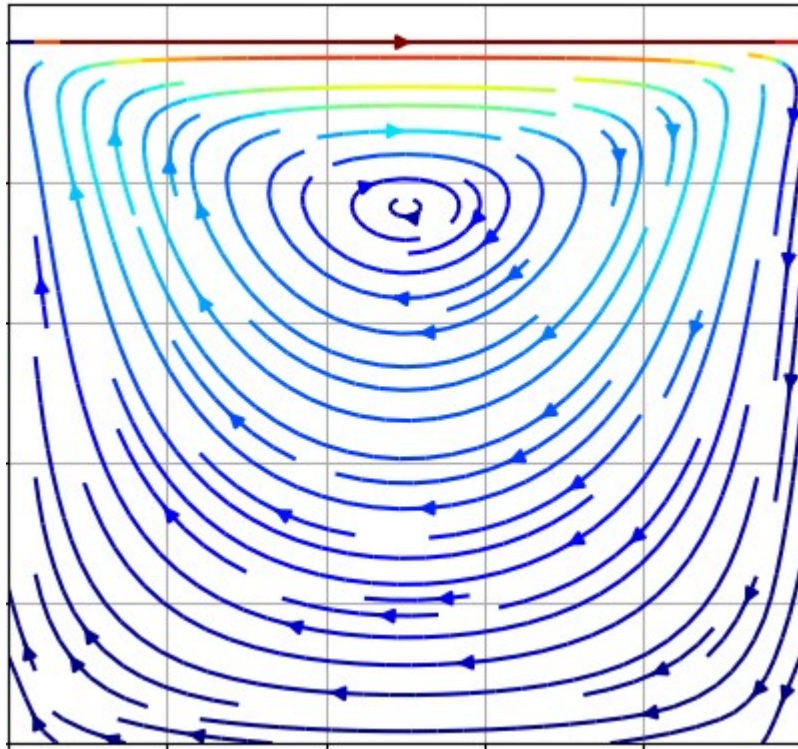


Computational Fluid Dynamics



Μοντελοποίηση Στρωτής Ροής σε Κοίλωμα Ορθογωνικής Μορφής

Αντώνης Κυριακόπουλος

6337

antokyri@meng.auth.gr

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	3
Μαθηματικό μοντέλο.....	3
Αλγόριθμος.....	8
Μελέτη πλέγματος.....	9
Αποτελέσματα διαφόρων Re.....	12
Σύγκριση Αντιθέτων U.....	19

Εισαγωγή

Μια ασυμπίεστη στρωτή ροή σε τετραγωνικό κούλωμα αποτελεί μια απλουστευμένη περίπτωση εσωτερικής ροής. Έτσι αποτελεί μια καλή ευκαιρία για την κατασκευή προγράμματος προς επίλυση της συγκεκριμένης περίπτωσης.

Μαθηματικό μοντέλο

Η ροή περιγράφεται από την εξίσωση διατήρησης στροβιλότητας και την συσχέτιση της στροβιλότητας και της ροϊκής συνάρτησης.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$$
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\zeta$$

Προκειμένου να λυθούν υπολογιστικά, οι όροι κάθε εξίσωσης διακριτοποιούνται ως έχει:

Διακριτοποίηση Όρων:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\Delta t}$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}}{2\Delta y}$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\zeta_{i+1,j} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{\zeta_{i,j+1} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

Ρητή εξίσωση διατήρησης στροβιλότητας:

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} = -\frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{2\Delta y}$$

$$+ \text{Re}^{-1} \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \Rightarrow$$

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \left(-\frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \Delta t +$$

$$\text{Re}^{-1} \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \Delta t - \zeta_{i,j}^n$$

Πεπλεγμένη εξίσωση διατήρησης στροβιλότητας:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)}{2} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)}{2}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)}{2} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)}{2}$$

Οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} = & - \frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n + \zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i-1,j}^{n+1}}{4\Delta x} \\ & + \frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n + \zeta_{i,j+1}^{n+1} - \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{4\Delta y} \\ & + \text{Re}^{-1} \frac{\zeta_{i+1,j}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n + \zeta_{i+1,j}^{n+1} - 2\zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x^2} \\ & + \text{Re}^{-1} \frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n + \zeta_{i,j+1}^{n+1} - 2\zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y^2} \Rightarrow \\ \\ & \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\text{Re}^{-1}}{\Delta x^2} + \frac{\text{Re}^{-1}}{\Delta y^2} \right) \zeta_{i,j}^{n+1} + \left(\frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{8\Delta y\Delta x} - \frac{\text{Re}^{-1}}{2\Delta x^2} \right) \zeta_{i+1,j}^{n+1} \\ & + \left(-\frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{8\Delta y\Delta x} - \frac{\text{Re}^{-1}}{2\Delta x^2} \right) \zeta_{i-1,j}^{n+1} + \left(-\frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n}{8\Delta y\Delta x} - \frac{\text{Re}^{-1}}{2\Delta y^2} \right) \zeta_{i,j+1}^{n+1} \\ & + \left(\frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n}{8\Delta y\Delta x} - \frac{\text{Re}^{-1}}{2\Delta y^2} \right) \zeta_{i,j-1}^{n+1} = - \frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{4\Delta x} \\ & + \frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{4\Delta y} \\ & + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{2\Delta x^2} + \frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{2\Delta y^2} \right) + \frac{\zeta_{i,j}^n}{\Delta t} \end{aligned}$$

Υπολογισμός τιμών ροϊκής συνάρτησης:

$$\frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta y^2} + \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} = -\zeta \Rightarrow$$

$$\overline{\Psi}_{i,j}^{n+1} = \frac{\zeta_{i,j} \Delta y^2 \Delta x^2 + \Delta y^2 (\Psi_{i+1,j}^n + \Psi_{i-1,j}^n) + \Delta x^2 (\Psi_{i,j+1}^n + \Psi_{i,j-1}^n)}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

και με χρήση χαλάρωσης θα έχουμε:

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = \Psi_{i,j}^n + \omega (\overline{\Psi}_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^n)$$

Διαφορετικά, για να υπολογίσουμε τις τιμές με μέθοδο επίλυσης γραμμικού συστήματος.

$$\frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} = -\zeta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\Delta y^2} \Psi_{i,j+1} + \frac{1}{\Delta y^2} \Psi_{i,j-1} - 2 \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \Psi_{i,j} + \frac{1}{\Delta x^2} \Psi_{i+1,j}$$

$$+ \frac{1}{\Delta x^2} \Psi_{i-1,j} = -\zeta$$

Οριακές συνθήκες:

Όλες οι οριακές τιμές Ψ μηδενίζονται, ενώ οι οριακές τιμές ζ υπολογίζονται ως έχει:
Κινούμενο τοίχωμα:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$$

$$\Psi_{i,j-1} = \Psi_{i,j} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Psi_{i,j-1} = \Psi_{i,j} - U \Delta y - \zeta \frac{\Delta y^2}{2} \Rightarrow$$

$$\zeta = -2 \left(\frac{\Psi_{i,j-1} - \Psi_{i,j}}{\Delta y^2} + \frac{U}{\Delta y} \right)$$

Κάτω τοίχωμα:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$$

$$\Psi_{i,j+1} = \Psi_{i,j} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Psi_{i,j+1} = \Psi_{i,j} - \zeta \frac{\Delta y^2}{2} \Rightarrow \zeta = -2 \left(\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j}}{\Delta y^2} \right)$$

Δεξί τοίχωμα:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

$$\Psi_{i-1,j} = \Psi_{i,j} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Psi_{i-1,j} = \Psi_{i,j} - \zeta \frac{\Delta x^2}{2} \Rightarrow \zeta = 2 \left(\frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right)$$

Αριστερό τοίχωμα:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

$$\Psi_{i+1,j} = \Psi_{i,j} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Psi_{i+1,j} = \Psi_{i,j} - \zeta \frac{\Delta x^2}{2} \Rightarrow \zeta = -2 \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}}{\Delta x^2} \right)$$

Αλγόριθμος

Μέθοδος επίλυσης:

Ο υπολογισμός των τιμών της Ψ γίνεται επαναληπτικά μέχρι να παρατηρηθεί σύγκλιση, και έπειτα υπολογίζονται οι τιμές ζ με χρονικό βήμα μέχρι να παρατηρηθεί μονιμότητα. Η σύγκλιση και η μονιμότητα ελέγχονται με βάση τα παρακάτω κριτήρια:

$$\left| \zeta^n - \zeta^{n-1} \right| < \left| \zeta^n - \zeta^1 \right| \cdot 10^{-5}$$
$$\left| \Psi^n - \Psi^{n-1} \right| < \left| \Psi^n - \Psi^1 \right| \cdot 10^{-4}$$

Αρχικές συνθήκες:

Η ταχύτητα θεωρείται παντού 0 με εξαίρεση την ταχύτητα του άνω τοιχώματος. Έτσι, υπολογίζονται οι αρχικές τιμές ζ . Οι αρχικές τιμές Ψ είναι οι προηγούμενες υπολογισμένες ενώ στην αρχή του πρωταρχικού υπολογισμού είναι παντού 0.

Διακριτοποίηση:

Λόγω της τετραγωνικής μορφής του προβλήματος, προτιμάται το πλέγμα να έχει ίσα y και x spacings.

Ρητός αλγόριθμος:

Οι τιμές της στροβιλότητας και της ροϊκής συνάρτησης τοποθετούνται σε δύο κτηνόδη διανύσματα, έτσι ώστε να γίνεται ταχύεια επεξεργασία τους με χρήση πινάκων. Συγκεκριμένα στήνονται πίνακες έτσι ώστε:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 0 & 1 \\ 0 & . & . & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ . & ..0.. & 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & ..0.. & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & ..0.. & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & ..0.. & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι η εξίσωση γίνεται:

$$\underline{\zeta}^{n+1} = \left(- \left(A_1 \cdot \underline{\Psi}^n \right) * \left(A_2 \cdot \underline{\zeta}^n \right) + \left(A_2 \cdot \underline{\Psi} \right) * \left(A_1 \cdot \underline{\zeta}^n \right) \right) / (4\Delta x \Delta y) + \left(\left(A_2 - 2I \right) \cdot \underline{\zeta}^n / \Delta x^2 + \left(A_1 - 2I \right) \cdot \underline{\zeta}^n / \Delta y^2 \right) \text{Re}^{-1} + \underline{\zeta}^n$$

Με τον αστερίσκο να συμβολίζει τον πολλαπλασιασμό ανά στοιχείο.

Πεπλεγμένος αλγόριθμος:

Ομοίως, σε κάθε επανάληψη, κατασκευάζονται διαγώνιοι πίνακες με τις τιμές Ψ οι οποίοι, μαζί με τους δύο προηγούμενους θα παράξουν τον πίνακα A_0 , για την επίλυση του γραμμικού συστήματος.

$$A_0 \cdot \zeta^{n+1} = B \Rightarrow \zeta^{n+1} = A_0^{-1} \cdot B$$

Αλγόριθμος Ροϊκής Συνάρτησης:

Με τον ίδιο τρόπο η εξίσωση της ροϊκής συνάρτησης γίνεται:

$$\underline{\Psi}^{n+1} = \frac{\left((\Delta x \Delta y)^2 \left(I \cdot \underline{\zeta}^n \right) + \Delta y^2 \left(A_2 \cdot \underline{\Psi}^n \right) + \Delta x^2 \left(A_1 \cdot \underline{\Psi}^n \right) \right)}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

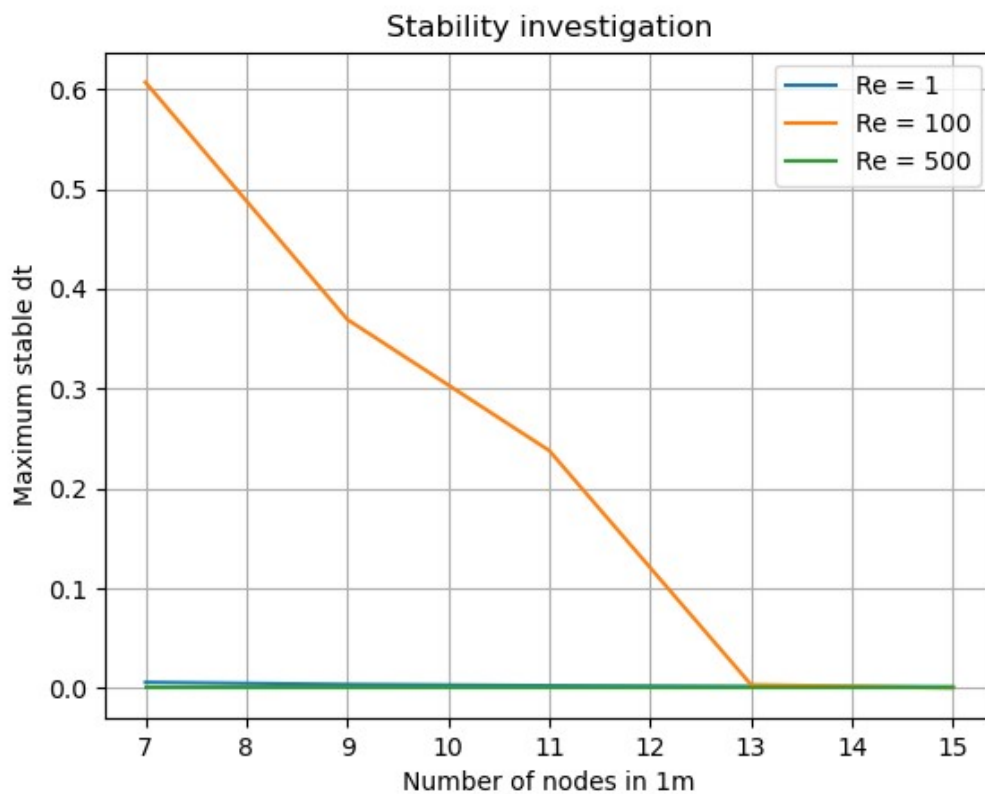
Ομοίως με τον πεπλεγμένο αλγόριθμο της στροβιλότητας στήνεται και λύνεται το γραμμικό σύστημα για την ροϊκή συνάρτηση.

Μελέτη Πλέγματος

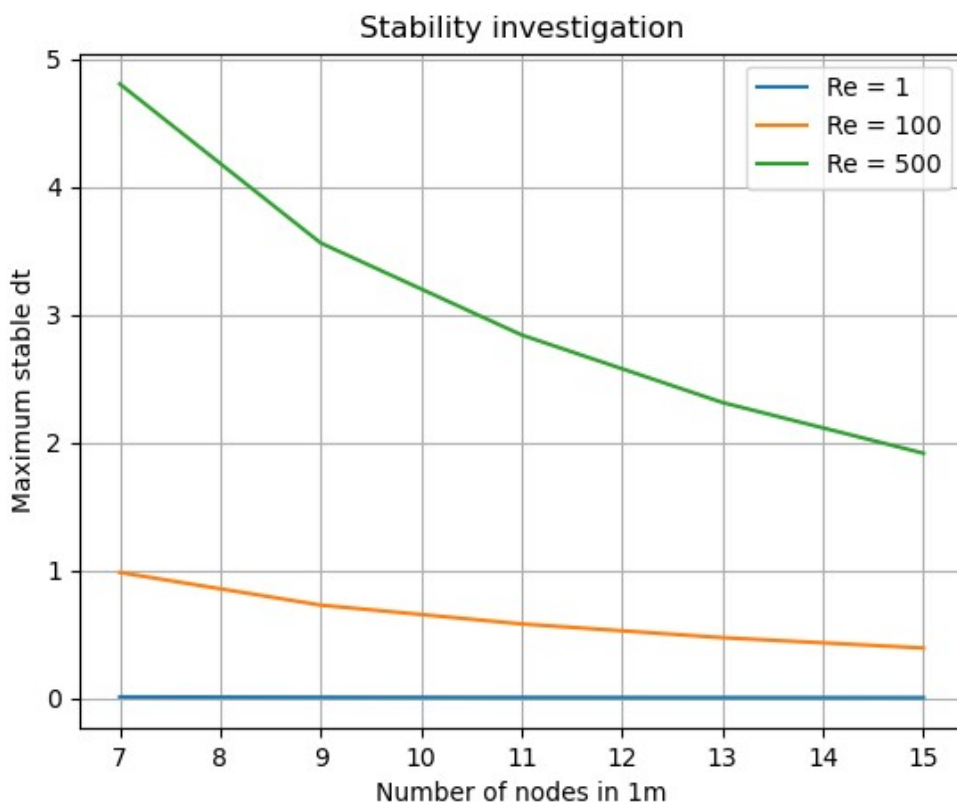
Ευστάθεια Αλγορίθμων:

Αρχικά γίνεται μελέτη ευστάθειας για διάφορες πυκνότητες πλέγματος. Για αυτή τη μελέτη χρησιμοποιείται ένας αλγόριθμος παρόμοιος με αυτό της διχοτόμησης για εύρεση ρίζας. Επαναληπτικά δοκιμάζεται η δυνατότητα του προγράμματος να μη εκρήγνυται, και έτσι πλησιάζουμε στο μέγιστο χρονικό βήμα που τα ικανοποιεί.

Αξίζει να σημειωθεί ότι καθώς πλησιάζουμε στο μέγιστο χρονικό βήμα, τα αποτελέσματα αρχίζουν και ταλαντεύονται, οδηγώντας σε απαγορευτικούς χρόνους σύγκλισης. Οπότε, ένα απιπρόσθετο κριτήριο ευστάθειας, είναι η μη ταλάντωση των παραγόμενων τιμών. Τέλος, ο πεπλεγμένος αλγόριθμος, όχι μόνο έχει πολύ καλύτερη συμπεριφορά, αλλά είναι και ευσταθείς πρακτικά παντού. Αυτό που τον περιορίζει είναι η ταλαντωτική συμπεριφορά και τα άσχημα αποτελέσματα σε πολύ μεγάλα Δt .



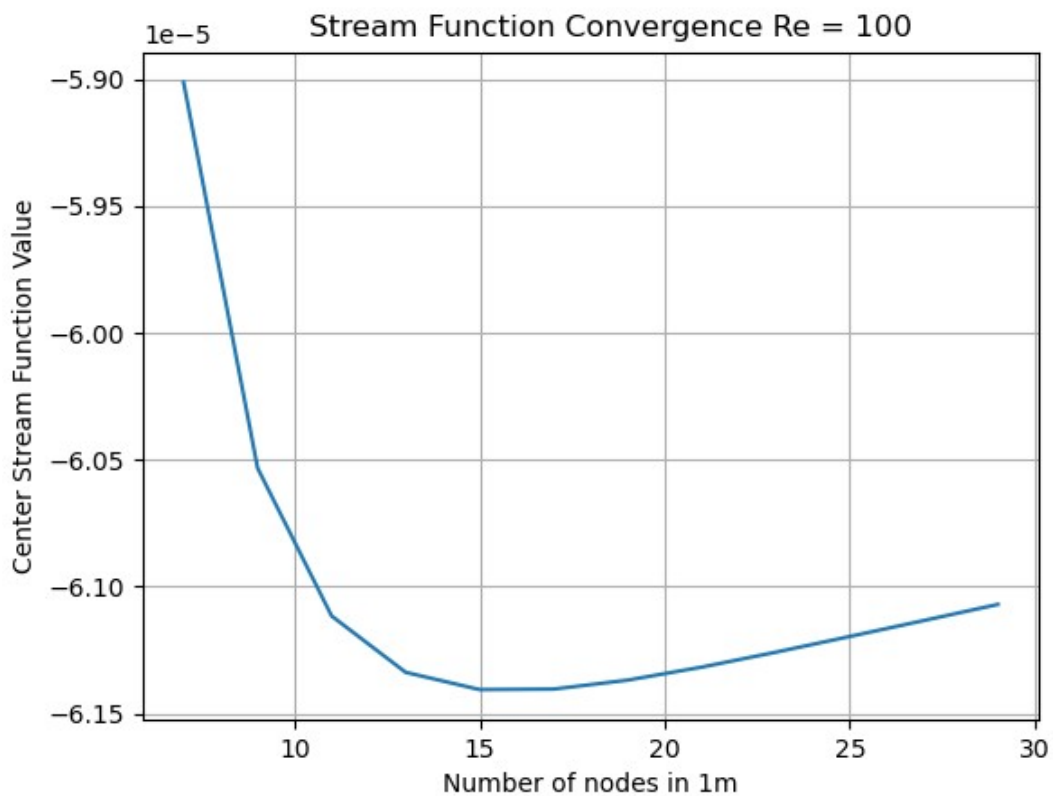
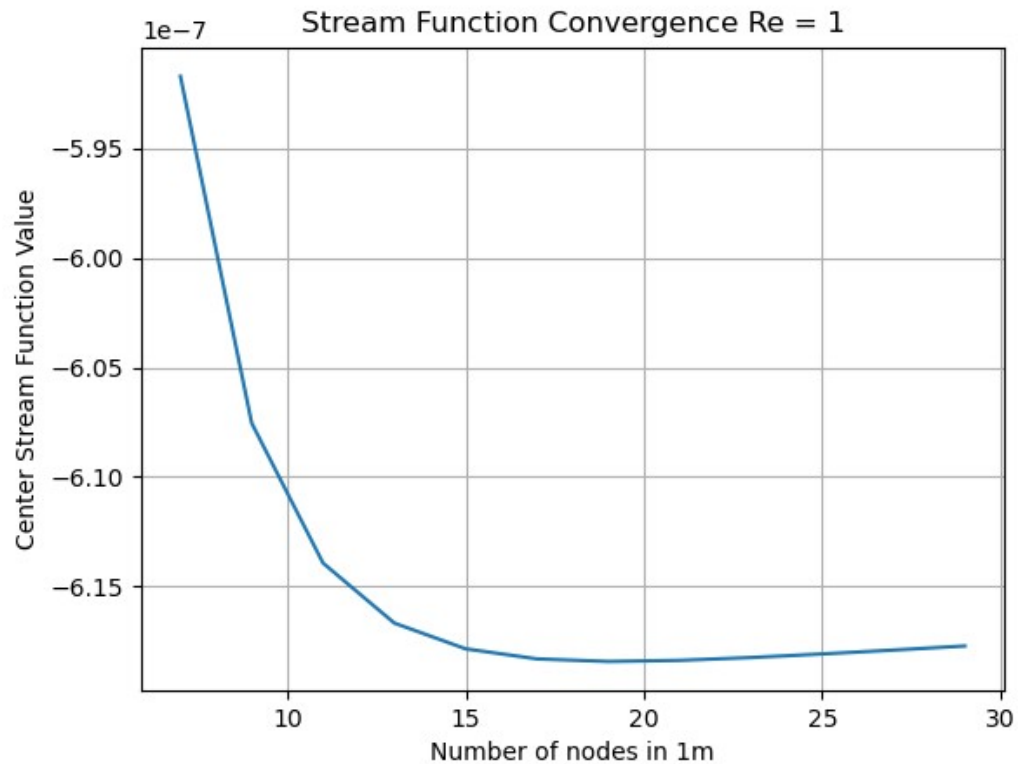
Ρητή μέθοδος

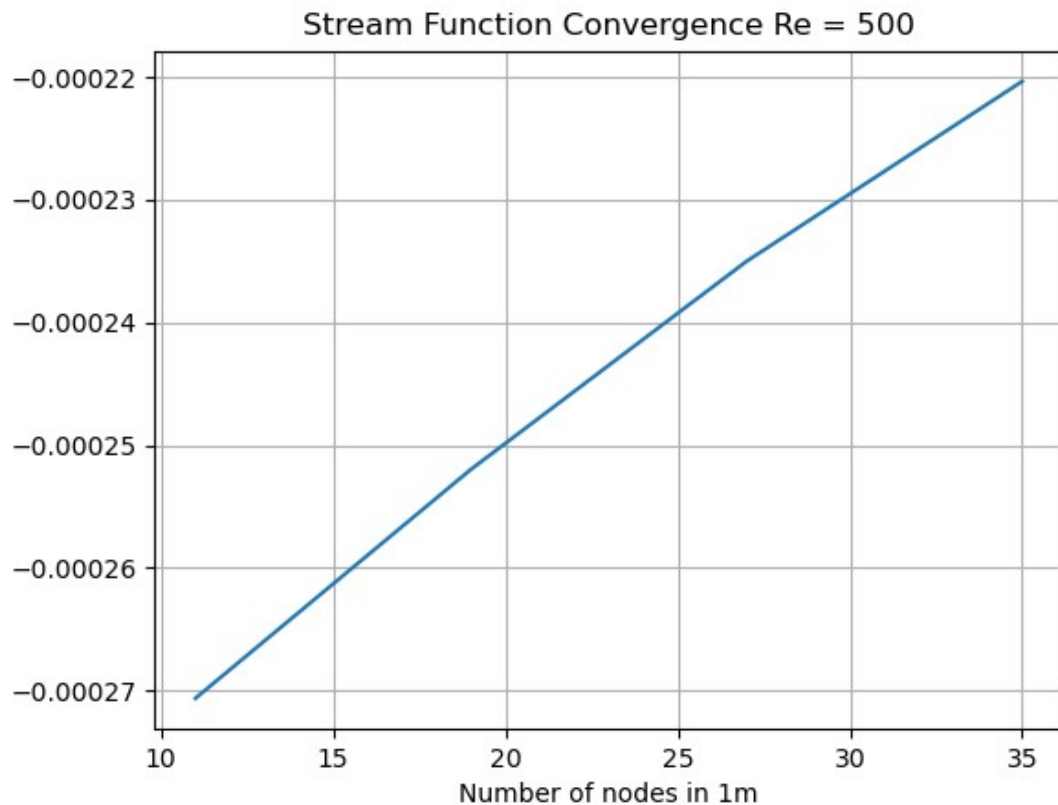


Πεπλεγμένη μέθοδος

Ανεξαρτησία Πυκνότητας Πλέγματος:

Η διερεύνηση ανεξαρτησίας πλέγματος για την πεπλεγμένη μορφή του αλγορίθμου παρουσιάζεται παρακάτω:



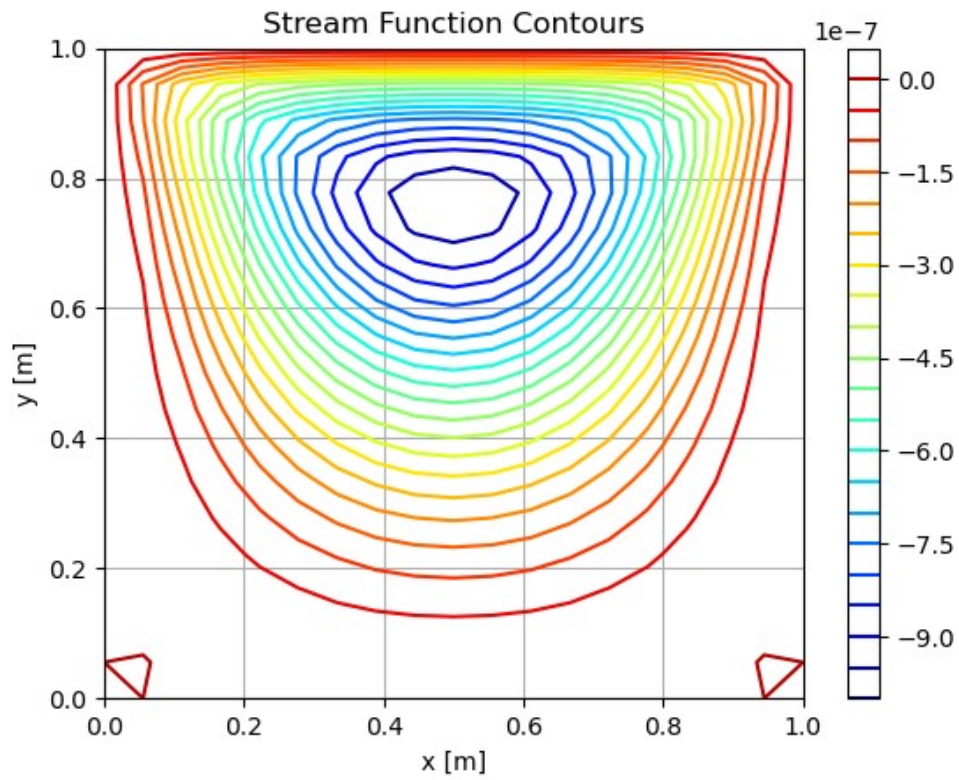


Σχόλια:

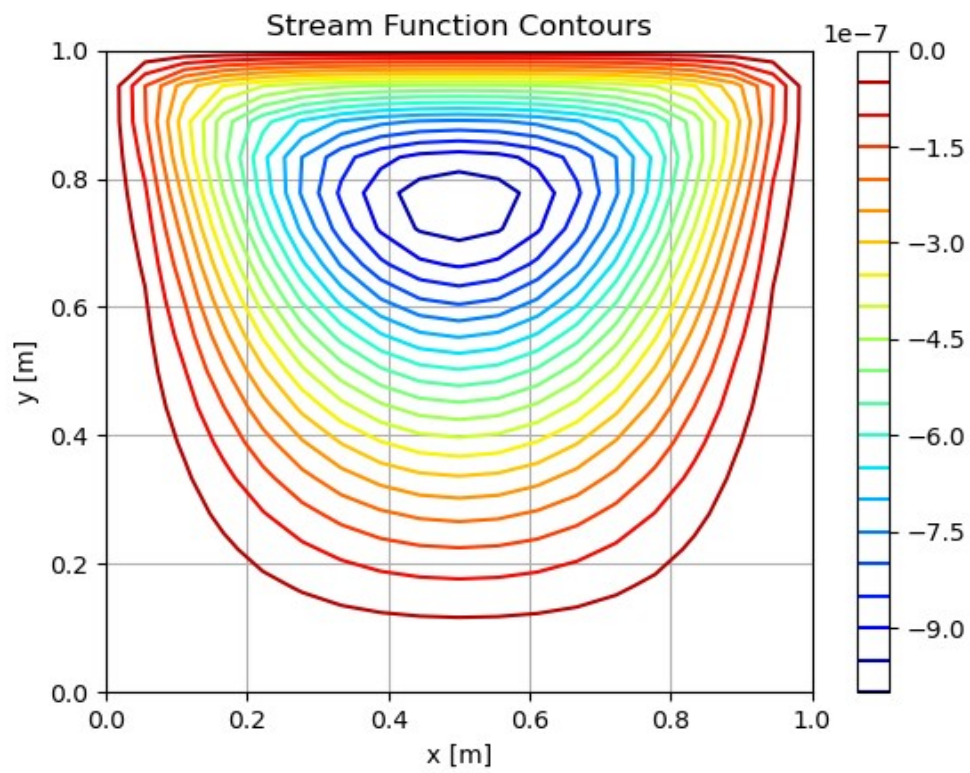
Ενώ στους χαμηλούς Re παρατηρήται μια τάση προς σύγκλιση αυτό δεν φαίνεται να συμβαίνει για $Re = 500$. Λόγω περιορισμένου χρόνου και υπολογιστικής ισχύος, η ανεξαρτησία δεν μπορεί να διερευνηθεί σε πυκνότερα πλέγματα. Επίσης σημειώνεται ότι ο υπολογισμός των τιμών της ροϊκής συνάρτησης με επίλυση γραμμικού συστήματος είναι ιδιαίτερα ταχύτερη.

Αποτελέσματα διαφόρων Re:

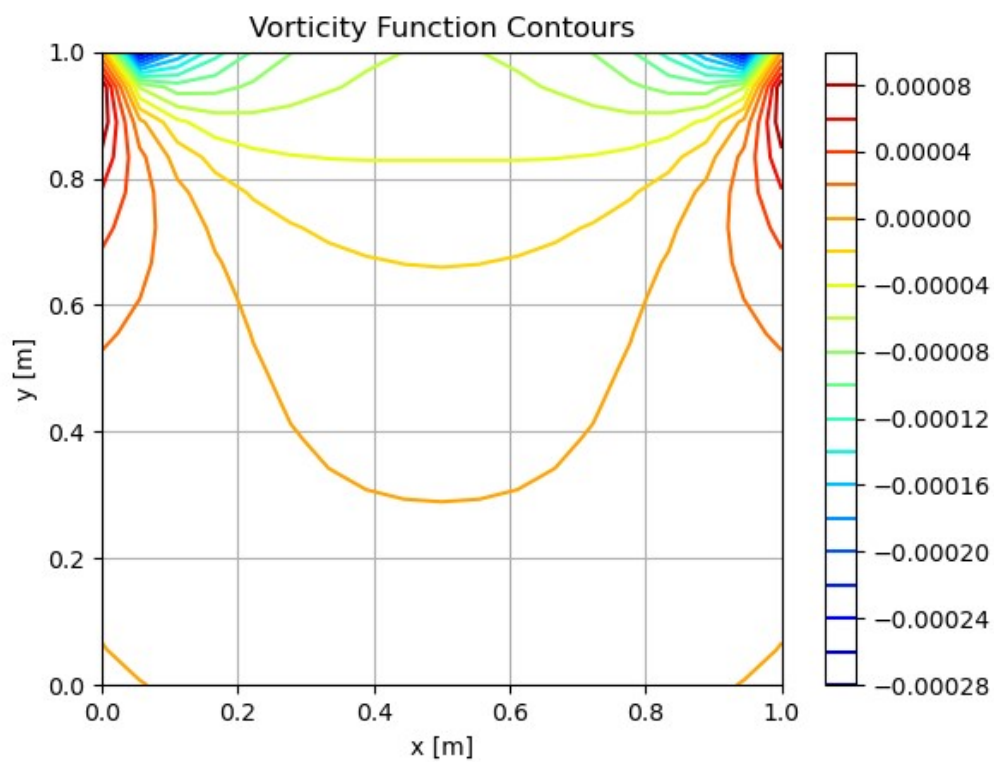
Επιλύεται πεδίο $1 \times 1 \text{ m}^2$. Τα αποτελέσματα αποτελούνται από τις ισουψείς στροβιλότητας, τις ισουψείς ροϊκής συνάρτησης, καθώς και τα διανύσματα της ταχύτητας. Λόγω της αστάθειας του ρητού αλγορίθμου, διαφορετικοί Re λύνονται με διαφορετικά πεδία, ώστε να μπορεί να βγει αποτέλεσμα και να γίνει η σύγκριση με τον πεπλεγμένο. Πάραυτα το πρόβλημα με αριθμό $Re = 500$ δεν μπόρεσε να λυθεί με το ρητό αλγόριθμο.



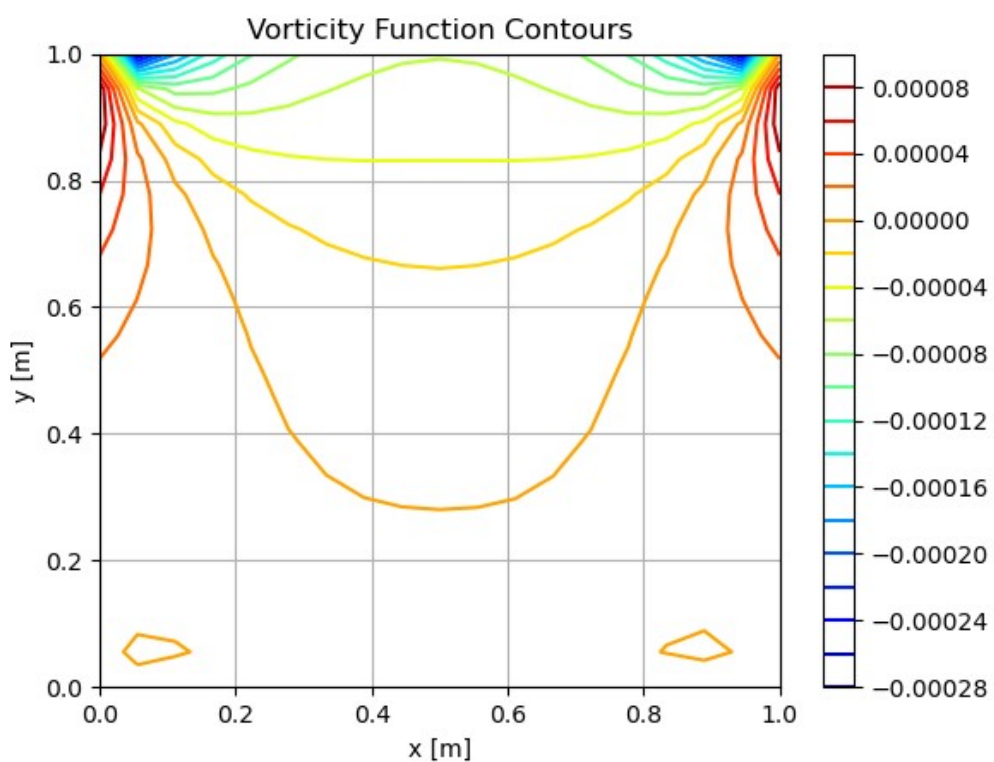
Ρητή μέθοδος, $Re = 1$, Πεδίο 19x19



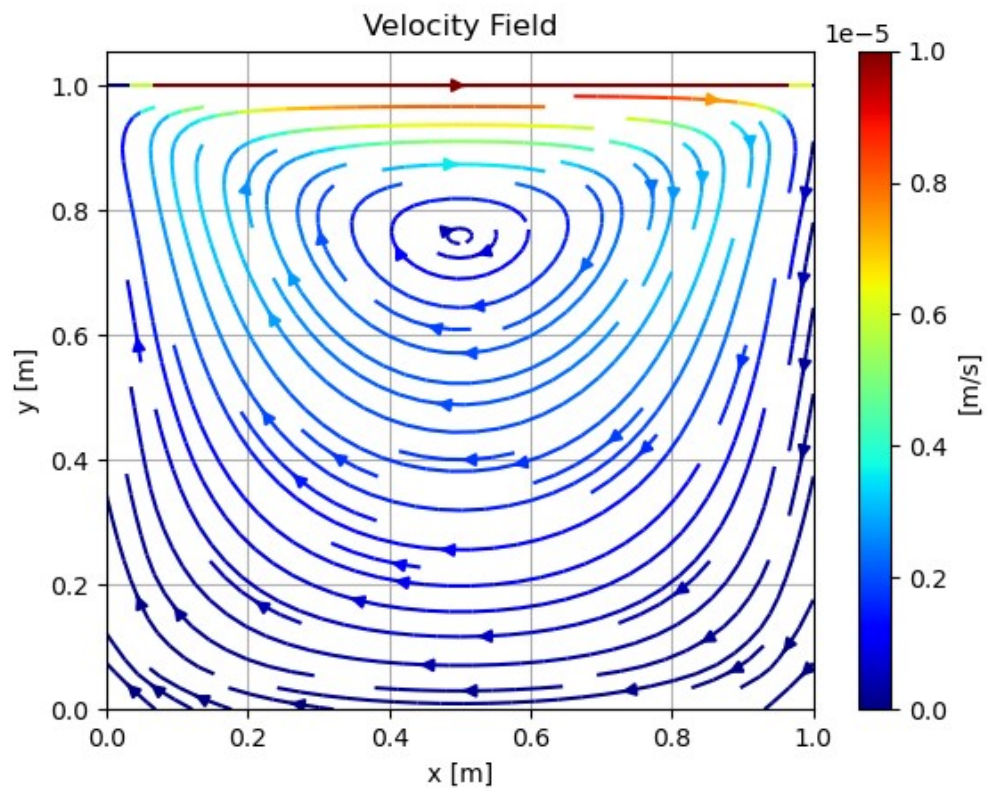
Πεπλεγμένη μέθοδος, $Re = 1$, Πεδίο 19x19



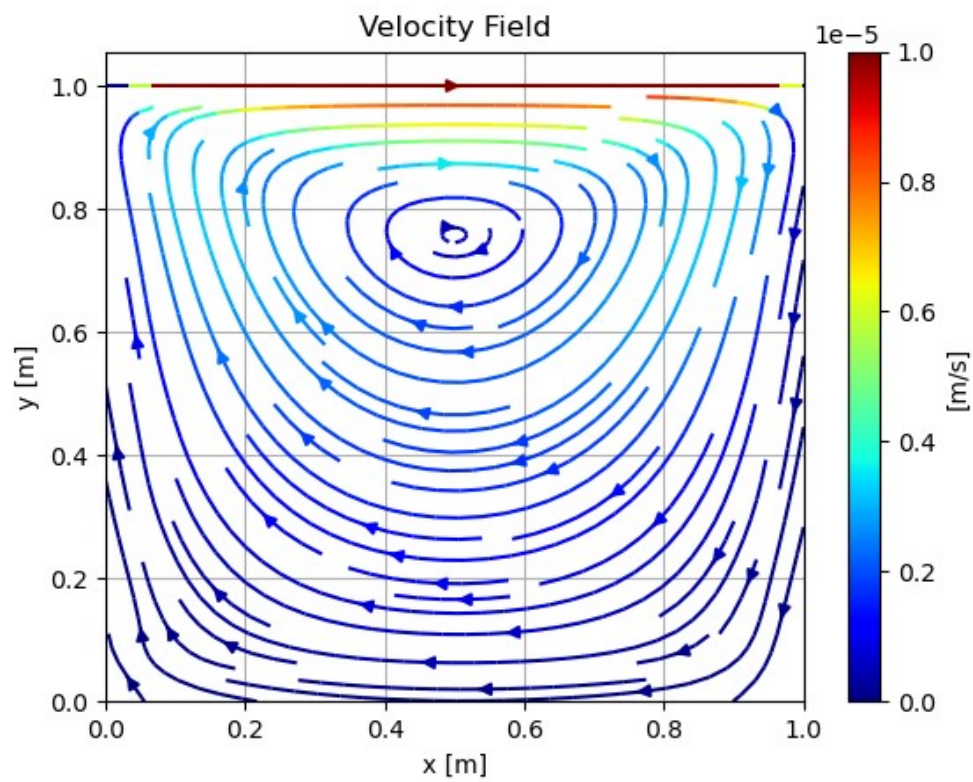
Ρητή μέθοδος, $Re = 1$, Πεδίο 19x19



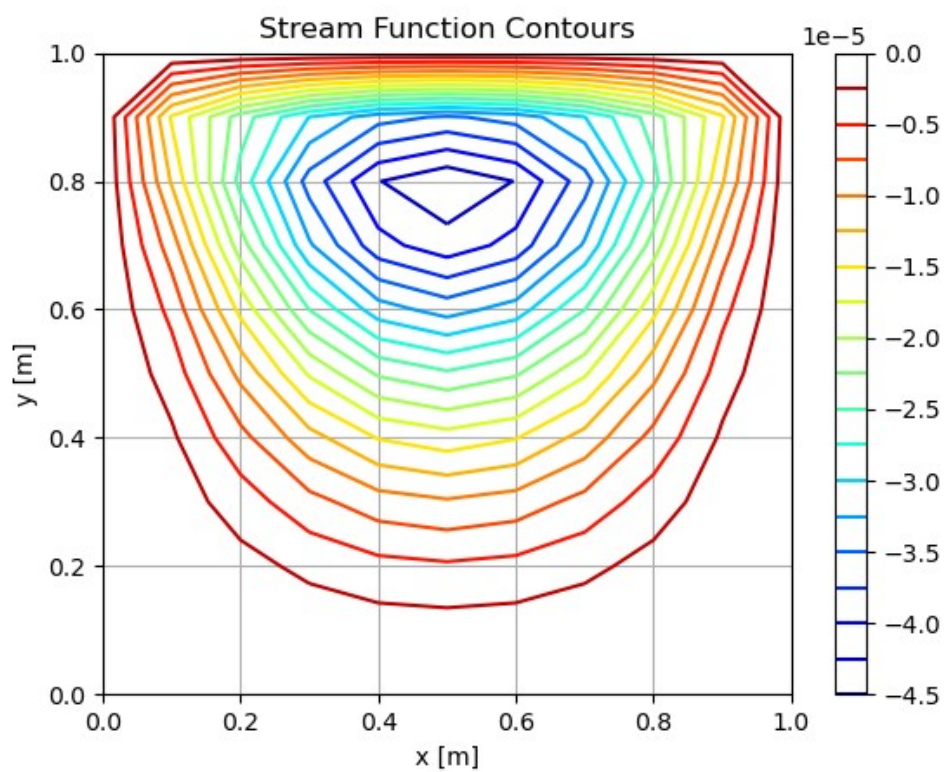
Πεπλεγμένη μέθοδος, $Re = 1$, Πεδίο 19x19



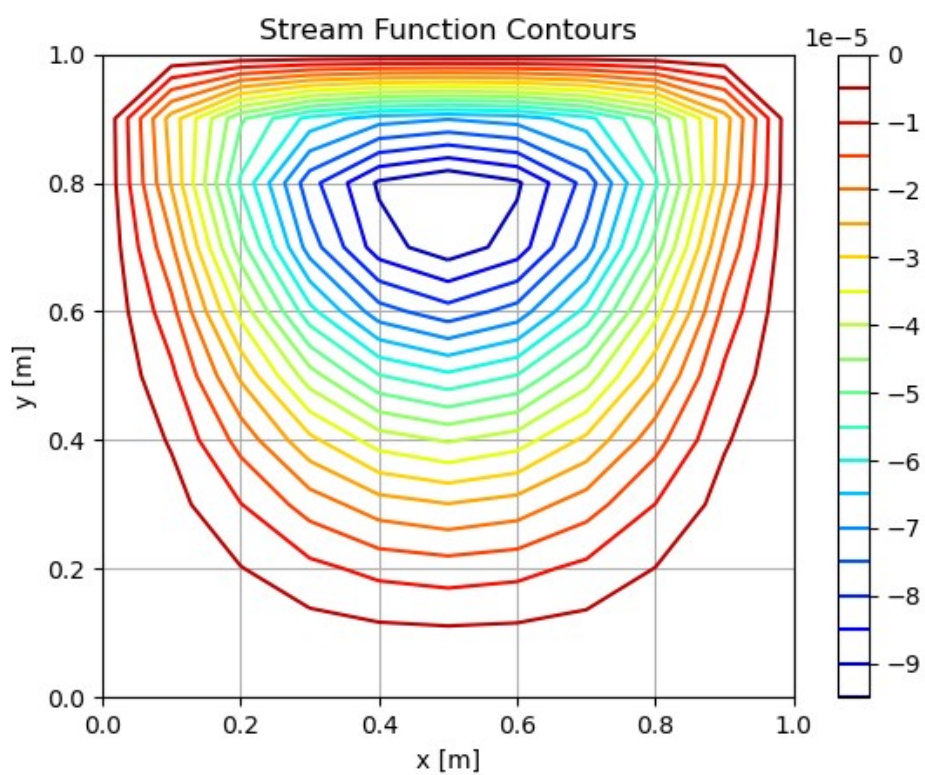
Ρητή μέθοδος, $Re = 1$, Πεδίο 19×19



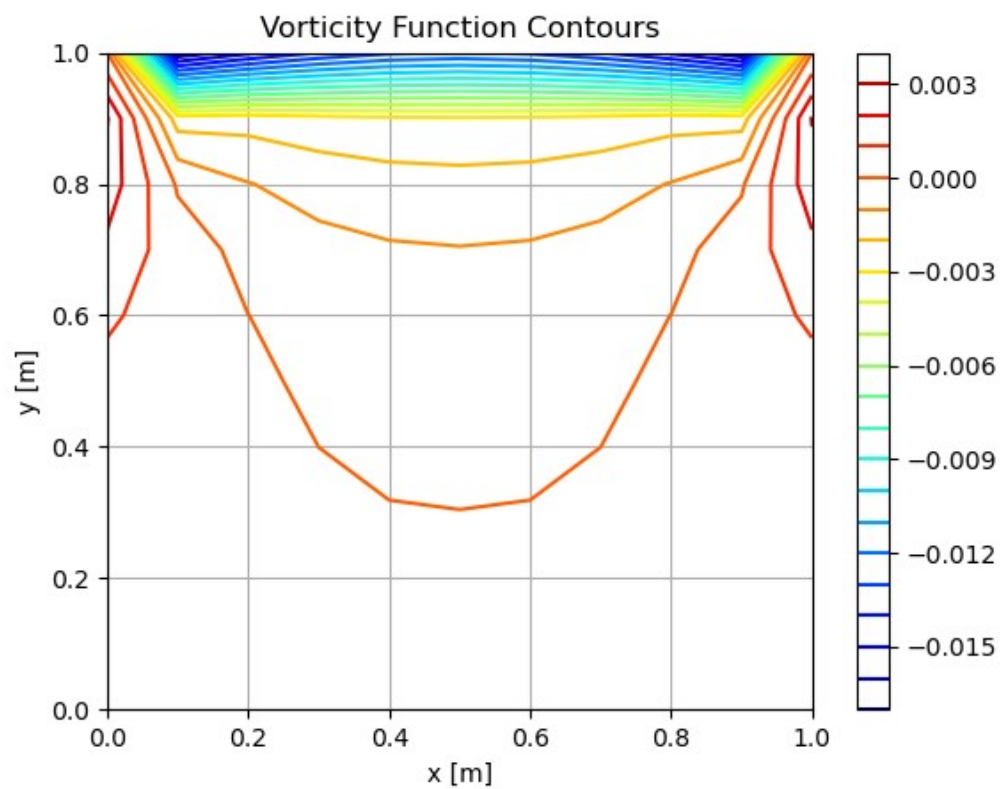
Πεπλεγμένη μέθοδος, $Re = 1$, Πεδίο 19×19



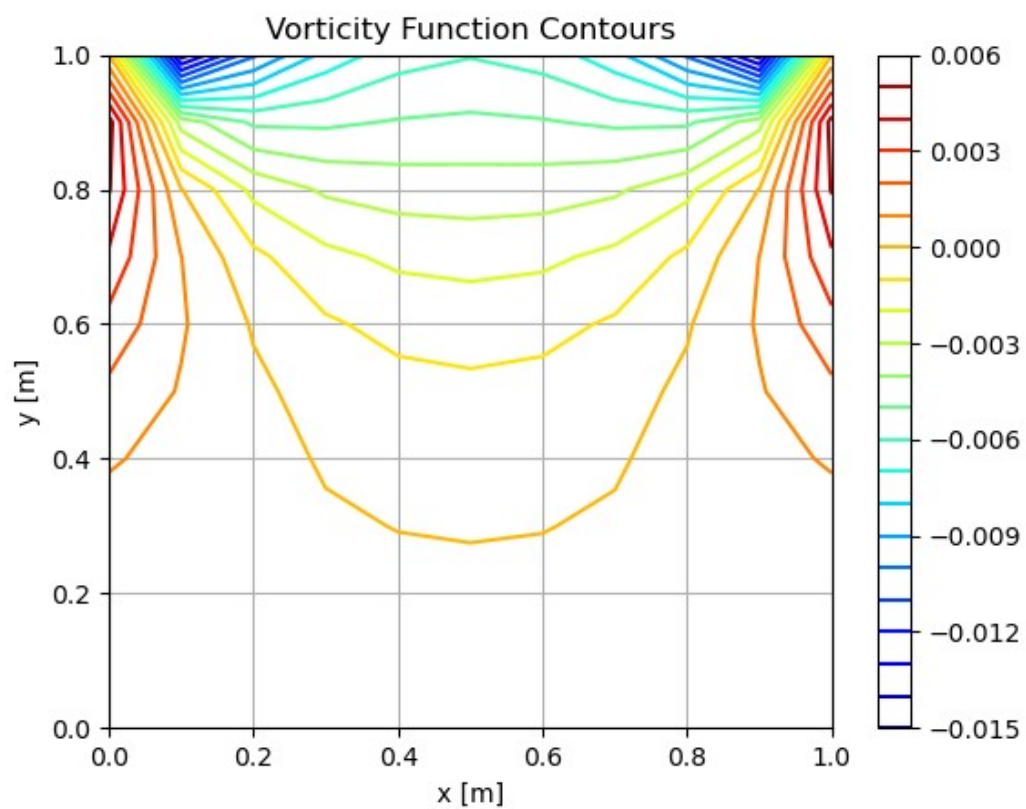
Ρητή μέθοδος, $Re = 100$, Πεδίο 11×11



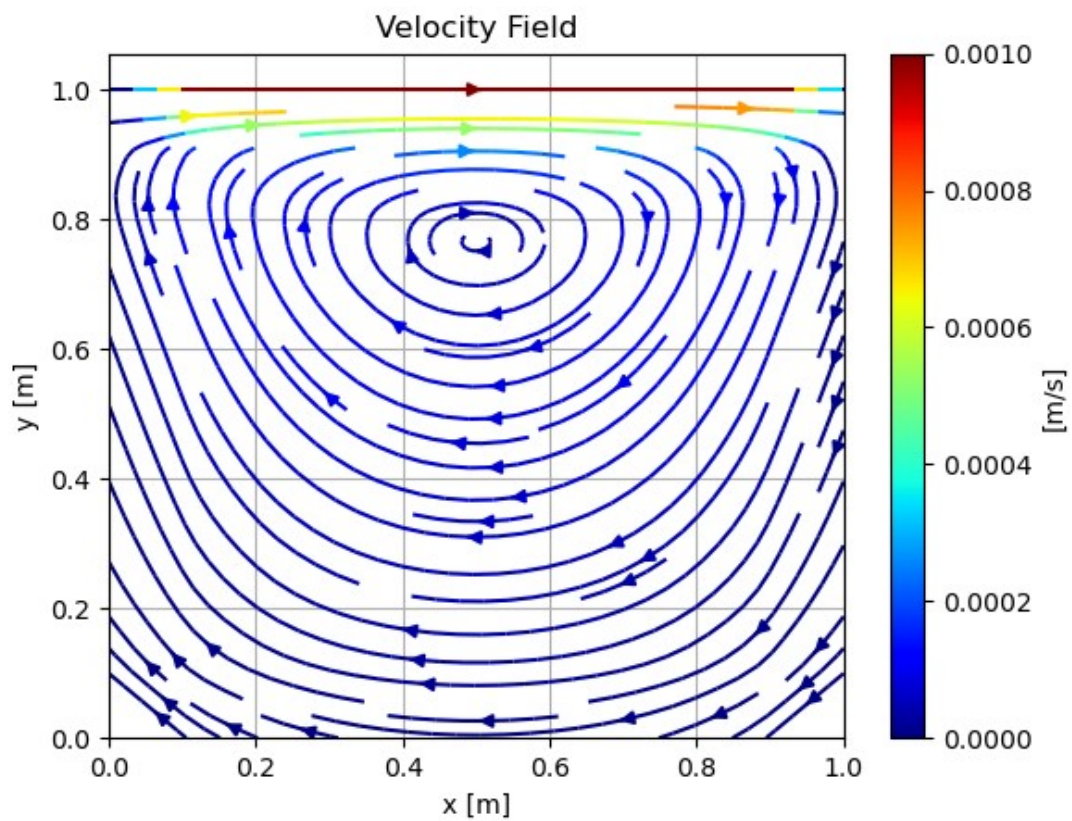
Πεπλεγμένη μέθοδος, $Re = 100$, Πεδίο 11×11



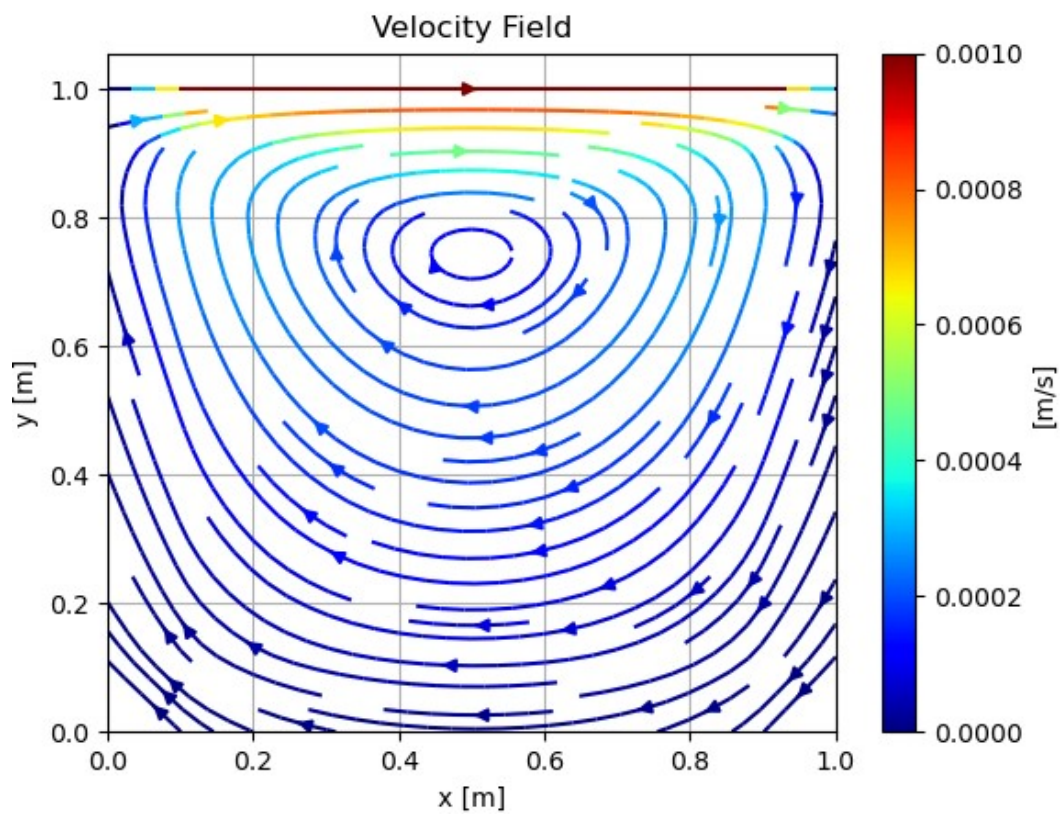
Ρητή μέθοδος, $Re = 100$, Πεδίο 11×11



Πεπλεγμένη μέθοδος, $Re = 100$, Πεδίο 11×11



Ρητή μέθοδος, $Re = 100$, Πεδίο 11×11



Πεπλεγμένη μέθοδος, $Re = 100$, Πεδίο 11×11

Σύγκριση αντιθέτων U:

Για τη σύγκριση των προβλημάτων αντιθέτων U, χρησιμοποιήθηκε ο πεπλεγμένος αλγόριθμος, με πυκνότητα πλέγματος 25x25 και $Re = 500$.

