Exercise Sheet 1

Exercise 1.

▼ **a**

$$\begin{gathered} l : x + y = x + 2y - z = 0 \\ \Downarrow \\ \pi_l' : \lambda(x+y) + \mu(x + 2y - z) = 0 \\ \Downarrow \\ \pi_l' \wedge P : \lambda(1+0) + \mu(1 + 2 * 0 - 0) = 0 \\ \Downarrow \\ \lambda + \mu = 0 \end{gathered}$$

Choose $\lambda = 1$

$$\begin{gathered} \underbrace{\lambda = 1 \implies \mu = -1} \\ \Downarrow \\ \pi' : (x+y) - (x + 2y - z) = 0 \\ \Downarrow \\ \pi' : y - z = 0 \end{gathered}$$

▼ **b**

$$\pi \wedge \pi' : \begin{cases} y + z = -2 \\ y - z = 0 \end{cases} \implies l' : \begin{cases} y + z + 2 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

▼ **c**

$$\underbrace{l \wedge l' : \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y-z=0 \\ y+z+2=0 \\ y-z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}}_{\substack{\Downarrow \\ Q=(1,-1,-1)}}$$

Exercise 2.

▼ **a**

$\overrightarrow{AB} = (-1,1,-2)$, quindi

$$r : \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+t \\ z = 3-2t \end{cases} \implies \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-z=1 \end{cases}$$

▼ **b**

L'asse delle z ha equazione

$$a_z : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$$

quindi il piano π cercato ha come direzioni $(-1,1,-2)$, $(0,0,1)$:

$$\pi : \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=-2t+s \end{cases} \implies x+y=0$$

Exercise 3.

▼ **a**

$$\underbrace{\pi_1 \wedge \pi_2 : \begin{cases} x+y-z+6=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \quad \implies l : \begin{cases} x=t \\ y=-t-2 \\ z=4 \end{cases}}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_3 \wedge l : t+(-t-2)+4-2=0=0$$

$$\Downarrow$$

$$l \subset \pi_3$$

▼ **b**

$$l : \begin{cases} x+y-z+6=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_l : \lambda(x+y-z+6)+\mu(x+y+2)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_l \wedge (0,0,0) : \lambda(0+0-0+6)+\mu(0+0+2)=0$$

$$\Downarrow$$

$$3\lambda+\mu=0$$

Choose $\lambda = 1$

$$\underbrace{\lambda = 1 \implies \mu = -3}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_4 : (x+y-z+6)-3(x+y+2)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_4 : 2x+2y+z=0$$

▼ **c**

Let l_o be the line passing through the origin and orthogonal to the plane π_1

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l}(0,0,0) \in l_o \\ l_o \perp \pi_1\end{array}\right\} \implies l_o : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = -s \end{cases}}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_1 \wedge l_o : s + s + s + 6 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$s = -2$$

$$\Downarrow$$

$$(-2, -2, 2)$$

Exercise 4.

▼ a

$$l' : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_p : \lambda(x + y - 2) + \mu(2x - z + 1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\overbrace{\underbrace{A, B \in l \implies \pi_p \wedge l : \begin{cases} \lambda(1 + 0 - 2) + \mu(2 * 1 - 1 + 1) = 0 \\ \lambda(2 - 1 - 2) + \mu(2 * 2 - 3 + 1) = 0 \end{cases}}}$$

$$\Downarrow$$

$$-\lambda + 2\mu = 0$$

Choose $\mu = 1$

$$\underbrace{\mu = 1 \implies \lambda = 2}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi : 2(x + y - 2) + (2x - z + 1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\pi : 4x + 2y - z - 3 = 0$$

Exercise 7.

a

Mettiamo a sistema r_1 e r_2 per calcolarne l'eventuale intersezione:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \\ 3t + 2 - t - 2 = 0 \\ 1 + t + 2 - t - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \\ t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il sistema `e compatibile e le rette si intersecano nel punto $A(0, 2, 1)$.

b

Un'equazione cartesiana di r_1 `e

$$\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Confrontando le equazioni cartesiane delle due rette si vede che il piano $y + z - 3 = 0$ le contiene entrambe.

In alternativa si poteva ricavare l'equazione parametrica di r_2:

$$r_2 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Il piano cercato passa per $A = r1 \cap r2$ e ha direzioni parallele ai vettori giacitura delle due rette:

$$\begin{cases} x = 3t - s \\ y = 2 - t + s \\ z = 1 + t - s \end{cases} \implies y + z - 3 = 0$$

c

Una retta ortogonale a r_1 e r_2 `e ortogonale al piano trovato al punto precedente che le contiene entrambe, quindi ha direzione $(0, 1, 1)$:

$$r : \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$
