Exercise Sheet 1

Exercise 1.

▼ a

$$\begin{gathered} l : x + y = x + 2y - z = 0 \\ \Downarrow \\ \pi'_l : \lambda(x+y) + \mu(x + 2y - z) = 0 \\ \Downarrow \\ \pi'_l \wedge P : \lambda(1+0) + \mu(1 + 2 * 0 - 0) = 0 \\ \Downarrow \\ \lambda + \mu = 0 \end{gathered}$$

Choose $\lambda = 1$

$$\begin{gathered} \underbrace{\lambda = 1 \implies \mu = -1} \\ \Downarrow \\ \pi' : (x+y) - (x + 2y - z) = 0 \\ \Downarrow \\ \pi' : y - z = 0 \end{gathered}$$

▼ b

$$\pi \wedge \pi' : \begin{cases} y + z = -2 \\ y - z = 0 \end{cases} \implies l' : \begin{cases} y + z + 2 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

▼ c

$$\underbrace{l \wedge l' : \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y-z=0 \\ y+z+2=0 \\ y-z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}}_{\displaystyle \Downarrow \atop \displaystyle Q=(1,-1,-1)}$$

Exercise 2.

▼ a

$\overrightarrow{AB}=(-1,1,-2)$, quindi

$$r : \begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \\ z=3-2t \end{cases} \implies \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-z=1 \end{cases}$$

▼ b

L'asse delle z ha equazione

$$a_z : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$$

quindi il piano π cercato ha come direzioni $(-1,1,-2)$, $(0,0,1)$:

$$\pi : \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=-2t+s \end{cases} \implies x+y=0$$

Exercise 3.

▼ a

$$\underbrace{\pi_1 \wedge \pi_2 : \begin{cases} x+y-z+6=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \implies l : \begin{cases} x=t \\ y=-t-2 \\ z=4 \end{cases}}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_3 \wedge l : t + (-t-2) + 4 - 2 = 0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$l \subset \pi_3$$

▼ **b**

$$l : \begin{cases} x+y-z+6=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_l : \lambda(x+y-z+6) + \mu(x+y+2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_l \wedge (0,0,0) : \lambda(0+0-0+6) + \mu(0+0+2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$3\lambda + \mu = 0$$

Choose $\lambda = 1$

$$\underbrace{\lambda = 1 \implies \mu = -3}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_4 : (x+y-z+6) - 3(x+y+2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_4 : 2x + 2y + z = 0$$

▼ **c**

Let l_o be the line passing through the origin and orthogonal to the plane π_1

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} (0,0,0) \in l_o \\ l_o \perp \pi_1 \end{matrix}\right\} \implies l_o : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = -s \end{cases}}$$
$$\Downarrow$$
$$\pi_1 \wedge l_o : s + s + s + 6 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$s = -2$$
$$\Downarrow$$
$$(-2, -2, 2)$$

Exercise 7.

▼ a

Mettiamo a sistema r_1 e r_2 per calcolarne l'eventuale intersezione:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \\ 3t + 2 - t - 2 = 0 \\ 1 + t + 2 - t - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \\ t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il sistema \`e compatibile e le rette si intersecano nel punto $A(0, 2, 1)$.

▼ b

Un'equazione cartesiana di r_1 \`e

$$\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Confrontando le equazioni cartesiane delle due rette si vede che il piano $y + z - 3 = 0$ le contiene entrambe.

In alternativa si poteva ricavare l'equazione parametrica di r_2:

$$r_2 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Il piano cercato passa per $A = r1 \cap r2$ e ha direzioni parallele ai vettori giacitura delle due rette:

$$\begin{cases} x = 3t - s \\ y = 2 - t + s \\ z = 1 + t - s \end{cases} \implies y + z - 3 = 0$$

▼ c

Una retta ortogonale a r_1 e r_2 `e ortogonale al piano trovato al punto precedente che le contiene entrambe, quindi ha direzione $(0, 1, 1)$:

$$r : \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$
