Exercise Sheet 7

Exercise 7.9.

▼ a

Ricordiamo che $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})}$, quindi:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{22}$$

▼ b

Si $\mathbf{w}= (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ il generico vettore di $\mathbb{R}^3$ e imponiamo la condizione che sia ortogonale a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$, ovvero $(\mathbf{u},\mathbf{w}) = (\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema considerando la matrice associata

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & | & 0 \\ 3 & -3 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{array}{r} 1/2I \\ II + I \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 7 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 7x - y = 0 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x = t \\ y = 7t \\ z = 2t + 7t = 9t \end{cases}$$

Quindi il generico vettore w ortogonale a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è del tipo

$$(t, 7t, 9t)$$

Imponiamo ora la condizione che $\mathbf{w}$ abbia norma 1:

$$\sqrt{t^2 + (7t)^2 + (9t)^2} = 1 \implies \sqrt{131t^2} = 1 \implies t = \pm\frac{1}{\sqrt{131}}$$

Quindi abbiamo due possibili scelte per $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w}= \pm(\frac{1}{\sqrt{131}}, \frac{7}{\sqrt{131}}, \frac{9}{\sqrt{131}})$$

Exercise 7.10.

▼ a

La lunghezza di un vettore corrisponde alla sua norma:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

▼ b

Utilizzando la formula per calcolare la proiezione ortogonale di v_1 su v_2 otteniamo:

$$pr_{\mathbf{v}_2} = \frac{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)} \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} \cdot (1,0,0,1) = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$$

Exercise 7.11.

Sia $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base $\mathcal{B}$. Costruiamo prima una base $\mathcal{B}'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
&= (-1,0,1) \\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \mathrm{pr}_{\mathbf{w}_1}(\mathbf{v}_2) \\
&= \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_1)} \cdot \mathbf{w}_1 \\
&= (0,1,0) - 0 \cdot \mathbf{w}_1 \\
&= (0,1,0) \\
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \mathrm{pr}_{\mathbf{w}_1}(\mathbf{v}_3) - \mathrm{pr}_{\mathbf{w}_2}(\mathbf{v}_3) \\
&= \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3,\mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_1)} \cdot \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3,\mathbf{w}_2)}{(\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_2)} \cdot \mathbf{w}_2 \\
&= (1,0,1) - 0 \cdot \mathbf{w}_1 - 0 \cdot \mathbf{w}_2 \\
&= (1,0,1)
\end{aligned}$$

Exercise 7.12.

Gli elementi di U sono i vettori di $\mathbb{R}^3$ tali che $2x_1 + x_2 = 0$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = s \end{cases} \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$U = \langle (1,-2,0), (0,0,1) \rangle$$

Poichè i due generatori sono tra loro ortogonali, per ottenere una base ortonormale di U è sufficiente prenderli di norma 1:

$$\mathcal{B} = \{(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0), (0,0,1)\}$$

Exercise 7.13.

Sia $\mathbf{u} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{w})$ il generico elemento di $U^{\perp}$. Per la condizione di ortogonalità deve essere

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_2) = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y - z + 3w = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t + 3s \\ w = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{\ (-1,1,1,0) \cdot t + (0,0,3,1) \cdot s \quad | \quad \forall s, t \in \mathbb{R}\ \} \\ &= \langle (-1,1,1,0), (0,0,3,1) \rangle \end{aligned}$$

Exercise 7.14.

Il complemento ortogonale di U è lo spazio

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{\ \mathbf{v} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{w}) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad (\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}_2) = 0\ \} \\ &= \{\ \mathbf{v} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{w}) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad 2x + y + z = 0, \quad -x + y + 2z = 0\ \} \end{aligned}$$

Risolviamo il sistema di due equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \implies 2II + I \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3y + 5z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = -\frac{5}{3}t \\ z = t \\ w = s \end{cases}$$

Infine una base di $U^\perp$ è

$$\mathcal{B}(U^\perp) = \{(1, -5, 3, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

---

*Exercise 7.15.

▼ **a**

$$
\underbrace{
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}
\overset{S_{12}}{\Longrightarrow}
\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
\overset{D_1(-1)}{\Longrightarrow}
&\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}
\underset{E_{31}(-3)}{\overset{E_{21}(-2)}{\Longrightarrow}}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
\overset{D_2(-\frac{1}{3})}{\Longrightarrow}
&\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}
\underset{E_{42}(-1)}{\overset{E_{32}(6)}{\Longrightarrow}}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
}
$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{B}(U) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$$

▼ **b**

$$
\underbrace{
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\overset{S_{12}}{\Longrightarrow}
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\
\underset{D_2(\frac{1}{3})}{\overset{E_{21}(-2)}{\Longrightarrow}}
&\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}
\overset{E_{12}(2)}{\Longrightarrow}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
U^{\perp} &= (-2x + \frac{1}{3}y, -x + \frac{2}{3}y, x, y) \\
&= x(-2, -1, 1, 0) + y(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1)
\end{aligned}
$$

Choose $x = 1$ and $y = 3$:

$$\mathcal{B}(U^{\perp}) = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 3)\}$$

---

*Exercise 7.16.

Choose $\mathbf{v}_1 = (0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$:

$$\underbrace{\begin{aligned}\mathbf{w}_1' &= \mathbf{v}_1\\ &= (0,1)\\ \mathbf{w}_2' &= \mathbf{v}_2 - \mathrm{pr}_{\mathbf{w}_1'}(\mathbf{v}_2)\\ &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{w}_1'}{\|\mathbf{w}_1'\|^2}\mathbf{w}_1'\\ &= (1,0) - \frac{2\times 0\times 1 + 0\times 0 + 1\times 1 + 3\times 1\times 0}{2\times 0\times 0 + 0\times 1 + 0\times 1 + 3\times 1\times 1}(0,1)\\ &= (1,0) - \frac{1}{3}(0,1)\\ &= (1,-\frac{1}{3})\end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\overbrace{\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= \frac{\mathbf{w}_1'}{\|\mathbf{w}_1'\|}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\times 0\times 0 + 0\times 1 + 0\times 1 + 3\times 1}}(0,1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1)\\ \mathbf{w}_2 &= \frac{\mathbf{w}_2'}{\|\mathbf{w}_2'\|}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\times 1\times 1 + 1\times(-\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{3})\times 1 + 3\times(-\frac{1}{3})\times(-\frac{1}{3})}}(1,-\frac{1}{3})\\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}}(1,-\frac{1}{3}) = \frac{\sqrt{15}}{5}(1,-\frac{1}{3})\end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\{\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1), \frac{\sqrt{15}}{5}(1,-\frac{1}{3})\}$$