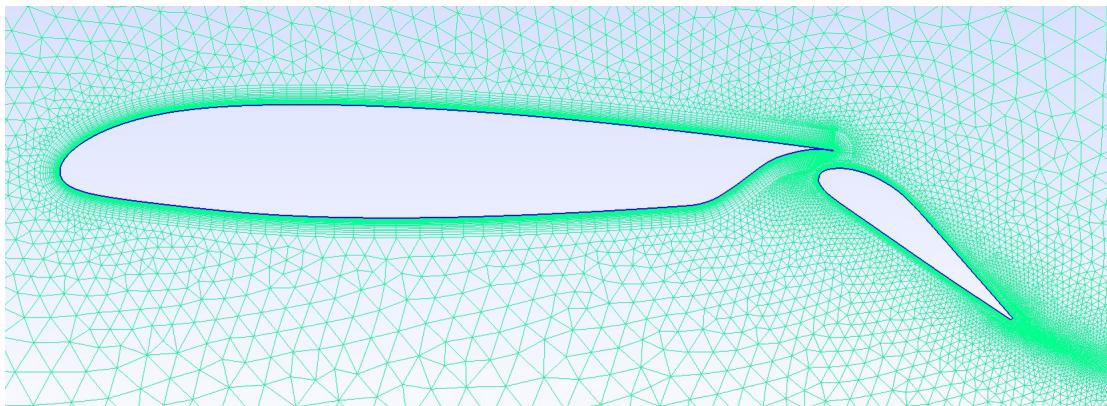
Για την περίπτωση που δεν επιλεχθεί πρόσθετο πτερύγιο (auxiliary flap), ή plain flap, το κύριο πτερύγιο μετατοπίζεται βάση των θέσεων που δίνονται στην αναφορά. Άλλις για επιλογή πρόσθετου plain flap, χρησιμοποιείται το method *te\_flap* στο πτερύγιο, ή για την περίπτωση πρόσθετου auxiliary flap εισάγεται η γεωμετρία του auxiliary flap και του auxiliary slot στο flap. Έπειτα, εκτρέπεται πρώτα το auxiliary flap, βάση της αναφοράς κι έπειτα το main flap. Τέλος, η γεωμετρία σμυκρίνεται για να έχει το μέγεθος που αναφέρεται.

Η δε παραγωγή του πλέγματος παραμένει όσο απλή όσο και για την πολύ απλούστερη γεωμετρία της αεροτομής Eppler-387, δηλαδή ρυθμίζονται οι παράμετροι του και καλείται η συνάρτηση *generate* με όρισμα την γεωμετρία που δημιουργήθηκε. Παρακάτω αναπαριστώνται τρεις γεωμετρίες (μια με slotted flap, μία με πρόσθετο plain flap και μια με auxiliary flap) καθώς και τα πλέγματα τους.

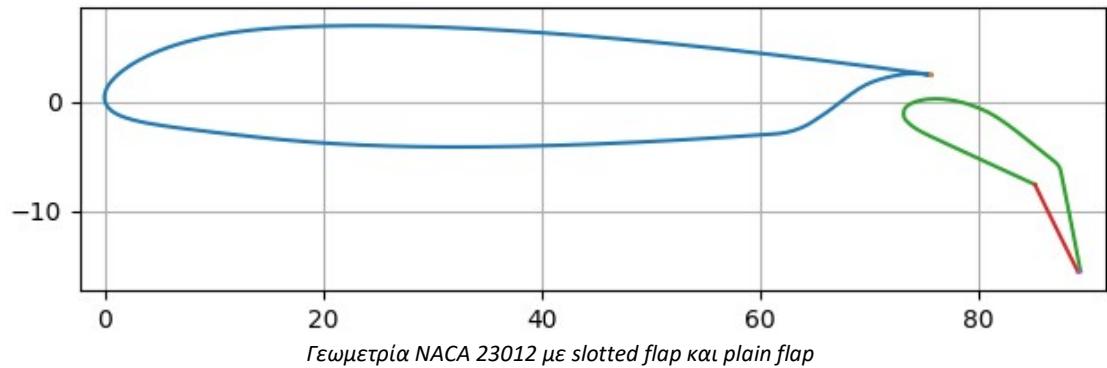




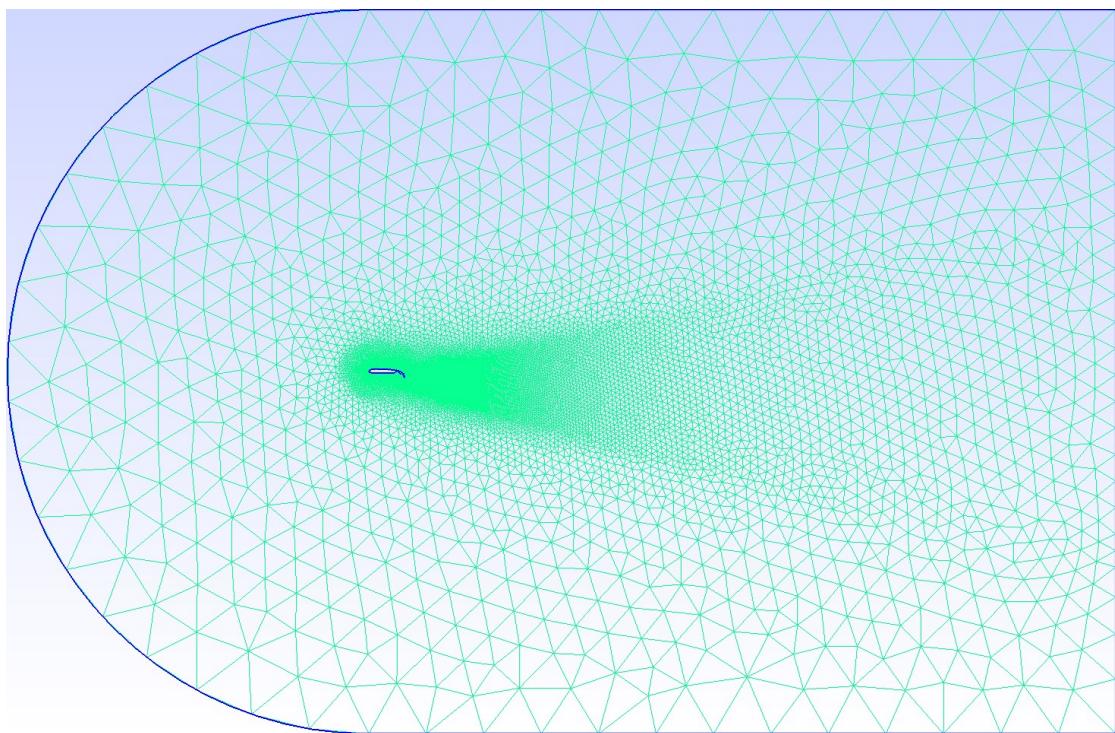
Πλέγμα γεωμετρίας NACA 23012 με slotted flap (πλήρης όψη)



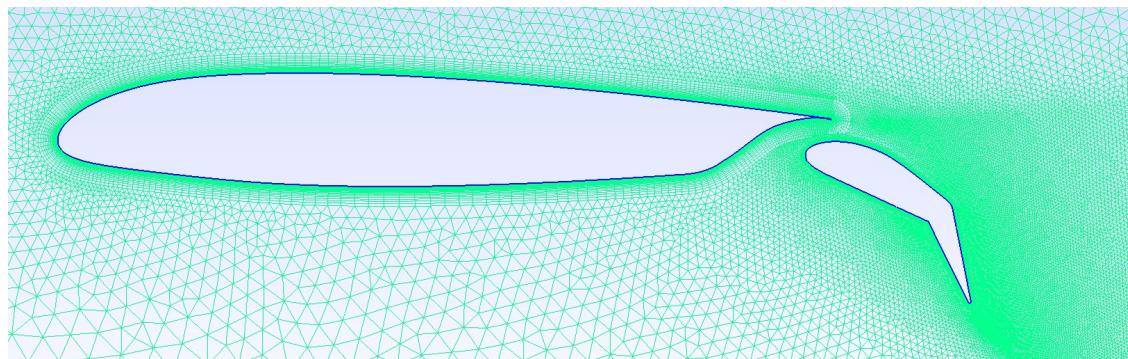
Πλέγμα γεωμετρίας NACA 23012 με slotted flap (λεπτομέρεια)



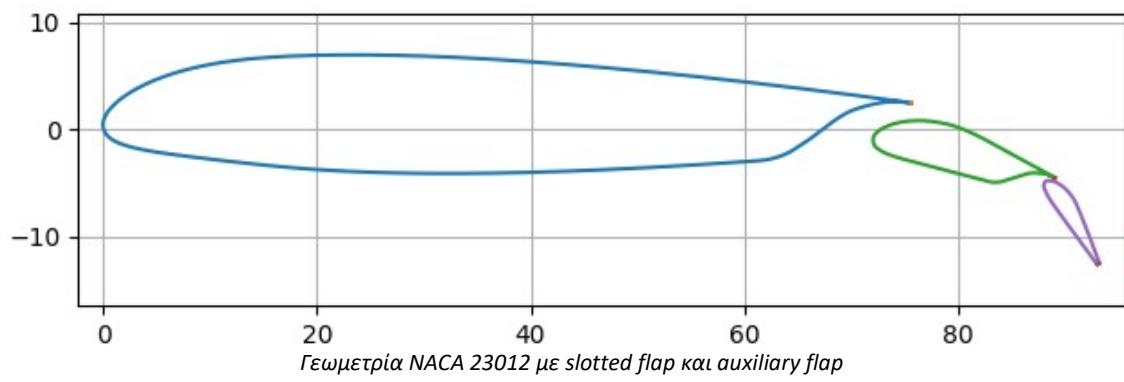
Γεωμετρία NACA 23012 με slotted flap και plain flap



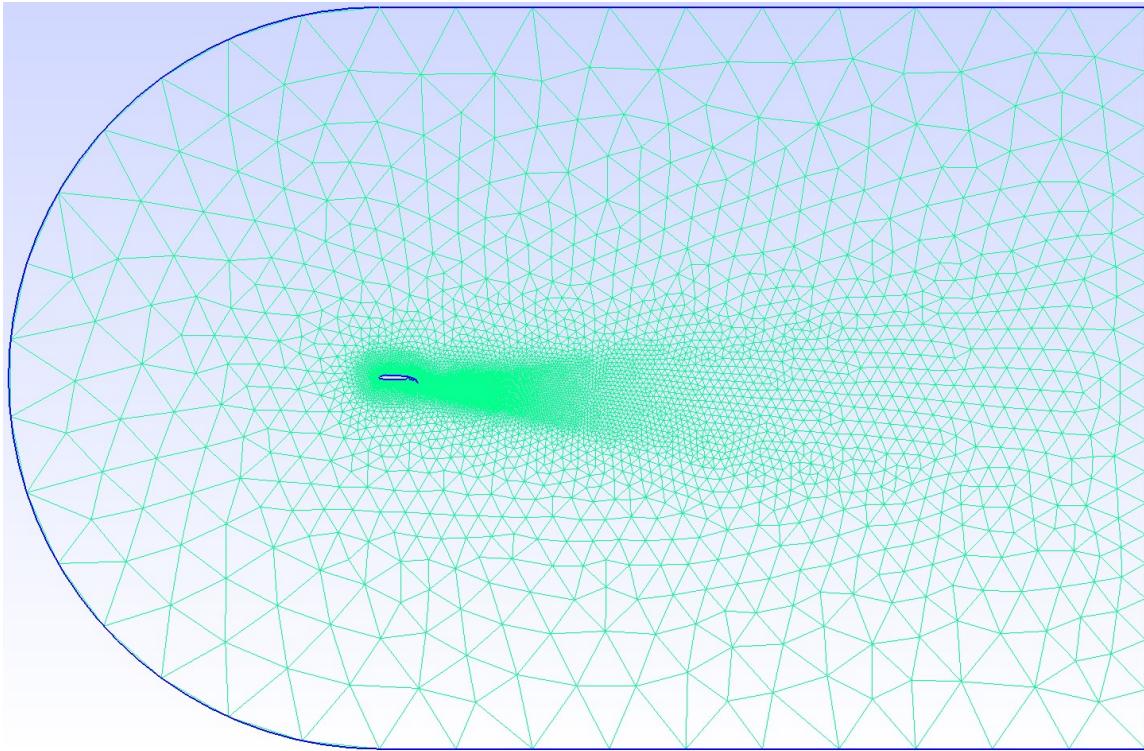
Πλέγμα γεωμετρίας NACA 23012 με slotted flap και plain flap (πλήρης όψη)



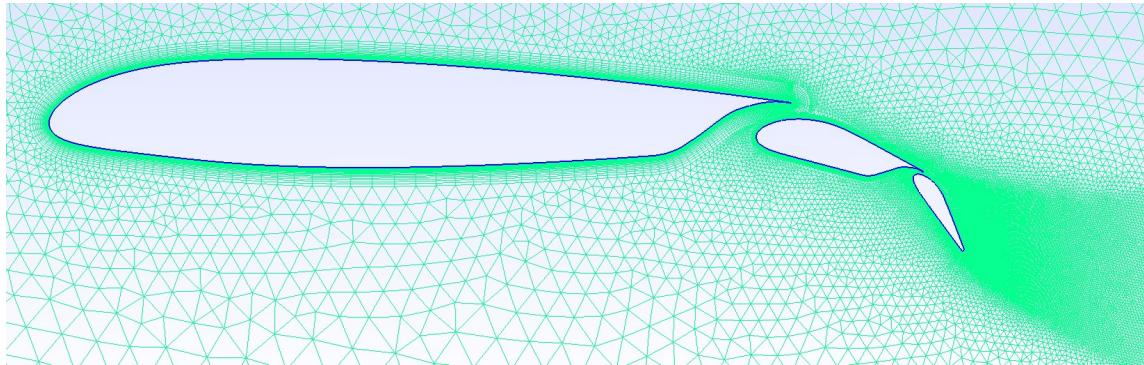
Πλέγμα γεωμετρίας NACA 23012 με slotted flap και plain flap (λεπτομέρεια)



Γεωμετρία NACA 23012 με slotted flap και auxiliary flap



Πλέγμα γεωμετρίας NACA 23012 με slotted flap και auxiliary flap (πλήρης όψη)

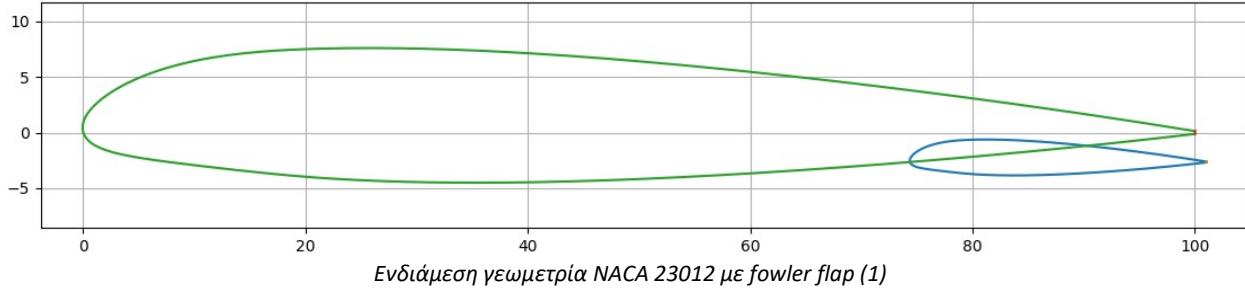


Πλέγμα γεωμετρίας NACA 23012 με slotted flap και auxiliary flap (λεπτομέρεια)

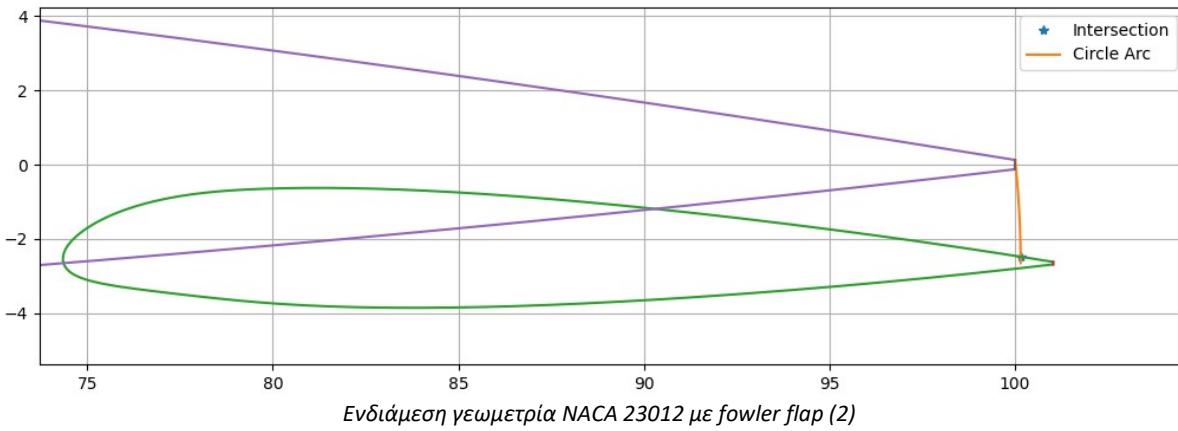
### 3.2.3 Παράδειγμα 3 - Αεροτομή NACA 23012 με Fowler Flap

Ομοίως με το προηγούμενο παράδειγμα και αυτό στηρίζεται σε μια γεωμετρία που ήδη υπάρχει στη βιβλιογραφία. Όμως, στη συγκεκριμένη περίπτωση, αντί οι γεωμετρίες να δίνονται άμεσα μέσω συντεταγμένων, αυτές πρέπει να εξαχθούν με κατάλληλες μετατροπές. Καθώς και η κύρια αεροτομή και το πτερύγιο φυγής βασίζονται στην αεροτομή NACA 23012, οι συντεταγμένες αυτής είναι τα μόνα δεδομένα που εισάγονται. Τα βήματα του κώδικα περιγράφονται παρακάτω με την βοήθεια εικόνων.

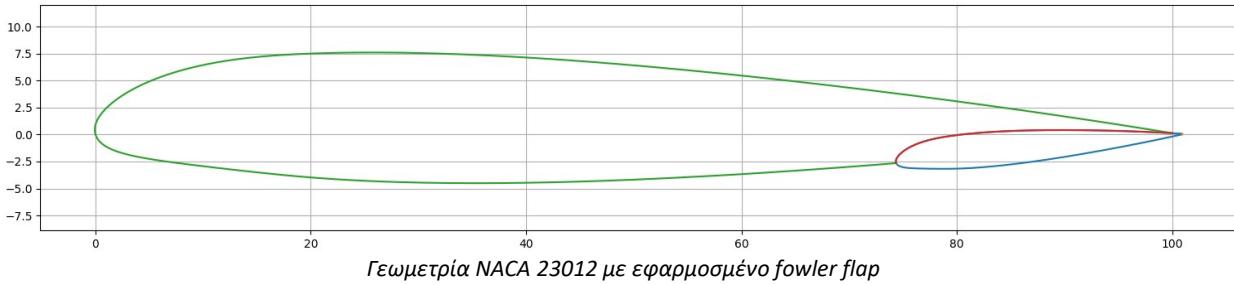
- 1) Αρχικά υπολογίζεται το σημείο της ακμής προσβολής του πτερυγίου φυγής, πάνω στην αεροτομή σύμφωνα με τη βιβλιογραφία. Έπειτα η αεροτομή μετατοπίζεται σε εκείνο το σημείο και σμικρύνεται στο κατάλληλο μέγεθος.



- 2) Για να βρεθεί το σημείο της ακμής φυγής που εφαρμόζει στο πτερύγιο φυγής, δημιουργείται ένα τόξο κύκλου από την ακμή φυγής εώς και το πτερύγιο, με κέντρο την ακμή προσβολής του πτερυγίου, όπως φαίνεται παρακάτω. Το σημείο τομής του τόξου και του πτερυγίου θα είναι το σημείο στο οποίο η ακμή φυγής της κύριας αεροτομής εφαρμόζει στο πτερύγιο.

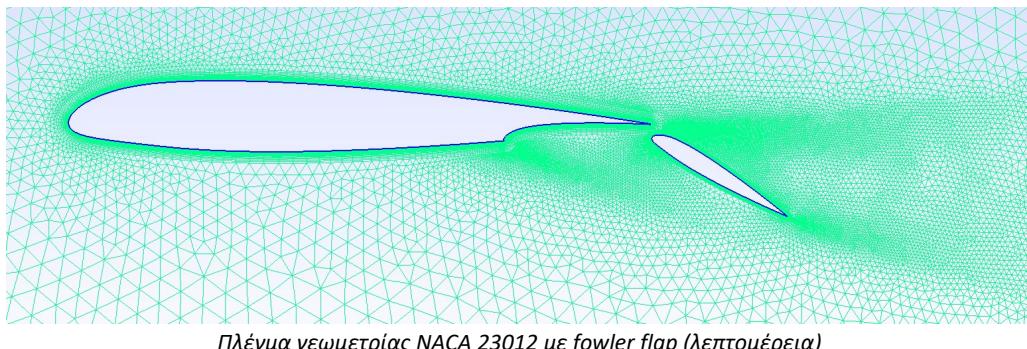
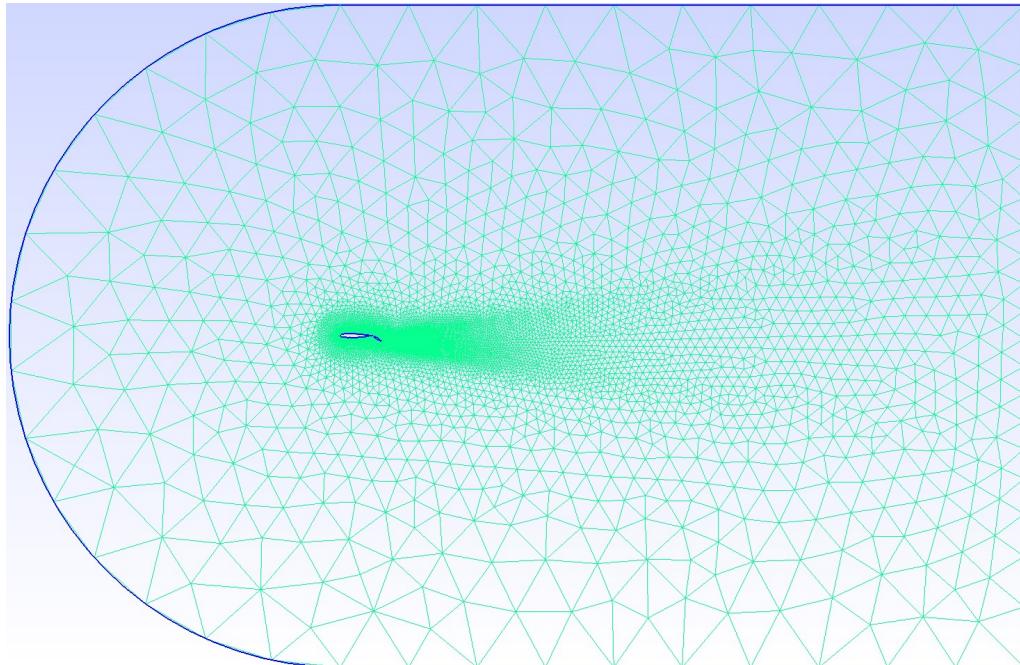
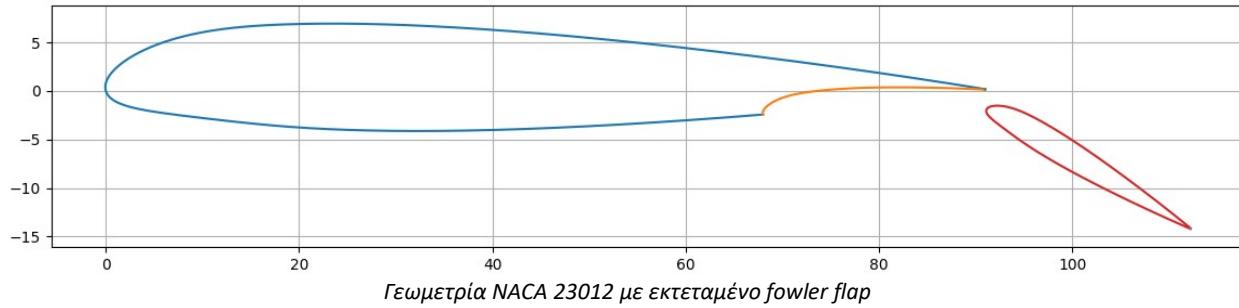


- 3) Έχοντας τις πληροφορίες του συγκεκριμένου σημείου μπορεί να δημιουργηθεί το slot της κύριας αεροτομής. Συγκεκριμένα, κόβεται η κύρια καμπύλη του πτερυγίου από εκείνο το σημείο εώς και την ακμή προσβολής, και περιστρέφεται κατάλληλα ώστε να εφαρμόσει στην ακμή φυγής της κύριας αεροτομής. Παράλληλα κόβεται η κύρια καμπύλη της αεροτομής στο σημείο τομής αυτής και της καμπύλης του πτερυγίου. Έπειτα, από τις δύο καμπύλες ορίζεται η μορφοποιημένη αεροτομή και έχουμε τη παρακάτω γεωμετρία.



- 4) Τελικό βήμα στη διαμόρφωση της γεωμετρίας είναι η μετατόπιση και η περιστροφή του πτερυγίου φυγής στη θέση που ορίζει η βιβλιογραφία.

Η παραγωγή του πλέγματος είναι ακριβώς ίδια με τα προηγούμενα παραδείγματα. Τα πλέγματα φαίνονται παρακάτω.



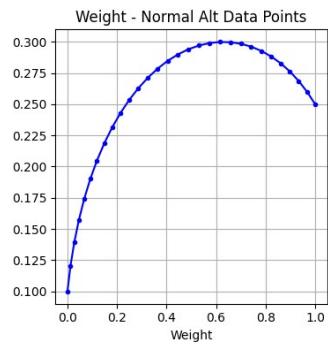
### Σχόλια:

Η συγκεκριμένη γεωμετρία μπορεί να δείξει την προσαρμοστικότητα του αλγορίθμου παραγωγής πλέγματος, ο οποίος καταφέρνει να διαχειρίζεται γεωμετρίες με ακμές ικανοποιητικά.

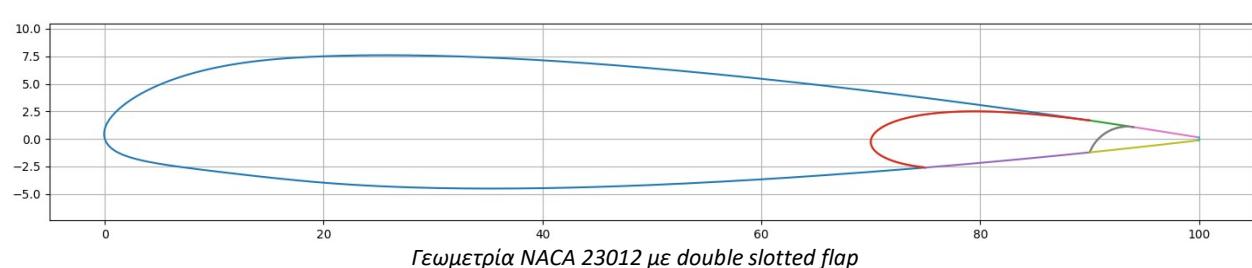
### 3.2.4 Παράδειγμα 4 - Ελεύθερη Διαμόρφωση Αεροτομής NACA 23012 με double slotted flap και actuating slat

Σε όλα τα προηγούμενα παραδειγμάτα η αναζητούμενη γεωμετρία είναι ξεκάθαρα ορισμένη, με αποτέλεσμα να γίνεται άμεση χρήση κυρίως των βασικών γεωμετρικών συναρτήσεων εντός του geo. Το συγκεκριμένο παράδειγμα έρχεται σε αντίθεση με αυτά, καθώς εδώ γίνεται η χρήση των μεθόδων της κλασης Airfoil για την γρήγορη παραγωγή της γεωμετρίας στην οποία μελετήθηκε ο αλγόριθμος παραγωγής πλέγματος. Στο συγκεκριμένο αρχείο ακολουθείται η παρακάτω σειρά βημάτων, τα οποία επεξηγούνται με τη βοήθεια εικόνων.

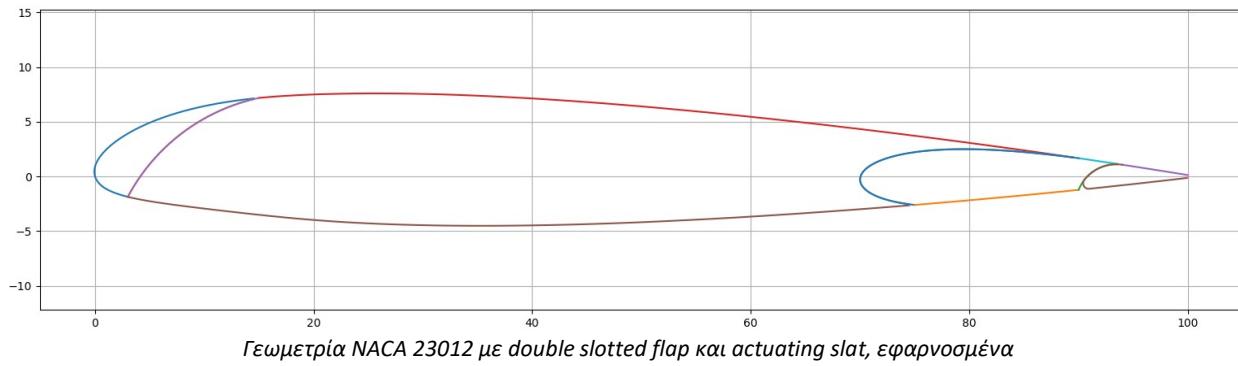
- 1) Αρχικά, εισάγονται τα δεδομένα της αεροτομής.
- 2) Έπειτα, παράγονται δεδομένα βάρους - κανονικοποιημένου ύψους για τη συνάρτηση `crvforge.shortcut` με τη βοήθεια μιας καμπύλης Bezier.
- 3) Εφαρμόζεται η συνάρτηση `crvforge.shortcut` στο προφίλ της αεροτομής και έτσι παράγεται μια καμπύλη που θα χρησιμοποιηθεί για την δημιουργία ενός slotted flap. Σημειώνεται ότι τα κανονικοποιημένα ύψη που χρησιμοποιούνται στα άκρα των δεδομένων για την `crvforge.shortcut` πρέπει να ταιριάζουν με τις τετμημένες που θα εισαχθούν στη συνάρτηση `slot`.
- 4) Εισάγεται η καμπύλη που παράχθεικε και εξάγεται η παρακάτω γεωμετρία.



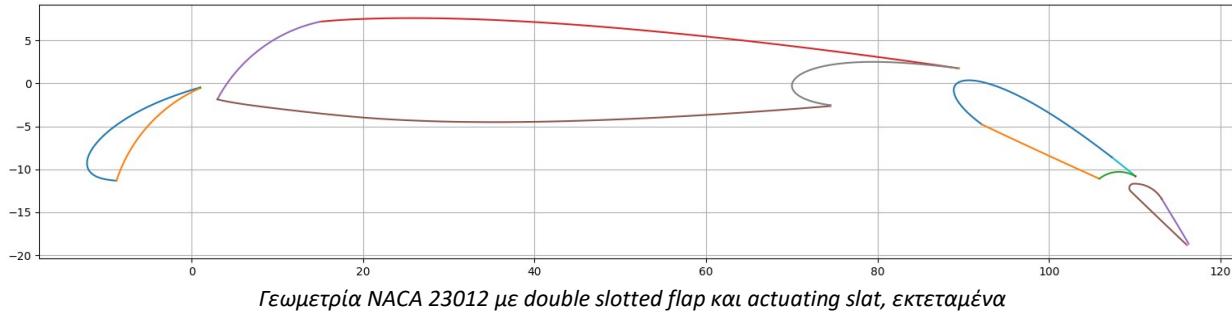
- 5) Στη συνέχεια εφαρμόζεται η συνάρτηση `slot` στο πτερύγιο flap με τη συνάρτηση `crvforge.arcross`. Οπότε παράγεται η γεωμετρία double slotted flap.



- 6) Τελευταίο πτερύγιο που θα παραχθεί θα είναι αυτό της ακμής προσβολής, με εφαρμογή της `slot` στο κύριο σώμα της αεροτομής, ξανά με την `crvforge.arcross`.
- 7) Επίσης, η ακμή προσβολής του δεύτερου πτερυγίου φυγής είναι ιδιαίτερα αιχμηρή, οπότε στρογγυλοποιείται με την `fillet`. Ακόμα, κόβονται οι πολύ αιχμηρές ακμές φυγής για καλύτερη πιστότητα στη πραγματικότητα καθώς και καλύτερη ευστάθεια στην επίλυση πλέγματος. Οπότε η γεωμετρία γίνεται:



- 8) Ακολουθούν οι περιστροφές και οι μετατοπίσεις των στοιχείων στη επιθυμητή τους θέση.



- 9) Τέλος, γίνεται η ρύθμιση των παραμέτρων ενός Mesh object το οποίο χρησιμοποιείται για την παραγωγή του πλέγματος που παρουσιάστηκε στην επισκόπηση αλγορίθμου παραγωγής πλέγματος.

### Σχόλια:

Όπως φαίνεται, η παραγωγή γεωμετρίας υψηλής άντωσης και υπολογιστικού πλέγματος για αυτή, μπορεί να γίνει ξαφνιαστικά εύκολα. Πιο συγκεκριμένα, η διαμόρφωση τη γεωμετρίας πήρε μόλις 16 γραμμές κώδικα, η εκτροπή των στοιχείων χρειάστηκε 8 γραμμές κώδικα και στη ρύθμιση και την παραγωγή πλέγματος αφιερώθηκαν μόνο 7 γραμμές. Η διευκόλυνση που παρέχει η βιβλιοθήκη είναι ξεκάθαρη. Άξιο αναφοράς είναι και το ότι η πλήρης παραγωγή της γεωμετρίας διήρκησε 8.7 s ενώ η δημιουργία του πλέγματος μόλις 6.4 s (πλέγμα ~155 χιλ. στοιχείων).

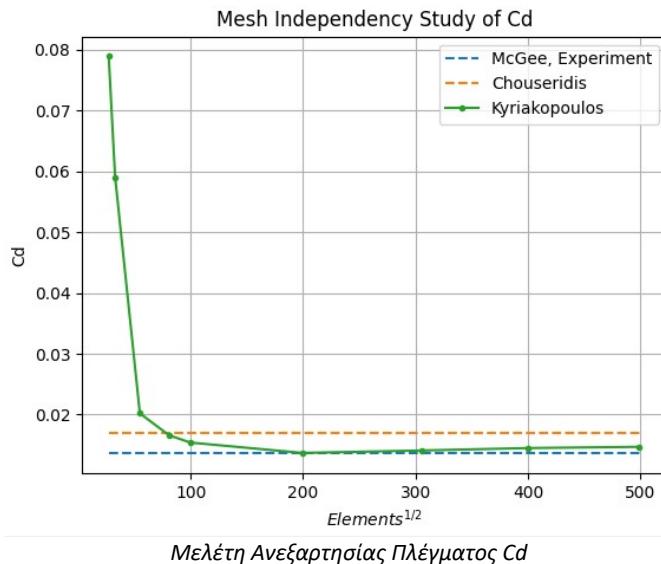
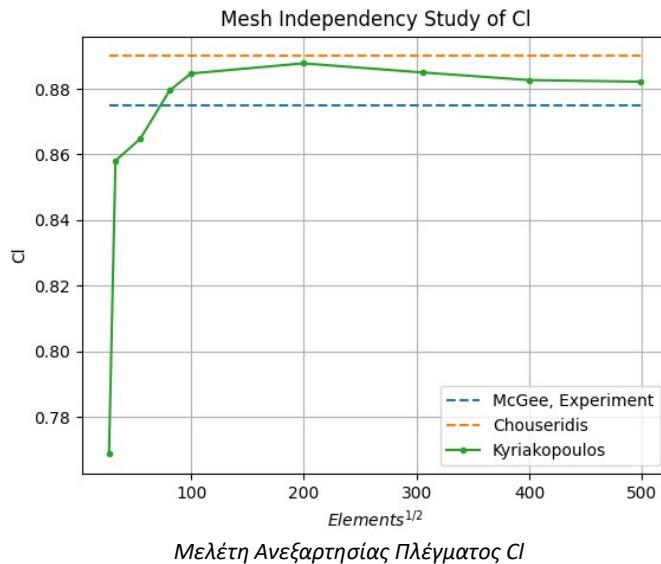
### 3.3 Επαλήθευση

Όπως φάνηκε, ο αλγόριθμος της βιβλιοθήκης καταφέρνει να παράγει φαινομενικά πετυχημένα πλέγματα. Άλλα ο οπτικός έλεγχος δεν επαρκεί. Η πλειοψηφία των προηγουμένων παραδειγμάτων επιλέχθηκε όχι μόνο για επίδειξη χρήσης της βιβλιοθήκης, αλλά και καθώς υπάρχουν δεδομένα πειραμάτων και προσομοιώσεων για τις συγκεκριμένες γεωμετρίες. Οπότε, τα παραγόμενα πλέγματα μπορούν να επιλυθούν και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά της βιβλιογραφίας. Τα παραδείγματα τα οποία θα εξετασθούν είναι το 1, το 2 και το 3, και θα επιλυθούν με το λογισμικό Ansys - Fluent Student 2025. Σε όλες τις επιλύσεις επιλέγεται Pressure Based Solver καθώς οι ταχύτητες είναι αρκετά χαμηλές ώστε η ροή να θεωρηθεί ασυμπίεστη.

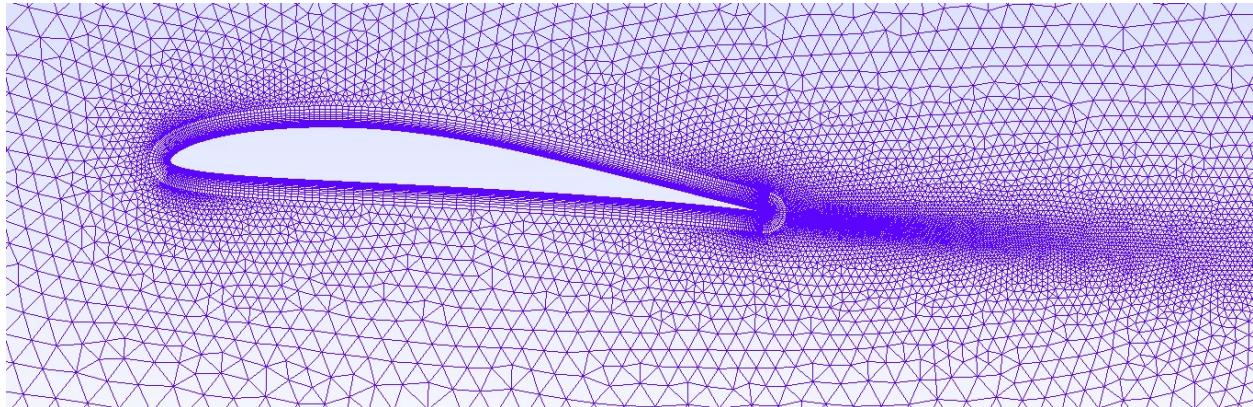
### 3.3.1 Επίλυση Πλέγματος για Αεροτομή Eppler-387

Η συγκεκριμένη περίπτωση έχει πρόσθετο ενδιαφέρον, καθώς εκτός από πειραματικά δεδομένα υπάρχουν και δεδομένα προσομοίωσης από τον αλγόριθμο του Φ. Χουσαιρίδη [15]. Οπότε, μπορεί να γίνει άμεση σύγκριση των αποτελεσμάτων αν ακολουθηθούν τα ίδια βήματα επίλυσης. Έτσι, επιλέγεται να ακολουθηθεί πιστά η διαδικασία επίλυσης που περιγράφεται στη σχετική βιβλιογραφία. Το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιείται είναι το k-omega SST με διορθώσεις χαμηλού Re, η μέθοδος επίλυσης είναι η SIMPLE με μέθοδο διακριτοποίησης Green-Gauss Cell-Based. Συνεχίζοντας στα βήματα της αναφοράς η πυκνότητα στο άπειρο είναι  $1.225 \text{ kg} / \text{m}^3$ , με ταχύτητα ροής απείρου  $2.92 \text{ m} / \text{s}$ . Η χορδή είναι  $1 \text{ m}$ , ο λόγος ιξώδους και το ποσοστό τύρβης αδιατάραχης ροής είναι  $0.04$  και  $0.08165\%$  αντίστοιχα.

Πριν γίνει έρευνα α-scan (έρευνα αεροδυναμικών επιδόσεων σε ένα πλήθος γωνιών προσβολής) γίνεται μια μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος. Η αεροτομή τοποθετήθηκε σε γωνία προσβολής  $5^\circ$ , δηλαδή στο μέσο του εύρους γωνιών προσβολής που θα μελετηθούν στην επόμενη προσομοίωση. Παράχθηκαν συνολικά 9 πλέγματα με αριθμούς στοιχείων: 739, 1084, 3015, 6543, 9956, 39816, 93440, 159812 και 248016. Τα αποτελέσματα των αεροδυναμικών συντελεστών για κάθε πλέγμα συγκρίνονται με τα πειραματικά δεδομένα του McGee, Walker και Millard καθώς και με τα αποτελέσματα προσομοίωσης του Χουσαιρίδη. Οι συγκλίσεις  $C_l$  και  $C_d$  παρουσιάζονται σε διάγραμμα παρακάτω.



Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα, ο συντελεστής άντωσης συγκλίνει από τα 10 χιλ. στοιχεία ενώ ο συντελεστής οπισθέλκουσας συγκλίνει κάπου ανάμεσα στα 10 χιλ. - 40 χιλ. στοιχεία. Οπότε οι παράμετροι που παρήγαγαν το πλέγμα 40 χιλ. στοιχείων επαναχρησιμοποιούνται για να παράξουν ένα πλέγμα για ένα εύρος γωνιών προσβολής πλέγματος  $-7^\circ$  με  $7^\circ$ , με περίπου 45 χιλ. στοιχεία, το οποίο απεικονίζεται.



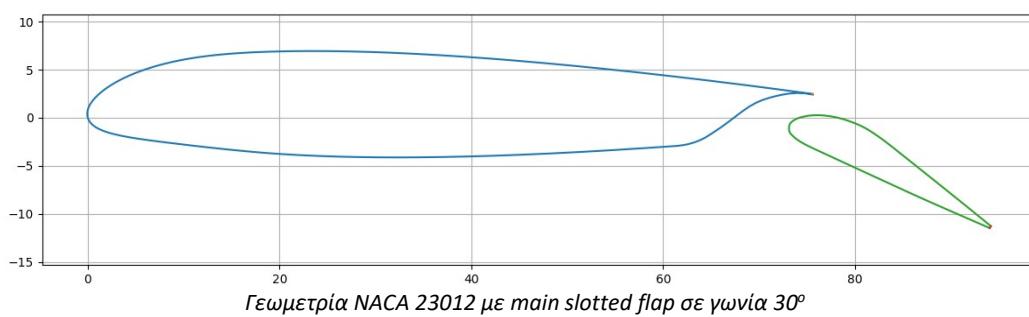
Πλέγμα γύρω από αεροτομή Eppler-387

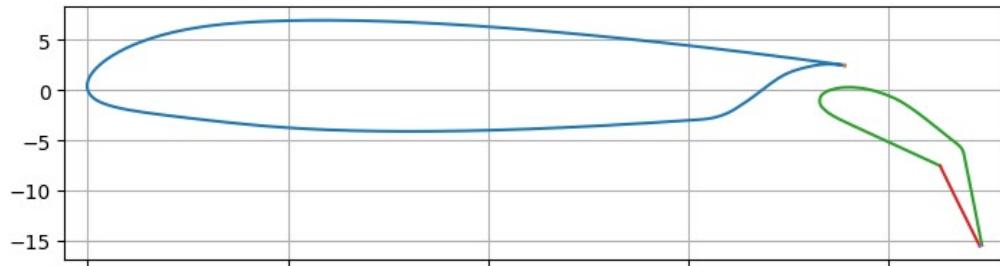
### 3.3.2 Επίλυση Πλέγματος για Αεροτομή NACA 23012 με Slotted Flap και Auxiliary Flap

Το ενδιαφέρον της συγκεκριμένης περίπτωσης είναι, προφανώς, ο πληθυντικός αριθμός των στοιχείων της αεροτομής. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα χρησιμοποιείται μέθοδος επίλυσης Coupled λόγω της ταχύτητας σύγκλισης της. Το μήκος χορδής είναι 0.9144 m, ενώ η ταχύτητα ελεύθερης ροής είναι 35.762 m / s. Για την μοντελοποίηση τύρβης χρησιμοποιείται το μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης Spalart-Allmaras. Οι οριακές συνθήκες τύρβης πρέπει να υπολογιστούν από σχετικά δεδομένα των πειραμάτων της βιβλιογραφίας. Σύμφωνα με τις μετρήσεις της αεροσήραγγας των πειραμάτων, αυτή παράγει λόγο τύρβης (αισθητός αριθμός Re προς πραγματικό) ίσο με 1.6. Από διάγραμμα των J. B. Barlow, W. H. Rae Jr. και A. Pope [24] αυτός ο λόγος αντιστοιχεί σε ένταση τύρβης 0.75%. Παραμένει μόνο να βρεθεί η υδραυλική διάμετρος (dh) της αεροσήραγγας, η οποία υπολογίζεται ίση με 2.51 m όπως φαίνεται παρακάτω.

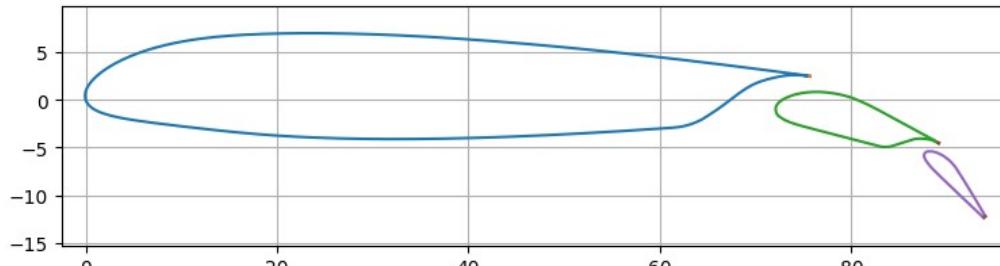
$$dh = 4 \frac{\text{cross-sectional area}}{\text{wetted perimeter}}$$

Καθώς οι επιλύσεις γίνονται για τον έλεγχο της ικανότητας των πλεγμάτων να συλλαμβάνουν τα φαινόμενα διαφόρων γεωμετριών, δε λύνεται κάθε υποπερίπτωση που μπορεί να παραχθεί από το δεύτερο παράδειγμα, αλλά μόνο τέσσερις. Η απλούστερη αφορά την αεροτομή με μόνο το single slotted main flap σε γωνία εκτροπής  $30^\circ$ . Η επόμενη έχει την αεροτομή με το slotted main flap σε γωνία  $30^\circ$  και πρόσθετο plain flap σε γωνία  $40^\circ$ . Οι τελευταίες δύο είναι όμοιες, και επρόκειτο για την αεροτομή με double slotted flap (main flap και auxiliary). Η πρώτη από τις δύο έχει γωνίες εκτροπής των main και auxiliary flap  $20^\circ$  και  $30^\circ$  αντίστοιχα ενώ η δεύτερη έχει  $40^\circ$  και  $30^\circ$ . Όλες οι γεωμετρίες παρουσιάζονται παρακάτω.

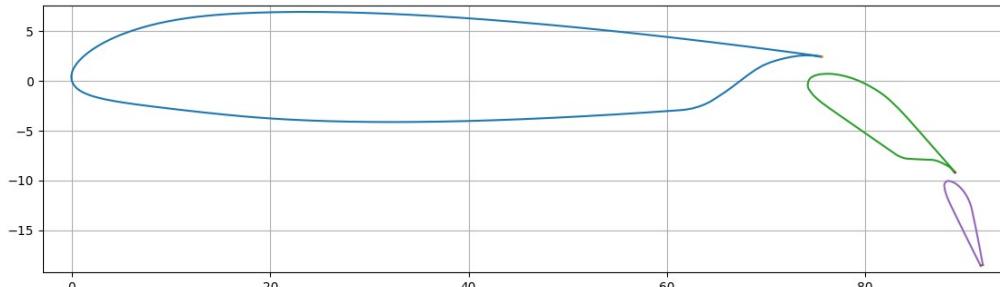




Γεωμετρία NACA 23012 με main slotted flap και plain flap σε γωνίες  $30^\circ$  και  $40^\circ$  αντίστοιχα



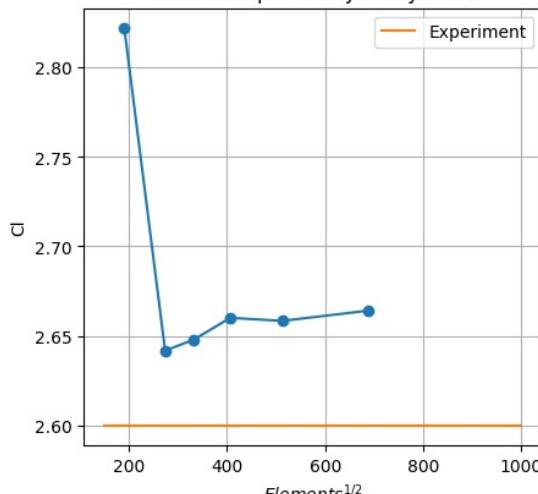
Γεωμετρία NACA 23012 με main slotted flap και auxiliary flap σε γωνίες  $20^\circ$  και  $30^\circ$  αντίστοιχα



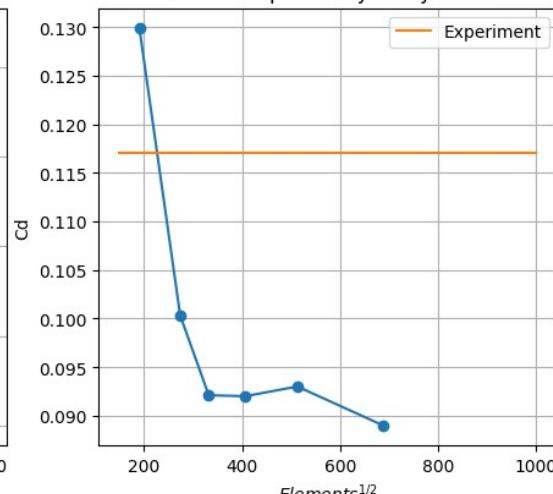
Γεωμετρία NACA 23012 με main slotted flap και auxiliary flap σε γωνίες  $40^\circ$  και  $30^\circ$  αντίστοιχα

Και στο συγκεκριμένο πρόβλημα έγινε έρευνα ανεξαρτησίας πλέγματος, η οποία όμως έγινε μόνο για την τελευταία υποπερίπτωση, καθώς κρίθηκε η πιο ακραία. Σημειώνεται ότι η αεροτομή τοποθετήθηκε σε γωνία προσβολής  $3^\circ$ . Τα αποτελέσματα κάθε ανάλυσης συγκρίνονται με τα πειραματικά της αντίστοιχης γωνίας.

Mesh independency study of Cl

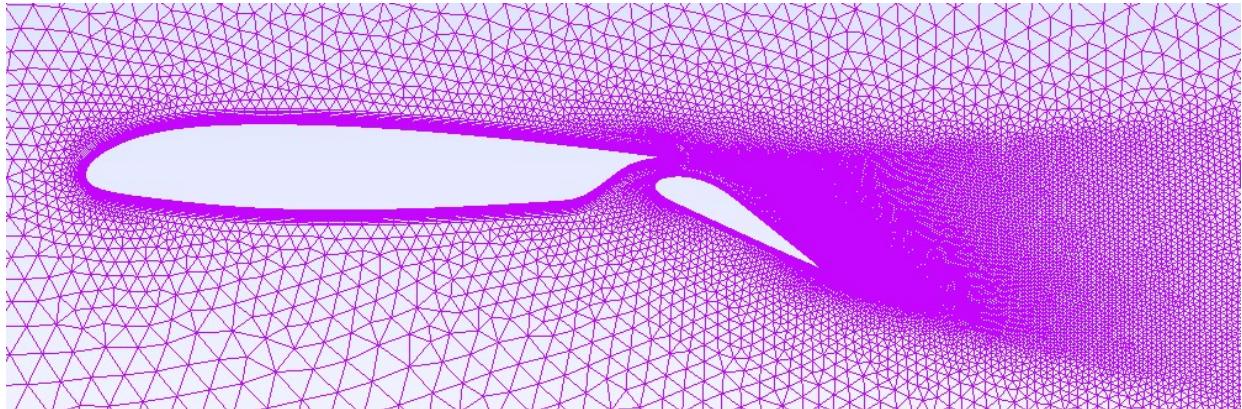


Mesh independency study of Cd

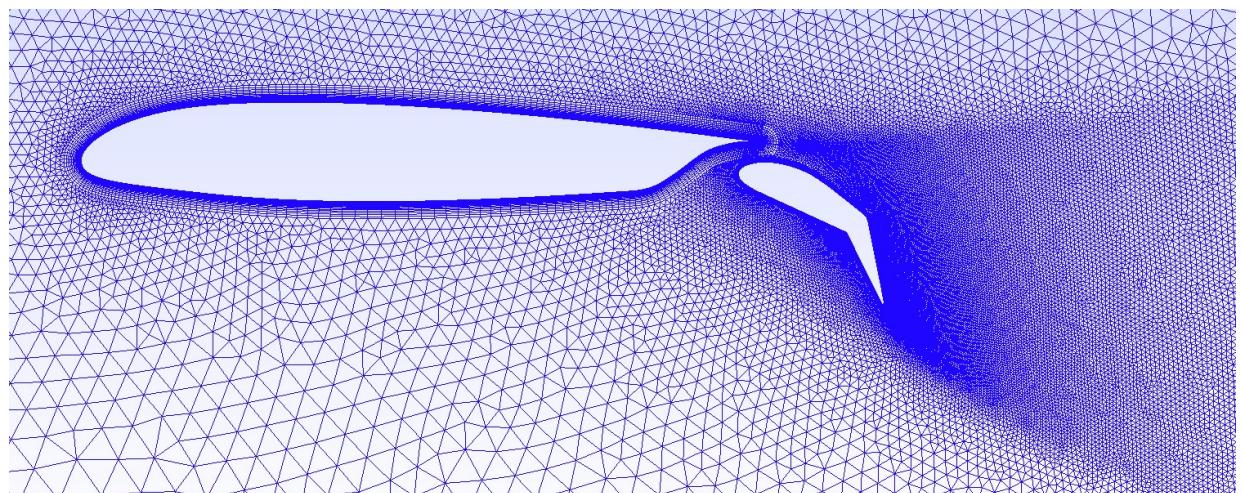


Μελέτη Ανεξαρτησίας Πλέγματος Cl (αριστερά) και Cd (δεξιά)

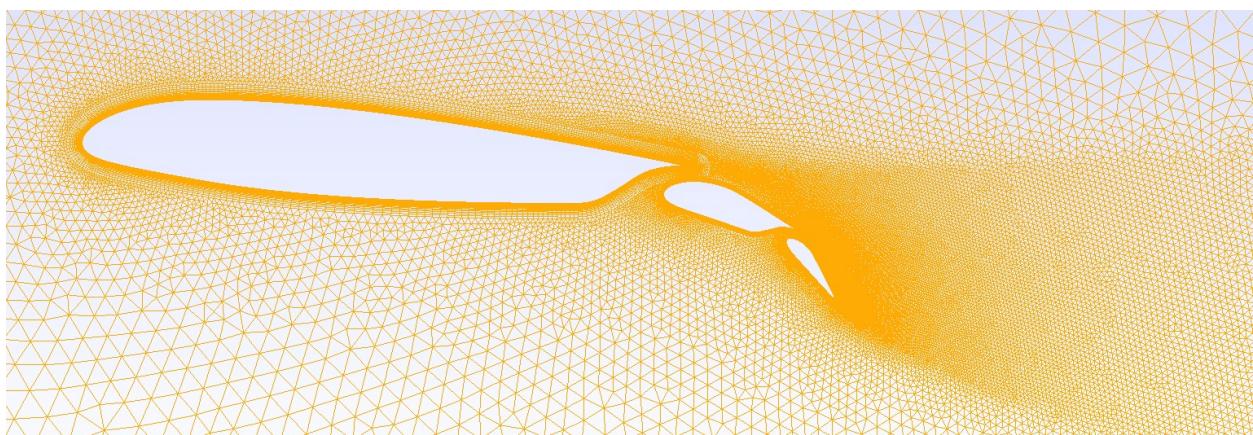
Έτσι, για την έρευνα α-scan επιλέγεται ένα πλέγμα με περίπου 110 χιλ. στοιχεία. Οι ίδιες παράμετροι χρησιμοποιήθηκαν και για την παραγωγή του πλέγματος της γεωμετρίας μόνο με main flap καθώς και με main flap με πρόσθετο plain flap, οδηγώντας σε πλέγματα 78 χιλ. στοιχείων και 110 χιλ. στοιχείων αντίστοιχα. Τα πλέγματα φαίνονται παρακάτω.



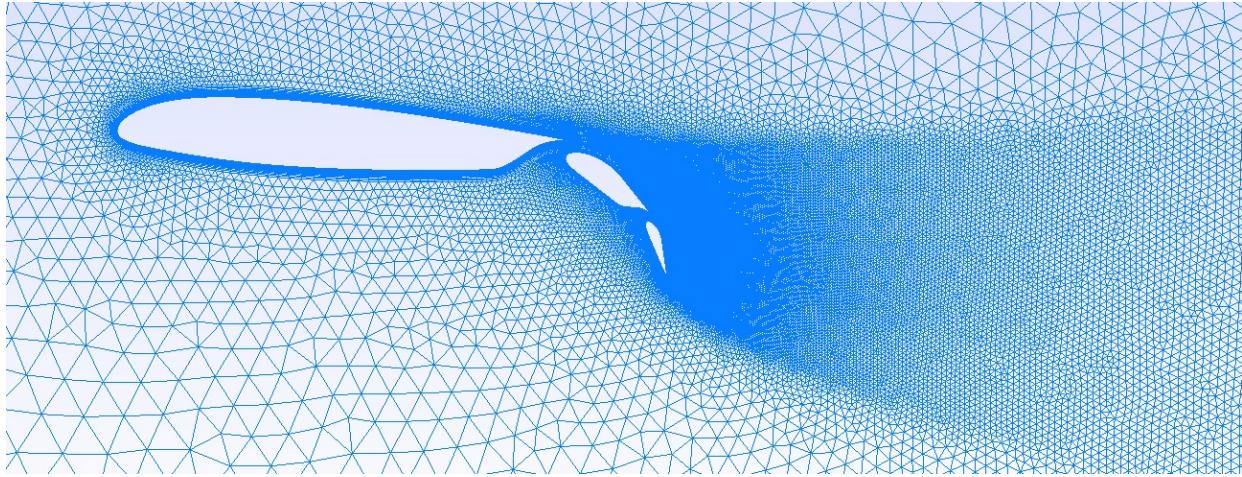
Πλέγμα γύρω από γεωμετρία NACA 23012 με main slotted flap σε γωνία  $30^\circ$



Πλέγμα γύρω από γεωμετρία NACA 23012 με slotted flap και plain flap σε γωνίες  $30^\circ$  και  $40^\circ$  αντίστοιχα



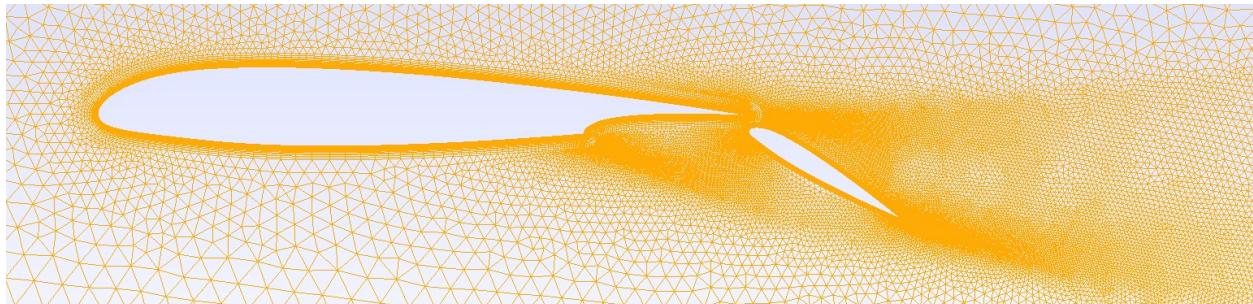
Πλέγμα γύρω από γεωμετρία NACA 23012 με main slotted flap και auxiliary flap σε γωνίες  $20^\circ$  και  $30^\circ$  αντίστοιχα



Πλέγμα γύρω από γεωμετρία NACA 23012 με *main slotted flap* και *auxiliary flap* σε γωνίες  $40^\circ$  και  $30^\circ$  αντίστοιχα

### 3.3.3 Επίλυση Πλέγματος για Αεροτομή NACA 23012 με Fowler Flap

Η διαφορά αυτού του παραδείγματος με τα προηγούμενα βρίσκεται στην πρόσθετη αιχμηρή ακμή στη γεωμετρία slot του κύριου σώματος της τομής. Πάραυτα, καθώς οι οριακές συνθήκες και το χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος είναι ολόδια, επιλέγεται να χρησιμοποιηθούν οι ίδιοι συντελεστές με το προηγούμενο παράδειγμα. Και σε αυτή τη γεωμετρία επιλέγεται να λυθεί μόνο μια υποπερίπτωση, με γωνία εκτροπής πτερυγίου  $30^\circ$ . Έτσι παράγεται ένα πλέγμα 93 χιλ. στοιχείων το οποίο απεικονίζεται.



Πλέγμα γύρω από γεωμετρία NACA 23012 με *fowler flap*

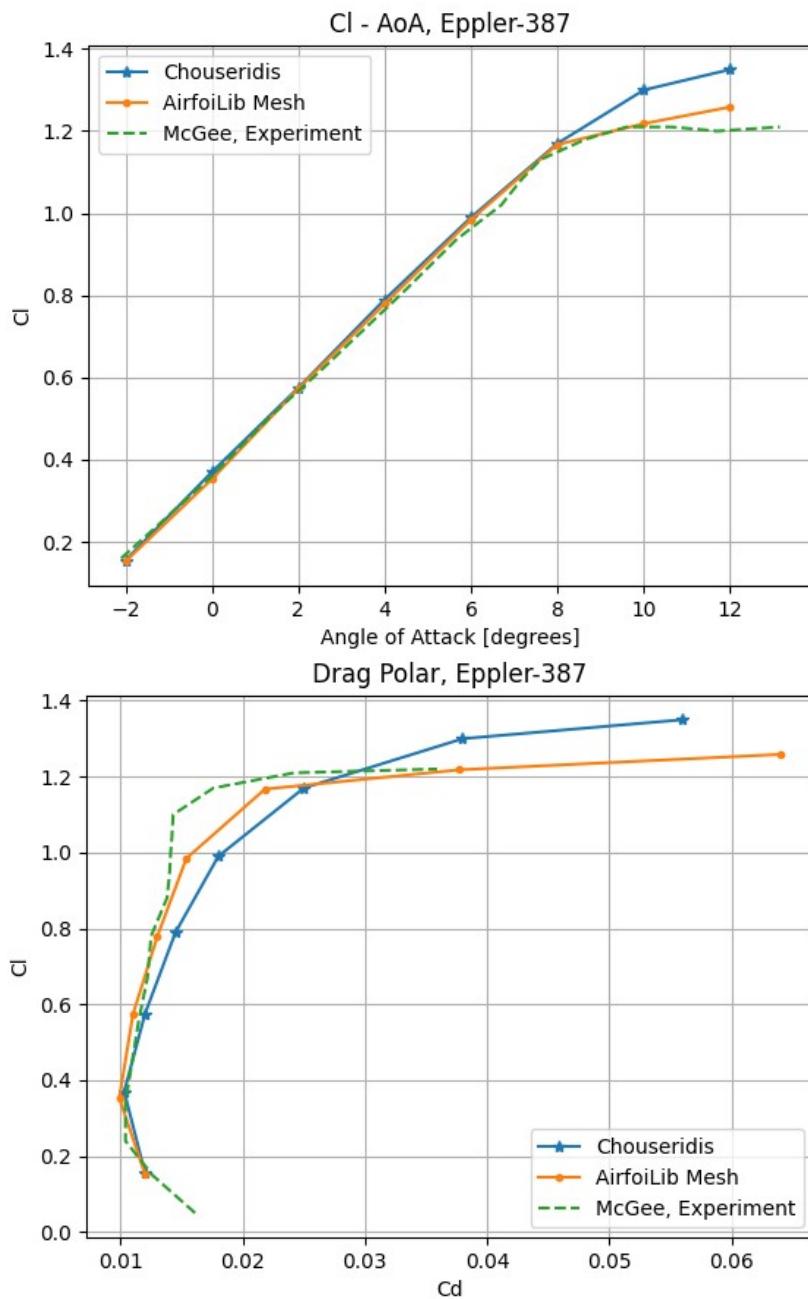
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ερευνών  $\alpha$ -scan που έγιναν και γίνονται σχετικές συγκρίσεις και σχόλια.

#### 4.1 Αεροτομή Eppler-387

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα συντελεστών άντωσης και οπισθέλκουσας για ένα εύρος γωνιών προσβολής, σε διαγράμματα καμπύλης συντελεστή άντωσης - γωνίας προσβολής και πολικής οπισθέλκουσας.

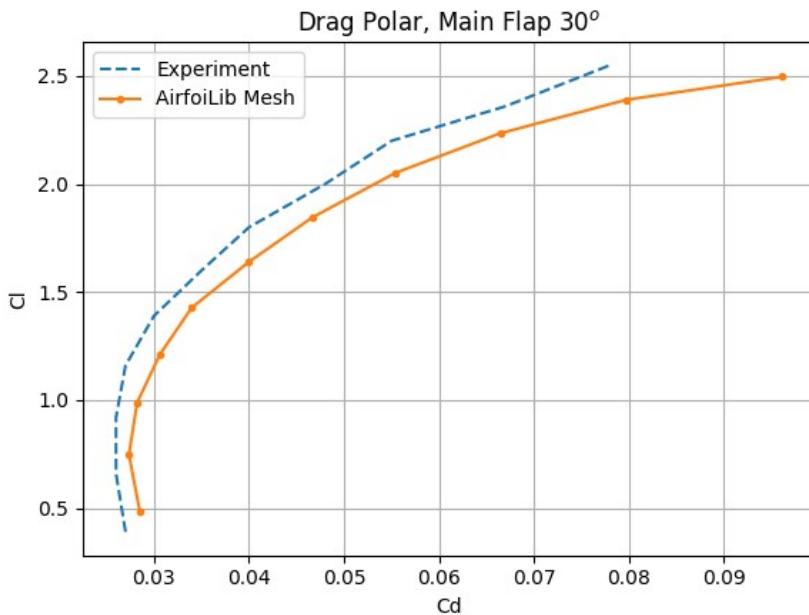
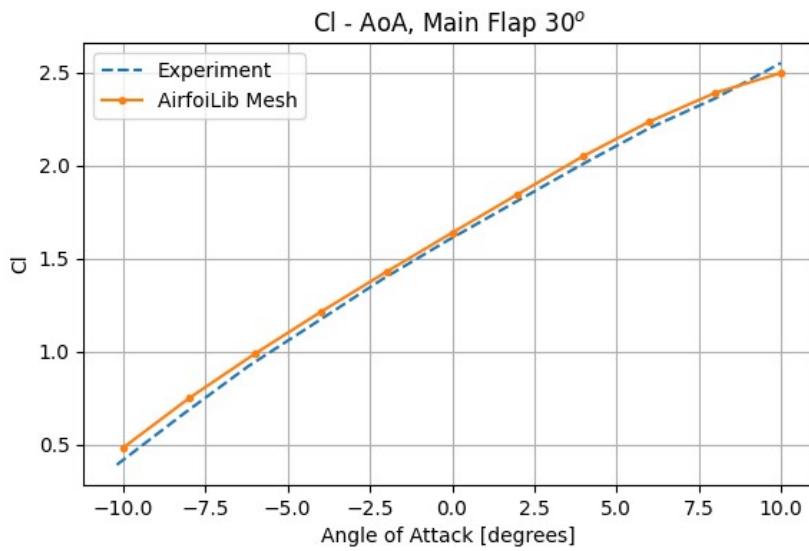


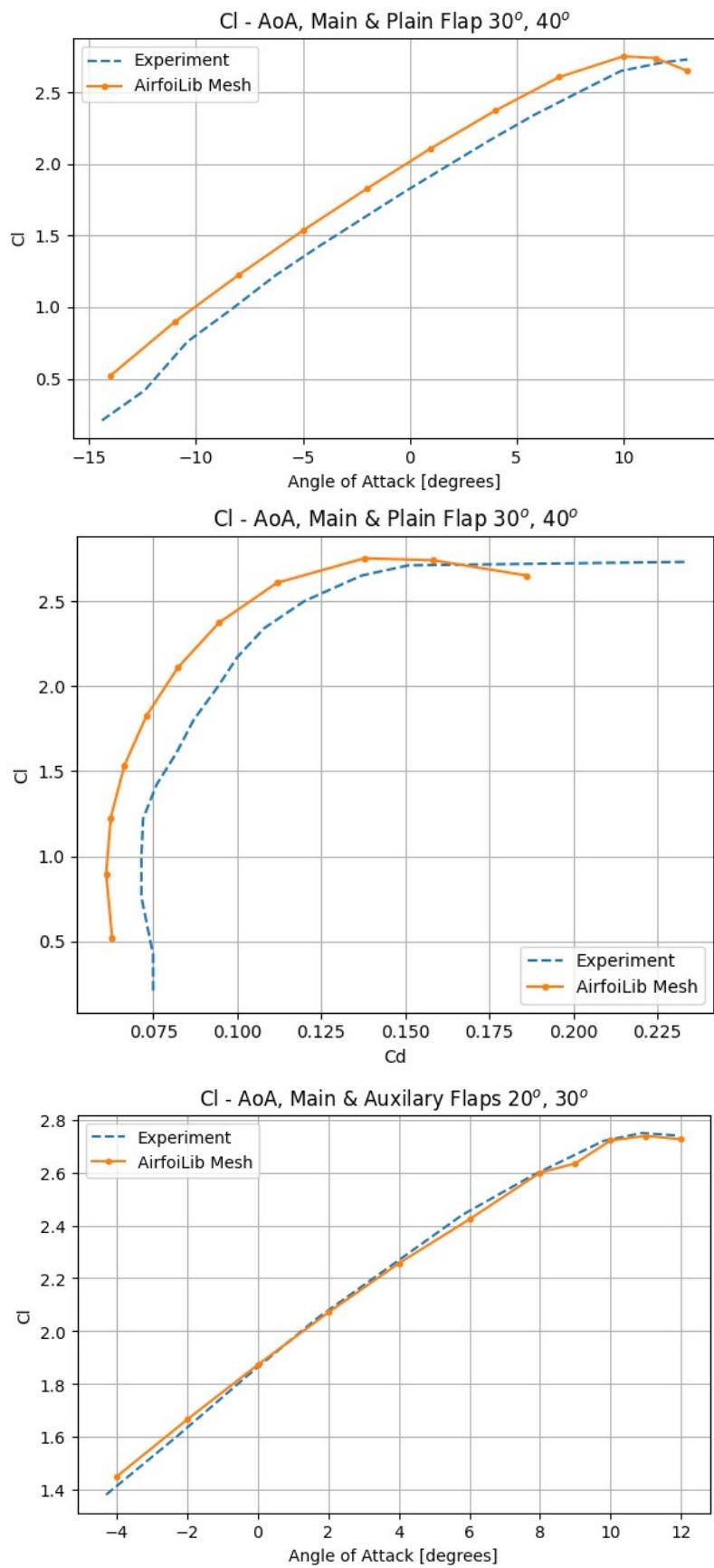
### Σχόλια:

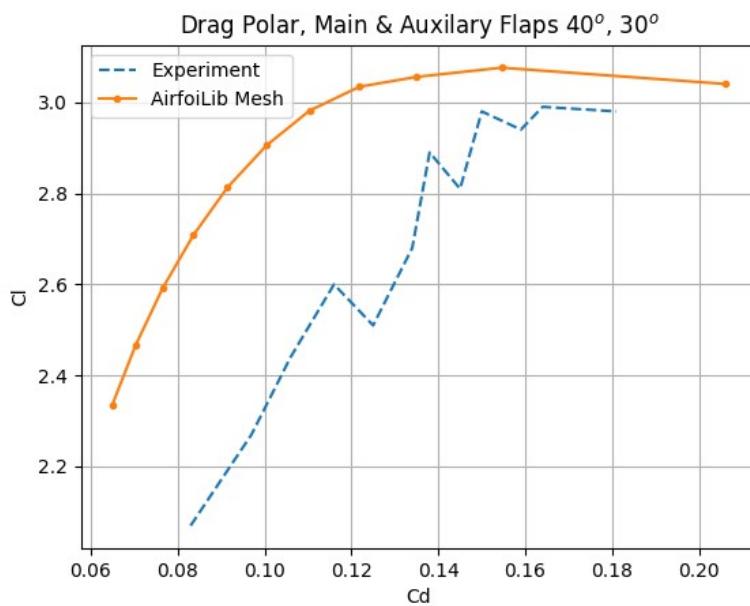
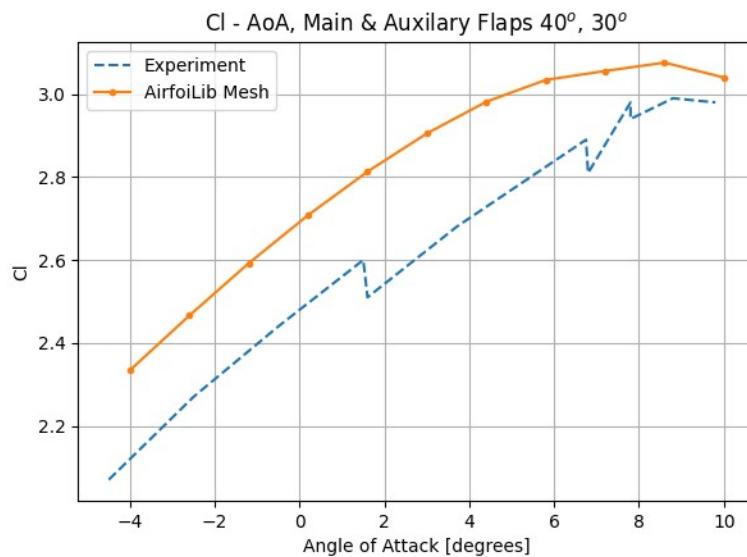
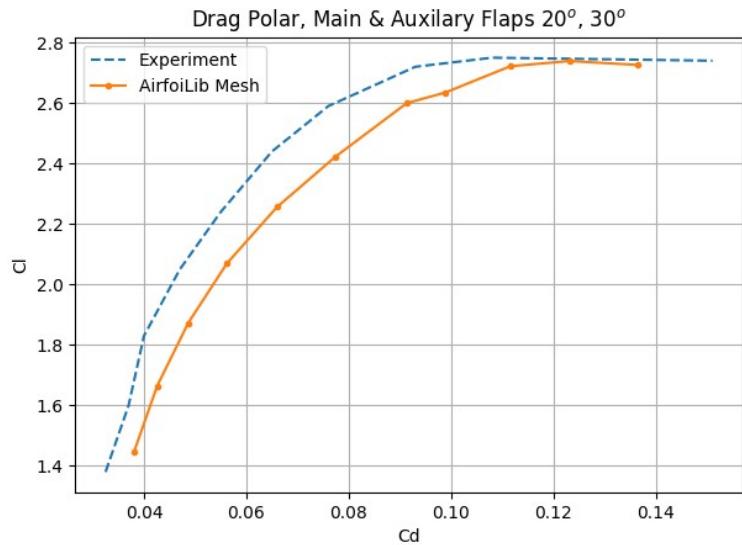
Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα, υπάρχει μια εξαιρετικά καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα και ειδικά για αποτελέσματα προσομοίωσης, τα σφάλμα είναι μικρό. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρείται μια πολύ καλή συμφωνία σε όλο το εύρος γωνιών προσβολής, εκτός από το άνω άκρο του, κοντά στην απώλεια στήριξης. Εκεί γίνεται μια μικρή υπερεκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών το οποίο είναι σύνηθες φαινόμενο για υπολογιστικές αναλύσεις, καθώς η επίδραση των τυρβώδων φαινομένων γίνεται όλο και πιο δύσκολη στην πρόβλεψη.

## 4.2 Αεροτομή NACA 23012 με Slotted Flap και Auxiliary Flap

Ομοίως με πριν, τα αποτελέσματα υπολογισμού συντελεστών άντωσης και οπισθέλκουσας για ένα εύρος γωνιών προσβολής, απεικονίζονται σε διαγράμματα καμπύλης συντελεστή άντωσης - γωνίας προσβολής και πολικής οπισθέλκουσας. Αρχικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τη γεωμετρία με μόνο main flap κι έπειτα ακολουθούν τα αποτελέσματα της γεωμετρίας με main και πρόσθετο plain flap, με τις γεωμετρίες των double slotted flap τελευταίες.







### **Σχόλια:**

Για τη γεωμετρία με μόνο main flap παρατηρείται μια ιδιαίτερα επιτυχημένη πρόβλεψη του συντελεστή άντωσης, σε όλο το εύρος γωνιών που εξετάσθηκαν, με μικρές ποιοτικές διαφορές στις μεγαλύτερες γωνίες προσβολής. Ομοιώς, παρατηρείται μια καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα και στην drag polar, όπου όμως υπάρχει μια υπερεκτίμηση του συντελεστή οπισθέλκουσας σε όλο το εύρος προσομοίωσης. Πάραυτα η ποιοτική συμφωνία είναι ικανοποιητική.

Στην περίπτωση της γεωμετρίας με main και plain flaps, η πιστότητα είναι πολύ διαφορετική. Γενικά παρατηρείται μια σταθερή υπερεκτίμηση του συντελεστή άντωσης σε όλες τις γωνίες προσβολής, ενώ παράλληλα υποτιμάτε η γωνία μέγιστης άντωσης. Στην drag polar παρατηρείται υποτίμηση της οπισθέλκουσας σε όλο το εύρος.

Συνεχίζοντας, για τη γεωμετρία με main και auxiliary flaps σε γωνίες  $20^\circ$  και  $30^\circ$  παρατηρείται μια εξαιρετική συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα, ποιοτικά και ποσοτικά, με σωστή εκτίμηση του συντελεστή άντωσης και της συμπεριφοράς του. Από την drag polar φαίνεται μια γενική υπερεκτίμηση του συντελεστή οπισθέλκουσας, αλλά σωστή σύλληψη των τάσεων της.

Όμως, αυτή η καλή πιστότητα δεν υπάρχει για την ίδια γεωμετρία σε γωνίες εκτροπής  $40^\circ$  και  $30^\circ$ . Εκεί φαίνεται η υπερεκτίμηση του συντελεστή άντωσης σε όλο το εύρος γωνιών, με πιο εύστοχη την εκτίμηση της γωνίας μέγιστης άντωσης. Η drag polar δείχνει μια αστοχία εκτίμησης και του συντελεστή οπισθέλκουσας και της συμπεριφοράς του.

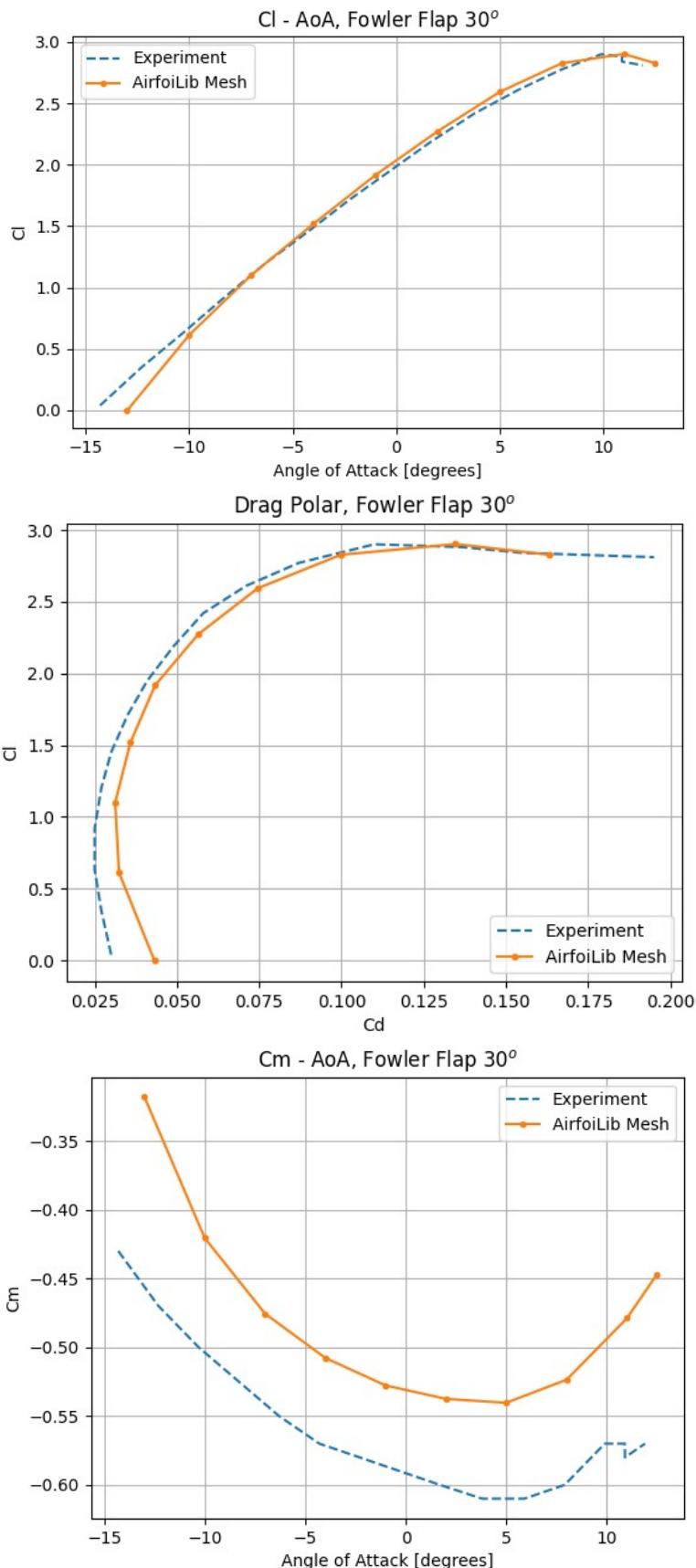
Η διαφορά στην επίτευξη πιστότητας των δύο τελευταίων, φαινομενικά όμοιων περιπτώσεων είναι εμφανής και μπορεί να ξαφνιάσει. Όμως, αν εξετασθούν οι περιπτώσεις πιο προσεκτικά, αυτή η διαφορά είναι αναμενόμενη. Στην πρώτη, ( $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ) φαίνεται ότι η γωνία εκτροπής των πτερυγίων είναι αρκετά μικρότερη. Αυτή η γωνία είναι και η πρόσθετη γωνία προσβολής που θα έχουν τα πτερύγια, οπότε λογικό είναι να "κληρονομεί" κάποια από τα χαρακτηριστικά μιας γωνίας προσβολής σκέτης αεροτομής. Δηλαδή, η αύξηση της σε μεγάλες τιμές μπορεί να οδηγεί σε δυσκολία εύστοχης εκτίμησης των αεροδυναμικών συντελεστών από μια υπολογιστική ανάλυση, καθώς τα φαινόμενα τύρβης και αποκόλλησης της ροής, τα οποία δυσκολεύουν μια πρόβλεψη, γίνονται όλο και πιο έντονα. Στην δεύτερη περίπτωση ( $40^\circ$ ,  $30^\circ$ ), και οι δύο γωνίες εκτροπής είναι μεγάλες οπότε και τα φαινόμενα τύρβης είναι τελικά πολύ έντονα για μια εύστοχη εκτίμηση. Μάλιστα, φαίνεται να είναι τόσο έντονα που ακόμα και η πειραματική εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών δυσκολεύεται να δώσει ξεκάθαρη πρόβλεψη. Αυτό φαίνεται στην σχετικά "κατσαρή" καμπύλη συντελεστή άντωσης - γωνίας προσβολής καθώς και στην drag polar η οποία δε θυμίζει καθόλου διάγραμμα του είδους της. Ομοίως μπορεί να εξηγηθεί η αστοχία προβλέψεων για τη γεωμετρία με main και plain flaps.

### **4.3 Αεροτομή NACA 23012 με Fowler Flap**

Συνεχίζοντας το μοτίβο, τα αποτελέσματα υπολογισμού συντελεστών άντωσης και οπισθέλκουσας για ένα εύρος γωνιών προσβολής, παρουσιάζονται σε δύο διαγράμματα: αυτό της καμπύλης συντελεστή άντωσης - γωνίας προσβολής και αυτό της πολικής οπισθέλκουσας. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα γίνεται υπολογιστική εκτίμηση και του συντελεστή ροπής, η οποία απεικονίζεται σε ένα διάγραμμα συντελεστή ροπής - γωνίας προσβολής.

### **Σχόλια:**

Από ότι φαίνεται στο διάγραμμα συντελεστή άντωσης - γωνίας προσβολής, γίνεται μια καλή πρόβλεψη του συντελεστή άντωσης και της συμπεριφοράς του σε όλο το εύρος γωνιών προσβολής εκτός των πολύ μικρών γωνιών. Στο διάγραμμα της drag polar φαίνεται μια υπερεκτίμηση του συντελεστή οπισθέλκουσας στις χαμηλές γωνίες προσβολής, αλλά η ποιοτική πρόβλεψη του συντελεστή παραμένει αξιόπιστη. Ομοίως, ο συντελεστής ροπής υπερεκτιμάται σε όλες τις γωνίες προσβολής, με την ποιοτική πρόβλεψη του να είναι ικανοποιητική σε όλο το εύρος, εκτός των μεγαλυτέρων.



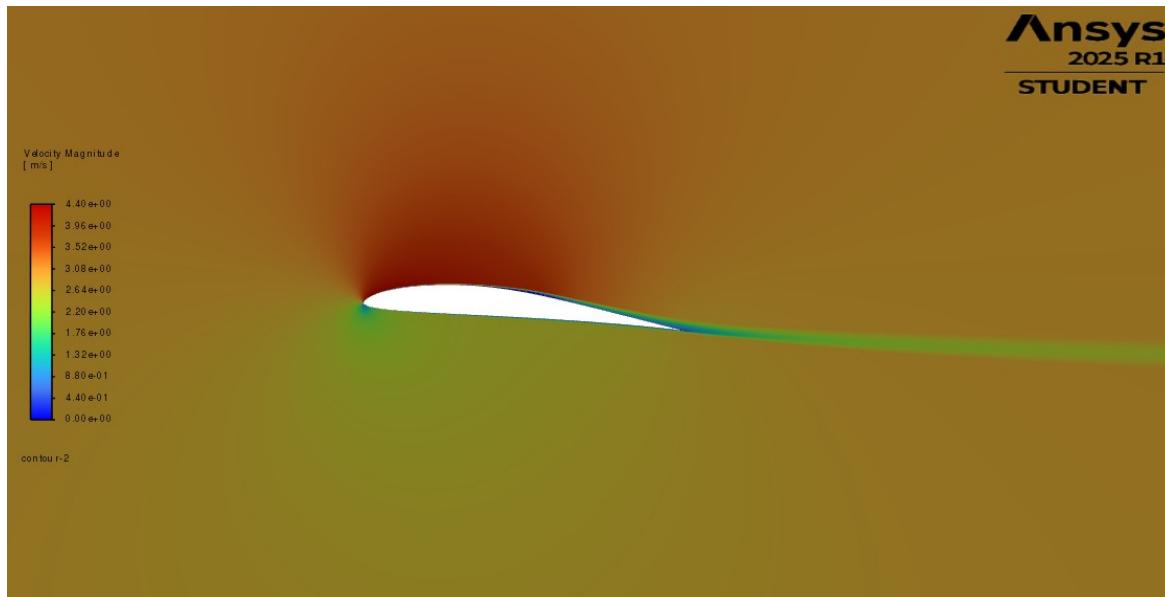
## 4.4 Γενικά Σχόλια

Σε αυτή τη παράγραφο θα γίνουν μερικά σχόλια για τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν, την επίλυση τους καθώς και την παραγωγή πλεγμάτων και των χαρακτηριστικών τους. Αρχικά, όπως φάνηκε, εντός λογικών ορίων χαρακτηριστικών προσομοίωσης, τα αποτελέσματα της επίλυσης των πλεγμάτων είναι ποιοτικά έμπιστα, ενώ σε μεγάλο ποσοστό αυτών είναι και ποσοτικά έμπιστα. Αυτό δείχνει μια καλή δυνατότητα των πλεγμάτων να συλλάβουν τα ροϊκά φαινόμενα.

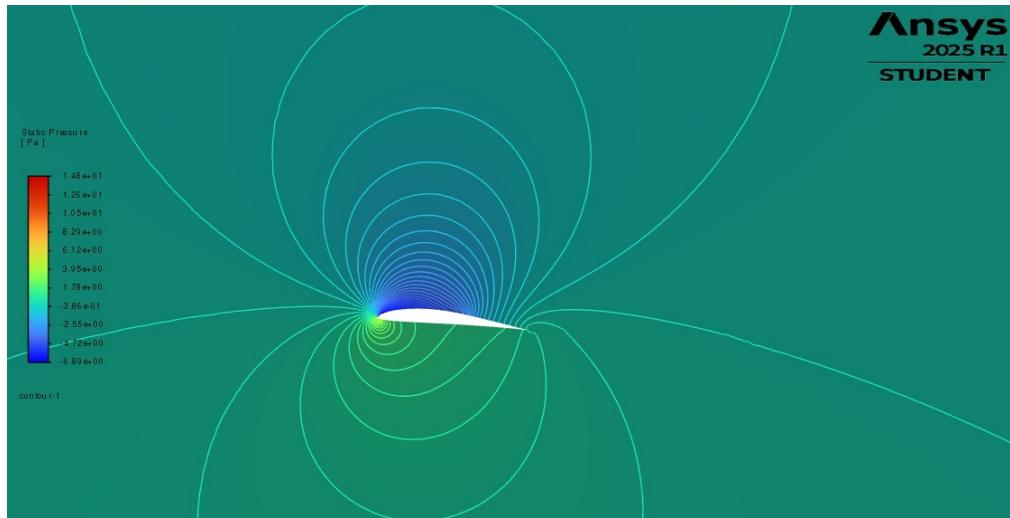
Σε ορισμένες περιπτώσεις, το Gmsh μπορεί να αποτύχει να παράγει πλέγμα, γεγονός που μάλλον οφείλεται στην αποτυχία του αλγορίθμου δημιουργίας περιοχής οριακού στρώματος που ακολουθεί. Σε αυτές τις περιπτώσεις, μικρές αλλαγές των παραμέτρων πλέγματος ή ακόμα και επανειλημμένες προσπάθειες παραγωγής πλέγματος μπορεί να λύσουν το πρόβλημα.

Επίσης, σε ορισμένες περιπτώσεις η επίλυση των πλεγμάτων μπορεί να είναι αρχικά ασταθής. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων αυτή η αστάθεια εξομαλύνθηκε από τον επιλυτή. Αυτό το φαινόμενο μάλλον οφείλεται σε λίγα παραμορφωμένα στοιχεία που δημιουργούνται στις περιοχές πλέγματος μορφής "βεντάγιας" στις αιχμηρές ακμές. Η κακοτροπία τους σε συνδυασμό με την υψηλής σημασίας θέση τους (ειδικά για ακμές φυγής) είναι ο πιθανότερος, κατά τον συγγραφέα, λόγος ύπαρξης αυτής της αστάθειας. Παρά τη δυσκολία σύγκλισης όμως, τα πλέγματα φαίνεται να παράγουν αρκετά έμπιστα αποτελέσματα. Αυτό μάλλον επιβεβαιώνει τα πορίσματα του Thornburg [1] και του Dannenhoffer [5], που σύμφωνα με αυτά, για την πιστότητα των αποτελεσμάτων έχει μεγαλύτερη σημασία η ποιοτική πύκνωση του πλέγματος παρά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των στοιχείων.

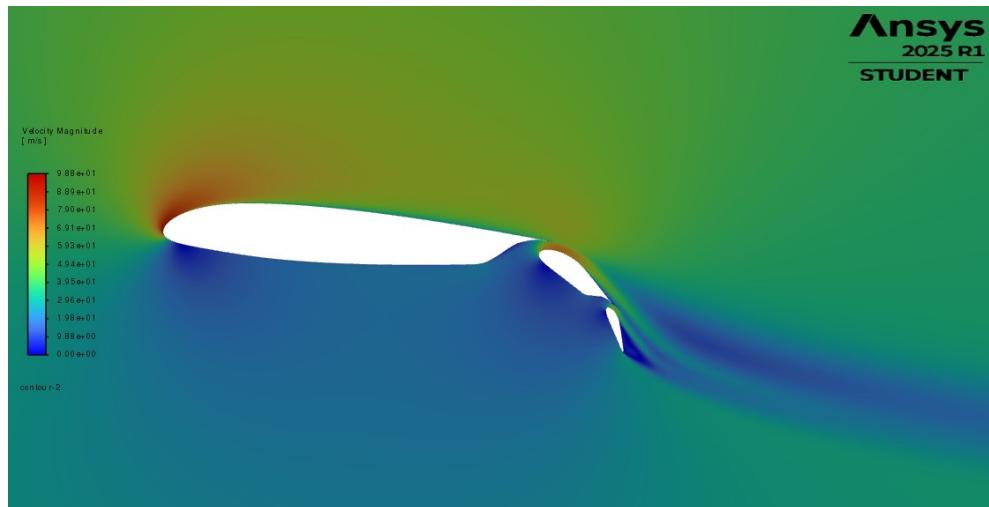
Έτσι φαίνεται το ύψος της σημασίας της εύστοχής πύκνωσης του πλέγματος. Αυτό δείχνει και το λόγο της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου παραγωγής περιοχών πύκνωσης που δημιουργήθηκε στα πλαίσια αυτής της εργασίας. Αυτή η εύστοχη πύκνωση των πλεγμάτων μπορεί να επιβεβαιώθει μελετώντας τα πεδία διαφόρων μεταβλητών της ροής που παρουσιάζονται παρακάτω και συγκρίνοντας τα με τα πλέγματα.



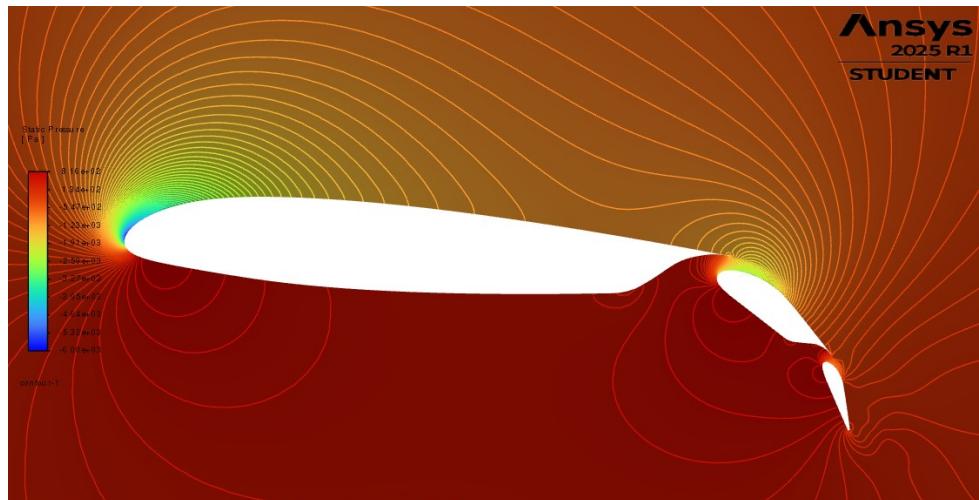
Πεδίο Μέτρου Ταχυτήτας Αεροτομής Eppler-387



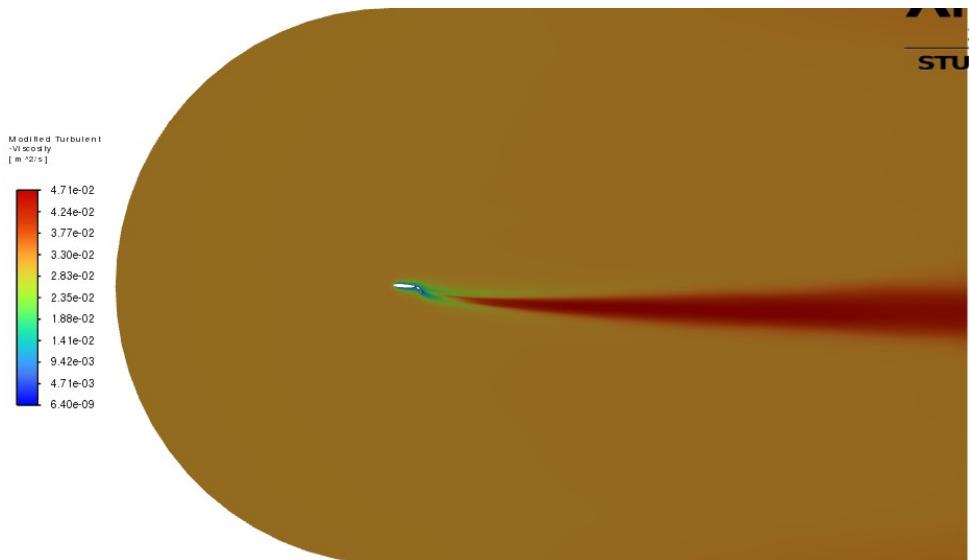
Πεδίο Στατικής Πίεσης Αεροτομής Eppler-387



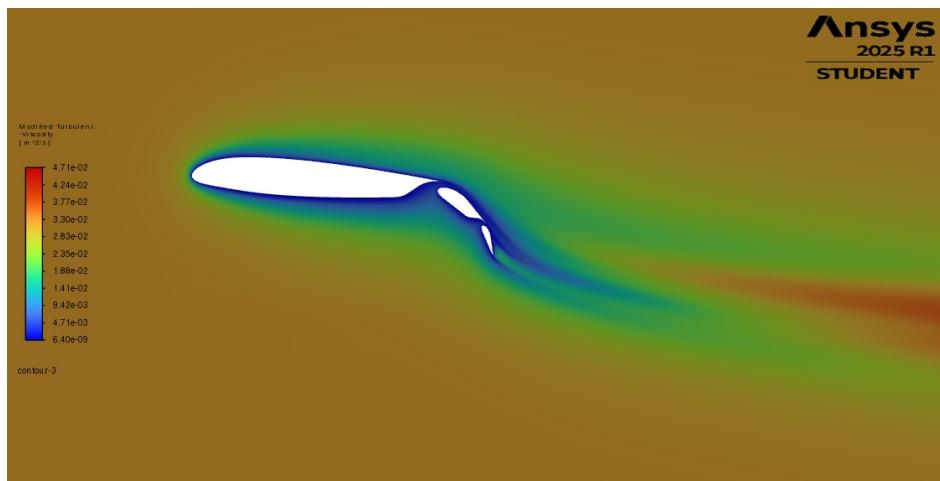
Πεδίο Μέτρου Ταχύτητας Γεωμετρίας NACA 23012 με Main Slotted Flap και Auxiliary Flap, 40°, 30°



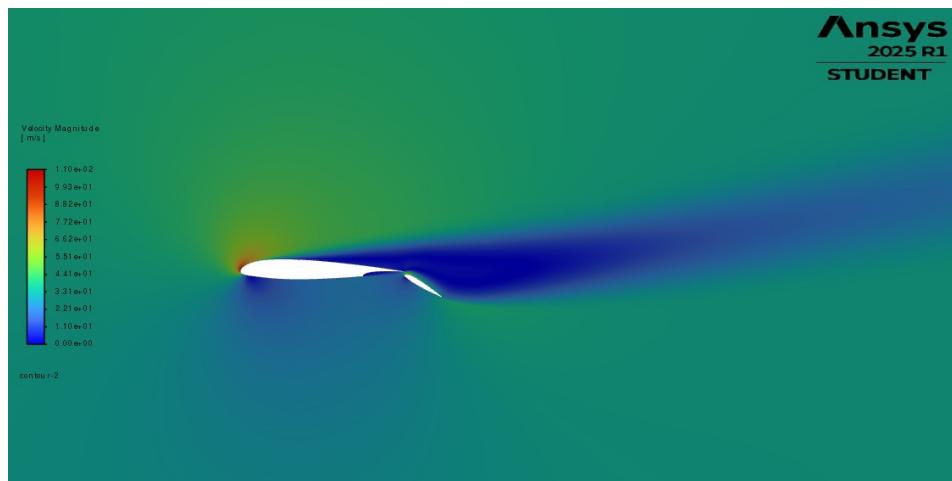
Πεδίο Στατικής Πίεσης Γεωμετρίας NACA 23012 με Main Slotted Flap και Auxiliary Flap, 40°, 30°



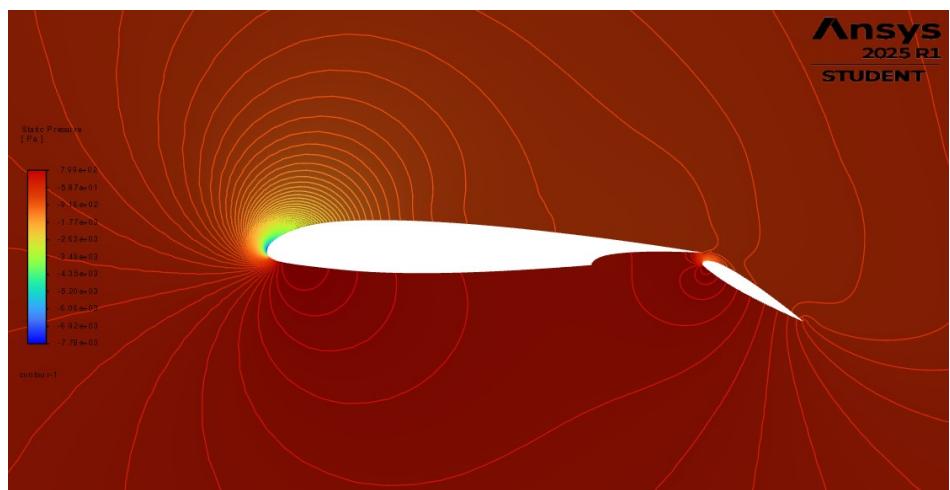
Πεδίο Τροποποιημένου Ιξώδους NACA 23012 με Main Slotted Flap και Auxiliary Flap,  $40^\circ$ ,  $30^\circ$  (πλήρης όψη)



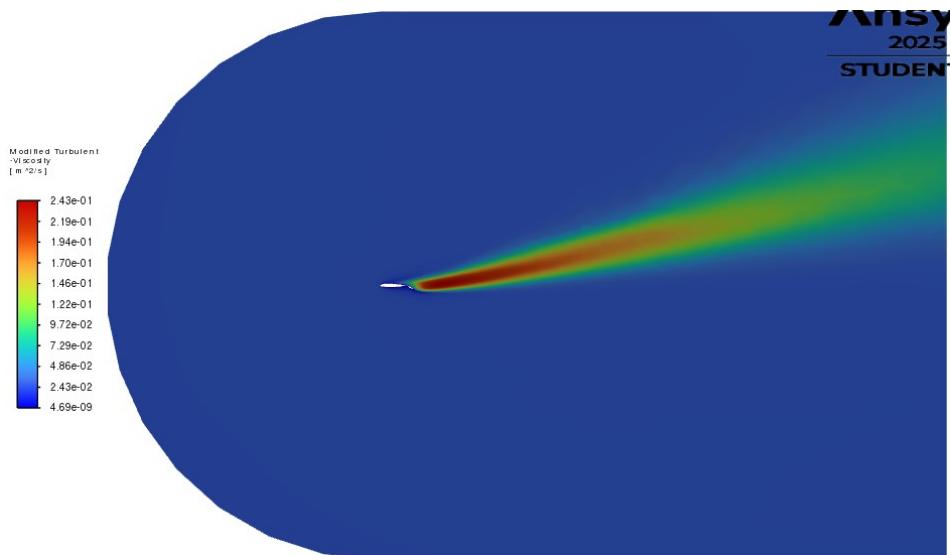
Πεδίο Τροποποιημένου Ιξώδους NACA 23012 με Main Slotted Flap και Auxiliary Flap,  $40^\circ$ ,  $30^\circ$  (λεπτομέρεια)



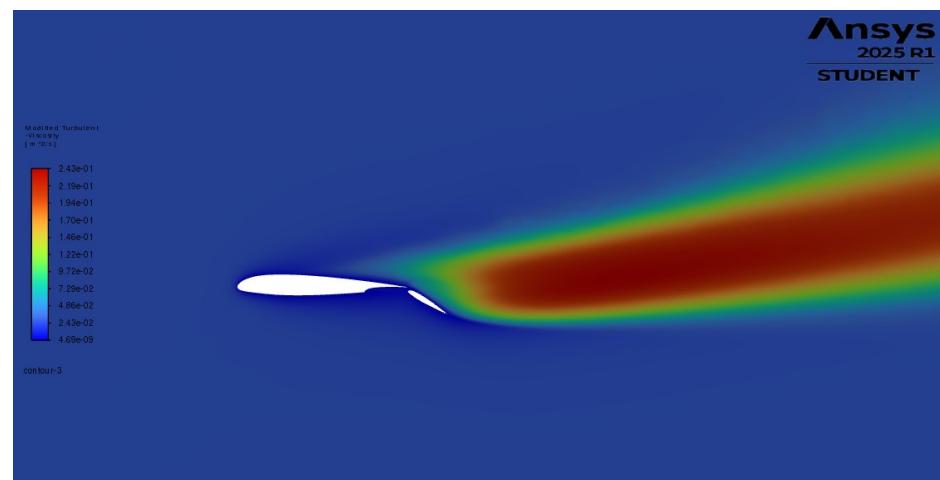
Πεδίο Μέτρου Ταχύτητας Γεωμετρίας NACA 23012 με Fowler Flap



Πεδίο Στατικής Πίεσης Γεωμετρίας NACA 23012 με Fowler Flap



Πεδίο Τροποποιημένου Ιξώδους NACA 23012 με Fowler Flap (πλήρης όψη)



Πεδίο Τροποποιημένου Ιξώδους NACA 23012 με Fowler Flap (λεπτομέρεια)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΣΥΝΟΨΗ

Με την εξέλιξη της τεχνολογίας των προσομοιώσεων η βελτιστοποίηση της λύσης ενός προβλήματος γίνεται όλο και πιο διαδεδομένη. Για τη μείωση του αναγκαίου χρόνου και του κόστους, κομμάτι αυτής της βελτιστοποίησης αυτοματοποιείται. Με τον τρόπο αυτό, δημιουργείται μια πρόσθετη ώθηση στους μηχανικούς και στους επιστήμονες προς την εκμάθηση και τη χρήση προγραμματιστικών εργαλείων και γλωσσών, με πιο κυρίαρχη εκ των οποίων, τη προγραμματιστική γλώσσα python. Ένας τομέας που επωφελείται από αυτή την ανάπτυξη είναι και αυτός της αεροδυναμικής. Με αυτό το σκεπτικό, η συγκεκριμένη εργασία αποτελεί μια προσπάθεια για τη δημιουργία μιας προγραμματιστικής βιβλιοθήκης που επιτρέπει την εύκολη δημιουργία γεωμετριών συστημάτων υψηλής άντωσης και υπολογιστικών πλεγμάτων για την προσομοίωση τους.

Στα πρώτα τμήματα της παρούσας έκθεσης γίνεται εισαγωγή στις βασικές έννοιες της αεροτομής, των συστημάτων υψηλής άντωσης και της υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Στη συνέχεια εισάγονται σαν έννοια τα υπολογιστικά πλέγματα και γίνεται μια έρευνα πάνω στα ποιοτικά χαρακτηριστικά τους. Στο τέλος του κεφαλαίου εξετάζονται συνοπτικά οι αρχές της μηχανικής ρευστών καθώς και μερικά από τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν.

Ακολουθεί η παρουσίαση του κώδικα και των δυνατοτήτων του. Ο κώδικας έχει συγγραφεί στην προγραμματιστική γλώσσα Python και έχει γίνει χρήση των βιβλιοθηκών Gmsh, NumPy, Matplotlib και NURBS-Python. Πιο αναλυτικά παρουσιάζονται τα τμήματα του κώδικα και οι συναρτήσεις τους όπου και γίνεται μια εμβάθυνση στον αλγόριθμο αυτόματης παραγωγής πλέγματος. Έπειτα, επισκοπούνται παραδείγματα χρήσης του κώδικα για γεωμετρίες σκέτης αεροτομής Eppler-387 και αεροτομής NACA 23012 με διάφορων ειδών flaps.

Η επαλήθευση των παραγόμενων πλεγμάτων γίνεται με υπολογιστική προσομοίωση των παραπάνω γεωμετριών και σύγκριση των αποτελεσμάτων με ήδη υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα ή και δεδομένα προσομοίωσης. Αρχικά γίνονται δύο έρευνες ανεξαρτησίας πλέγματος για την απλούστερη περίπτωση της Eppler-387 και για την πολύπλοκη NACA 23012 με double slotted flap. Μετά, επιλέγεται κατάλληλη πυκνότητα πλέγματος και για κάθε γεωμετρία γίνεται μια έρευνα α-scan. Τα αποτελέσματα συλλέγονται και συγκρίνονται με τα υπάρχοντα δεδομένα σε διαγράμματα. Εκεί διαπιστώνεται η ικανοποιητική δυνατότητα των πλεγμάτων να παράγουν πιστά αποτελέσματα για όλες εκτός των πιο ακραίων περιπτώσεων. Τέλος, γίνονται λίγα σχόλια επί της διαδικασίας παραγωγής πλεγμάτων, της επίλυσης αυτών καθώς και των χαρακτηριστικών τους.

#### 5.1 Προτάσεις για Μελλοντικά Βήματα

Όπως όλα τα εργαλεία, και αυτό επιδέχεται βελτιώσεις. Μια καλή αρχική βελτίωση θα ήταν η δημιουργία ενός φιλοσοφημένου εγχώριου αλγορίθμου παραγωγής πλέγματος στην περιοχή οριακού στρώματος, με δημιουργία δομημένων περιοχών πλέγματος. Έτσι, αυτός θα μπορεί να προσαρμοστεί ώστε να διαχειρίζεται καλύτερα περιοχές ακμών, οδηγώντας σε πρακτικά άριστα πλέγματα.

Επιπρόσθετα, η βιβλιοθήκη θα μπορούσε να επεκταθεί, με τη συμπερίληψη φιλοσοφημένων αλγορίθμων για την αυτόματη επίλυση των πλεγμάτων με χρήση κάποιου από τους “ανοικτούς” επιλυτές καθώς και πιο μελετημένων αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας ενοποιημένης βιβλιοθήκης με την οποία οποιοσδήποτε με υπολογιστή, θα μπορούσε να πειραματιστεί με την ρευστομηχανική δισδιάστατων γεωμετριών.

Ακόμα, μπορούν να γίνουν επανειλημμένες έρευνες με τα πλέγματα που παράγονται και έτσι να βρεθούν τα χαρακτηριστικά πλέγματος που έχουν τη μεγαλύτερη επιρροή. Με ανάλυση

ευαισθησίας σε αυτά τα χαρακτηριστικά ή ακόμα και στις παραμέτρους παραγωγής πλέγματος του αλγορίθμου, θα μπορεί να γίνουν ευκολότερα και γρηγορότερα μελέτες ανεξαρτησίας πλέγματος. Με αυτό το συνδυασμό, θα διευκολύνεται σημαντικά η βελτιστοποίηση αεροδυναμικών γεωμετριών, που θα μπορεί πλέον να γίνει αυτόματα.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Hugh J. Thornburg, "Overview of the PETTT Workshop on Mesh Quality/Resolution, Practice, Current Research, and Future Direction", 2012
- [2] E. Luke, S. Hebert, D. Thompson, "Theoretical and Practical Evaluation of Solver-Specific Mesh Quality (Invited)", 2008
- [3] Patrick M. Knupp, "Remarks on Mesh Quality", 2007
- [4] Aaron Katz, Venkateswaran Sankaran, "Mesh quality effects on the accuracy of CFD solutions on unstructured meshes", 2011
- [5] John F. Dannenhoffer, "Correlation of Grid Quality Metrics and Solution Accuracy for Supersonic Flows", 2012
- [6] Andrew M. Chuen, William M. Chan, "Mesh Effects on Flow Solutions for a 2-D Multi-Element Airfoil Using Structured Overset Methods", 2020
- [7] Ira H. Abbott, Albert E. Von Doenhoff, "Theory of Wing Sections", 1949
- [8] Snorri Gudmundsson, "General Aviation Aircraft Design, Second Edition", 2022
- [9] John D. Anderson Jr. "Fundamentals of Aerodynamics", 2011
- [10] "Introduction to Aerospace flight vehicles",  
[\[https://eaglepubs.erau.edu/introductiontoaerospaceflightvehicles/chapter/airfoil-geometries/\]](https://eaglepubs.erau.edu/introductiontoaerospaceflightvehicles/chapter/airfoil-geometries/)
- [11] "The Boeing Technical Site", [\[http://www.b737.org.uk/tailstrikes.htm\]](http://www.b737.org.uk/tailstrikes.htm)
- [12] "SKYbrary", [\[https://skybrary.aero/articles/fowler-flap\]](https://skybrary.aero/articles/fowler-flap)
- [13] "Meshing in CFD, a Comprehensive Guide", [\[https://cfoland.com/mesh-types-in-cfd-a-comprehensive-guide/\]](https://cfoland.com/mesh-types-in-cfd-a-comprehensive-guide/)
- [14] "LearnCAX", [\[https://www.learncax.com/knowledge-base/blog/by-category/cfd/good-looking-mesh-may-not-always-be-good-for-the-simulation\]](https://www.learncax.com/knowledge-base/blog/by-category/cfd/good-looking-mesh-may-not-always-be-good-for-the-simulation)
- [15] Φ. Χουσαΐρίδης, "Αυτοματοποιημένη Ανάλυση Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής σε Αεροτομές Πολλαπλών Στοιχείων", 2024
- [16] R. McGee, B. Walker, B. Millard, "Experimental Results for the Eppler 387 Air-foil at Low Reynolds Numbers in the Langley Low-Turbulence Pressure Tunnel", 1988.
- [17] Ozgun, "Ansys Mesh Metrics Explained", [\[https://www.mechcad.com/mesh-quality-checking-ansys-workbench/\]](https://www.mechcad.com/mesh-quality-checking-ansys-workbench/), 2023
- [18] P. K. C. Rudolph, "High Lift Systems on Commercial Subsonic Airliners", 1996
- [19] Λεωνίδας Πιτσούλης, "Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, 2η Έκδοση"
- [20] I. D. Coope, "Circle Fitting by Linear and Nonlinear Least Squares", 1993
- [21] L. Piegl, W. Tiller, "The NURBS Book", 1995

- [22] C. J. Wenzinger, W. E. Gauvain, “*Wind-Tunnel Investigation of an N.A.C.A. 23012 Airfoil with a Slotted Flap and Three Types of Auxiliary Flap*”, 1938
- [23] C. J. Wenzinger, T. A. Harris, “*Wind-Tunnel Investigation of an N.A.C.A. 23012 Airfoil with Various Arrangements of Slotted Flaps*”
- [24] J. B. Barlow, W. H. Rae Jr., A. Pope, “*Low-Speed Wind Tunnel Testing*”, 1999
- [25] C. Geuzaine, J.-F. Remacle, “*Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009
- [26] O. R. Bingol, A. Krishnamurthy, “*NURBS-Python: An open-source object-oriented NURBS modeling framework in Python*”, 2018
- [27] Harris, C.R., Millman, K.J., van der Walt, S.J. et al. “*Array programming with NumPy*”, 2020
- [28] J. D. Hunter, “*Matplotlib: A 2D Graphics Environment*”, 2007.

