Exercise Sheet 6

Exercise 6.11.

$$det(A) = (1-4) + 2k = 2k - 3$$

La matrice A è invertibile se il suo determinante è diverso da zero, ovvero se $k \neq \frac{3}{2}$.

Exercise 6.12.

Una matrice quadrata è nvertibile se ha determinante diverso da zero, ovvero se ha rango massimo. Calcoliamo quindi il determinante di A sviluppando rispetto alla seconda riga:

$$det(A) = (2k-2) \cdot [k(2-k) - k] = (2k-2)(-k^2 + k)$$

Quindi $det(A) = 0$ se

$$\begin{gathered} 2k - 2 = 0 \implies k = 1 \\ -k^2 + k = 0 \implies k = 0 \;\; o \;\; k = 1 \end{gathered}$$

Infine A è invertibile se $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

Calcoliamo l'inversa di A quando $k = -1$ con il metodo della riduzione

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c} -I \\ -1/4II \\ III+I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & | & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$III+4II \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c} I-2II \\ 1/2III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$I-III \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Exercise 6.13.

Ricordiamo che una matrice ha rango massimo, in questo caso 3, se ha determinante diverso da zero.

$$det(A) = 2 \cdot 6k - 1 \cdot 6k = 6k$$

Abbiamo visto che $det(A) = 6k$, quindi A ha determinante 1 se $k = \frac{1}{6}$.

---

*Exercise 6.14.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{matrix} E_{31}(-3) \\ E_{41}(-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{matrix} E_{32}(-4) \\ E_{42}(-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$E_{43}(-\frac{1}{9}) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{14}{9} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$det(A) = 1 \cdot 1 \cdot (-9) \cdot (-\frac{14}{9}) = 14$$

Exercise 6.15.

Imponiamo che la matrice associata al generico punto del piano $P(x, y, z)$, ad A, B e C abbia determinante nullo:

$$det(M) = det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Anche in questo caso conviene forse effettuare qualche passo di riduzione per semplificare i calcoli. Notiamo che non conviene utlizzare la prima riga:

$$
\begin{array}{c} \\ III-II \\ IV-II \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = M'
$$

Quindi

$$
\begin{gathered}
det(M') = 0 = det(M) \\
\Downarrow \\
-1 \cdot det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} x & y & z \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 0 \\
\Downarrow \\
-(1 \cdot 4 - 2 \cdot 12 + 3 \cdot 2) + (x \cdot 4 - y \cdot 12 + z \cdot 2) = 0 \\
\Downarrow \\
4x - 12y + 2z + 14 = 0
\end{gathered}
$$

Infine il piano ABC ha equazione

$$
2x - 6y + z + 7 = 0
$$

Exercise 6.16.

L'area del triangolo di vertici $A_1 A_2 A_3$ è la metà dell'area del parallelogramma di lati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, dove

$$
\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) \qquad \overrightarrow{AC} = (-2, -1, -1)
$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogrammo cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (2 \cdot (-1), 0, -(-2) \cdot 2) = (-2, 0, 4) \\
&= det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = -2i + 0j + 4k = (-2, 0, 4)
\end{aligned}
$$

Infine

$$Area(triangolo\ \ ABC) = \frac{1}{2}|(-2,0,4)| = \frac{1}{2}\sqrt{4+16} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}$$

Attenzione a non confondere il valore assoluto di un numero: $|a|$ con la lunghezza di un vettore: $|\overrightarrow{v}|$, entrambi indicati con le sbarre verticali.
