

Exercise Sheet 1

*Exercise 1.

▼ a

$$\begin{aligned} l : x + y = x + 2y - z = 0 \\ \Downarrow \\ \pi'_l : \lambda(x + y) + \mu(x + 2y - z) = 0 \\ \Downarrow \\ \pi'_l \wedge P : \lambda(1 + 0) + \mu(1 + 2 * 0 - 0) = 0 \\ \Downarrow \\ \lambda + \mu = 0 \end{aligned}$$

Choose $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} \underbrace{\lambda = 1 \implies \mu = -1} \\ \Downarrow \\ \pi' : (x + y) - (x + 2y - z) = 0 \\ \Downarrow \\ \pi' : y - z = 0 \end{aligned}$$

▼ b

$$\pi \wedge \pi' : \begin{cases} y + z = -2 \\ y - z = 0 \end{cases} \implies l' : \begin{cases} y + z + 2 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

▼ c

$$\underbrace{l \wedge l' : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ y + z + 2 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}}_{\Downarrow} \\ Q = (1, -1, -1)$$

Exercise 2.

▼ a

$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -2)$, quindi

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

▼ b

L'asse delle z ha equazione

$$a_z : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

quindi il piano π cercato ha come direzioni $(-1, 1, -2)$, $(0, 0, 1)$:

$$\pi : \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -2t + s \end{cases} \implies x + y = 0$$

*Exercise 3.

▼ a

$$\begin{array}{c}
\pi_1 \wedge \pi_2 : \begin{cases} x + y - z + 6 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \implies l : \begin{cases} x = t \\ y = -t - 2 \\ z = 4 \end{cases} \\
\hline
\Downarrow \\
\pi_3 \wedge l : t + (-t - 2) + 4 - 2 = 0 = 0 \\
\Downarrow \\
l \subset \pi_3
\end{array}$$

▼ **b**

$$\begin{array}{c}
l : \begin{cases} x + y - z + 6 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \\
\Downarrow \\
\pi_l : \lambda(x + y - z + 6) + \mu(x + y + 2) = 0 \\
\Downarrow \\
\pi_l \wedge (0, 0, 0) : \lambda(0 + 0 - 0 + 6) + \mu(0 + 0 + 2) = 0 \\
\Downarrow \\
3\lambda + \mu = 0
\end{array}$$

Choose $\lambda = 1$

$$\begin{array}{c}
\underbrace{\lambda = 1 \implies \mu = -3} \\
\Downarrow \\
\pi_4 : (x + y - z + 6) - 3(x + y + 2) = 0 \\
\Downarrow \\
\pi_4 : 2x + 2y + z = 0
\end{array}$$

▼ **c**

Let l_o be the line passing through the origin and orthogonal to the plane π_1

$$\begin{array}{c}
\left. \begin{array}{l} (0,0,0) \in l_o \\ l_o \perp \pi_1 \end{array} \right\} \implies l_o : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = -s \end{cases} \\
\hline
\Downarrow \\
\pi_1 \wedge l_o : s + s + s + 6 = 0 \\
\Downarrow \\
s = -2 \\
\Downarrow \\
(-2, -2, 2)
\end{array}$$

Exercise 4.

▼ a

$$\begin{array}{c}
l' : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \\
\Downarrow \\
\pi_p : \lambda(x + y - 2) + \mu(2x - z + 1) = 0 \\
\Downarrow \\
\overbrace{A, B \in l \implies \pi_p \wedge l : \begin{cases} \lambda(1 + 0 - 2) + \mu(2 * 1 - 1 + 1) = 0 \\ \lambda(2 - 1 - 2) + \mu(2 * 2 - 3 + 1) = 0 \end{cases}} \\
\Downarrow \\
-\lambda + 2\mu = 0
\end{array}$$

Choose $\mu = 1$

$$\begin{array}{c}
\overbrace{\mu = 1 \implies \lambda = 2} \\
\Downarrow \\
\pi : 2(x + y - 2) + (2x - z + 1) = 0 \\
\Downarrow \\
\pi : 4x + 2y - z - 3 = 0
\end{array}$$

Exercise 7.

▼ a

Mettiamo a sistema r_1 e r_2 per calcolarne l'eventuale intersezione:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \\ 3t + 2 - t - 2 = 0 \\ 1 + t + 2 - t - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \\ t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il sistema è compatibile e le rette si intersecano nel punto $A(0, 2, 1)$.

▼ b

Un'equazione cartesiana di r_1 è

$$\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Confrontando le equazioni cartesiane delle due rette si vede che il piano $y + z - 3 = 0$ le contiene entrambe.

In alternativa si poteva ricavare l'equazione parametrica di r_2 :

$$r_2 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Il piano cercato passa per $A = r_1 \cap r_2$ e ha direzioni parallele ai vettori giacitura delle due rette:

$$\begin{cases} x = 3t - s \\ y = 2 - t + s \\ z = 1 + t - s \end{cases} \implies y + z - 3 = 0$$

▼ c

Una retta ortogonale a r_1 e r_2 è ortogonale al piano trovato al punto precedente che le contiene entrambe, quindi ha direzione $(0, 1, 1)$:

$$r : \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$
