

Exercise Sheet 6

Exercise 6.11.

$$\det(A) = (1 - 4) + 2k = 2k - 3$$

La matrice A è invertibile se il suo determinante è diverso da zero, ovvero se $k \neq \frac{3}{2}$.

Exercise 6.12.

Una matrice quadrata è invertibile se ha determinante diverso da zero, ovvero se ha rango massimo. Calcoliamo quindi il determinante di A sviluppando rispetto alla seconda riga:

$$\det(A) = (2k - 2) \cdot [k(2 - k) - k] = (2k - 2)(-k^2 + k)$$

Quindi $\det(A) = 0$ se

$$\begin{aligned} 2k - 2 = 0 &\implies k = 1 \\ -k^2 + k = 0 &\implies k = 0 \text{ o } k = 1 \end{aligned}$$

Infine A è invertibile se $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

Calcoliamo l'inversa di A quando $k = -1$ con il metodo della riduzione

$$\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
\Downarrow \\
\begin{array}{l} -I \\ -1/4II \\ III + I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
\Downarrow \\
III + 4II \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \\
\Downarrow \\
\begin{array}{l} I - 2II \\ 1/2III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \\
\Downarrow \\
I - III \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \\
\Downarrow \\
A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]
\end{array}$$

Exercise 6.13.

Ricordiamo che una matrice ha rango massimo, in questo caso 3, se ha determinante diverso da zero.

$$\det(A) = 2 \cdot 6k - 1 \cdot 6k = 6k$$

Abbiamo visto che $\det(A) = 6k$, quindi A ha determinante 1 se $k = \frac{1}{6}$.

*Exercise 6.14.

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\
&\Downarrow \\
\begin{matrix} E_{31}(-3) \\ E_{41}(-1) \end{matrix} &\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
&\Downarrow \\
\begin{matrix} E_{32}(-4) \\ E_{42}(-1) \end{matrix} &\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&\Downarrow \\
E_{43}\left(-\frac{1}{9}\right) &\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{14}{9} \end{bmatrix} \\
&\Downarrow \\
\det(A) &= 1 \cdot 1 \cdot -9 \cdot -\frac{14}{9} = 14
\end{aligned}$$

Exercise 6.15.

Imponiamo che la matrice associata al generico punto del piano $P(x, y, z)$, ad A , B e C abbia determinante nullo:

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Anche in questo caso conviene forse effettuare qualche passo di riduzione per semplificare i calcoli. Notiamo che non conviene utilizzare la prima riga:

$$\begin{matrix} III - II \\ IV - II \end{matrix} \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = M'$$

Quindi

$$\begin{aligned} \det(M') &= 0 = \det(M) \\ &\Downarrow \\ -1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} &= 0 \\ &\Downarrow \\ -(1 \cdot 4 - 2 \cdot 12 + 3 \cdot 2) + (x \cdot 4 - y \cdot 12 + z \cdot 2) &= 0 \\ &\Downarrow \\ 4x - 12y + 2z + 14 &= 0 \end{aligned}$$

Infine il piano ABC ha equazione

$$2x - 6y + z + 7 = 0$$

Exercise 6.16.

L'area del triangolo di vertici $A_1 A_2 A_3$ è la metà dell'area del parallelogramma di lati \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} , dove

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) \quad \overrightarrow{AC} = (-2, -1, -1)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogramma cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (2 \cdot (-1), 0, -(-2) \cdot 2) = (-2, 0, 4) \\ &= \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = -2i + 0j + 4k = (-2, 0, 4) \end{aligned}$$

Infine

$$Area(triangolo\ ABC) = \frac{1}{2}|(-2, 0, 4)| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}$$

Attenzione a non confondere il valore assoluto di un numero: $|a|$ con la lunghezza di un vettore: $|\vec{v}|$, entrambi indicati con le sbarre verticali.
